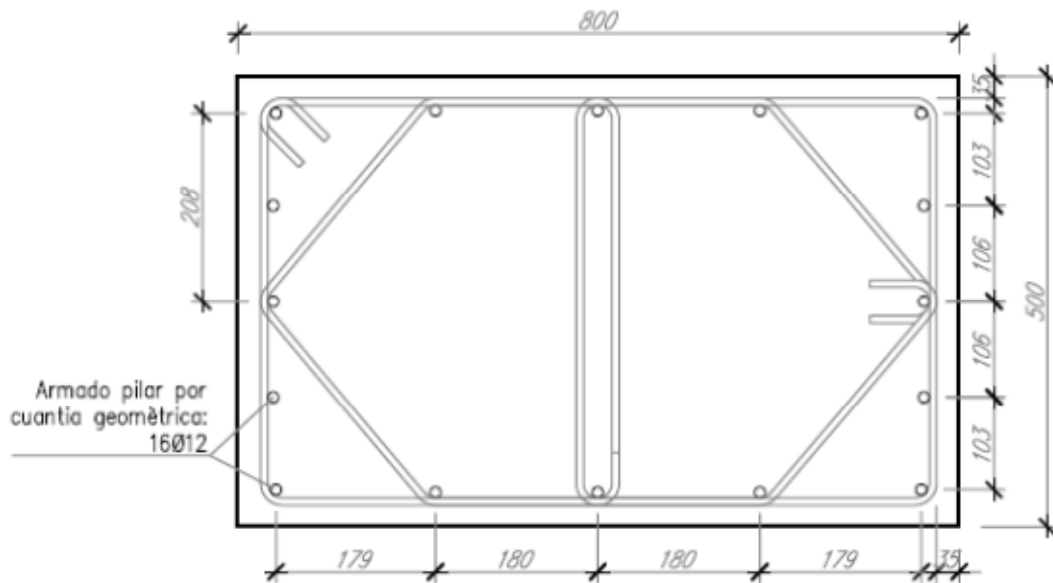


# DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana



16

EFFECTOS DE SEGUNDO ORDEN EN LA FLEXOCOMPRESIÓN



Roberto Guerra Fontana

## 16. EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN.

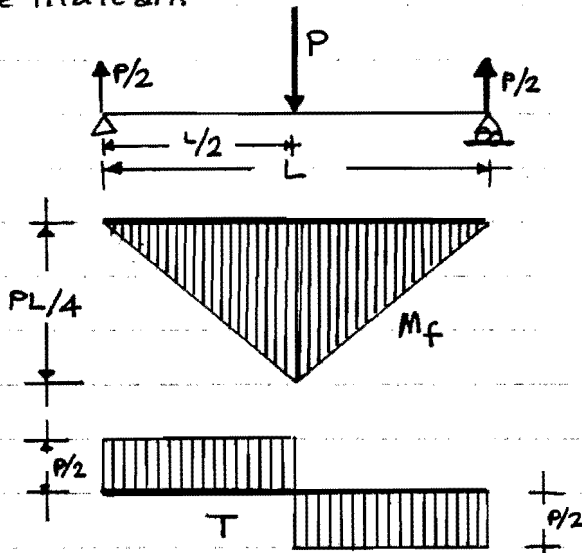
en 12

### FLEXO COMPRESIÓN

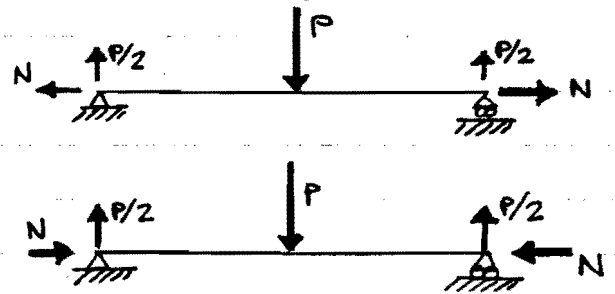


## 16.1. EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN EN BARRAS FLEXIÓNCOMPRESIONADAS

Si estudiamos las solicitaciones de la viga que a continuación croquizamos, diremos que sus diagramas correctos son los que se indican.

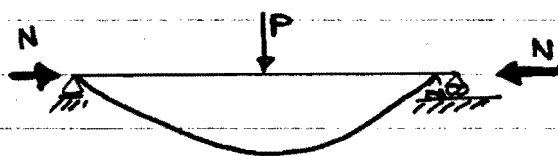


Y pensemos que los mismos permanecerán invariantes, si aplicamos un esfuerzo  $N$  de tracción o de compresión, tal como se representa en las dos figuras siguientes:



Puesto que el esfuerzo  $N$ , tendrá momento nulo respecto al c. de G. de cualquiera de las secciones de la barra, y en consecuencia ello sugiere que no influye en la sollicitación MOMENTO FLECTOR, existente en cualquiera de las infinitas secciones de dicha viga.

No obstante, un primer análisis intuitivo, nos indica que la acción  $N$  en un caso se opondrá a las deformaciones por flexión, y en el otro caso, ayudará a las mismas, por lo que no puede ser la flexión indiferente a la existencia del esfuerzo normal  $N$ .



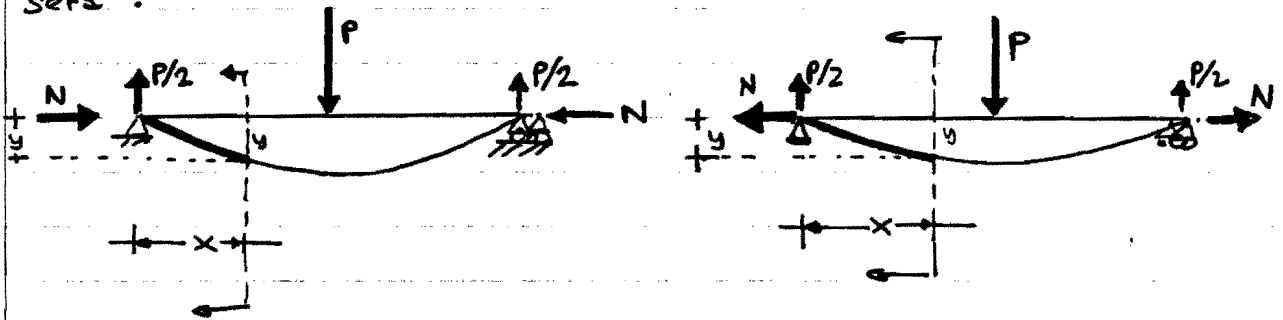
En tal caso, si existe influencia, ¿cuál es el error cometido en nuestro razonamiento inicial?

La contestación es muy simple; para calcular las sollicitaciones que se producen en una barra, consideramos las posiciones indeformadas de las secciones, y tal hecho, que



se conoce como EFECTOS DE PRIMER ORDEN, y que es una consideración habitual del cálculo estructural, implica que  $N$  no genera flexión alguna en la barra, conduciendonos a resultados solo aproximados.

En la realidad, se deberían considerar la POSICIÓN DE LAS SECCIONES en la BARRA DEFORMADA, en cuyo caso, se dice que se trabaja en el campo de los EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN, y el momento flector en una sección distante  $x$  del apoyo izquierdo, y que experimenta un corrimiento  $y$ , será:

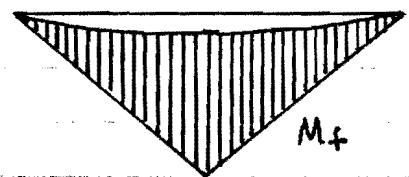
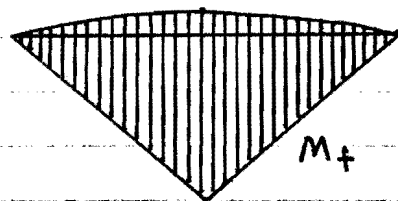


$$M(x) = \frac{P}{2}x + Ny$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x - Ny$$

Con lo cual, queda confirmada la visión intuitiva, de que cuando  $N$  es de compresión, la flexión de la barra se verá incrementada.

El diagrama de momentos flectores de la barra, en consecuencia se verá incrementado en el valor  $Ny$ , tal como se indica en los diagramas siguientes:



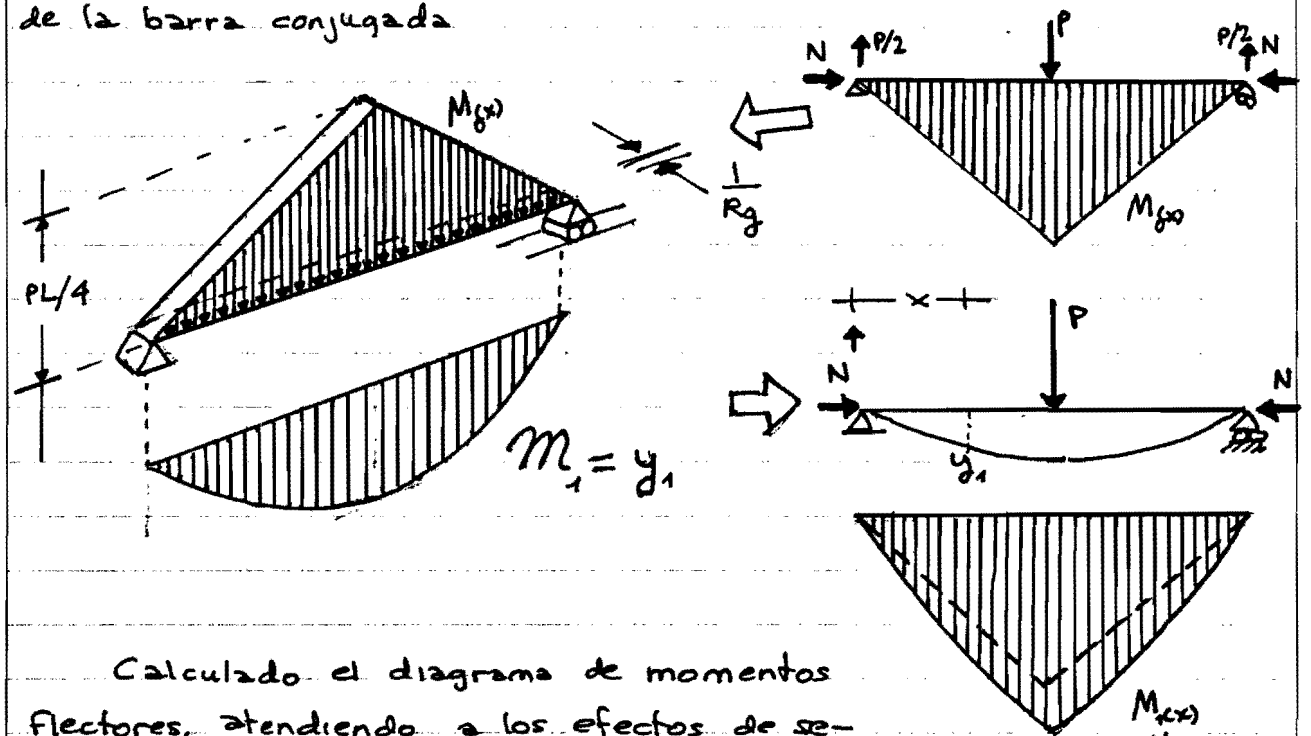
Los efectos de segundo orden, plantean la dificultad de que para obtener los movimientos generados por las solicitaciones, es preciso conocer lógicamente las mismas, y para la determinación



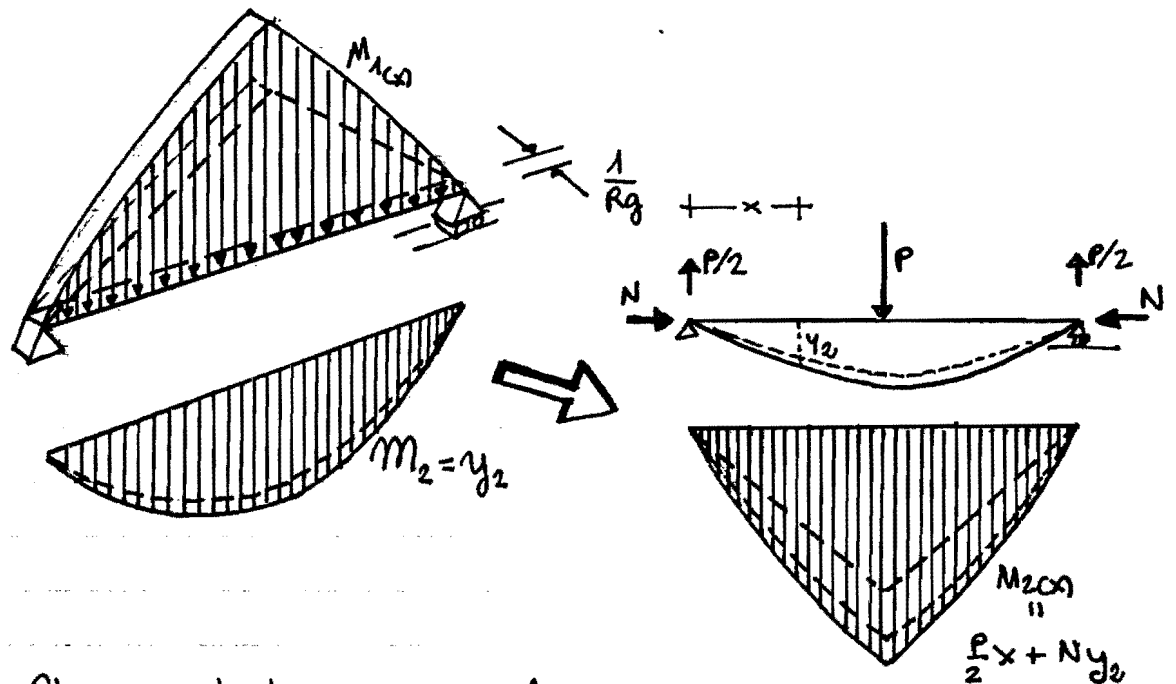
de las solicitaciones es necesario conocer el movimiento que experimenta cada sección, ello exige la resolución de difíciles ecuaciones diferenciales, o la aplicación de laboriosos métodos iterativos que únicamente proporcionan soluciones aproximadas.

