



SUMARIO

Estudio de las corrientes vagabundas y su acción sobre las masas metálicas en contacto con tierra. — Estudio de la flexión en los ejes de armadura. — Crónica de la Agrupación. — Premio Madariaga. — Bibliografía.

Estudio de las corrientes vagabundas y su acción sobre las masas metálicas en contacto con tierra

(Premio del Concurso Anual de 1928)

(Continuación) Véase el número del mes de Abril

La tensión de polarización e , necesaria como hemos dicho para vencer las f. e. m. originadas por las reacciones químicas producidas en el seno del electrolito, puede calcularse en función de la energía térmica puesta en juego para la producción de dichas reacciones. Si todo el calor desprendido o absorbido, se transformase en energía eléctrica, bastaría expresar que el número de calorías es igual al producto de la tensión por la cantidad de electricidad afectando los dos términos de los coeficientes correspondientes de reducción de unas unidades a otras. Teniendo en cuenta estas consideraciones *Lord Kelvin* estableció la fórmula:

$$e = \frac{Q}{v} \frac{1}{23067} = 0,0000432 \frac{Q}{v} \text{ voltios}$$

en la que Q es el calor de formación de una molécula gramo del cuerpo electrolizado, v la valencia de los iones y $\frac{1}{23067}$ el factor de reducción igual a

$$\frac{0,425 \times 9,81}{96540}$$

Esta fórmula de *Thomson* da en general valores inferiores a los reales, ya que en el proceso electrolítica se originan f. e. m. de contacto que producen calentamientos o enfriamientos de la cuba por efecto *Peltier*, uniéndose además a éstas las necesarias para la realización de algunos fenómenos secundarios, como precipitaciones, oclusiones de gases, transporte vertical de elementos, etc.

El más importante de todos estos efectos es el *Peltier*, pudiendo aplicarse la fórmula de *Thomson*

siempre que e sea independiente de la temperatura. Cuando se produce una variación térmica hay que suministrar, como hemos indicado, al sistema (o cede éste) una energía suplementaria, que se denomina *calor secundario*, y para tener en cuenta éste se une a la fórmula de *Thomson* un factor correctivo debido a *Helmholtz* que da al valor de e la expresión:

$$e = \frac{1}{23067} \frac{Q}{v} + T \frac{Q}{v} \frac{de}{dT}$$

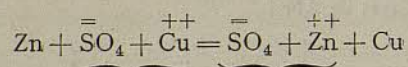
En el caso de que conociendo las sales disueltas en el suelo quisiéramos calcular la tensión eléctrica necesaria para compensar la f. e. m. de polarización, se obtiene una aproximación suficiente para la práctica con la aplicación de la fórmula de *Thomson*, que desde luego es en muchos casos difícil ya que precisa conocer todas las reacciones tanto primarias como secundarias que puedan producirse y teniendo en cuenta el número de calorías que absorben, o ceden, deducir el calor total Q necesario. Para este cálculo es suficiente tener en cuenta cuáles serán los productos finales de la electrolisis, ya que como sabemos el número de calorías que exija su generación es independiente de las reacciones intermedias que se verifiquen.

La fórmula de *Thomson* nos hace ver que la tensión e es independiente de la superficie y separación de los electrodos y de la intensidad de la corriente, no variando más que con los productos a que da lugar la electrolisis. Esto nos hace ver que en algunas ocasiones la tensión de polarización puede ser nula, como ocurre en el caso de electrodos metálicos sumergidos en un electrolito constituido por una sal del mismo metal, ya que la

electrolisis en una cuba M—RM—M producirá la disociación del electrolito Rm en iones \bar{R} y M^+ , absorbiendo un cierto número q de calorías, pero el radical \bar{R} al desprenderse en el ánodo M reaccionará con ésta a expensas de una energía térmica $\pm q$, regenerando el electrolito RM, siendo el calor total desprendido nulo, y el producto final de la electrolisis el mismo. La energía de la corriente se emplea en este caso exclusivamente en el transporte de los cationes M^+ del ánodo soluble al cátodo.

En el caso de la electrolisis producida por las corrientes vagabundas puede producirse este efecto cuando el suelo contenga sales de hierro y la corriente circule entre carriles y tuberías de hierro. Teóricamente una f. e. m. infinitesimal podría pues producir efectos de corrosión anódica.

El valor de Q que entra en la fórmula de Thomson puede calcularse partiendo de los calores de formación de los iones teniendo en cuenta, como hemos dicho, cuál es el resultado final de la electrolisis. En el caso, por ejemplo, de la disolución de una molécula de Zn en sulfato de cobre, la reacción entre iones viene representada por:



en la que el resultado obtenido no es otro que la disolución del zinc al estado de ión Zn^{++} y la precipitación del cobre Cu^{++} al estado molecular Cu, dándonos el calor total de la reacción la suma de los necesarios para realizar estas transformaciones. Para su conocimiento damos a continuación una tabla de los calores de ionización de algunos aniones y cationes tomada del «Memento du Chimiste» (1):

Cationes	Calorías	Aniones	Calorías
H ⁺	±0	Cl ⁻	+39200
K ⁺	+61800	S ⁻⁻	-2×6300
Na ⁺	+57400	SO ₄ ⁻⁻	+2×107000
Li ⁺	+63000	NO ₃ ⁻	+49000
NH ₄ ⁺	+32750	N ₃ ⁻	-66000
Mg ⁺⁺	+2×54500	PO ₄ ⁻⁻⁻	+3×99500
Ca ⁺⁺	+2×54700	CO ₃ ⁻⁻	+2×81000
Fe ⁺⁺	+2×11000	OH ⁻	+54500
Fe ⁺⁺⁺	-3×3000		
Zn ⁺⁺	+2×17600		
Cu ⁺	-1600 (?)		
Cu ⁺⁺	-2×16000		
Pb ⁺⁺	+2×200		
Sn ⁺⁺	+2×1700		

La reacción anterior absorberá pues:

$$2 \times 17600 + 16000 = 51200 \text{ cal.}$$

(1) Loc. cit.

Esta reacción que se produce en la pila Daniell dará origen a una f. e. m. que según la fórmula de Thomson será:

$$e = 0,0000432 \frac{51200}{2} = 1,2 \text{ v.}$$

realmente esta tensión no alcanza este valor.

La tensión de polarización puede también calcularse por las tensiones en los electrodos, es decir, las tensiones necesarias para separar el anión y

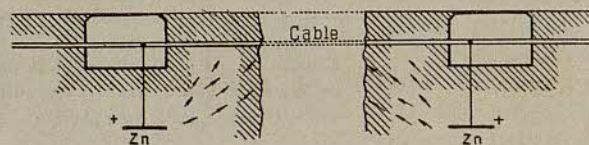


Fig. 4^a

electrodos. Si llamamos e_a y e_c a estas tensiones anódica y catódica, la tensión de polarización viene dada por:

$$e = e_a + e_c$$

Cada anión y cation tienen una tensión perfectamente determinada que aumenta con la disolución de las sales; en la tabla que sigue consignamos los valores de más interés, para el caso de concentraciones normales:

Tensión catódica e_c		Tensión anódica e_a	
K	+3,20	F1	+1,96
Na	+2,82	SO ₄	+1,9
Ba	+2,75	CH	+1,67
Sr	-2,54	Cl	+1,417
Ca	+2,21	O	+1,12
Mg	+1,508		
Mn	+1,097		
Zn	+0,801		
Fe	+0,66		
Ni	+0,60		
Co	+0,45		
Cd	+0,439		
Pb	+0,162		
H	±0		
Cu	-0,329		

Con electrodos insolubles tendríamos así que la electrolisis del sulfato de cobre exigiría:

$$e = 1,9 - 0,329 = 1,571 \text{ v.}$$

y la del cloruro de sodio:

$$e = 1,417 + 3,20 = 4,617 \text{ v.}$$

Para la aplicación de esta regla hay, sin embargo, que tener muy en cuenta el principio de Berthelot, cuando se trata de un electrolito formado por varias sales disueltas. Este principio establece que la descomposición de los electrolitos

se opera cuando se suministra la menor suma de energías necesaria, prevista según las cantidades de calor; Le Blanc, que ha sido quien estudió primeramente la tensión de polarización en los electrodos, enunció este principio, más prácticamente aplicable a nuestro caso, indicando que la electrolisis se producirá cuando la tensión de polarización sea suficiente para liberar a la vez uno de los aniones y uno de los cationes de las sales que componen el electrolito.

Tenemos así el caso de que un electrolito formado por los dos cuerpos anteriormente citados ClNa y SO_4Cu , manifestará descomposición electrolítica cuando la tensión sea suficiente para liberar uno de los aniones SO_4 o Cl y uno de los cationes Na o Cu ; de los primeros el que menos tensión exige es el Cl , cuya tensión anódica es de 1,417 v., y de los cationes el Cu , cuya tensión es de $-0,329$ v. La electrolisis se producirá pues para una tensión de polarización:

$$e = 1,417 - 0,329 = 1,088 \text{ v.}$$

menor que en el caso de presentarse las sales aisladas, e idéntica a la necesaria para la electrolisis del cloruro de cobre.

Debido a esto, un mismo electrolito puede dar origen a distintos compuestos, según la energía que se le suministra; así la electrolisis del Sulfato manganeso con 1,60 v. entre electrodos, da origen a bióxido de manganeso en el ánodo y H en el cátodo, y con 3 v. ácido sulfúrico, O , manganeso y bióxido de manganeso.

En el caso de que la electrolisis produzca desprendimiento de gases en los electrodos, si éstos son de un material que ocluya fácilmente los gases, no existirá gran dificultad en liberarlos, pero si no tienen tendencia a absorberlos, la mayor dificultad de desprendimiento de los gases se traduce en un aumento de la tensión necesaria para producir la electrolisis. Este es el caso de la electrolisis del agua, en la que la tensión de polarización será variable según los electrodos que se empleen, tanto en el cátodo como en el ánodo, ya que en ambos se realiza desprendimiento de gas, O en el primero y H en el segundo.

Caspari⁽¹⁾ ha calculado las tensiones de polarización del agua para diferentes cátodos empleando como electrolito SO_4H_2 en solución normal, y utilizando la solución de KOH normal. Coehn y Osaka⁽²⁾ han calculado las correspondientes a distintos ánodos. Ambas las damos en la tabla adjunta:

Cátodos		Ánodos	
Pt platinado	0,00	Ni esponjoso	1,28
Oro	0,02	Ni pulido	1,35
Fe (en NaOH)	0,08	Co	1,36
Pt pulido	0,09	Pt. platinado	1,47
Plata	0,15	Fe	1,47
Ni	0,21	Cu	1,48

(1) Zeit. f. Phys. Chem.

(2) Zeit. f. Phys. Chem.

Cátodos		Ánodos	
Cu	0,23	Pb	1,53
Cd	0,48	Ag	1,63
Sn	0,53	Cd	1,65
Pb	0,64	Pd	1,65
Zn	0,70	Pb pulido	1,67
Hg	0,78	Au	1,75
Cu (amalgamado)	0,51		
Pb	0,54		

Estas tablas nos permiten determinar cuál será la tensión mínima necesaria para la electrolisis del agua, que, como vemos, es de 1,3 v. empleando cátodo de platino platinado y ánodo de níquel esponjoso.

Si hemos calculado la caída de tensión por efecto *Joule* $i.r$ y la f. e. m. de polarización, podremos conocer cuál será la d. d. p. mínima entre carriles y masas metálicas del subsuelo que pueda representar un indicio de peligro de corrosión. Pero, como hemos visto, si la determinación de $i.r$ no es fácil, la de e , que tiene todavía mayor importancia, es de una complicación extraordinaria; esto ha hecho que se haya discutido mucho cuál será la tensión mínima que pueda producir efectos corrosivos, estimando algunos autores que puede calcularse en unos dos voltios, mientras que otros no fijan un verdadero valor mínimo de la tensión peligrosa, considerando que a cualquier tensión puede producirse electrolisis.

Si el caso de la corrosión de las construcciones metálicas enterradas se considera como debido a un proceso oxidante, en el que corresponda el principal factor a la liberación del O producido por la electrolisis del agua del subsuelo impurificada por sales diversas, para el caso de electrodos formados por el carril (hierro) y una tubería de hierro, las tablas antes indicadas nos darán como voltaje necesario para el desprendimiento de los gases:

$$e = e_c + e_a = 0,08 + 1,47 = 1,55 \text{ voltios}$$

y si el cátodo lo forma la cubierta de plomo de un cable telefónico o de energía:

$$e = e_c + e_a = 0,64 + 1,47 = 2,11 \text{ voltios}$$

encontrándonos que al salir la corriente de los carriles para penetrar en los tubos de plomo, es decir, cuando el cátodo es de hierro y la cubierta de plomo hace de ánodo, que hay que vencer una f. e. m. de:

$$e = e_c + e_a = 0,08 + 1,53 = 1,61 \text{ voltios.}$$

En el caso de tuberías de hierro tendremos por consiguiente que para el circuito total, debiendo vencer por dos veces la f. e. m. de polarización. (una vez al dispersarse las corrientes de retorno y otra al reintegrarse a los carriles), este sólo proceso exigirá:

$$2 \times 1,55 = 3,10 \text{ v.}$$

y cuando la canalización subterránea se haga con tubo de plomo:

$$2,11 + 1,61 = 3,72 \text{ v.}$$

Basándose en estas consideraciones, en diversos reglamentos extranjeros se fija que la d. d. p. entre carriles y masas metálicas próximas debe ser menor de 2 v., considerando que ésta es la d. d. p. mínima que puede producir la electrolisis del agua. Los reglamentos ingleses fijan esta d. d. p. máxima en 1,5 v. (3 pilas *Leclanché*). Análogas consideraciones han llevado a la reglamentación de la caída máxima de tensión en los carriles que se asignó en Francia en los primeros reglamentos de 5 voltios entre dos puntos cualquiera, quedando así para vencer la caída de tensión en el carril 2 voltios, si se asignan 3 voltios para vencer las f. c. e. m. de polarización. Esta tensión se admite hasta 7 v. en los reglamentos ingleses⁽¹⁾, y basándose en ella *J. G. y R. G. Cunliffe*⁽²⁾ estimaban que no había prácticamente peligro de corrosión cuando una construcción subterránea se encontraba a más de 3 pies (0,915) de los carriles, si la densidad de corriente a esta distancia era muy baja.

Posteriormente, sin embargo, la práctica ha ido confirmando que, aun aplicándose rigurosamente estos preceptos, se producían fenómenos sensibles de corrosión electrolítica, tendiéndose principalmente a regular la caída de tensión en el circuito de retorno por la regla del voltio-kilómetro que ya indicamos se adopta en nuestro reglamento de instalaciones eléctricas.

No ha de extrañar, después de las consideraciones que de intento hemos hecho sobre la tensión de polarización, que tengan lugar corrosiones en las construcciones subterráneas, aun para d. d. p. entre éstas y los carriles inferiores a 1,5 v. El hecho de que el subsuelo contenga principalmente agua no obliga, para el paso de las corrientes vagabundas, que son las que producen la corrosión, a que tenga lugar el proceso de descomposición del agua la ley de *Berthelot* o la de *Le Blanc* nos indican bien claramente que si la liberación de un anión y un catión cualesquiera, de las sales que siempre contienen estas aguas, exige suministrar una energía menor que la necesaria para la descomposición del agua, se producirá la electrolisis sin que sea necesario alcanzar más que una tensión que puede ser ínfima, caso muy frecuente en la práctica metalúrgica, donde el refinado de los metales se realiza para d. d. p. entre electrodos de décimas de voltio. Podemos citar como ejemplos el del plomo por el procedimiento de *Bett* con electrolito de fluosilicato de plomo, en el que es suficiente una tensión de 0,3 a 0,38 v., y el del hierro por el procedimiento *Burgess* con solución de sulfato ferroso y amónico como electrolito en el que es suficiente menos de 1 v. Citamos estos casos por referirse a los materiales más corrientes

en las construcciones subterráneas, ya que hay otros, como los del refinado del cobre y estaño, en que son suficientes d. d. p. de 0,2 v. y aun 0,10; y ya vimos, por otra parte, que según la Ley de *Thomson* teóricamente puede producirse la electrolisis para tensiones nulas.

No es pues posible fijar una tensión mínima por debajo de la cual no se realice el proceso de destrucción electrolítica de las construcciones subterráneas; sólo un estudio muy amplio del problema nos podrá conducir a un resultado que tuviese visos de exactitud, y en este sentido el papel principal lo tiene la caída de tensión en los carriles a cuyas expensas ha de realizarse el paso de la corriente de ellos a las masas metálicas próximas.

De aquí el interés que presenta el estudiar con detenimiento las condiciones conductoras del subsuelo, y más que nada la caída de tensión en el circuito de retorno de la corriente de los servicios de tracción eléctrica para procurar mejorar ante todo la conductibilidad de este circuito y disminuir así el riesgo de la fuga de corrientes por el suelo. A esta conclusión habíamos llegado antes de tener en cuenta los efectos destructores de las corrientes vagabundas, y a ella habremos también de llegar cualquiera que sea el aspecto en que la cuestión se examine.

Distribución de potenciales y corrientes en el circuito total de retorno

Conocidos ya los factores que intervienen en el proceso, podemos estudiar en conjunto el circuito total de retorno, que, según hemos ido viendo, puede asimilarse a «grosso modo» al representado en la figura 5^a.

Del carril A. B se deriva por el suelo en A. una parte de la corriente I_0 que conduce, corriente

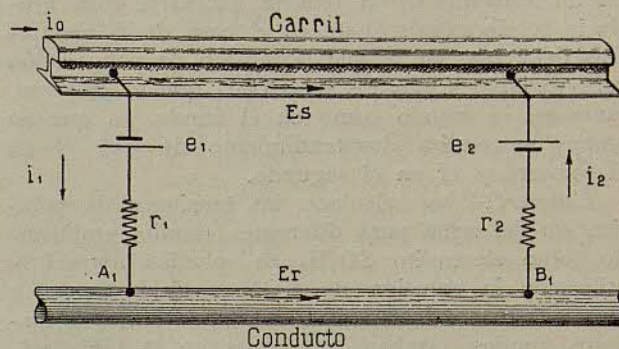


Fig. 5^a

derivada que penetra en un conducto próximo $A_1 B_1$ por un punto A. pudiendo asimilarse el circuito a través de tierra entre A. y A_1 , al formado por un conductor de resistencia r_1 en el que hay intercalada una pila de f. e. m. e , igual a la de polarización. Una parte i_1 de la corriente I_0 se deriva por este circuito (continuando la restante $I_0 - i_1$ por el carril) para reintegrarse a los ca-

(1) Ministry of transport Regulations, 1920, art. 7.
(2) Loc cit.

riles siguiendo el circuito A₁ B₁ B formado por la conducción o construcción metálica subterránea A₁ B₁ y el circuito de tierra B₁ B análogo al anterior A A₁.

Si E₀ es la caída de tensión en los carriles y E_r en la conducción, ambas debidas exclusivamente a efecto *Joule*, se deberá tener:

$$E_s = i_1 r_1 + e_1 + E_r + i_2 r_2 + e_2$$

y si las condiciones del suelo son idénticas $r = r_1 = r_2$:

$$E_s = E_r + r(i_1 + i_2) + (e_1 + e_2)$$

pudiendo ocurrir según la forma del proceso electrolítico que $e_1 = e_2$ o, que siendo e_2 negativo, dé la coincidencia que $e = i_2 r_2$, en cuyo caso:

$$E_s = E_r + r(i_1 + i_2) \quad \text{o} \quad E_s = E_r + r i_1 + e_1$$

Estas fórmulas nos señalan los valores que habían de considerarse en el estudio de las condiciones del circuito total de retorno, cuya influencia ya hemos estudiado, y de ellos dependerá la determinación de los factores que influyen más decisivamente en el proceso de corrosión, es decir, la corriente en las masas metálicas subterráneas y la más importante de paso a través del suelo entre éstas y los carriles.