## 16.2. PANDEO

Volvamos al caso propuesto, de una viga comprimida y cargada con una fuerza puntual en su sección central, y supongamos que intentáramos su resolución por método iterativo, lo que significará que en un primer ciclo, se calcularán los corrimientos por flexión, atendiendo exclusivamente a los efectos de 1º orden, lo cual puede realizarse aplicando la teoría de la barra conjugada.



Calculado el diagrama de momentos flectores, atendiendo a los efectos de segundo orden, (si bien, calculados los movimientos con solicitaciones deducidas según los efectos de primer orden), podemos iniciar un segundo proceso, (en el cual, el estado de cargas de la barra conjugada, será esta vez el definido por los citados efectos de segundo orden), y obtener con mayor exactitud las deformaciones o movimientos que realmente se producirán.



Al cargar la barra conjugada, con una ley de cargas superficiales  $M_1(x)$ , obtendremos una deformación  $y_2 > y_1$ , y por lo tanto, la ley de momento flectores atendiendo a los efectos de segundo orden sufre una cierta variación simbolizando los nuevos valores por  $M_2(x)$ .

Cada proceso iterativo, nos proporcionará, valores progresivamente más exactos, y de módulos mayores, siendo factible dos situaciones radicalmente distintas.

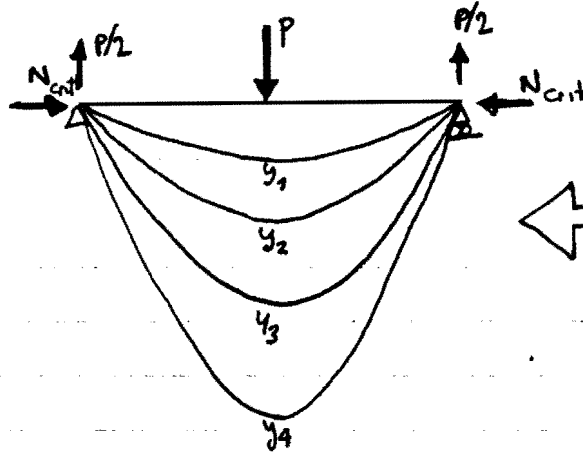
\* Los movimientos  $y_i(x)$  y las solicitaciones  $M_i(x)$  son convergentes, lo que significa, que los incrementos aportados por cada ciclo, son cada vez menos diferentes de los correspondientes al proceso cíclico anterior. LA BARRA ES ESTABLE, y los EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN ÚNICAMENTE generan incrementos en los valores citados.



\* Los corrimientos  $y_i(x)$ , y en consecuencia, la ley de solicitaciones  $M_i(x)$ , crece sin tope, lo que significa que los valores aportados por un ciclo, son sensiblemente mayores que los correspondientes al proceso



anterior, por lo que no se produce convergencia en el proceso iterativo, diciéndose que la BARRA PANDEA lo que significa, que alcanzará su colapso por exceso de deformación.



El esfuerzo normal necesario para ello, se denomina CRÍTICO.

PANDEO

Si los efectos de segundo orden, se determinan por resolución

de la ecuación diferencial que formularemos, para  $N = N_{\text{CRÍTICO}}$ , se producirá división por cero, significando ello, el crecimiento no contenido de las deformaciones que acabamos de describir.

La determinación del  $N_{\text{CRÍTICO}}$  es imprescindible, para limitar el esfuerzo normal a un cierto valor  $N_L$ , tal que:

$$N_L = \frac{N_{\text{CRÍTICO}}}{\text{coef. de seguridad}}$$

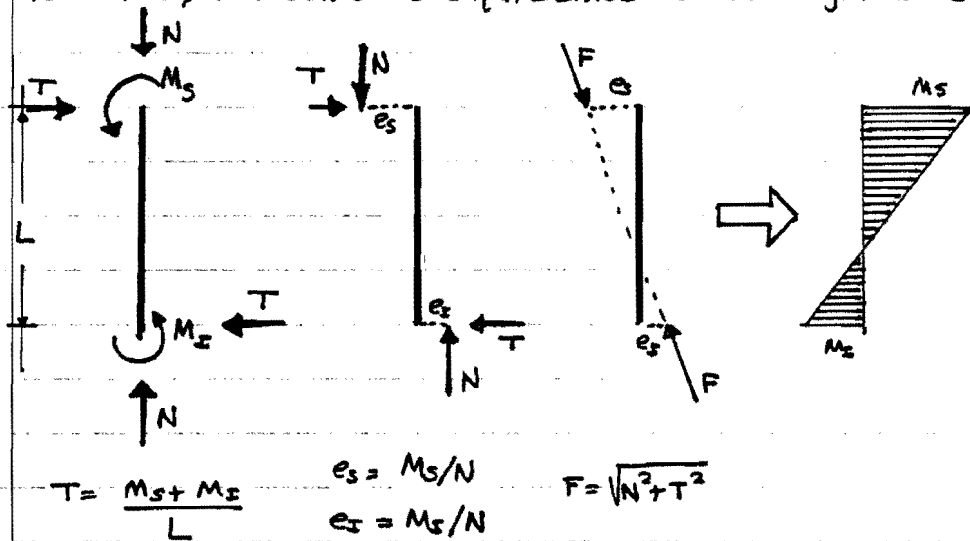
Pero es obvio, que para los valores de servicio de las solicitaciones, sólo se producirán incrementos de las solicitaciones por efectos de segundo orden, pero la barra adoptará una cierta posición tras las deformaciones con carácter estable, es decir, no se producirá en modo alguno el fenómeno del PANDEO, ya que el mismo significa la destrucción de la pieza correspondiente. Por esta razón, es conveniente tener presente en todo momento, que lo que se pretende es evaluar el incremento que sufren las solicitaciones como consecuencia de los EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN, y que el fenómeno del PANDEO es únicamente una referencia limitadora.



## 16.3. ECUACIÓN Y DEFORMACIÓN DE LAS BARRAS SOLICITADAS A FLEXOCOMPRESIÓN ATENDIENDO A LOS EFECTOS DE 2º ORDEN

En general, el problema de la flexocompresión precisa de considerar los efectos de 2º orden en los soportes de las estructuras aperticadas, ya que si bien, las vigas sufren también compresiones, la magnitud de estas es relativamente pequeña, y la aplicación de la teoría de 1º orden apenas representará diferencias con respecto a la de 2º orden.

Los soportes, en general, están solicitados por un esfuerzo normal, dos momentos que efectúa el resto de la estructura en sus extremos, y dos fuerzas cortantes que tienen como objeto estabilizar la barra, tal como croquizamos en las figuras siguientes:



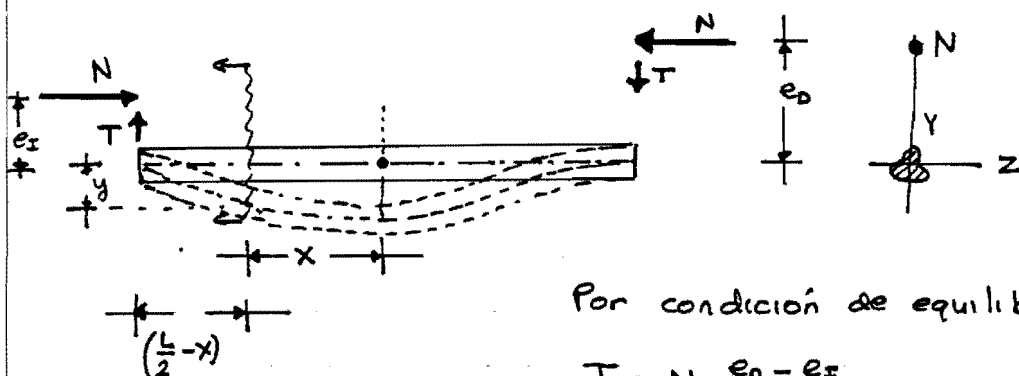
Lo excepcional, es que existan acciones exteriores aplicadas en puntos intermedios de la barra

Los tres esquemas de carga son equivalentes.

Estudiemos los efectos de 2º orden, analizándolos mediante el segundo de los esquemas propuestos, si bien, consideraremos que  $e_s$  y  $e_z$  están ambos situados en el mismo lado para deducir una expresión en la que pueda sustituirse las excentricidades extremas, con el signo de las mismas.

Representando la barra, como si se tratase de una viga, por simples razones de comodidad, tendremos el siguiente esquema de acciones:





Por condición de equilibrio estático:

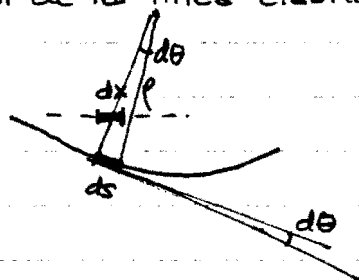
$$T = N \frac{e_0 - e_1}{L}$$

La flexión que sufrirá una sección, distante  $x$  de la sección central, variará atendiendo a los efectos de 2º orden:

$$M_f = T \left( \frac{L}{2} - x \right) + N (e_1 + y) = N \left[ \left( \frac{e_0 - e_1}{L} \right) \left( \frac{L}{2} - x \right) + e_1 + y \right]$$

$$M_f = N \left[ \frac{e_0 + e_1}{2} + (e_1 - e_0) \frac{x}{L} + y \right]$$

La deformación  $y$  deberá satisfacer la ecuación diferencial de la línea elástica, y en consecuencia:



$$\frac{1}{\rho} = - \frac{M_f}{R_g}$$

$$\frac{d\theta}{\rho d\theta} = - \frac{M_f}{R_g}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{M_f}{R_g}$$

$$\tan \theta \approx \theta \approx \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d \left( \frac{dy}{dx} \right)}{ds} = - \frac{M_f}{R_g}$$

Sustituyendo  $M_f$ , por la expresión deducida anteriormente:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = - \frac{N}{R_g} \left[ \frac{e_1 + e_0}{2} + (e_1 - e_0) \frac{x}{L} + y \right]$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL  
atendiendo a los efectos  
de 2º ORDEN, válida  
para GRANDES MOVIMIENTOS

Si nos restringimos al campo de las pequeñas deformaciones, puede asimilarse  $ds$  a  $dx$ , en cuyo caso:

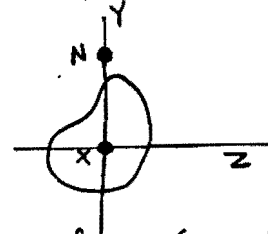
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{N}{R_g} \left[ \frac{e_1 + e_0}{2} + (e_1 - e_0) \frac{x}{L} + y \right]$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL  
atendiendo a los efectos  
de 2º ORDEN, en el campo  
de las PEQUEÑAS DEFORMACIONES.



Hay que señalar, que si el plano XY no es un plano de simetría, los movimientos no se producirán según dicho plano, pero de acuerdo con lo desarrollado en DEFORMACIONES por FLEXIÓN, si deseamos obtener los movimientos proyectados sobre el plano XY, la rigidez de sección  $R_g$ , que deberá adoptarse es:

$$R_g = \frac{E I_z}{I_y} = \frac{E \begin{vmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{vmatrix}}{I_y}$$



Si el plano XY fuese de simetría, se verificaría:  $P_{zy} = 0$ , en cuyo caso:

$$R_g = \frac{E \begin{vmatrix} I_z & 0 \\ 0 & I_y \end{vmatrix}}{I_y} = \frac{E I_z I_y}{I_y} = E I_z = R_g$$

que es la rigidez de sección que se propone usualmente.