No debe olvidarse que la determinación de todos estos valores no puede basarse en la consideración de un circuito derivado tan sencillo como el que hemos consignado. Las corrientes vagabundas, aun cuando tienen tendencia a seguir el camino más corto entre las masas metálicas en contacto con el suelo y los carriles, no siguen rigurosamente esta, como ya hemos señalado, puesto que, en el suelo, se engendra un campo eléctrico en el que las líneas de fuerza tienden a concentrarse en las masas más conductoras que actuarán como un elemento permeable colocado en un campo magnético, y la intensidad de la corriente habrá de ser función del gradiente de potencial principalmente. No faltan trabajos teóricos encaminados a obtener fórmulas que fijen los elementos característicos del campo, entre los que merecen citarse los de *Michalke* (1), *Mrs. Cunliffe* (1), *Parry* (2), *Sir P. Dawson* (3) y otros; que no siempre conducen a resultados satisfactorios, debido en algunos casos a las hipótesis hechas sobre las resistencias del suelo y de contacto, resistencias de las juntas, etcétera.

La determinación teórica de las características del retorno puede basarse en la consideración de este circuito como imperfectamente aislado y con sus constantes uniformemente distribuidas. En este aspecto si llamamos r a la resistencia de los carriles por unidad de longitud, I a la corriente y v a la tensión, la caída de potencial en un elemento de conductor dx , $-\frac{dv}{dx} dx$, será igual a la corriente

I por la resistencia rdx del elemento considerado, es decir, $-\frac{dv}{dx} = rI$; debido a la imperfección del aislante que rodea al carril, el suelo en este caso, la corriente experimenta una pérdida $-\frac{dx}{dr} dx$ en el elemento dx , que será igual a la tensión v por la «conductibilidad de pérdidas» c que, expresándola por unidad de longitud, valdrá para dx , $vc dx$, luego $-\frac{dI}{dx} = cv$. Derivando estas expresiones y teniendo en cuenta sus valores para substituirlos en los que resultan, se obtiene:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = rc \cdot v \quad \frac{d^2 I}{dx^2} = r \cdot c \cdot I$$

ecuaciones que por la fórmula de *Euler* nos dan la solución, siendo $m = \sqrt{r \cdot c}$:

$$I = A_1 e^{-ms} + A_2 e^{ms} = C_1 Ch \cdot ms + C_2 Sh \cdot ms$$

$$E = B_1 e^{-ms} + B_2 e^{ms} = D_1 Ch \cdot ms + D_2 Sh \cdot ms$$

siendo A₁, B₁, A₂, B₂ constantes de integración y $2C_1 = A_1 + A_2$; $2C_2 = A_1 - A_2$; $2D_1 = B_1 + B_2$; $2D_2 = B_1 - B_2$. La expresión de las fórmulas mediante funciones hiperbólicas permite calcular con más facilidad las constantes partiendo de las condiciones en el extremo receptor I₀, E₀, se obtiene:

$$C_1 = I_0, \quad C_2 = E_0 \frac{c}{m} = E_0 \sqrt{\frac{c}{r}}, \quad D_1 = I_0, \quad D_2 = I_0 \sqrt{\frac{r}{c}}$$

de donde obtenemos:

$$I = I_0 Ch \cdot mx + E_0 \frac{c}{r} Sh mx = \frac{1}{2} (I_0 + E_0 \sqrt{\frac{c}{r}}) e^{-mx} + \frac{1}{2} (I_0 - E_0 \sqrt{\frac{c}{r}}) e^{mx}$$

$$E = E_0 Ch \cdot mx + I_0 \frac{r}{c} Sh mx = \frac{1}{2} (E_0 + I_0 \sqrt{\frac{r}{c}}) e^{-mx} + \frac{1}{2} (E_0 - I_0 \sqrt{\frac{r}{c}}) e^{mx}$$

que nos permiten calcular la intensidad y tensión en el carril para cualquier punto de ellos.

Los valores máximos de estas funciones son:

$$v_1 = \sqrt{\frac{r}{c}} \cdot I_0$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{r}{c}} \cdot E_0$$

que nos da a conocer la tensión más elevada en el carril.

Las curvas representativas de I y E son del género catenaria, de la que es una aproximación la parábola, y de su diseño podría deducirse la corriente perdida.

(1) *Lot cit.*

(2) *Electrician 1900.*

(3) *Electric Traction on Railways. London.*

La aplicación práctica de estas fórmulas presenta las mismas dificultades que señalamos al hablar de la determinación del coeficiente de dispersión K, ya que el valor de c no es otra cosa que K expresado en unidad de longitud. De aquí la necesidad de obtener fórmulas más prácticas.

Michalke, de cuyo estudio⁽¹⁾ tomamos algunas de las fórmulas que sigue, da como tensión en los carriles el valor:

$$E_s = \frac{I_0 R_s L}{2} \frac{6r + R_r L^2}{6r + L^2 (R_s + R_r)}$$

siendo R_s y R_r las resistencias kilométrica y del carril y conductos y los restantes valores los consignados anteriormente.

Representando $\frac{I_0 R_s L}{2}$ la caída de tensión en los carriles, el otro factor será el que nos determina la existencia de una masa metálica subterránea en paralelo con ellos, cuya tensión viene dada por:

$$E_r = \frac{I_0 R_s L}{2} \frac{6r + L^2 (R_s + R_r)}{R_r L^2}$$

de donde puede deducirse la relación:

$$\frac{E_r}{E_s} = \frac{1}{1 + \frac{R_r L^2}{6r}}$$

que vale 0,23 cuando $r = 0,1 \times \text{Km.}$, según Michalke, y alcanza de 0,4 a 0,5 en las redes urbanas.

El gradiente de potencial en tierra se podría también determinar por la fórmula conocida:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{\log_e} \cdot \frac{r^2}{r_1} x \frac{1}{r_1}$$

aplicable a los dieléctricos.

Es de más interés para poder darnos idea de los posibles peligros de corrosión, el conocer la corriente que circulará por las masas metálicas del subsuelo, y principalmente la que pasa de éstas a los carriles, valores que vienen dados, el primero por:

$$i_x = \frac{I_0 R_s x (L^2 - x^2)}{L [6r + L^2 (R_s + R_r)]}$$

a una distancia x de la llegada de corriente al carril, función que alcanza el máximo para $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$

La corriente que pasa por los carriles a los tubos se da por la fórmula:

$$\frac{di}{dx} = \frac{2(L^2 - 3x^2) E_s}{L^2 (6r - R_r L^2)}$$

que para el valor particular máximo de i_x , que llamaremos i_m , será

$$\frac{di}{dx} = \frac{(L^2 - 3x^2) im}{0,38 L^2}$$

(1) Loc. cit.

Este valor es el que más nos interesa conocer; de él dependerá la corrosión, puesto que esta es la corriente que atraviesa el electrolito y la que habrá de considerarse en la Ley de Faraday.

Como ya habíamos consignado, se deduce de esta fórmula que las corrientes vagabundas son máximas en el punto de alimentación del carril, es decir, para $x=0$, en cuyo caso:

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=0} = \frac{im}{0,38 L^2}$$

El valor $\frac{di}{dx}$ se anula cuando $L^2 = 3x^2$, es decir, $x = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,58 L$; en este punto como antes ha-

bíamos visto alcanza la corriente en las masas metálicas del subsuelo la máxima intensidad, y al no derivarse la corriente a tierra la d. d. p. entre los carriles y ella será nula. Siendo al principio el potencial de los carriles superior al de tierra, al alcanzar un valor nulo antes del extremo del tramo que se considera a partir de este punto se encontrarán a un potencial inferior al de tierra, caracterizando así por completo las dos zonas en las que las masas metálicas actúan como ánodo o como cátodo.

Estos resultados pueden consignarse en un gráfico cuyo estudio, a un referido caso particular, conduce a consecuencias de gran interés, ya señaladas en el «Report of the American Committee on Electrolysis», de donde tomamos estos datos.

Sea ONE, la parábola representativa de la caída de tensión en los carriles para el caso de carga uniforme que obtuvimos al estudiarla, y ONE² la que nos representa la misma en una construcción metálica subterránea próxima a los carriles y tendida paralelamente a la vía en el caso de que la resistencia del suelo entre ambas masas metálicas sea constante.

El punto N corresponde a la distancia $NE_1 = 0,58 OE$ o bien $ON_1 = 0,42 OE$, siendo $OE = L$, en el que hemos encontrado que la d. d. p. entre los carriles y tierra es nula e igual a la tensión en las masas metálicas en contacto con ella; la región ONO_1 nos representará por consiguiente los puntos en que la conducción está a más alto potencial que los carriles y la NE_1E_2 donde su potencial es inferior, deduciéndose como consecuencia que la zona peligrosa o positiva donde los conductos actúan como ánodos se extiende desde la central o punto donde se suministra la energía hasta 0,42 de la longitud total de la línea, y la zona negativa desde el extremo de la línea hasta 0,58 de su longitud total.

Aunque se trata de un caso particular que no será el más corriente, en la práctica nos da a conocer la parte de la línea de tracción que debemos estudiar con más detenimiento, en la que podría producirse la electrolisis, ésta corresponde a las proximidades de las centrales o puntos donde se recorre la corriente de retorno extendiéndose aproximadamente hasta un tercio de la longitud alimentada, a partir de estos puntos.

El potencial relativo entre carriles y construcciones subterráneas no es, sin embargo, indicio seguro de electrolisis, como ya sabemos, y el examen de las curvas nos lo puede confirmar; en efecto, la caída total de tensión OE'_1 en los carriles está compuesta de tres sumandos, la d. d. p. positiva máxima entre masas metálicas y carriles OO_1 (el término $i_1 r_1 + e_1$ de la fórmula consignada al principio de este capítulo), la caída de tensión en las masas metálicas $O_1E'_2$ (término Er) y la d. d. p. negativa máxima entre masas metálicas y carriles $E'_2E'_1$ (término $i_2 r_2 + e_2$), es decir:

$$OE'_1 = OO_1 + O_1E'_2 + E'_2E'_1$$

Si la caída de tensión en las masas metálicas es $O_1E'_2 = 0$, no podrá por ellos evidentemente circular corriente alguna y en este caso la curva O_1NE_2 , se confundirá con la recta N^1N_1 . Fácil es ver que de esta manera la d. d. p. entre carriles y masas metálicas aumenta, y sin embargo no hay peligro de corrosión.

Lo que verdaderamente nos determina la magnitud de la corrosión es, ya lo hemos dicho repetidas veces, la intensidad de la corriente que pasa de las construcciones metálicas subterráneas a los carriles, y siendo la resistencia del suelo, por hipótesis en este caso, constante, la intensidad de la corriente vagabunda nos la dará la d. d. p. entre masas metálicas y carriles, que como se ve en el gráfico corresponde al punto en que se encuentra la conexión de los carriles a la barra negativa de la central, disminuyendo paulatinamente hasta N.

Las curvas nos dan finalmente la pérdida de corriente en los carriles debida a la derivación por el suelo que, por lo indicado en el párrafo anterior, vendrá representada por el área CE_1E , que, siendo ONE_1 una parábola de ecuación $E + \frac{RI}{2L} l^2$, nos viene dada por:

$$a = 2/3 xy = 2/3 EE_1 \times O_1E = 2/3 L^2 \times L = 1/3 RIL^2$$

El caso consignado de que la caída de tensión en los conductores subterráneos fuese nula, no da siempre la seguridad de falta de corrosión; puede la corriente penetrar por una cara y escapar por otra. Desde luego la distribución de la corriente en la superficie de éstos no es uniforme, su densidad es máxima en el lado más próximo al carril y vale según Michalke (1):

$$\delta \max = \delta \sqrt{\frac{(a+d_1)(a+d_1+d_2)}{a(a+d_2)}}$$

teniendo los valores consignados la misma significación que en la fórmula de la resistencia del suelo.

La densidad mínima corresponde al lado opuesto del carril, siendo su valor:

$$\delta \min = \delta \sqrt{\frac{a(a+d_1)(a+d_1+d_2)(a+d_2)}{a(a+d_2)+d_1(2a+d_1+d_2)}}$$

cuya relación vale:

$$\frac{\delta \max}{\delta \min} = 1 + \frac{d_1(2a+d_1+d_2)}{a(a+d_2)}$$

Conociendo la resistencia r_1 del suelo antes consignada, o calculada por la fórmula general:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \log_e \frac{r_1}{r_2}$$

que se aplica a los conductores de diámetro r_1 aislados hasta obtener un diámetro r_2 exterior; en una longitud l_1 puede calcularse la corriente que circula por él mediante la fórmula:

$$i_c = \frac{e}{r_1}$$

si e es la d. d. p.; y en este caso la densidad media de esta corriente en el circuito del suelo valdrá:

$$\frac{e}{r_1 d_2 \pi l}$$

La corrosión, como ya hemos indicado al estudiar su eficiencia, depende de la densidad de la co-

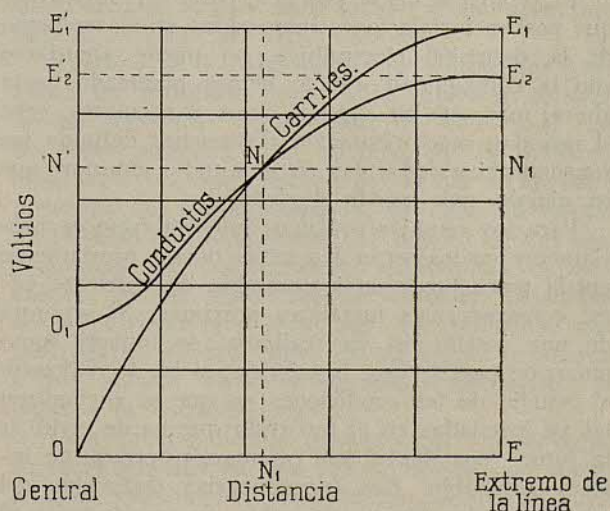


Fig. 6ª

rriente y estas fórmulas nos señalan la influencia que ejerce el diámetro de los conductos y la resistencia del suelo. Los conductos de débil diámetro son más fácilmente atacables.

La aplicación de todas estas fórmulas exige el conocimiento de las resistencias kilométricas de los carriles, suelo y masas metálicas del subsuelo, así como el diámetro de los conductos o cables. Su

(1) Loc. cit.

aplicación es en consecuencia difícil y en algunos casos casi imposible si no se realizan ensayos previos. Ya conocemos la causa de esto indicada en el estudio de la resistencia del suelo que debe considerarse para las aplicaciones como una resistencia aparente, puesto que viene afectada por las f. e. m. de polarización, que de no tenerlas en cuenta falsearían por completo los resultados.

El único factor que no hemos estudiado hasta ahora, es la resistencia kilométrica de las masas metálicas del subsuelo, fácil de determinar conociendo su sección y la resistencia específica de los materiales que las constituyen, que es, para los más usuales:

Fundición gris	100	$\omega \times \text{cm}^3$
Acero duro	46	»
Acero colado	20	»
Acero dulce	12	»
Hierro forjado	10	»
Hierro ordinario	14	»
Hierro puro	9	»
Plomo	20	»

Consignando cifras aproximadas puesto que, en el caso que estudiamos, las resistencias de las construcciones subterráneas varían entre límites amplios, no sólo por la calidad de los materiales sino también por la influencia de las juntas. En general es preferible en cada caso determinar previamente por la experimentación la resistencia kilométrica incluyendo la del número de juntas que haya en ese kilómetro.

El problema en la práctica, para las Compañías que posean instalaciones interesadas en el problema de la corrosión electrolítica, no puede abordarse con la complejidad que lo hemos planteado hasta ahora, más que en algunos casos particulares, pero sí nos dan una orientación claramente definida las consecuencias deducidas en el estudio anterior, que en ningún caso puede desdeñarse.

Para los estudios prácticos interesa conocer previamente cuáles serán las zonas donde previamente pueda tener lugar un intercambio de corriente entre construcciones metálicas próximas. Si se trata de una instalación ya realizada, se tomará como punto de partida esta instalación, si ha de realizarse el estudio de las condiciones en que se encuentren las ya instaladas en el recorrido que ha de verificar la futura nos darán una orientación previa de interés indudable. Las consecuencias deducidas del estudio de las curvas de caída de tensión para el caso particular antes señalado, nos dan ya una primera orientación; estas zonas habrá, en efecto, que buscarlas con más probabilidades de éxito en la tercera parte del recorrido del cable a partir de los puntos en que los carriles estén conectados con la barra negativa de la central, bien directamente, bien por intermedio de cables colectores aislados (denominados algunas veces feeders de retorno).

La determinación exacta de estas zonas peligrosas, se obtendrá realizando pruebas refiriéndonos primeramente a los carriles para determinar la d. d. p. entre éstos y la construcción metálica subte-

rránea que se estudie, en los puntos en que esta construcción sea positiva respecto a los carriles será posible un intercambio de corrientes vagabundas con evidente peligro de corrosión anódica, que es, como repetidas veces hemos indicado, la que casi únicamente se presenta.

Pero estos ensayos no son suficientes, una construcción subterránea puede ser negativa respecto a los carriles y, sin embargo, sufrir corrosión anódica; basta para ello que sea positiva respecto a otra masa metálica próxima y la corriente vagabunda la abandone para alcanzar ésta. Es necesario por esta causa realizar ensayos que nos determinen la d. d. p. respecto a cuantos elementos metálicos en contacto con tierra sea posible; especialmente es preciso no olvidar las columnas o soportes de los hilos de trabajo de las líneas de tracción y cuantos elementos estén en contacto directo con tierra y más o menos directos con una línea de transporte de energía eléctrica.

Hemos indicado de intento que estas pruebas nos determinan las zonas donde es «posible» la corrosión, pero no nos dicen con certeza si es segura ni su magnitud posible o probable, en diversas ocasiones se han hecho resaltar que lo que determina ésta no es la d. d. p. sino la corriente que produce el proceso de electrolisis, y no hay que olvidar que la no existencia de d. d. p. tampoco es indicio seguro de falta de corrosión. En los puntos en que la corrosión anódica sea posible, es preciso pues cerciorarse de si se producirá o no, para lo cual bastará determinar la resistencia del suelo y su composición que nos darán a conocer cuál habrá de ser la d. d. p. necesaria para que se produzca la conducción electrolítica de la corriente vagabunda y la intensidad de ésta, resolviéndonos el problema. Este sistema tiene la ventaja de que, si la composición del suelo es constante en una amplia zona, la sola observación de los datos obtenidos de d. d. p. nos darían indicación inmediata del peligro de corrosión, y las fórmulas antes consignadas permitirían orientarnos muy definitivamente sobre la magnitud probable de ésta.

Es más asequible prácticamente la determinación mediante ensayos, de la corriente que circula por tierra y especialmente de la que sale de las construcciones metálicas del subsuelo, y conocida ésta la obtención de su densidad que nos permitirá formarnos una idea completa del problema. Estos últimos son los únicos datos seguros y los de más difícil obtención.