Aclarado el significado del elemento  $R_g$ , resolvamos la ecuación diferencial de la FLEXO-COMPRESIÓN, en el campo de la pequeñez de las deformaciones, lo cual nos conduce a que:

$$y = -\left(\frac{e_x + e_0}{2}\right) + (e_0 - e_x)\frac{x}{L} + c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{N}{R_g}} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{N}{R_g}} x\right)$$

Simolicemos por  $\alpha$  al producto:

$$\alpha = L \sqrt{\frac{N}{R_g}}$$

En cuyo caso, la ecuación de la deformada será:

$$y = -\left(\frac{e_x + e_0}{2}\right) + (e_0 - e_x)\frac{x}{L} + c_1 \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right)$$

Las constantes de integración  $c_1$  y  $c_2$  se obtienen imponiendo la nulidad del corrimiento en las secciones extremas de la barra, en consecuencia:

$$\left. \begin{array}{l} x = L/2 \implies y = 0 \\ x = -L/2 \implies y = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} c_1 = \frac{e_x + e_0}{2 \cos(\alpha/2)} \\ c_2 = \frac{e_x - e_0}{2 \sin(\alpha/2)} \end{array}$$

Sustituyendo:

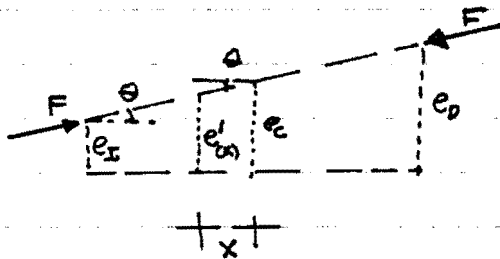


$$y(x) = \frac{e_I + e_0}{2} \frac{\cos(\alpha x/L)}{\cos(\alpha/2)} + \frac{(e_I - e_0)}{2} \frac{\sin(\alpha x/L)}{\sin(\alpha/2)} - \left(\frac{e_I + e_0}{2}\right) - \frac{x}{L}(e_I - e_0)$$

Operando:

$$y(x) = \frac{e_I \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + e_0 \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right)}{\sin \alpha} - \left(\frac{e_I + e_0}{2}\right) - \frac{x}{L}(e_I - e_0)$$

Puede observarse que los dos últimos términos nos indican la excentricidad  $e'$  de la línea de acción  $F$ , con respecto al c.d.e.G. de una sección distante  $x$ , de la sección central. En efecto:



$$e_c = \frac{e_I + e_0}{2}$$

$$e'_{(x)} = -x \tan \theta + e_c$$

$$e'_{(x)} = e_c - x \frac{e_0 - e_I}{L}$$

$$e'_{(x)} = \frac{e_I + e_0}{2} + \frac{x}{L}(e_I - e_0)$$

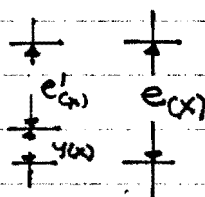
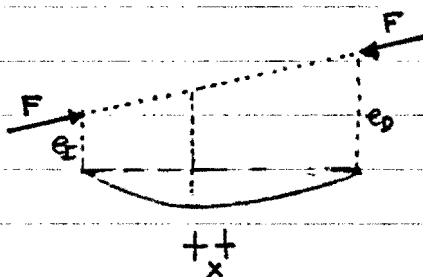
Por lo tanto:

$$y(x) = \frac{e_I + e_0}{2} \frac{\cos(\alpha x/L)}{\cos(\alpha/2)} + \frac{(e_I - e_0)}{2} \frac{\sin(\alpha x/L)}{\sin(\alpha/2)} - e'_{(x)}$$

O bien:

$$y(x) = \frac{e_I \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + e_0 \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right)}{\sin \alpha} - e'_{(x)}$$

Si calculásemos la distancia entre la línea de acción de  $F$ , y la posición deformada de la sección:



$$e_w = e'_{(x)} + y(x)$$



Por lo tanto, las expresiones anteriores pueden transformarse en:



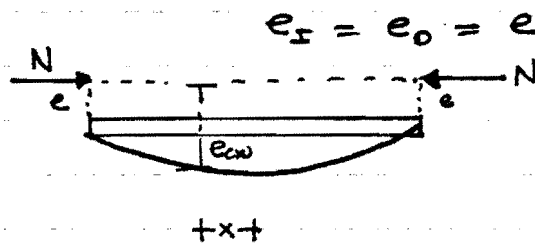
$$e(x) = \frac{e_I + e_0}{2} \frac{\cos(\alpha x/L)}{\cos(\alpha/2)} + \frac{e_I - e_0}{2} \frac{\sin(\alpha x/L)}{\sin(\alpha/2)}$$

O bien:

$$e(x) = \frac{e_I \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + e_0 \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right)}{\sin \alpha}$$

## 16.4. TEORÍA DE LA SECANTE

Para un análisis inicial, como el que vamos a efectuar, de lo que acontece en una barra flexocomprimida, puede realizarse una restricción que simplifica de forma significativa la expresión de  $e(x)$ , que es considerar el que:



En cuyo caso:

$$e(x) = e \frac{\cos(\alpha x/L)}{\cos(\alpha/2)}$$

La excentricidad máxima se producirá en la sección central, en la cual  $x=0$ , adoptando el valor:

$$e_{\max} = \frac{e}{\cos(\alpha/2)}$$

## 16.5. CARGA CRÍTICA

Puede observarse que si:  $\alpha = L\sqrt{\frac{N}{Rg}} = \pi$ , acontecerá si  $e_I = e_0 = e$ :

$$e_{\max} = \frac{e}{\cos(\pi/2)} = \frac{e}{\cos 0} \Rightarrow e_{\max} \rightarrow \infty$$

Y en el caso de que  $e_I \neq e_0$ , se alcanza la misma conclusión, ya que en tal circunstancia:

$$e(x) = \frac{e_I \sin\left(\frac{\pi}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + e_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right)}{\sin \pi} \Rightarrow e_{(x)} \rightarrow \infty$$

La carga que motiva el que  $\alpha = \pi$ , y que en consecuencia



las deformaciones o movimientos, tiendan a crecer indefinidamente, se denomina CARGA CRÍTICA. Así, para

$$\alpha = \pi = L \sqrt{\frac{N_{crit}}{R_g}}$$

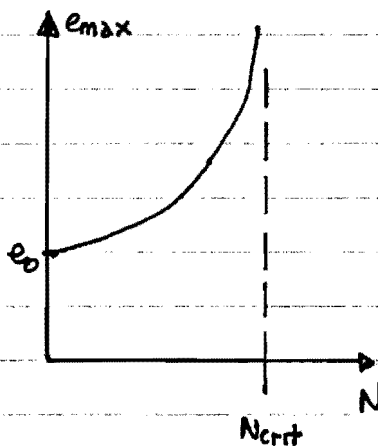


$$N_{crit} = \frac{\pi^2 R_g}{L^2} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{I_z - P_{24}}{I_y}$$

Si la barra puede flexionarse según cualquier plano, el valor del esfuerzo normal crítico, deberá obtenerse suponiendo que  $N$  se aplica sobre el eje principal de inercia mínimo.

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{I_z - P_{24}}{I_{max}} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{I_{min} \cdot I_{max}}{I_{max}} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2} = N_{crit}$$

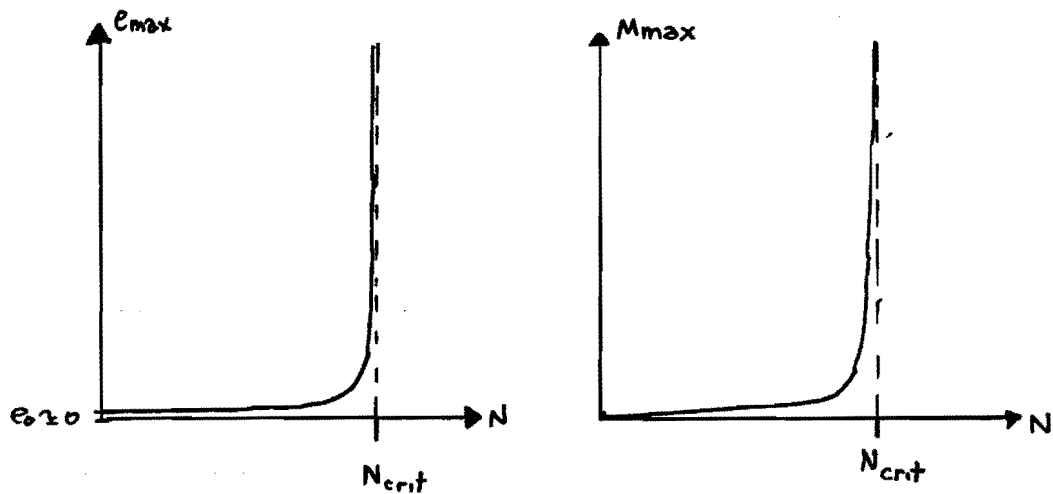
Es destacable que la fórmula correspondiente a la CARGA CRÍTICA la dedujera LEONARD EULER en 1744, en una época en la que por construirse en piedra, no se llegaban a producir problemas de inestabilidad en soportes, al ser forzosamente el  $I_{min}$  un valor alto y los esfuerzos  $N$  que solicitaban en aquel entonces las columnas, no eran excesivamente fuertes, situación que no se alteraría hasta la aparición de la construcción mediante fundición, unos cien años después.



Es evidente que para valores de  $N$  cercanos a la carga crítica, los movimientos producidos por los efectos de segundo orden, son tan importantes que la sollicitación en la correspondiente sección se incrementará hasta el valor que produzca el colapso o rotura de la pieza, por lo que

$N_{crit}$  es difícilmente alcanzable para valores iniciales de  $e_0$  apreciables.

No obstante, si  $e_0$  fuese muy pequeña, la gráfica sería:



En cuyo caso, si que es factible acercarse a la carga  $N_{crit}$ , puesto que para valores muy próximo, los corrimientos son prácticamente nulos.

Cuando  $e_0 = 0$ , tal como lo analizó Euler, los movimientos son nulos para todo valor de  $N < N_{crit}$ , y para  $N = N_{crit}$ , los movimientos deben tender a infinito, lo que es indicativo de una discontinuidad matemática, que nos avisa de que el modelo utilizado para el análisis no es válido, ya que en la Naturaleza no es factible tales circunstancias, de que para  $N = N_{crit} - dN$ ,  $e_{max} = 0$  y para  $N = N_{crit}$  resulta  $e_{max} = \infty$

El motivo del error, que se plasma o evidencia en una discontinuidad matemática, reside de que para valor de  $N$  cercanos a  $N_{crit}$ , los movimientos son suficientemente importantes, para que no sea aplicable el PRINCIPIO de la PEQUEÑEZ de las DEFORMACIONES, y en consecuencia:

$$ds \neq dx,$$

por lo que no puede aplicarse la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{N}{Rg} \left[ \frac{e_s + e_0}{2} + (e_s - e_0) \frac{x}{L} + y \right]$$

sino que será preciso resolver:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{N}{Rg} \left[ \frac{e_s + e_0}{2} + (e_s - e_0) \frac{x}{L} + y \right]$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

(s abscisa curvilinea)



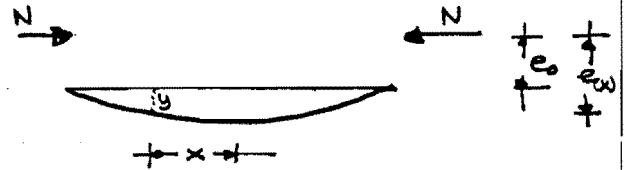
## 16.6. TEORÍA DE LA SECANTE EN EL CAMPO DE LOS GRANDES MOVIMIENTOS.

Por lo tanto, vamos a estudiar la deformación de la barra, para valores de  $N$  cercanos a  $N_{crit}$ , considerando:

$$e_x = e_0 = e_0$$

En cuyo caso:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{N}{Rg} (e_0 + y)$$



Es evidente que:  $e(x) = e_0 + y(x)$



$$de(x) = dy(x)$$



$$\frac{d}{ds} \left( \frac{de}{dx} \right) = -\frac{N}{Rg} e$$

Si simbolizamos, tal como ya hemos efectuado anteriormente, al cociente  $N/Rg$ , por medio del parámetro  $\alpha$ , según la expresión:

$$\boxed{\alpha = L \sqrt{\frac{N}{Rg}}} \Rightarrow \frac{N}{Rg} = \frac{\alpha^2}{L^2}$$

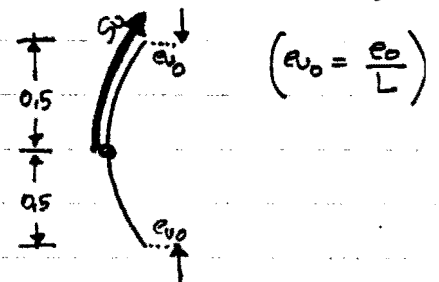
la ecuación diferencial a resolver será:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{de}{dx} \right) = -\frac{\alpha^2}{L^2} e$$

Si reducimos el problema a uno adimensional, mediante los siguientes cambios de variable:

$$e_u = \frac{e(x)}{L} \quad \xi = \frac{x}{L}$$

$$s_u = \frac{s}{L} \quad ds_u = \sqrt{de_u^2 + d\xi^2}$$



la ecuación a resolver será:

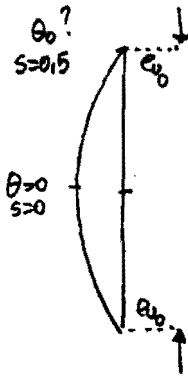
$$\boxed{\frac{d}{ds_u} \left( \frac{de_u}{d\xi} \right) = -\alpha^2 e_u}$$

Resolviendola, mediante diversos cambios de variable, se deduce que:



Para una cierta abscisa curvilinea  $s_0 \in (-0,5 \ 0,5)$ :

$$e_u = \frac{2m}{\alpha} \cos \theta \quad \text{siendo } \theta \text{ tal que: } s_0 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}}$$



y  $m$  una constante de integración que puede determinarse mediante la condición de contorno, de que para  $s_0 = 0,5$  la excentricidad  $e_u$  deberá ser  $e_{u0} = e_0/L$ , en consecuencia el ángulo  $\theta$  correspondiente a la sección extrema deberá ser igual:

$$\theta_0 = \arccos \left( \frac{e_{u0} \alpha}{2m} \right)$$

y este ángulo deberá proporcionarnos la abscisa 0,5, sustituyendolo en la integral elíptica

$$0,5 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\arccos \left( \frac{e_{u0} \alpha}{2m} \right)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} \quad \Rightarrow m$$

El  $m$  que haga posible la igualdad anterior, será el valor correcto de la constante de integración.