Cuando se consiguen estos datos previamente sobre instalaciones ya realizadas, hay que observar con cuidado los resultados para ver cuál será la influencia que ha de ejercer la introducción en el campo de las corrientes vagabundas de una nueva masa metálica que ha de favorecer su concentración.

En las medidas realizadas relativas a los carriles, hay que tener en cuenta que el régimen de retorno varía continuamente, por lo que precisa efectuar algunas simultáneamente o con muy corto intervalo entre ellas. El empleo de aparatos registradores es muy útil para algunas.

El peligro de corrosión en las juntas es más fácil de determinar, siendo suficiente la medida de la corriente que circula por las tuberías; sin embargo, esta determinación no siempre es sencilla.

Para un estudio completo del problema son necesarios otros ensayos; uno de los más interesantes es la determinación de las líneas equipotenciales del campo de las corrientes vagabundas que puede realizarse por la obtención de d. d. p. entre puntos diferentes del suelo; interesa también la caída de tensión y corriente en los carriles, la corriente total en la línea de trabajo, alimentación de ésta y colectores, si los hay, de la de retorno, la corriente en los cables de conexión en los carriles, etc., etc.

Finalmente es necesario en muchos casos conocer si la existencia de corrientes vagabundas, si éstas se encontraron, es debida a otros elementos diferentes de las líneas de tracción o si es posible la corrosión por otros efectos, sobre cuyos extremos ya hicimos algunas indicaciones.

Reunidos todos los datos ordenadamente, su estudio es el que nos habrá de señalar el camino más conveniente para impedir o mitigar la corrosión, pero antes de entrar en el detalle de la manera de realizar las experiencias y la forma más adecuada de registrarlas para su estudio, estimamos necesario señalar cuáles son los procedimientos que hasta el día se utilizan para proteger las instalaciones y la forma de efectuar prácticamente los ensayos, de la que habrá de deducirse la manera de conducirlos.

CAPÍTULO IV

Protección contra la corrosión electrolítica

Examen del problema

Los procedimientos generales que pueden seguirse para proteger las masas metálicas en contacto con el suelo contra la acción de las corrientes vagabundas habrán de tender hacia dos aspectos diferentes, o actuar sobre las causas productoras de estas corrientes, u obligados por la existencia de ellas, proteger contra su acción las construcciones que puedan ser afectadas.

El primer aspecto de la cuestión es el que realmente debiera abordarse en todos los casos, correspondiendo a las Compañías concesionarias de los servicios de tranvías, principalmente, la adopción de los sistemas necesarios para impedir la producción de las corrientes vagabundas; pero si una reglamentación cuidadosa en este sentido podría obligar a que se adoptaran estas precauciones en las instalaciones que sucesivamente se vayan realizando, no puede hacerse lo mismo con las que actualmente se hallan instaladas, y si no podemos controlar la producción de las corrientes vagabundas, habrá que proteger las instalaciones que puedan afectar.

Indicábamos que la adopción de los procedimientos convenientes para impedir, en lo posible, los fenómenos de electrolisis, corresponde casi siempre a las Compañías de tranvías, y en efecto hemos indicado ya que en la mayoría de los casos es debido al retorno de éstos, el que las corrientes vagabundas se produzcan. Los procedimientos a seguir, en este caso, se deducen del conocimiento de los factores que influyen en la generación de estas corrientes, que, como sabemos, son función de la caída de tensión en el retorno, si está en contacto con el suelo, tanto más cuanto menos conductor es éste y mejor conductor el suelo. Tres serán, pues, estos procedimientos: la adopción de un circuito de retorno que no esté en contacto con el suelo; la disminución de la conductibilidad del suelo, o, mejor expresado, puesto que esto es imposible, el aislamiento de los carriles interponiendo entre él y el suelo materiales poco conductores; y, finalmente, la disminución de la caída de tensión en el circuito de retorno.

Hay otro procedimiento que todavía corresponde a las empresas de tranvías, y que sin embargo no se basa en la supresión o disminución de las corrientes vagabundas, pero que por la primera causa lo clasificaremos en este grupo, fundado en que la corrosión se produce en las masas metálicas del subsuelo casi exclusivamente cuando éstas actúan de ánodo, es decir, cuando las corrientes vagabundas las abandonan, y en consecuencia las inversiones periódicas de polaridad de los carriles, la utilización de corriente alterna para los servicios de tracción, etc., disminuyendo el período en que actúan como ánodo, disminuyen también la cantidad de metal corroído.

Ninguno de los procedimientos empleados hasta ahora ha permitido llegar a la supresión absoluta de las corrientes vagabundas; no sólo en el caso de redes antiguas, sino también en las modernas instaladas con todo cuidado, por lo que es necesario preservar las masas metálicas, próximas al circuito de retorno de los tranvías, del peligro de que sean alcanzadas por las corrientes vagabundas. Si éstas existen, hemos visto que la corrosión dependerá de la corriente que fluya por los conductos, concentrada en ellos a causa de su menor resistencia, y que, al salir, para reintegrarse a los carriles, da lugar a la corrosión anódica.

Tres procedimientos pueden, por consiguiente, seguirse también en este caso: impedir que las corrientes vagabundas penetren en las masas metálicas del subsuelo, es decir, aislarlas; aumentar su resistencia estableciendo discontinuidades en ellas, para que no ofrezcan un camino propicio a las corrientes vagabundas, o, finalmente, facilitar a las corrientes vagabundas, si circulan por ellas, una salida de tal modo que no pasen directamente al suelo, es decir, al electrolito, lo que hace que la masa metálica no actúe como ánodo imposibilitándose la corrosión.

VÍCTOR DE BUEN.

(Continuará).

Estudio de la flexión en los ejes de armadura

En la construcción de los motores o generadores de electricidad es un problema mecánico de importancia principal el cálculo del tamaño que ha de tener el eje en que va montada la armadura para que la flexión se mantenga dentro límites lo más estrechos posibles. Debido, efectivamente, a que el entrehierro es de muy escasa magnitud y a que es mucho mayor su reluctancia que la de las demás partes del circuito, todo pequeño cambio en la uniformidad de ese entrehierro producirá una alteración considerable de la densidad inductora, lo cual no sólo tiende a perturbar el equilibrio eléctrico de la dinamo, sino que origina una tensión magnética sin contrapeso y que puede actuar en un sentido tal que imponga a los soportes una carga de añadidura.

Acaso se objetará que, aún tratándose de un eje de gran flexibilidad, el efecto de la flexión debida a cargas permanentes podría neutralizarse elevando los soportes proporcionalmente a dicha flexión en la armadura; pero hay motivos poderosos por los cuales debe descartarse un árbol montado en esa forma... Debido, por ejemplo, a que es casi imposible centrar exactamente las piezas giratorias, existe siempre alguna desigualdad en la amplitud del entrehierro, a consecuencia de la cual prodúcese, según hemos dicho, una tracción magnética no equilibrada que habrá de someter un eje como ese a una flexión considerable; y aun cuando por casualidad hubiérase centrado la armadura con rigurosa exactitud al construirse la dinamo, se iría descentrando gradualmente por el desgaste de los cojinetes, lo cual en definitiva produciría el mismo efecto. Debe tenerse en cuenta, por lo demás, que con un eje de esa clase las piezas giratorias se hallan expuestas a la vibración debida a pesos no contrabalanceados, la cual, naturalmente, produce efectos más intensos cuanto mayor es la velocidad. Es preferible, por lo tanto, utilizar un eje rígido, que facilite el logro de un buen equilibrio, tanto mecánico como magnético.

El problema es análogo al que se presenta en el caso de una viga que sostiene cargas concentradas y repartidas irregularmente. Ahora bien; la fórmula general para determinar la flecha o flexión máxima δ en cualquier punto de la luz de un eje apoyado en dos soportes y cargado con un solo peso concentrado P , puede establecerse del modo siguiente:

$$\delta = \alpha \cdot P \cdot \frac{l^3}{EI}$$

en donde

α es un factor cuya magnitud dependerá de la posición de la carga y del punto determinado de la longitud en que se quiere calcular la flecha.

l la longitud libre en centímetros.

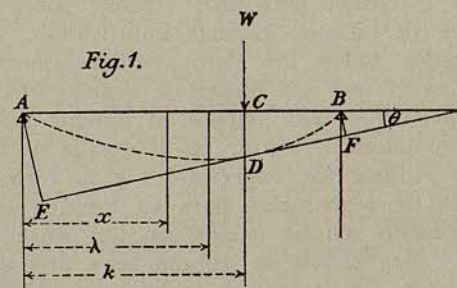
E el módulo de elasticidad del material.

I el momento de inercia de la sección del árbol.

Al factor α le denominaremos factor de flexión.

La figura 1 representa un eje apoyado en dos soportes, A y B, y cargado con un solo peso concentrado P que no está situado en el centro de la luz; la línea quebrada representa toscamente, y con mucha exageración, la curvatura de dicho eje. La flecha máxima no ocurrirá en el punto mismo en que la carga está aplicada, sino cerca de la mitad de la longitud, en un punto cuya posición exacta determinaremos más adelante.

Sea k la distancia de la carga al soporte de la izquierda, y supongamos, para mayor facilidad, que



la longitud libre es igual a la unidad, con lo cual k resultará expresado en forma de quebrado. La reacción en el soporte de la izquierda es igual a $P(1-k)$, y el momento flector M en cualquier punto a una distancia x del soporte $= P(1-k)x$ siempre que x sea igual o menor que k .

Con arreglo a las teorías de la curvatura y de la elasticidad, puede darse por demostrada la relación siguiente:

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

en la que x e y son unas coordenadas de la curva de flexión. De ahí que:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = P(1-k)x$$

Integrando, tenemos:

$$EI \frac{dy}{dx} = P(1-k) \frac{x^2}{2} + A \dots \dots (1)$$

en donde A es una constante de integración cuya magnitud puede determinarse sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por alguna cantidad, en la forma siguiente:

Refiriéndonos a la figura 1, EF es una tangente a la curva de flexión en el punto D, donde la vertical que pasa por la carga cruza dicha curva. Las condiciones no quedarán modificadas si en vez

de considerar AB como una viga apoyada en los extremos y cargada en C, consideramos las partes AC y BC como vigas empotradas en C y cargadas en su extremidad con pesos de magnitud correspondiente a sus respectivas reacciones. Las rectas AE y BF, trazadas perpendicularmente a la tangente EF, serán entonces proporcionales a las flechas en los extremos libres de los trozos AC y BC respectivamente.

Como indicamos más arriba, la carga en la extremidad libre de la parte AC es $P(1-k)$. Por consiguiente, AE es proporcional a

$$\frac{P(1-k)k^3}{3EI}$$

Asimismo, BF es proporcional a

$$\frac{P(1-k)^3k}{3EI}$$

Sea θ el ángulo entre EF y AB. Entonces

$$\begin{aligned} \tan. \theta &= \frac{\text{Diferencia entre AE y BF}}{EF} \\ &= \frac{P}{3EI} \left(\frac{3k^2 - k - 2k^3}{EF} \right). \end{aligned}$$

Como que el ángulo θ es de escasa magnitud, podemos, sin que eso acarree un error apreciable, considerar EF como igual a AB, o sea a la unidad de longitud.

Luego

$$\begin{aligned} \tan. \theta &= \frac{P}{3EI} (3k^2 - k - 2k^3) \\ &= \frac{dy}{dx}, \text{ si } x=k. \end{aligned}$$

Substituyendo esta cantidad a $\frac{dv}{dx}$, y k a x en la ecuación (1), tenemos

$$A = P \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{3} - \frac{k^3}{6} \right)$$

y por lo tanto la ecuación (1) se convierte en

$$EI \frac{dy}{dx} = P(1-k) \frac{x^2}{2} + P \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{3} - \frac{k^3}{6} \right) \dots (2)$$

Integrando nuevamente, tendremos

$$EI y = P(1-k) \frac{x^3}{6} + P \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{3} - \frac{k^3}{6} \right) x + B$$

en donde B es una constante de integración cuya magnitud es en este caso cero, puesto que $y=0$ cuando $x=0$.

Por consiguiente

$$v = \frac{P}{EI} \left[(1-k) \frac{x^3}{6} + \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{3} - \frac{k^3}{6} \right) x \right] \dots (3)$$

Esta ecuación es la correspondiente a la curva de flexión del lado izquierdo de la carga.

El trazado de la curva a la derecha de la carga sigue una ley de variación distinta de la del lado izquierdo, pero hay una condición aplicable a ambas curvas, a saber: que deben tener una misma tangente en el punto donde la vertical que pasa por la carga cruza dicha curva. La ecuación correspondiente al lado derecho puede determinarse del siguiente modo:

El momento flector en cualquier punto situado a una distancia x del soporte izquierdo es $Pk(1-x)$ siempre que x sea igual o mayor que k . Como anteriormente estableceremos la ecuación con respecto a $EI \frac{d^2y}{dx^2}$, y al integrar obtenemos

$$EI \frac{dy}{dx} = Pk \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + C \dots (4)$$

Según demostramos más arriba,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{3EI} (3k^2 - k - 2k^3), \text{ si } x=k$$

Substituyendo esta cantidad a $\frac{dy}{dx}$, y k a x en la ecuación (4), tenemos

$$\begin{aligned} C &= \frac{P}{3} (3k^2 - k - 2k^3) - Pk \left(k - \frac{k^2}{2} \right) \\ &= P \left(\frac{k}{3} + \frac{k^3}{6} \right). \end{aligned}$$

Luego

$$EI \frac{dy}{dx} = Pk \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + P \left(\frac{k}{3} + \frac{k^3}{6} \right).$$

Integrando de nuevo, tenemos

$$EI y = Pk \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + P \left(\frac{k}{3} + \frac{k^3}{6} \right) x + D.$$

Ahora bien; la flecha es nula en el soporte de la derecha, es decir, que: $y=0$ cuando $x=1$.

Por lo tanto

$$D = \frac{Pk^3}{6}$$

Substituyendo esta cantidad a D, la ecuación correspondiente a la curvatura del lado derecho de la carga se convierte en

$$y = \frac{P}{EI} \left[\frac{k}{6} (3x^2 - x^3 - 2x) - \frac{k^3}{6} (x-1) \right] \dots (5)$$

Las expresiones entre paréntesis en las ecuaciones (3) y (5) corresponden al factor α en la fórmula general.

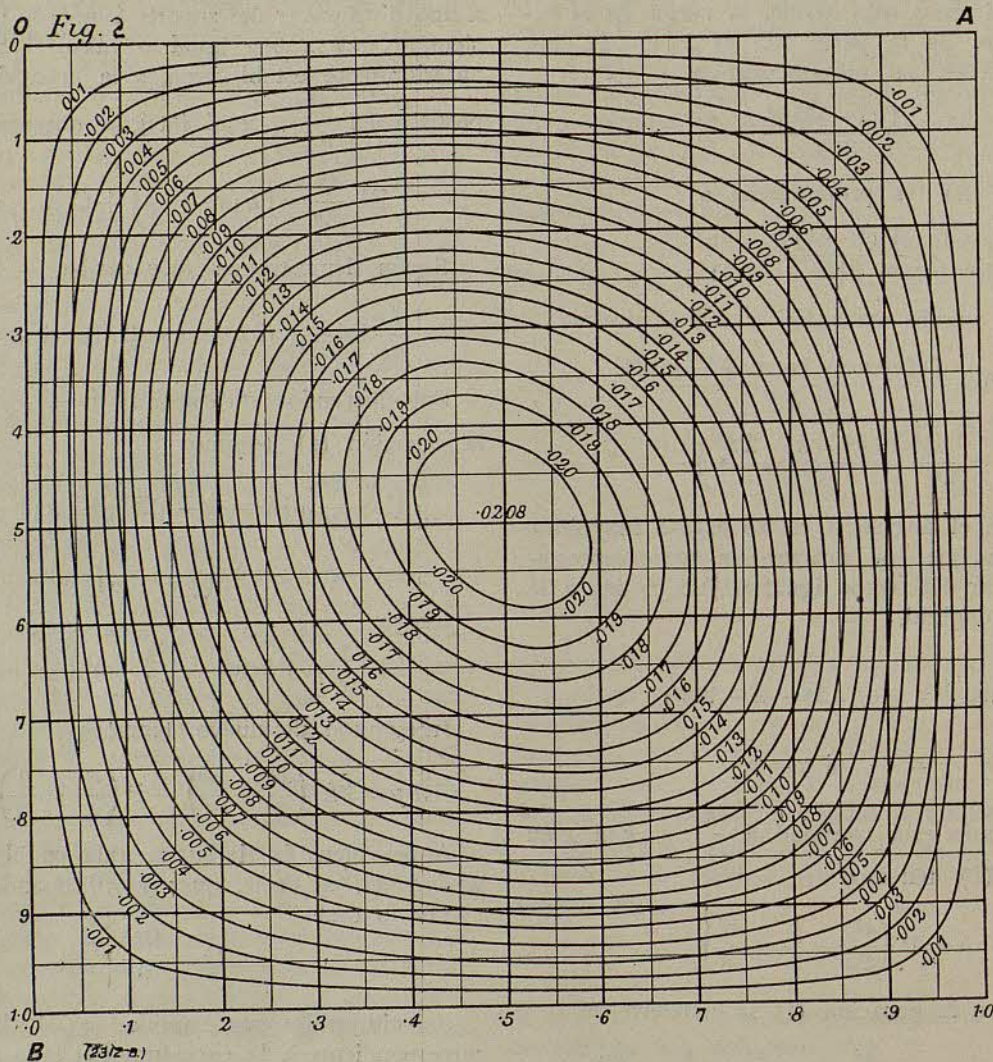
Con el auxilio de esas ecuaciones han sido trazadas las curvas que representa la figura 2.

Poniendo 0,5 en lugar de k y x en ambas ecuaciones, tenemos $\alpha=0,0208$, que es el factor de flexión correspondiente al centro de la luz cuando la carga está concentrada en dicho punto y figura, por lo tanto, en medio del diagrama. La curva más cercana al centro está señalada con la cifra 0,020 que es el valor de α correspondiente a todas las

coordenadas de k y x cuyos puntos de intersección se hallan situados en la curva. Del mismo modo, la curva señalada con la cifra 0,019 representa el valor de α correspondiente a todas las coordenadas que se cortan en la curva, y así sucesivamente, decreciendo en 0,001 los valores de las curvas.

La flecha máxima ocurre cuando la tangente a

valores sucesivos de k — digamos 0.55, 0.6 0.65, etcétera, — y substituyendo los valores obtenidos de ese modo a x en la ecuación (3) para determinar las magnitudes máximas de α que corresponden a dichos valores de k . Por ejemplo, el valor de λ cuando $k=0.6$ es de 0.529, y el valor correspondiente de α es 0.0197, lo cual indica que no hay puntos en la curva señalada con la cifra 0.020 que



la curva de flexión es horizontal, esto es, cuando $\frac{dy}{dx} = 0$. Supongamos que este punto se halla situado a una distancia λ del soporte de la izquierda (véase la figura 1); substituyendo entonces x por λ en la ecuación (2) y estableciendo la igualdad a cero, tenemos

$$\lambda = \sqrt{\frac{2k - k^2}{3}} \dots (6)$$

que corresponde a todos los valores de k mayores que la mitad de la luz o longitud libre.

Las curvas pueden trazarse convenientemente determinando, en primer lugar, mediante esa ecuación, las magnitudes de λ correspondientes a los

están situados sobre la ordenada que pasa por 0,6.