(NOTA.- Las integrales elípticas del tipo:  $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}}$  pueden resolverse por tablas, en las cuales los parámetros de entrada son  $m$  y  $\theta_0$ , o bien por el desarrollo en serie:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} = \theta_0 + \sum_j \frac{(j-1)!!}{j!!} m^j \int_0^{\theta_0} \sin^j \theta d\theta$$

La máxima excentricidad sabemos que se produce en la sección central, cuya abscisa curvilinea es nula, por haberse situado en la misma el origen, y el ángulo  $\theta$  correspondiente es también nulo, por lo cual:

$$e_{u, \max} = \frac{2m}{\alpha} \cos \theta = \frac{2m}{\alpha} \cos 0 = \frac{2m}{\alpha} = \frac{e_{\max}}{L}$$



$$e_{\max} = \frac{2mL}{\alpha}$$





Para el caso  $\left. \begin{matrix} N = N_{crit} \\ e_0 = 0 \end{matrix} \right\}$  el proceso descrito es inmediato ya que:

$$e_0 = 0 \Rightarrow e_{v_0} = 0 \Rightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{0 \cdot \alpha}{2m}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = \theta_0$$

$$N = N_{crit} \Rightarrow \alpha = \pi$$

Por lo tanto, la constante  $m$  de integración vendrá determinada por la condición:

$$0,5 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \theta, \sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta} = 1$$

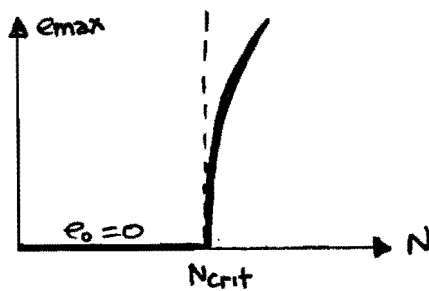
$$\Downarrow \Rightarrow m = 0 \quad \left| \begin{matrix} \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} d\theta \\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ c.q.d.} \end{matrix} \right.$$

Si  $m=0$ , ello implica que  $e_{max}=0$ , puesto que según hemos indicado:

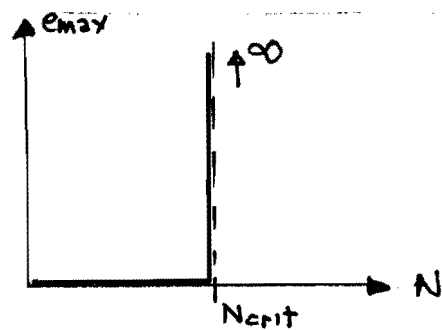
$$e_{max} = \frac{2mL}{\alpha} = 0$$

Luego para  $N = N_{crit}$  con  $e_0 = 0$ , no se produce movimiento alguno, estudiado el problema en el campo de los grandes movimientos.

Si con  $e_0 = 0$ , consideráramos  $N > N_{crit} \Rightarrow \alpha > \pi$ , observaríamos que la constante  $m$  de integración crece rápidamente, lo que significará movimientos  $e_{max}$  cada vez mayores, según se refleja en la siguiente gráfica.



según la teoría de las grandes deformaciones

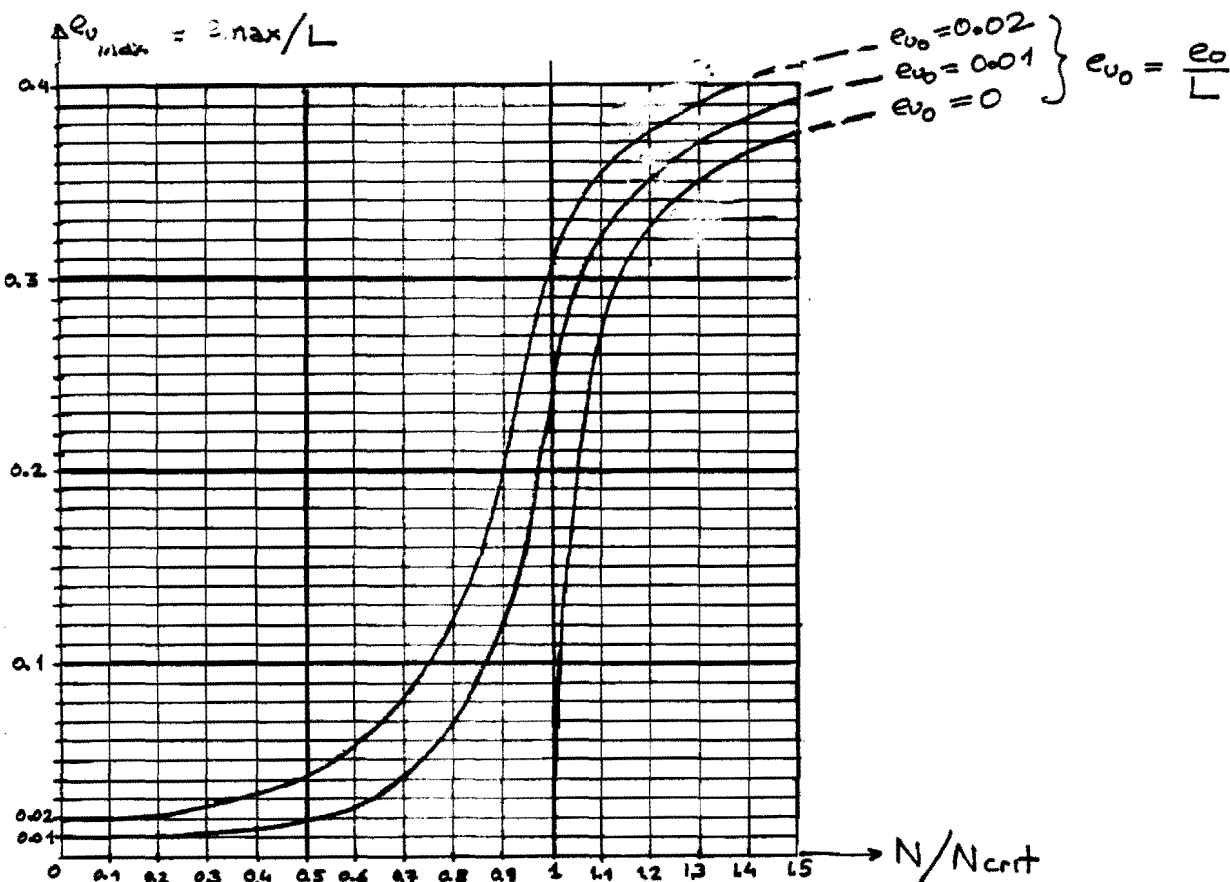


según la teoría de las pequeñas deformaciones.

Para valores de  $N \neq N_{crit}$ , si se aplica la teoría de grandes movimientos, con excentricidad  $e_0 \neq 0$ , se producirán movimientos que



quedan definidos mediante el siguiente gráfico:



## 16.7ª CONDICIÓN DE INERCIA MÍNIMA EN BARRAS COMPRIMIDAS

Si para  $e_0 = 0$  deducimos que es preciso que  $I_{min}$  tenga un determinado valor, es evidente que si  $e_0 > 0$ , el momento de inercia mínimo deberá superar la cota anteriormente propuesta.

Sabemos que:  $N_{crit} = \pi^2 E I_{min} / L^2$ , y si imponemos que  $\gamma_f N < N_{crit} / 1,52$ , se deberá verificar:

$$\gamma_f N < \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2 \cdot 1,52} \Rightarrow N < \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2 \gamma_f 1,52}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{N L^2 \gamma_f 1,52}{\pi^2 E} < I_{min}$$

Sustituyendo el módulo de Young del acero, y operando:

$$I_{min} \geq 0,733 \cdot 10^{-7} L_p^2 (\gamma_f N) \quad \text{UNIDADES: cms y Kg.}$$

Si  $e_0 = 0$  la expresión anterior puede ser bastante indicativa, pero si  $e_0 > 0$ , el error será apreciable, siendo el  $I_{min}$  preciso bastante superior al propuesto por la expresión anterior.

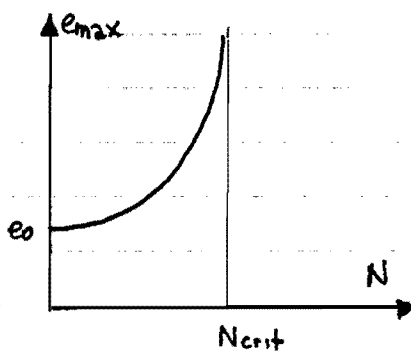


Naturalmente el área  $A$ , de la sección deberá verificar:

$$\frac{\gamma_f \cdot N}{A} < \sigma^* \quad (\text{siendo } \sigma^* \text{ la tensión admisible del tipo de acero utilizado})$$

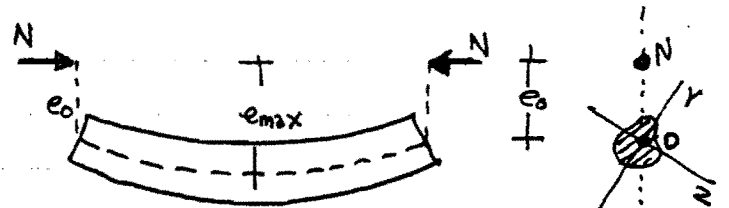
## 16.8. MÉTODO APROXIMADO DE DUTHEIL

La gráfica  $e_{max}$  y  $N$  es del tipo asintótico para  $N = N_{crit}$ , y en el caso de  $N = 0$ , le debe corresponder  $e_{max} = e_0$ , estas circunstancias también se consiguen con una expresión sencilla que es:



$$e_{max} = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{crit}}}$$

La tensión que se producirá en la sección correspondiente será:

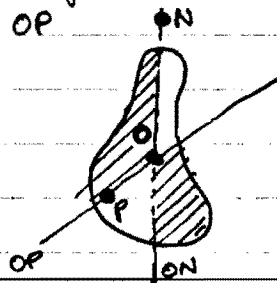


$$\sigma = \frac{N}{A} + N \cdot \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{crit}}} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \frac{1}{|I_z - P_{zy} \\ -P_{zy} \ I_y|}$$

$\vec{n}$  es el versor que determina la recta que une el punto de aplicación del esfuerzo normal  $N$  con el c. de G. y  $(z, y)$  son las coordenadas del punto  $P$  en que determinamos la tensión.

Sabemos que el producto  $[z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} = d \cdot |P_{OP-ON}|$

donde  $d$  expresa la distancia del citado punto  $P$  al c. de G. y  $|P_{OP-ON}|$  es el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes  $ON$  y  $OP$ .



En consecuencia:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{N}{|I_z - P_{zy} \\ -P_{zy} \ I_y|} \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{crit}}} d \cdot |P_{OP-ON}|$$



El invariante cuadrático equivale al producto de los dos momentos de inercia principales de la sección, y la carga crítica puede sustituirse por la fórmula de EULER

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_{\min} \cdot I_{\max}} \frac{e_0}{1 - \frac{N}{\pi^2 E I_{\min}/L^2}} d \cdot |P_{OP-ON}|$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_0 d |P_{OP-ON}|}{1 - \frac{N/A}{\pi^2 E} \frac{L^2}{I_{\min}/A}} \cdot \frac{A}{I_{\min} I_{\max}} \right)$$

Simbolizando por:

$$\begin{cases} \sigma_N = N/A \\ e_u = e_0/L \\ d_u = d/L \\ P_u = \frac{|P_{OP-ON}|}{I_{\max}} \\ p_{\min}^2 = I_{\min}/A \end{cases}$$

$p_{\min}$   
(radio de giro mínimo de la sección)

$$\sigma_{\max} = \sigma_N \left( 1 + \frac{L^2 e_u d_u P_u}{1 - \frac{\sigma_N}{\pi^2 E} \frac{L^2}{p_{\min}^2}} \right)$$

Se denomina ESBELTEZ MECÁNICA al cociente:

$$\lambda = \frac{L}{p_{\min}}, \text{ en consecuencia:}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_N \left( 1 + \frac{\lambda^2 e_u d_u P_u}{1 - \frac{\sigma_N}{\pi^2 E} \lambda^2} \right)$$



## 1.9. CURVA DE EULER E INFLUENCIA DE LA ESBELTEZ MECÁNICA

Sabemos que el esfuerzo normal  $N$ , si se aplicase perfectamente centrado en una pieza sin defecto alguno, produciría una tensión  $\sigma_N = N/A$ , pero como existe una cierta excentricidad  $e_0$ , la cual a su vez genera efectos de 2º orden la tensión real máxima que se producirá es mayor ( $\sigma_{max} > \sigma_N$ ), en consecuencia, nos podemos plantear, hasta que valor puede alcanzar  $\sigma_N$ , para que  $\sigma_{max} = \sigma_{FI}$ , es decir:

$$\sigma_{FI} = \sigma_N \left( 1 + \frac{\lambda^2}{1 - \frac{\sigma_N}{\pi^2 E} \lambda^2} e_0 d_0 \rho \right)$$

$$\frac{\sigma_{FI}}{\sigma_N} - 1 = \frac{\lambda^2}{1 - \frac{\sigma_{FI} \lambda^2}{\pi^2 E} \frac{\sigma_N}{\sigma_{FI}}} e_0 d_0 \rho$$

Simbolizando por:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\sigma_{FI}}{\sigma_N} \\ c_1 &= \frac{\sigma_{FI}}{\pi^2 E} \\ c_2 &= e_0 d_0 \rho \end{aligned} \right\} \text{resultará:}$$

$$\omega - 1 = \frac{\lambda^2 c_2}{1 - c_1 \lambda^2 \frac{1}{\omega}}$$

Operando

$$\omega = \frac{1}{2} (1 + \lambda^2 (c_1 + c_2)) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} (1 + \lambda^2 (c_1 + c_2)) \right]^2 - c_1 \lambda^2}$$



$$\sigma_N = \frac{\sigma_{FI}}{\omega}$$

Desde Euler, y hasta hace relativamente poco, se ha considerado únicamente una restricción de la expresión anterior, correspondiente al caso de compresión centrada, es decir:

$$e_0 = 0 \Rightarrow e_0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$



$$\begin{aligned} \text{signo +} &\Rightarrow \omega = 1 \\ \text{signo -} &\Rightarrow \omega = \lambda^2 c_1 \quad \left( = \frac{\sigma_{FI}}{\pi^2 E} \lambda^2 \right) \end{aligned}$$

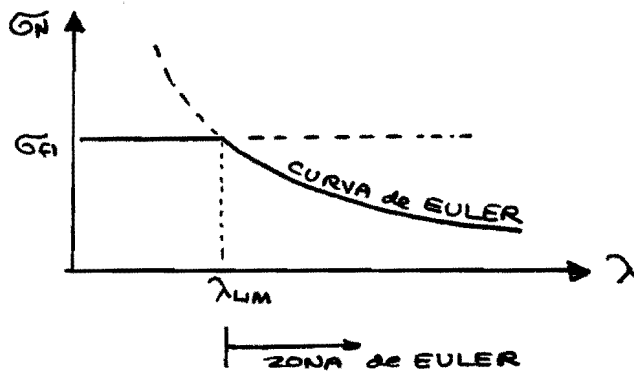


En consecuencia, en el caso de carga centrada

$$\sigma_N \leq \sigma_H / 1$$

$$\sigma_N \leq \frac{\sigma_{fl}}{\lambda^2 \frac{\sigma_{fl}}{\pi^2 E}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

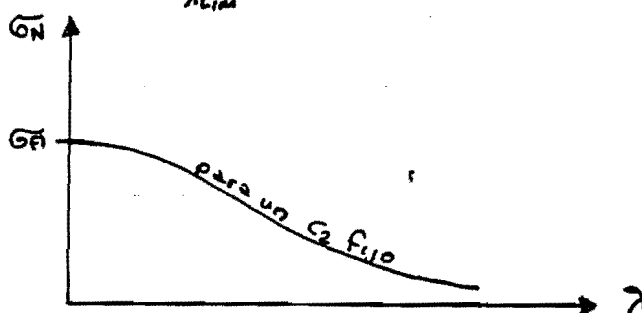
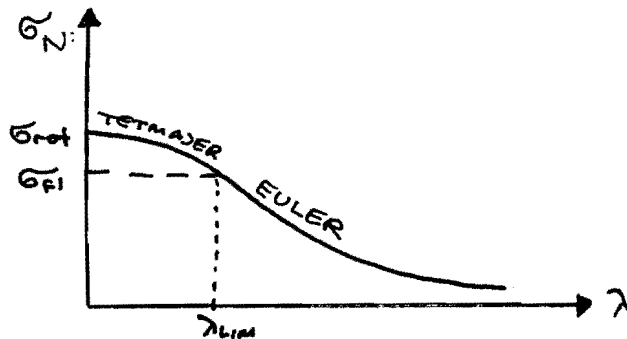
Lo que permite dibujar la siguiente gráfica, que se conoce como curva de Euler.



Existiendo una cierta esbeltez, denominada límite, tal que para  $\lambda$  mayores que la misma la condición más restrictiva es que  $\sigma_N = \pi^2 E / \lambda^2$ , lo que se conoce como

ZONA DE EULER. La  $\lambda_{lim}$  presenta valores cercanos a 100 para los diversos tipos de aceros.

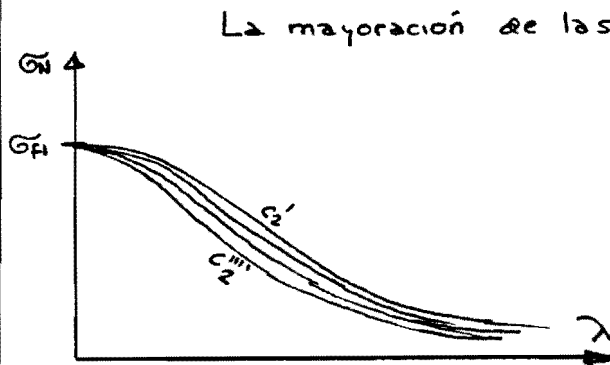
Tetmajer que fue un defensor de la línea experimental, analizó lo que acontecía si  $\lambda < \lambda_{lim}$  con  $e_0 = 0$ , y dedujo que podía proponerse una curva parabólica que uniese el punto  $\lambda_{lim}$  con  $\sigma_N = \sigma_{rot}$  en  $\lambda = 0$ .



Precisamente, curvas del tipo que configuran globalmente la propuesta de Tetmajer y de Euler se obtienen, si se considera  $e_0 > 0$ , tal como puede apreciarse, en la figura siguientes:



## 13.10. EL COEFICIENTE OMEGA $\omega$



FAMILIAS de curvas para distintos valores  $c_2$

La mayoración de las tensiones  $\sigma_N$ , como consecuencia de los efectos de segundo orden, están supeditados fundamentalmente por la esbeltez mecánica  $\lambda$ , más que por el propio valor del coeficiente  $c_2$ , dependiente de la excentricidad  $e_0$ . Esta consideración, unida al hecho de que en piezas supuestamente

comprimidas de forma centrada, es preciso considerar una cierta excentricidad, a fin de considerar las posibles imperfecciones en la directriz de la pieza, han motivado el que se fije el valor  $c_2$  para la determinación del coeficiente  $\omega$ , que permite conocer el cociente:

$$\omega = \sigma_{Fl} / \sigma_N$$

El valor de  $c_2$  surge de considerar:

$$\left. \begin{aligned} e_u &= \frac{e_0}{L_p} = \frac{1}{900} \cdot \frac{\sigma_{Fl}}{2600} \\ d_u &= \frac{d}{L_p} = \frac{1}{25} \\ P_u &= \frac{P_{lim}}{I_{max}} = \frac{1}{1,18} \end{aligned} \right\}$$

$$c_2 = e_u d_u P_u = \frac{\sigma_{Fl}}{2600} \cdot \frac{1}{900} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1,18} = \frac{\sigma_{Fl}}{6,903 \cdot 10^7} = c_2$$

$$\text{Recuérdese que : } c_1 = \frac{\sigma_{Fl}}{\pi^2 E} = \frac{\sigma_{Fl}}{2,0726 \cdot 10^7} = c_1$$

Sustituyendo en la expresión de  $\omega$ , los valores propuestos para  $c_1$  y  $c_2$ , se obtiene operando:

$$\omega = 0,5 + \sigma_{Fl} \left( \frac{\lambda}{5646} \right)^2 + \sqrt{0,25 + \sigma_{Fl} \left[ \left( \frac{\lambda}{5646} \right)^4 \frac{1}{\sigma_{Fl}} \left( \frac{\lambda}{7697} \right)^2 \right]}$$

$$\sigma_{Fl} / \sigma_N = \omega$$

# DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS



Roberto Guerra Fontana

EFECTOS 2º ORDEN EN FLEJO COMPRESIÓN

$$w = 0,5 + \sigma_{F1} \left( \frac{\lambda}{5646} \right)^2 + \sqrt{0,25 + \sigma_{F1} \left[ \left( \frac{\lambda}{5646} \right)^4 - \left( \frac{\lambda}{7697} \right)^2 \right]}$$

$$\lambda = \frac{4952}{\sqrt{\sigma_{F1}}} \sqrt{w(w-1)}$$

λ	COEFICIENTES w PARA ACEROS A-37										COEFICIENTES w PARA ACEROS A-42										COEFICIENTES w PARA ACEROS A-52												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	20	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	20	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	20
30	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	30	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	30	1.05	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	30
40	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	40	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	40	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	40
50	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	50	1.13	1.14	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	50	1.20	1.22	1.23	1.24	1.25	1.27	1.28	1.30	1.31	1.33	50
60	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.26	1.29	60	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.29	1.30	1.31	1.33	60	1.35	1.37	1.39	1.41	1.43	1.45	1.47	1.49	1.51	1.54	60
70	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.44	70	1.34	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.44	1.46	1.47	1.49	70	1.56	1.59	1.61	1.64	1.66	1.69	1.72	1.75	1.78	1.81	70
80	1.45	1.47	1.49	1.51	1.53	1.55	1.57	1.59	1.61	1.63	80	1.51	1.53	1.55	1.57	1.60	1.62	1.64	1.66	1.69	1.71	80	1.84	1.87	1.90	1.94	1.97	2.01	2.04	2.08	2.11	2.15	80
90	1.65	1.67	1.70	1.72	1.74	1.77	1.79	1.82	1.84	1.87	90	1.74	1.76	1.79	1.81	1.84	1.86	1.89	1.92	1.95	1.98	90	2.18	2.22	2.26	2.30	2.34	2.38	2.42	2.46	2.50	2.54	90
100	1.89	1.92	1.95	1.97	2.00	2.03	2.06	2.09	2.12	2.15	100	2.01	2.03	2.06	2.09	2.13	2.16	2.19	2.22	2.25	2.29	100	2.59	2.63	2.67	2.72	2.76	2.81	2.85	2.90	2.95	2.99	100
110	2.18	2.21	2.24	2.27	2.30	2.33	2.37	2.40	2.43	2.47	110	2.32	2.35	2.39	2.42	2.46	2.49	2.53	2.56	2.60	2.64	110	3.04	3.09	3.14	3.19	3.24	3.29	3.34	3.39	3.44	3.49	110
120	2.50	2.53	2.57	2.60	2.64	2.68	2.71	2.75	2.78	2.82	120	2.67	2.71	2.75	2.79	2.82	2.86	2.90	2.94	2.98	3.02	120	3.55	3.60	3.65	3.71	3.76	3.82	3.87	3.93	3.98	4.04	120
130	2.86	2.90	2.94	2.97	3.01	3.05	3.09	3.13	3.17	3.21	130	3.06	3.11	3.15	3.19	3.23	3.27	3.32	3.36	3.40	3.45	130	4.10	4.16	4.22	4.27	4.33	4.39	4.45	4.52	4.58	4.64	130
140	3.25	3.29	3.33	3.38	3.42	3.46	3.50	3.55	3.59	3.63	140	3.49	3.54	3.58	3.63	3.67	3.72	3.77	3.81	3.86	3.91	140	4.70	4.76	4.83	4.89	4.95	5.02	5.08	5.15	5.22	5.28	140
150	3.68	3.72	3.77	3.81	3.86	3.90	3.95	4.00	4.04	4.09	150	3.96	4.00	4.05	4.10	4.15	4.20	4.25	4.30	4.35	4.40	150	5.35	5.42	5.48	5.55	5.62	5.69	5.76	5.83	5.90	5.97	150
160	4.14	4.18	4.23	4.28	4.33	4.38	4.43	4.48	4.53	4.58	160	4.45	4.51	4.56	4.61	4.66	4.72	4.77	4.82	4.88	4.93	160	6.04	6.12	6.19	6.26	6.34	6.41	6.48	6.56	6.63	6.71	160
170	4.63	4.68	4.73	4.78	4.83	4.88	4.94	4.99	5.04	5.09	170	4.99	5.04	5.10	5.15	5.21	5.26	5.32	5.38	5.44	5.49	170	6.79	6.86	6.94	7.02	7.09	7.17	7.25	7.33	7.41	7.49	170
180	5.15	5.20	5.26	5.31	5.36	5.42	5.48	5.53	5.59	5.64	180	5.55	5.61	5.67	5.73	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03	6.09	180	7.57	7.65	7.73	7.82	7.90	7.98	8.07	8.15	8.24	8.32	180
190	5.70	5.76	5.81	5.87	5.93	5.99	6.05	6.11	6.16	6.22	190	6.15	6.21	6.27	6.34	6.40	6.46	6.53	6.59	6.65	6.72	190	8.40	8.49	8.58	8.66	8.75	8.84	8.93	9.02	9.10	9.19	190
200	6.28	6.34	6.40	6.46	6.53	6.59	6.65	6.71	6.77	6.84	200	6.78	6.85	6.91	6.98	7.05	7.11	7.18	7.25	7.31	7.38	200	9.28	9.37	9.47	9.56	9.65	9.74	9.83	9.92	10.02	10.11	200
210	6.90	6.96	7.03	7.09	7.15	7.22	7.28	7.35	7.41	7.48	210	7.45	7.52	7.59	7.66	7.72	7.79	7.86	7.93	8.01	8.08	210	10.21	10.30	10.40	10.49	10.59	10.69	10.78	10.88	10.98	11.08	210
220	7.54	7.61	7.67	7.74	7.81	7.88	7.94	8.01	8.08	8.15	220	8.15	8.22	8.29	8.36	8.44	8.51	8.58	8.66	8.73	8.80	220	11.18	11.27	11.38	11.48	11.57	11.68	11.78	11.88	11.98	12.09	220
230	8.22	8.29	8.36	8.43	8.49	8.57	8.64	8.71	8.78	8.85	230	8.88	8.95	9.03	9.11	9.18	9.26	9.33	9.41	9.49	9.57	230	12.19	12.29	12.40	12.50	12.61	12.72	12.82	12.93	13.03	13.14	230
240	8.92	8.99	9.07	9.14	9.21	9.29	9.36	9.43	9.51	9.58	240	9.64	9.72	9.80	9.88	9.96	10.04	10.12	10.20	10.28	10.36	240	13.25	13.36	13.47	13.58	13.69	13.80	13.91	14.02	14.13	14.25	240
250	9.66										250	10.44										250	14.36										250

$$w = 0,5 + \left( \frac{\lambda}{115,25} \right)^2 + \sqrt{0,25 - \left( \frac{\lambda}{153,11} \right)^2 + \left( \frac{\lambda}{115,25} \right)^4}$$

$$\lambda = 72,92 \sqrt{w(w-1)}$$

$$w = 0,5 + \left( \frac{\lambda}{110,33} \right)^2 + \sqrt{0,25 - \left( \frac{\lambda}{150,35} \right)^2 + \left( \frac{\lambda}{110,33} \right)^4}$$