Seguidamente habremos de determinar la mayor magnitud de k que corresponde a un factor de flexión máxima 0,020. Substituyendo $\sqrt{\frac{2k - k^2}{3}}$ a x en la ecuación (3), y estableciendo la igualdad de la expresión entre paréntesis y de α , tenemos:

$$\frac{1-k}{6} \cdot \frac{2}{3} (2k - k^2) \sqrt{\frac{(2k - k^2)}{3}} = -\alpha$$

Elevando al cuadrado, resultará

$$(1 - k)^2 (2k - k^2)^3 = 243 \alpha^2$$

Poniendo y en lugar de $2k - k^2$ y $1 - y$ en vez de $(1 - k)^2$, obtendremos

$$y^3 - y^4 = 243 \alpha^2.$$

Mediante un tanteo y substituyendo 0,020 a α hallaremos que $y=0,83$. Por consiguiente $k=0,59$, y substituyendo este valor a k en la ecuación (6), tenemos

$$\lambda = 0,526.$$

El punto de intersección de la ordenada vertical que pasa por 0,59 y la ordenada horizontal que corresponde a 0,526 señala el extremo de la curva a la derecha de la vertical que atraviesa el centro del diagrama.

Adviértase que a cualquier valor determinado de k le corresponden dos de x — uno de ellos menor que k y el otro mayor, o ambos menores o mayores que dicha cantidad — que corresponden a su vez a una magnitud común de α , lo cual equivale a decir que a cualquiera posición de la carga correspondiente dos puntos de la longitud libre en los que las flechas resultan iguales, exceptuando, claro está, cuando se trata de la flexión máxima.

Refiriéndonos a la ecuación (3), puede verse que la expresión entre paréntesis, al ser igualada a α , se convertirá en una ecuación de las de tercer grado de la que pueden deducirse, por medio de un tanteo, ambos valores de x , o los más pequeños — según sea α mayor o menor que la magnitud correspondiente a $x=k$. El valor de α , dado que $x=k$, o sea 0,55, es de 0,0204 — lo cual indica que la magnitud mayor de x excede la de k . Substituyendo 0,55 y 0,02 a k y α respectivamente, hallaremos que la magnitud menor de x es 0,444.

Para obtener el otro valor de x nos referiremos a la ecuación (5). Esta ecuación contiene también una expresión que, una vez igualada a α , pasa a ser de tercer grado y cuya raíz, correspondiente a cualquier valor determinado de k o α , puede asimismo extraerse por tanteo. Al substituir las magnitudes indicadas más arriba a k y a α , vemos que el máximo valor de x es 0,586.

Los puntos de intersección de la ordenada vertical a través de 0,55 y las ordenadas horizontales que pasan por 0,444 y 0,586 nos proporcionarán otros dos puntos de la curva. Procediendo en esta forma, pueden trazarse las curvas enteras; y se ahorrará mucho trabajo si se tiene en cuenta que la magnitud de α para valores determinados cualesquiera de k y de x es la misma tratándose de $1-k$ que de $1-x$.

No dejará de ser interesante el observar que si en la ecuación (3) se substituye x a k y k a x , resulta una ecuación que será la misma que la (5) — lo cual demuestra que al determinar por medio del diagrama el valor de α correspondiente a ciertas magnitudes cualesquiera de k y x , resulta igual considerar OA como el «eje de k » y OB como el de « x » o bien *viceversa*. Eso tiene una importancia considerable, pues facilita mucho el trazado de las curvas.

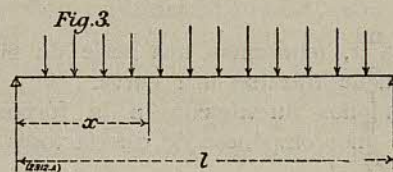
Falta estudiar ahora la flexión debida al peso del eje, lo cual, claro está, equivale a determinar

la flexión de una viga que no tenga peso propio y lleve una carga uniformemente repartida. La figura 3 representa una viga de estas apoyada en dos soportes a una distancia l uno de otro y con una carga p por unidad de longitud repartida de un modo uniforme. La reacción de cada soporte es de $\frac{pl}{2}$, siendo $\frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}$ el momento flector en cualquier punto situado a una distancia x del soporte de la izquierda.

Estableciendo la igualdad con $EI \frac{d^2y}{dx^2}$ y luego integrando, obtiéndose

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{plx^2}{4} - \frac{px^3}{6} + F.$$

Como que el eje o árbol se halla cargado de un modo simétrico, la flecha máxima ocurrirá en el centro de su longitud y por lo tanto la tan-



gente a la curva de flexión en dicho punto será horizontal; es decir, que $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $x = \frac{l}{2}$.

Substituyendo este valor a x en la ecuación, tenemos que

$$F = -\frac{pl^3}{24}$$

La ecuación se convierte pues en

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{plx^2}{4} - \frac{px^3}{6} - \frac{pl^3}{24}$$

Integrando nuevamente, obtenemos

$$EI y = \frac{plx^3}{12} - \frac{px^4}{24} - \frac{pl^3x}{24} + G.$$

La flexión es nula en el soporte, esto es, cuando $x=0$. Por consiguiente $G=0$.

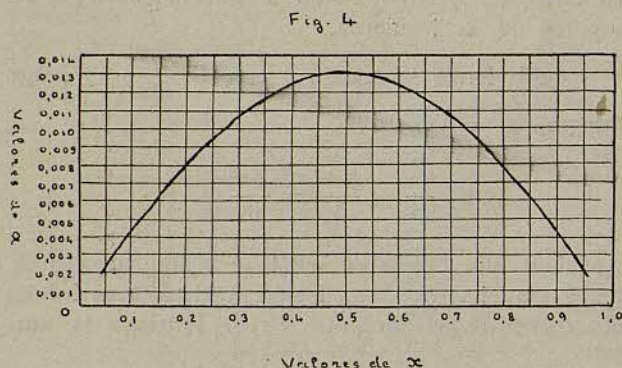
La ecuación viene pues a ser

$$v = \frac{p}{EI} \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{x}{24} \right).$$

Es de advertir que en el transcurso de este estudio hemos dado por supuesto que el diámetro del eje era uniforme en toda la longitud — y que por consiguiente era constante el momento de inercia de la sección de dicho eje, — lo cual no suele ser exactamente así en la mayoría de los casos; en la práctica, no obstante, se admite esa suposición para evitar complicaciones matemáticas.

Con los elementos que se derivan del cálculo an-

terior puede trazarse otra curva mediante la cual se determina fácilmente el factor o coeficiente de flexión correspondiente a cualquier punto de una viga cargada uniformemente. La figura 4 representa dicha curva en la que los valores de x están tomados como abscisas y los de α como ordenadas. Substituyendo 0.1, 0.15, 0.2, y así sucesi-



vamente, a x , tendremos una serie de puntos por los que puede trazarse una curva.

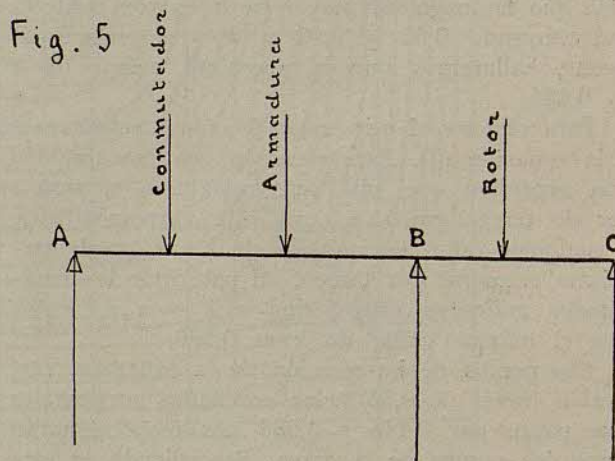
Refiriéndonos nuevamente a la fórmula general, vemos que compónese de tres factores, a saber: α , P y $\frac{l^3}{EI}$, el primero de los cuales acabamos de considerar. En cuanto al tercero, es conveniente, en la práctica, calcular primeramente la sección que ha de tener el eje para que los esfuerzos queden mantenidos dentro ciertos límites, hallar luego el valor de $\frac{l^3}{EI}$ y substituir, finalmente, en la fórmula general para averiguar si la flexión queda limitada a lo que ha señalado la experiencia. En caso contrario es preciso tomar como base un diámetro más importante, determinar después el valor correspondiente de $\frac{l^3}{EI}$, y así sucesivamente hasta que estén realizadas las condiciones necesarias.

Para facilitar el cálculo se puede trazar una serie de curvas mediante las cuales se hallarán valores cualesquiera de $\frac{l^3}{EI}$ dentro de límites prudenciales. Las longitudes l , en centímetros, se toman como abscisas, y los diámetros, también en centímetros, como ordenadas. El procedimiento más sencillo para trazar las curvas, consiste en tomar diámetros cuyo valor esté representado por números enteros, hallar los valores correspondientes de la cantidad I en una tabla de momentos de inercia y calcular luego las varias magnitudes de la longitud l que den la proporción correspondiente a cada una de las curvas, mientras que el módulo de elasticidad, E , será una constante que

puede evaluarse en unos 2.000.000 kilogramos por centímetro cuadrado. Se obtiene de ese modo una serie de puntos por los que pueden ser trazadas curvas regulares.

Mediante curvas como las mencionadas en los anteriores párrafos, puede también determinarse aproximadamente la cuantía de la carga en cada soporte de una máquina que comprenda tres o cuatro... Supongamos, en efecto, que la figura 5 representa el eje de un generador de tres soportes o apoyos, con una carga repartida según indicamos. Para determinar la carga que le corresponderá al soporte del centro del eje es necesario calcular la flecha en el punto B suponiendo que ese eje se halla apoyado sólo en los extremos; la reacción en el soporte se obtiene entonces calculando cuál será la carga que neutralice aquella flecha. Si se calculan los momentos respecto al punto A y considérase la carga en B como una fuerza que actúa hacia arriba, se podrá determinar la carga sobre el soporte C. La diferencia entre el peso total de las piezas giratorias y las cargas sobre los apoyos B y C equivale entonces a la cuantía de la carga en el soporte A.

Los resultados obtenidos de ese modo no deben considerarse como rigurosamente exactos, pues hemos dado por supuesto que es perfecta la alineación



de los soportes, circunstancia que en la práctica no se consigue fácilmente; y el hecho de que el eje esté considerablemente reducido en su parte media aumenta todavía más las dificultades que se oponen al conseguimiento de una escrupulosa exactitud.

Añadiremos que es algo laborioso el trazado de las curvas de que se trata en este artículo; pero una vez trazadas, vienen a ser instrumento valiosísimo para el ahorro de trabajo, y los resultados que con él se obtienen son suficientemente exactos para la mayoría de finalidades prácticas.

VÍCTOR LLETGET.

CRÓNICA DE LA AGRUPACIÓN

Junta Directiva

Durante Marzo y Abril últimos, la Junta Directiva ha tomado, entre otros, los siguientes acuerdos:

Suplicar a la Gerencia del Anuario Riera-Bailly Baillièrè, que en la edición de 1929 borrara de la lista de ingenieros industriales no asociados, muchos nombres que corresponden a señores que no poseen el título.

Dictaminar sobre diferentes extremos a petición de D. P. Tenas Prat y D. Enrique Clapés, habiendo encargado la redacción de los respectivos dictámenes a los señores Tallada (D. Fernando) y Ferrán para el primer asunto y a D. Isabelino Lana, para el segundo.

Adherirse con entusiasmo al homenaje que va a celebrarse en honor del catedrático de nuestra Escuela D. José Tous Biaggi.

Constituir la Delegación de Baleares de nuestra Agrupación, a petición de los compañeros residentes en aquellas islas y de conformidad a lo que señala el artículo 8º de los Estatutos de la Asociación Nacional.

Proponer a la Junta Superior que a su vez proponga a la Dirección General de Industria para los cargos de vocal propietario y vocal suplente del Tribunal que ha de juzgar las oposiciones a la cátedra vulgarmente llamada de Hidráulica de la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona a D. Jorge de Miquel Almirall y D. Ramón Casanovas Degollada, y para iguales cargos respectivamente de la cátedra de Construcciones y Arquitectura a D. Julio Nogués Caiz y D. Darío Durá Bou. Dichas propuestas obedecen al cumplimiento de las vigentes disposiciones sobre tribunales de oposiciones que dan intervención en los mencionados nombramientos a nuestra Asociación Nacional.

Autorizar a D. Leonardo Hereter, para que pueda publicar seguidamente un Anuario de nuestra Agrupación, denominándolo de 1928 y 1929, comprendiendo la lista de socios con las rectificaciones habidas hasta fin de Abril.

Nombrar a D. Antonio Ferrán para que represente a esta Agrupación en el seno del Comité de Formación Técnica Industrial.

Felicitar a la Asociación de Alumnos por la publicación del primer número de su revista *Ergon*, y a D. José Antonio de Artigas por su nombramiento de Presidente del Consejo Industrial.

Felicitar a nuestro compañero, residente en Vigo, D. José Barreras Massó, por la brillante defensa que ha hecho de nuestros derechos y prerrogativas con motivo de la publicación del Decreto-Ley relativo a los ingenieros navales.

Celebrar el Banquete Anual en uno de los restaurantes de la Exposición de Barcelona, el día que oportunamente se comunicará a los señores socios, por circular.

La Junta Directiva ha realizado cuantas gestiones ha estimado procedentes y reglamentarias dentro de nuestra organización como Asociación Nacional, en pro de los derechos de nuestro título, en lo que hace referencia a las disposiciones que por el Gobierno de S. M. se han dictado recientemente. Pedida reglamentariamente, para el día 10 del actual está convocada junta general extraordinaria con el exclusivo objeto de ocuparse del asunto, y ante ella la Directiva dará cuenta de su actuación, por lo que los compañeros habrán tenido ocasión de conocer detalles sobre asunto de tanta importancia.

Concurso anual de 1929

En las páginas de anuncios se publica la convocatoria de dicho Concurso.

Edificio social

Al encargarse accidentalmente de la Presidencia de la Directiva D. Arturo Sedó y estudiada la situación económica del edificio juntamente con el Excmo. Sr. Marqués de Alella, llegaron a soluciones que han armonizado los intereses de los contratistas con los de nuestra Asociación, teniendo la confianza de que antes de finalizar su mandato puedan dejar completamente solucionada y legalizada la situación de todos los acreedores, dando oportunamente cuenta detallada a los señores socios.

Premio Madariaga

La Asociación Nacional de Ingenieros Industriales (Agrupación de Madrid) abre un concurso entre todos los Ingenieros Industriales (con título expedido por una de las tres Escuelas de Madrid, Barcelona o Bilbao), para premiar el mejor trabajo referente a «Exposición de uno o varios casos de aplicación personal de métodos de Organización científica de trabajo, ya realizados o en proyecto», tema propuesto por el Ilmo. Sr. Director General

de Previsión y Corporaciones del Ministerio de Trabajo, en las condiciones siguientes:

Primera. Se otorgará un premio de 8,000 (ocho mil) pesetas al mejor trabajo presentado sobre el tema indicado.

Segunda. Se otorgará un accésit de 2,000 (dos mil) pesetas al mejor trabajo presentado que siga en importancia al citado premio.

Tercera. El Concurso no podrá ser declarado

desierto, adjudicándose por lo menos el accésit a la obra de mayor mérito relativo, si no hubiera alguna que reuniera las condiciones de mérito absoluto que mereciese el primer premio.

Cuarta. El Jurado podrá, de declararse desierto el premio de las 8,000 (ocho mil) pesetas, aumentar la cuantía del accésit hasta la cantidad que estime pertinente, pero sin llegar al importe total concedido para el premio.

Quinta. Los originales, escritos a máquina, serán enviados a la Secretaría de la Asociación de Ingenieros Industriales, calle del Marqués de Valdeiglesias, 1, hasta el 31 de Octubre del presente año. Cada trabajo llevará un lema y con él se enviará una nota del nombre y residencia del autor, bajo sobre cerrado, que ostentará el mismo lema.

Sexta. Terminado el plazo de admisión, un Ju-

rado compuesto por el Director General de Previsión y Corporaciones, el Presidente de la Agrupación de Madrid, el Presidente de la Sección VI (Acción Social) y dos Ingenieros Industriales competentes en la materia objeto del Concurso, examinará los originales presentados y adjudicará el premio o premios en las condiciones anteriormente reseñadas, siendo su fallo inapelable.

Séptima. La Asociación de Ingenieros Industriales conservará el original u originales premiados, que pasarán a ser de su absoluta propiedad, reservándose el derecho de editarlos.

Publicada el acta de adjudicación del premio, los originales no premiados serán recogidos por sus autores, para lo cual les será dado por la Secretaría de la Asociación un recibo al entregar los trabajos, con el lema que en ellos figure.

BIBLIOGRAFIA

Elementos proporcionales para la construcción de motores de explosión, por D. Casalonga, Ingeniero Consultor, Caballero de la Legión de Honor.—Un tomo en rústica editado por H. Duvoid et E. Pinat. 47-49, Quai de Grds. Augustins, Paris (VI).

Este libro es de una gran utilidad para el ingeniero proyectista, para el inventor, para el dibujante proyectista, pues encontrará en él los datos necesarios para confeccionar cualquier anteproyecto con todos sus detalles, y presentando en conjunto un carácter mecánico y una la armonía de formas necesaria: Le servirá también de base para encontrar y adoptar soluciones originales, a las que podrá consagrar todo su esfuerzo.

Es un compendio de los resultados prácticos de los constructores de motores de explosión, sin ser un tratado de automóviles.

Esta obra es un verdadero formulario gráfico en el que la fórmula está desarrollada en cuadro o tabla e ilustrada por una figura.

J. F. V.

• • •

Ejemplos de cálculos de construcciones en hormigón armado. (Examples de calculs de constructions en Béton Armé), por León Cosin, Arquitecto principal de los Ferrocarriles del Estado belga, adjunto al servicio especial de trabajos y estudios.—Un tomo en pasta, con 235 figuras y 10 ábacos. Editado por la Librería Politécnica Ch. Béranger. Paris, Liège, 1928.

Este libro, continuación de «Tratado práctico de construcciones en hormigón armado», está consagrado al examen de los múltiples casos que el constructor está obligado a resolver frecuentemente, y cuya importancia sería ocioso señalar.

Su estudio comprende las siguientes partes principales:

1º Estudio y cálculo de los encofrados.

Este estudio, desarrollado en forma nunca vista anteriormente, fija las cargas de trabajo admisibles, da fórmulas para los precios de coste, da diversas soluciones para cada caso, en fin, da los ábacos para determinar las secciones de las piezas de madera.

2º Estudio de los primos tendidos.

3º Prismas comprimidos. Pivotes.

4º Flexión simple.

5º Flexión compuesta.

6º Obras de fábrica, presas, chimeneas, muros de contención, silos, puentes.

7º Tablas.

Este es el plan de la obra, en la que se publican 89 fórmulas y 13,000 números-coeficientes que simplifican los cálculos de resistencia.

La redacción de la misma es fruto de una larga experiencia.

Su autor se ha dedicado durante más de 20 años a estudios de arte y construcción industrial, y desde 1899 se especializó en la construcción de hormigón armado.

Su obra es digna de su trabajo, siendo esencialmente práctica.

J. F. V.

ANUNCIO

Industria metalúrgica hace cien años establecida y de resultados económicos positivos se traspasaría por enfermedad de su dueño o admitiría socio para ponerse al frente de la misma, aportando la mitad del capital, que puede calcularse entre 110.000 y 120.000 pesetas. — Informará la Secretaría de la Asociación.