$$\lambda = 89,27 \sqrt{w(w-1)}$$

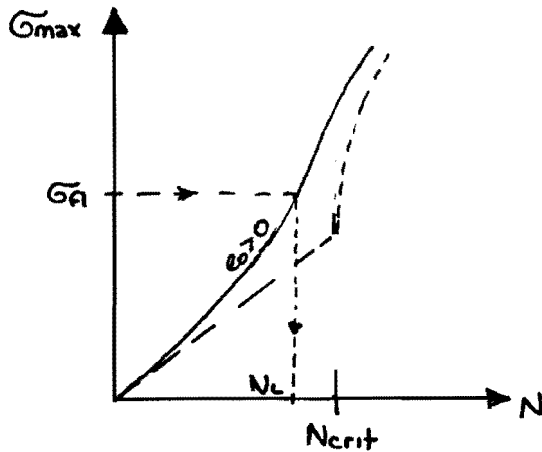
$$w = 0,5 + \left( \frac{\lambda}{94,1} \right)^2 + \sqrt{0,25 - \left( \frac{\lambda}{128,28} \right)^2 + \left( \frac{\lambda}{94,1} \right)^4}$$

$$\lambda = 75,87 \sqrt{w(w-1)}$$

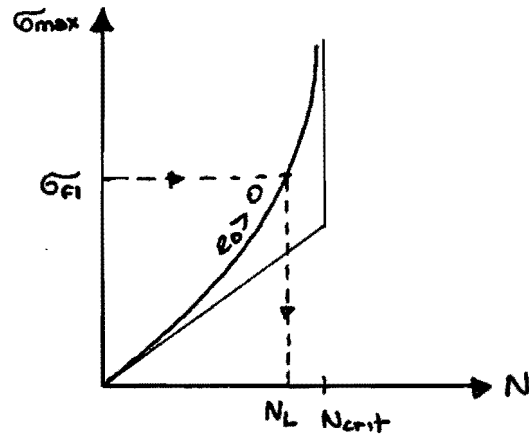




Si existe excentricidad  $e_0$  en el punto de aplicación del esfuerzo normal, (como acontece implícitamente, cuando obtenemos la tensión  $\bar{\sigma}_N$ , que generará por efectos de 2º orden la tensión de fluencia, mediante el coeficiente  $W$ ), las curvas de las gráficas tensión máxima - esfuerzo normal, serán:



según la teoría de las grandes deformaciones



según la teoría de las pequeñas deformaciones

Fijando la tensión máxima igual a la tensión de fluencia, se puede deducir en las gráficas anteriores, cual es el esfuerzo normal  $N_{lim}$  que puede aplicarse, el cual deberá coincidir con el obtenido por la expresión:  $N_{lim} = \frac{\bar{\sigma}_f \cdot A}{W}$

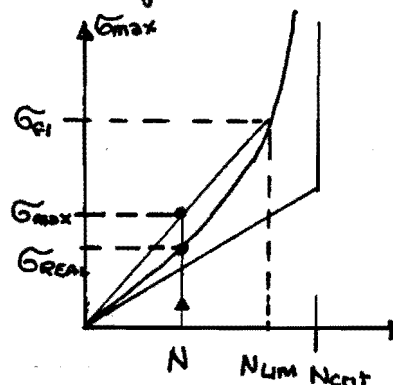
Si aplicamos un  $N < N_{lim}$ , y le atribuimos una tensión de valor:  $\sigma_{max} = N \cdot \frac{\bar{\sigma}_f}{N_{lim}}$ , cometeremos un error hacia el lado de la seguridad, ya que según las gráficas anteriores la tensión real para dicho  $N$ , será inferior que el correspondiente a una interpolación lineal.

$$\bar{\sigma}_{max} = N \frac{\bar{\sigma}_f}{N_{lim}}$$

⇓

$$\bar{\sigma}_{max} = N \frac{\bar{\sigma}_f}{\frac{\bar{\sigma}_f \cdot A}{W}}$$

$$\bar{\sigma}_{max} = \frac{N \cdot W}{A}$$





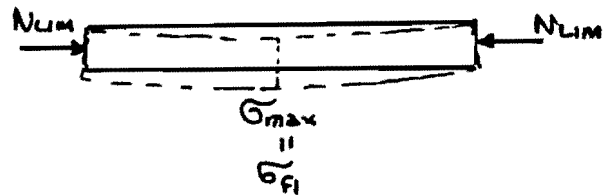
Este proceso implica, que siempre estaremos considerando una cierta excentricidad en el punto de aplicación del esfuerzo normal, lo que está plenamente justificado si pensamos en las imperfecciones de la pieza, y en la dificultad de que realmente se produzca en la práctica compresiones centradas, ya que las uniones en rótula, nunca son en la realidad perfectas articulaciones que no opongan ninguna resistencia al giro.

Por lo tanto, sabemos que si aplicamos un cierto esfuerzo normal  $N_{LIM}$  de valor:

$$N_{LIM} = \frac{\tilde{\sigma}_{fi}}{W} \cdot A$$

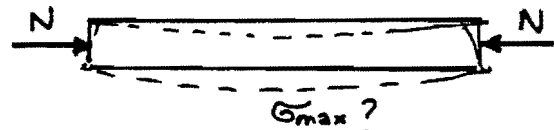


$$\tilde{\sigma}_N = \frac{N_{LIM}}{A} = \frac{\tilde{\sigma}_{fi}}{W}$$

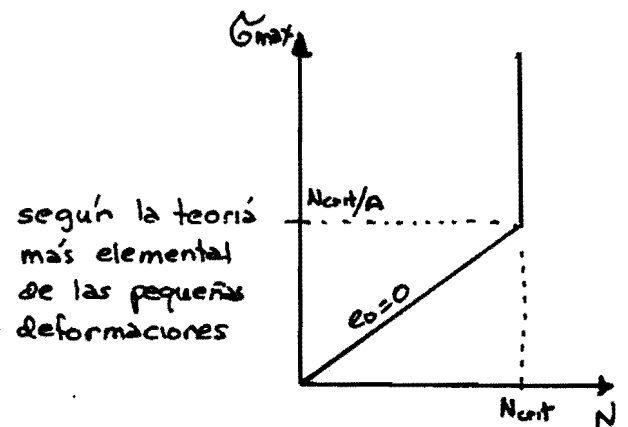
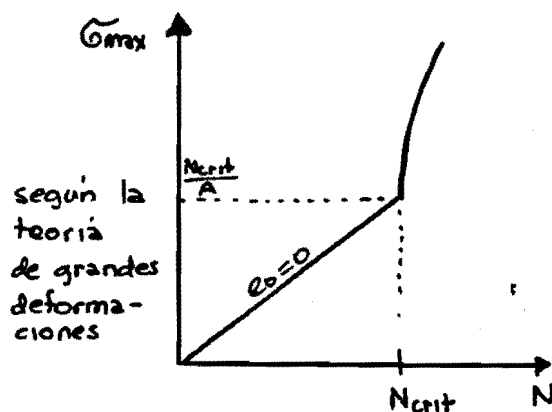


En la sección más desfavorable se producirá la tensión de fluencia

La pregunta que nos podemos plantear es que tensión máxima se producirá como consecuencia de los efectos de 2º orden, si el esfuerzo normal aplicado es inferior a  $N_{LIM}$



Sabemos que si  $N$  estuviese perfectamente centrada, y no existiesen imperfecciones en la barra, la gráfica tensión-esfuerzo normal es del tipo



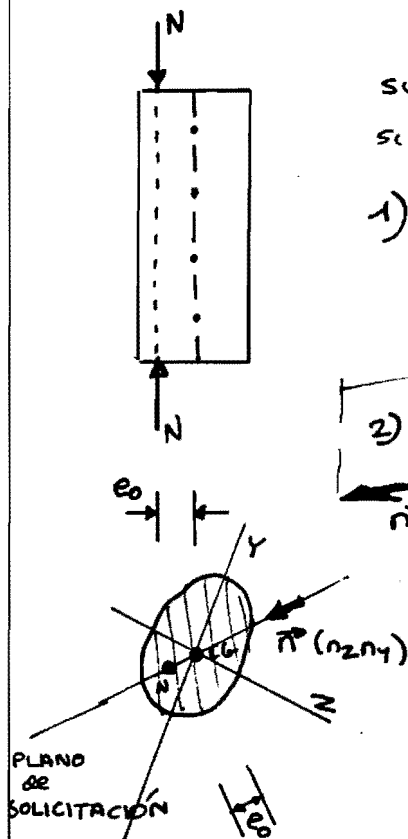


Por lo tanto:

$$\sigma_{max} = w \cdot \frac{N}{A}$$

Esta tensión, es la que podemos atribuir que genera un esfuerzo normal  $N$  aplicado en una barra, considerando implícitamente una excentricidad, en el citado punto de aplicación, y evaluando las tensiones adicionales que se generan como consecuencia de los efectos de 2º orden.

**13.11. EL DIMENSIONADO DE ELEMENTOS FLEXOCOMPRESIDOS, SEGÚN LAS NORMATIVAS VIGENTES, CONSIDERANDO LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN**



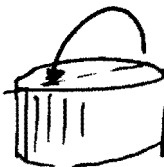
La norma MV.103, calcula la tensión como suma de las que producen en los dos casos siguientes:

1) (con excentricidad implícita)



tensiones de 1er orden y de 2º orden

2)



MOMENTO PURO, calculado reduciendo en un 10% la excentricidad original, a fin de tener presente que en el 1er cálculo ya se considera indirectamente  $N$  descentrado.

La expresión de la tensión en un punto cualquiera, será:

$$\sigma = \frac{N}{A} w + \frac{0,9e_0 N}{\begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix}$$

(z, y) coordenadas del punto en que se calcula la tensión  
(n<sub>z</sub> n<sub>y</sub>) vector unitario que tiene como dirección la recta N - CaeG.



En los casos en los que el esfuerzo normal está aplicado en el eje de simetría Y, la tensión máxima se producirá en un punto de dicho eje y máximamente distante del C. de G., y la fórmula que la determina es:

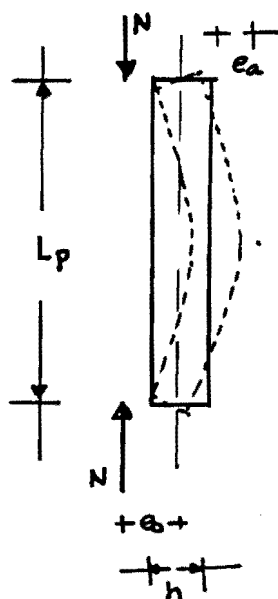
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} w + \frac{0,9 N e_0}{W_z}$$

La tensión obtenida mediante el procedimiento descrito, no podrá ser inferior a la que obtendríamos sin considerar los efectos de segundo orden y la excentricidad implícita, y no minorando en el otro sumando la excentricidad. En consecuencia, deberá también calcularse:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{e_0 N}{\begin{bmatrix} I_z & -I_{zy} \\ -I_{zy} & I_y \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z & -I_{zy} \\ -I_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix}$$

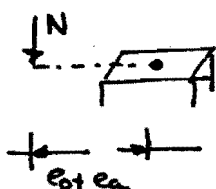
O bien: 
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_0}{W_z}$$

En el caso del Hormigón Armado, la instrucción nos proporciona una fórmula empírica y por lo tanto aproximado, para calcular el corrimiento que experimentará la sección central



$$e_a = h \left( \frac{L_p/h}{100} \right)^2 \left( 3 + \frac{f_{yd}}{3500} \right) \frac{h + 20 e_0}{h + 10 e_0}$$

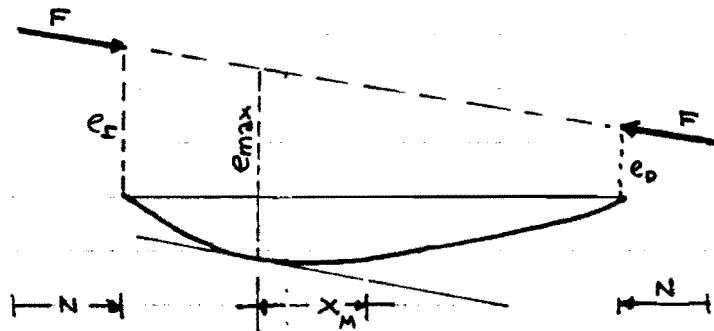
Y por lo tanto las armaduras del pilar deberán ser tales, que sean capaces de equilibrar el esfuerzo normal N, descentrado en  $e_0 + e_a$





### 16.12. TRANSFORMACIÓN DE UNA COMPRESIÓN CON EXCENTRICIDAD VARIABLE, EN OTRA CON EXCENTRICIDAD CONSTANTE

Hemos expuesto que una barra comprimida con excentricidad variable, sufre movimientos, tales que la excentricidad real en una sección intermedia vale:



$$e(x) = \frac{e_1 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} + x \right) \right) + e_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} - x \right) \right)}{\operatorname{sen} \alpha}$$

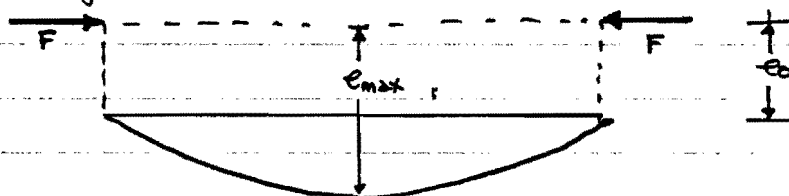
Calculando la  $x_M$ , para la cual  $e(x)$  alcanza valor máximo, lo cual se producirá para el valor de  $x_M$  tal que:

$$\left( \frac{de(x)}{dx} \right)_{x_M} = \frac{\frac{\alpha}{L} e_1 \cos \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} + x_M \right) \right) - \frac{\alpha}{L} e_0 \cos \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} - x_M \right) \right)}{\operatorname{sen} \alpha} = 0$$

$$\cos \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} + x_M \right) \right) = \frac{e_0}{e_1} \cos \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} - x_M \right) \right)$$

$$e_{\max} = \frac{e_1 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} + x_M \right) \right) + e_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} - x_M \right) \right)}{\operatorname{sen} \alpha}$$

La compresión equivalente, es la que con excentricidad  $e_0$  igual en ambos extremos, genera el valor  $e_{\max}$  calculado anteriormente para su sección central. Es decir:



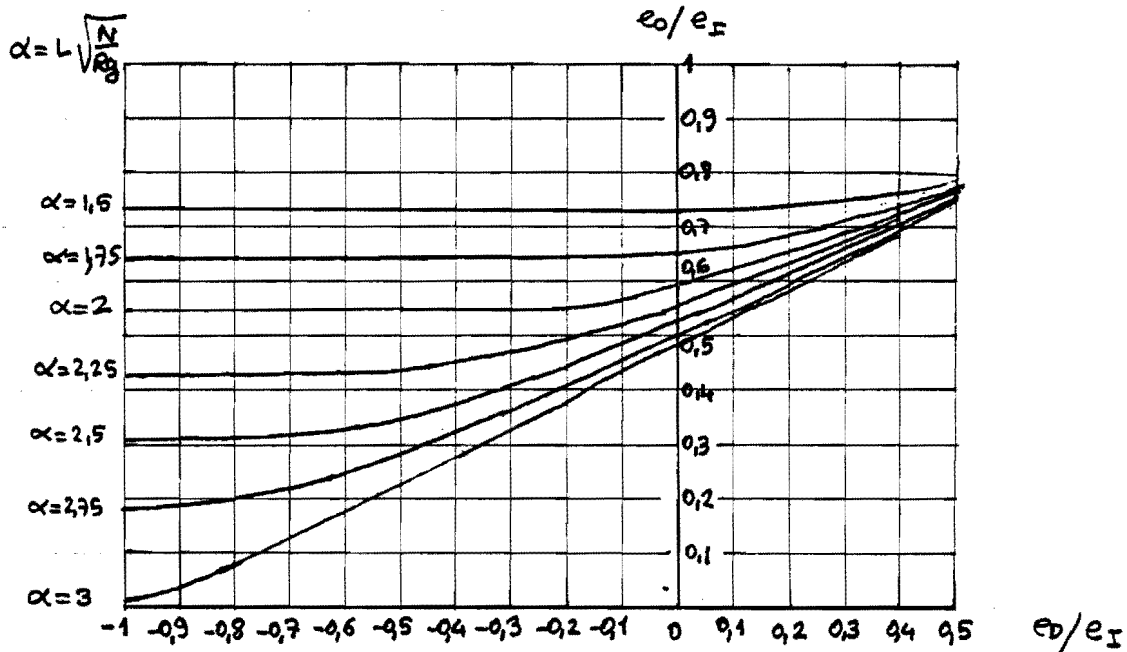


Sabemos que :  $e_{max} = \frac{e_0}{\cos(\alpha/2)}$  según la teoría de la secante



$$e_0 = e_{max} \cdot \cos(\alpha/2)$$

$$e_0 = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin \alpha} \left[ e_I \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} + x_M\right)\right) + e_D \sin\left(\frac{\alpha}{L}\left(\frac{L}{2} - x_M\right)\right) \right]$$

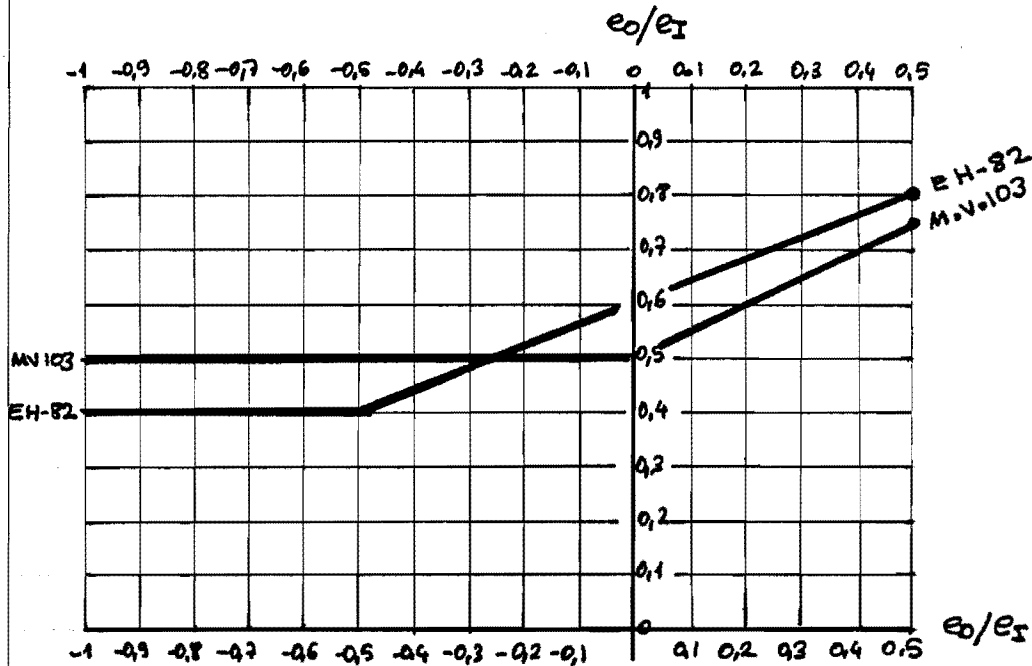


La E.H.-82 y la M.V.103 nos proporcionan reglas prácticas para la asimilación propuesta, y la consecuente determinación de  $e_0$

Suponiendo que  $|e_I| > |e_D|$  y que a  $e_I$  se le asigna signo positivo, los criterios señalados por las citadas instrucciones son:

$$E.H.-82 \Rightarrow e_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,4 e_I \\ 0,6 e_I + 0,4 e_D \end{array} \right\}$$

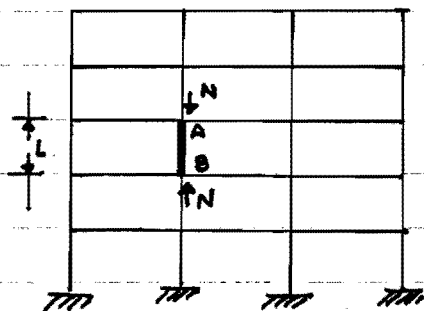
$$M.V.103 \Rightarrow e_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,5 e_I \\ 0,5 (e_I + e_D) \end{array} \right\}$$



Lo que representa errores hacia el lado de la seguridad, para valores de  $\alpha$  correspondientes a esfuerzos normales cercanos a los críticos, y en particular, en el caso de la EH-82 para  $\alpha > 2,3$  y para la M.V.103 si  $\alpha > 2,1$

16.13. ASIMILACIÓN DE UNA BARRA PERTENECIENTE A UN CONJUNTO ESTRUCTURAL, A UNA BARRA DE LONGITUD FICTICIA, CON AMBOS EXTREMOS ARTICULADOS - LONGITUD de PANDEO

Si deseamos analizar una cierta barra AB perteneciente a una cierta estructura, lo más simple será determinar que longitud  $l_p$  tendrá que tener una barra de igual sección, para que estando ambos extremos articulados, se colapse para el mismo esfuerzo normal  $N$ .

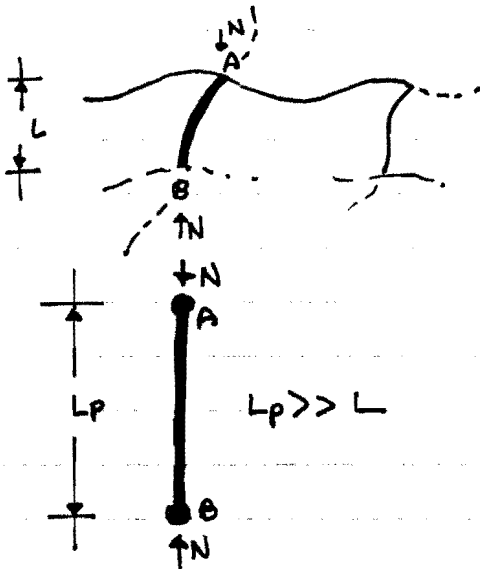


Si la estructura croquizada no posee desplazamientos, es evidente que el conjunto de barras concurrentes a los nudos A y B, disminuyen la deformabilidad de la barra, y en consecuencia para que la doblemente articulada posea un comportamiento simi-



lar es preciso que tenga una longitud menor:  $L_p < L$

Si existen desplazamientos, estos provocarán que los efectos de segundo orden posean una fuerte influencia, lo cual podrá solo compensarse en la barra doblemente articulada asignándole una fuerte longitud  $l_p$  por lo que:

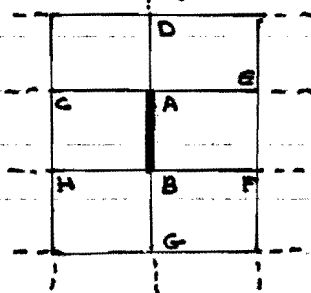


$$L_p \gg L$$

La determinación del esfuerzo normal  $N$ , que colapsará la barra AB como integrante de un cierto conjunto estructural, se efectuará atendiendo a

los conceptos desarrollados en el presente tema, y los correspondientes a ANÁLISIS ESTRUCTURAL, que aun están pendientes de desarrollo y en consecuencia, nos limitaremos de momento a recoger lo establecido por la normativa vigente

La M.V.103 nos indica que debemos determinar el grado de empotramiento del soporte AB, en ambos extremos mediante el siguiente proceso de cálculo:



$$K_{AD} = I_{AD}/L_{AD} \quad K_{AB} = I_{AB}/L_{AB} \quad \dots$$

$$S_A = K_{AC} + K_{AD} + K_{AE} + K_{AB}$$

$$S_B = K_{BH} + K_{AB} + K_{BF} + K_{BG}$$

$$\gamma_A = \frac{K_{AC} + K_{AE}}{S_A} \quad \gamma_B = \frac{K_{BH} + K_{BF}}{S_B}$$

Determinado  $\gamma_A$  y  $\gamma_B$  se aplicará según se traslacional o no la estructura, las siguientes fórmulas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{TRASLACIONAL} \\ \text{INTRASLACIONAL} \end{array} \right\} \beta = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1,6 + 2,4(\gamma_A + \gamma_B) + 1,1\gamma_A\gamma_B}{(\gamma_A + \gamma_B) + 5,5\gamma_A\gamma_B}} \\ \sqrt{\frac{3 - 1,6(\gamma_A + \gamma_B) + 0,84\gamma_A\gamma_B}{3 - (\gamma_A + \gamma_B) + 0,28\gamma_A\gamma_B}} \end{array} \right. \quad L_p = \beta \cdot L$$

La propia M.V.103, proporciona las siguientes tablas para el cálculo de  $\beta$





# DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

EFFECTOS DE 2º ORDEN EN LA FLEXOCOMPRESIÓN

16.31

## ARRIOSTRADAS

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	1	0,97	0,95	0,93	0,90	0,88	0,85	0,81	0,78	0,74	0,70
0,1	0,97	0,95	0,93	0,91	0,88	0,86	0,83	0,80	0,76	0,72	0,69
0,2	0,95	0,93	0,91	0,89	0,86	0,84	0,81	0,78	0,75	0,71	0,67
0,3	0,93	0,91	0,89	0,87	0,84	0,82	0,79	0,76	0,73	0,69	0,66
0,4	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,77	0,74	0,71	0,67	0,64
0,5	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,77	0,75	0,72	0,69	0,65	0,63
0,6	0,85	0,83	0,81	0,79	0,77	0,75	0,72	0,70	0,67	0,63	0,61
0,7	0,81	0,80	0,78	0,76	0,74	0,72	0,70	0,67	0,64	0,61	0,58
0,8	0,78	0,76	0,75	0,73	0,71	0,69	0,67	0,64	0,61	0,58	0,56
0,9	0,74	0,72	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61	0,58	0,56	0,53
1	0,70	0,69	0,67	0,66	0,64	0,63	0,61	0,58	0,56	0,53	0,50

En el caso de la E.H-82, el procedimiento es similar, y los resultados son idénticos, por lo que a estos efectos pueden aplicarse indistintamente una u otra normativa.

## SIN ARIOSTRAMIENTOS

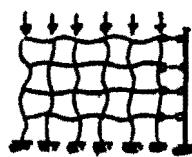
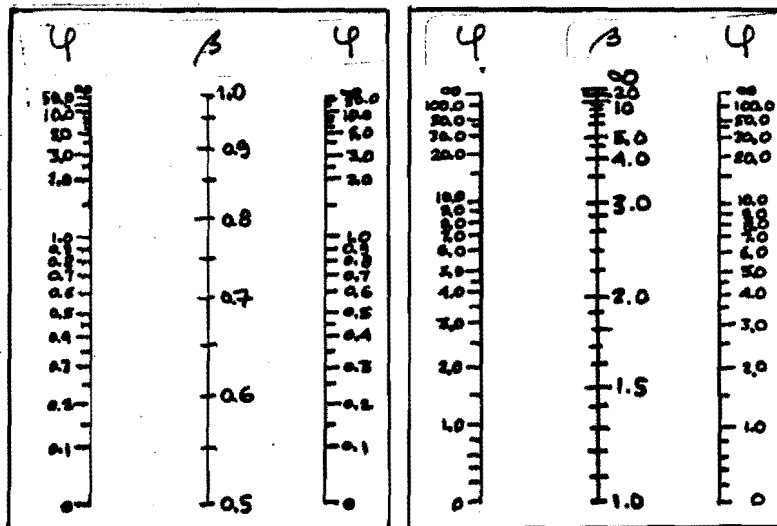
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	∞	4,29	3,23	2,78	2,53	2,37	2,24	2,17	2,10	2,04	2,00
0,1	4,29	2,89	2,39	2,15	1,98	1,88	1,80	1,74	1,69	1,66	1,62
0,2	3,23	2,39	2,05	1,85	1,78	1,64	1,58	1,53	1,49	1,46	1,43
0,3	2,78	2,15	1,85	1,69	1,56	1,52	1,44	1,40	1,36	1,33	1,31
0,4	2,53	1,98	1,78	1,56	1,48	1,41	1,35	1,31	1,28	1,24	1,22
0,5	2,37	1,88	1,64	1,52	1,41	1,34	1,29	1,24	1,21	1,18	1,16
0,6	2,24	1,80	1,58	1,44	1,35	1,29	1,24	1,20	1,16	1,14	1,11
0,7	2,17	1,74	1,53	1,40	1,31	1,24	1,20	1,16	1,12	1,10	1,08
0,8	2,10	1,69	1,49	1,36	1,28	1,21	1,16	1,12	1,09	1,07	1,05
0,9	2,04	1,66	1,46	1,33	1,24	1,18	1,14	1,10	1,07	1,04	1,02
1	2,00	1,62	1,43	1,31	1,22	1,16	1,11	1,08	1,05	1,02	1,00

La E.H-82 nos exige la determinación del grado  $\varphi$  de flexibilidad mediante las fórmulas:

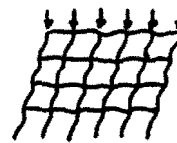
$$\varphi_A = \frac{K_{AD} + K_{AB}}{K_{AC} + K_{AE}} \left( = \frac{1}{\beta_A} - 1 \right)$$

$$\varphi_B = \frac{K_{AB} + K_{BE}}{K_{BH} + K_{BF}} \left( = \frac{1}{\beta_B} - 1 \right)$$

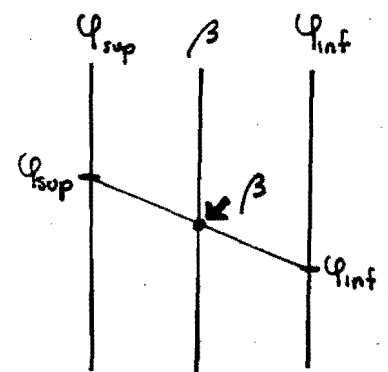
Y conocidos los grados de flexibilidad extremas, se aplica el nomograma siguiente:



PERFILES INTRADUCCIONALES



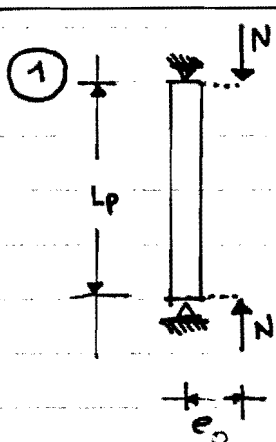
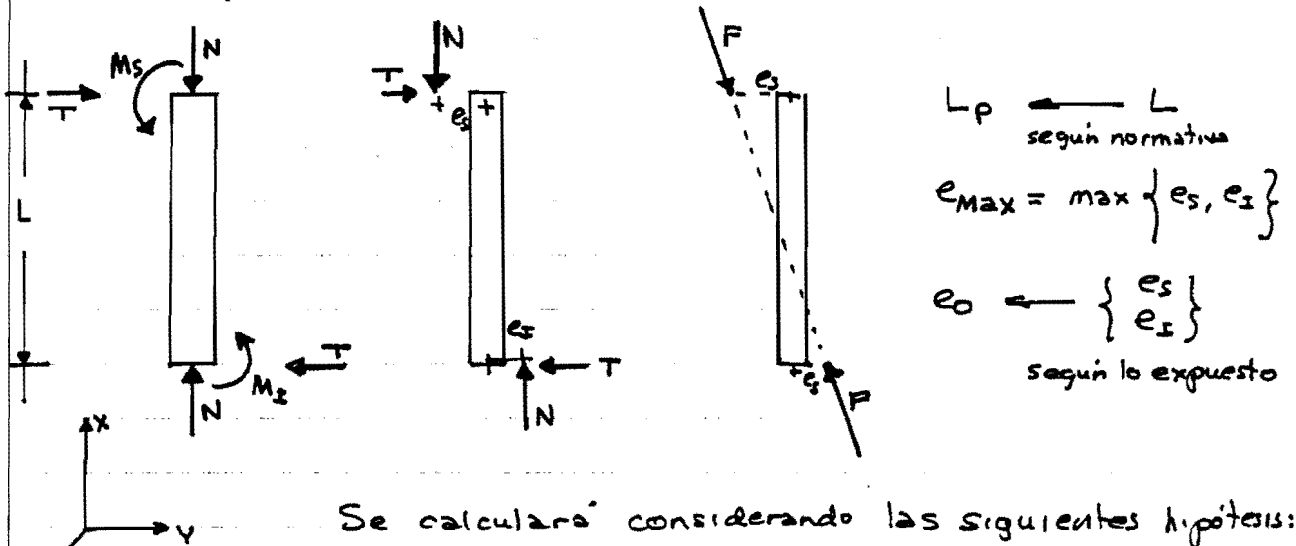
PERFILES TRIDUCCIONALES



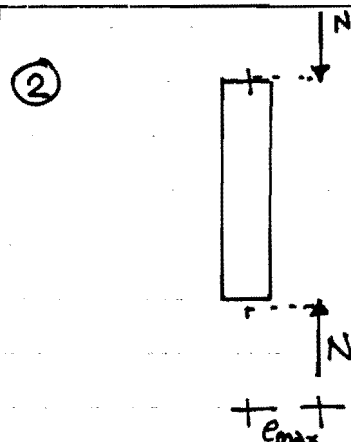


## 16.14. DIMENSIONADO de SOPORTES MEDIANTE PERFILES H

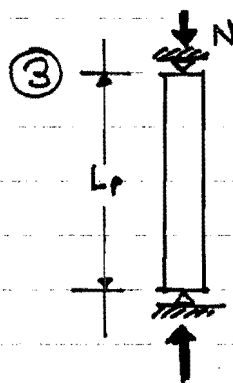
Los soportes estructurales están generalmente solicitados a flexocompresión



CON EFECTOS de 2º ORDEN en el plano XY



SOLO EFECTOS de 1er ORDEN



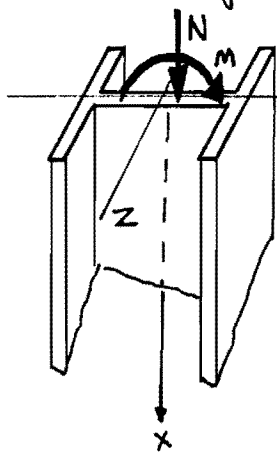
(Caso de que no estén impedidos los movimientos en el plano XZ)

CON EFECTOS de 2º ORDEN en el plano XZ



Donde  $M_0$  se obtiene tal como se indicó en [7.12.] y  $M_{max}$ , es el momento máximo de  $M_s$  y  $M_T$ .

El proceso consistirá en elegir un cierto perfil, al cual las tablas les asociarán los parámetros geométricos:



$$\left. \begin{array}{l} A \\ W_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_y \\ \rho_z \end{array}$$

Las tres verificaciones a efectuar son:

### VERIFICACIÓN - 1

Cálculo de la esbeltez mecánica para movimientos en el plano X.Y

$$\lambda_z = \frac{L_p}{\rho_z}$$

El coeficiente  $w_z$  que permite la mayoración de las tensiones  $\sigma_N = N/A$ , para considerar las tensiones generadas por los efectos de 2º orden, se obtendrá según la fórmula correspondiente, o por tabla.

$$\lambda_z \longrightarrow w_z$$

La tensión será:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} w_z + \frac{0,9 M_0}{W_z}$$

Si:  $\sigma_1 \leq \sigma^*$   
la sección propuesta según esta verificación es correcta.

VERIFICACIÓN - 2 Sólo efectos de 1º orden:

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z}$$

Si:  $\sigma_2 \leq \sigma^* \Rightarrow$  CORRECTO

VERIFICACIÓN - 3 Efectos de 2º orden por movimientos en el plano X.Z, se determinan calculando la esbeltez mecánica:

$$\lambda_y = \frac{L_p}{\rho_y} \longrightarrow w_y \quad \text{y la tensión será:}$$

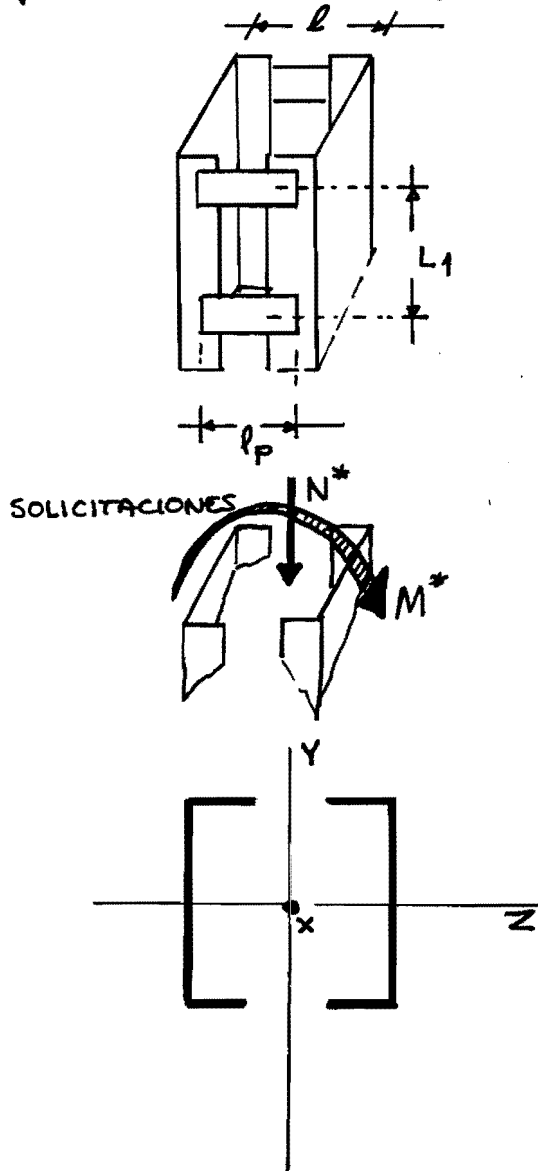
$$\sigma_3 = \frac{N}{A} w_y \quad \text{Si: } \sigma_3 \leq \sigma^* \Rightarrow \text{CORRECTO}$$

Si alguna es incorrecta se propondrá otro perfil.



## 16.15. SOPORTES COMPUESTOS DE DOS PERFILES EMPRESILLADOS SOLICITADOS A FLEXIÓN COMPLESTA SIMÉTRICA

En el caso de que utilizemos dos perfiles unidos mediante presillas, según el esquema de la figura:

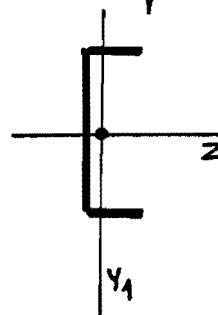


Las comprobaciones que se deberán efectuar son 4, las cuales a continuación las iremos desarrollando

### VERIFICACIÓN - 1

Considerando como plano de flexión el XY, es decir, eje de rotación Z, las tensiones, considerando los efectos de 2º orden no deben superar la tensión  $\sigma^*$  del acero.

Si se propone un perfil, de características geométricas determinadas por:



A área en  $\text{cm}^2$   
 $r_z$  radio de giro respecto al eje Z en cms

La ESBELTEZ MECÁNICA del soporte

según el plano XY, será:

$$\lambda_z = \frac{L_P}{r_z}$$

A la esbeltez  $\lambda_z$  le corresponderá un coeficiente  $\omega_z$  que puede determinarse por tablas o por las fórmulas indicadas

$$\lambda_z \longrightarrow \omega_z$$

La tensión que se producirá, será:



$$\bar{\sigma}_1 = \frac{N^*}{2A} w_2$$

Si  $G_1 < G^*$  la sección propuesta es correcta según la verificación - 1

Para aceros A-42 puede aplicarse las siguientes expresiones algebraicas para determinar el primer perfil en  $\text{C}$  correcto, y para otros tipos de acero, el resultado deberá considerarse como orientativo.

$$a = \left(\frac{L_p}{400}\right)^2 - \frac{L_p}{1750} - 0,0267$$

$$b' = \frac{1}{a} \left[ \left(\frac{L_p}{462,78}\right)^2 + \frac{L_p}{1575} - 0,6843 \right]$$

$$c' = \frac{1}{a} \left[ 0,3 + \frac{100 G^*}{N^*} - \left(\frac{L_p}{500}\right)^2 - \frac{L_p}{600} \right]$$

$L_p$  en cms  
 $N^*$  en Kg  
 $G^*$  en Kg/cm<sup>2</sup>

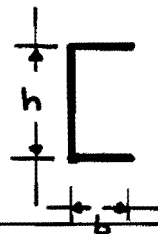
$$A = \frac{100}{b' + \sqrt{b'^2 + c'}}$$

área en cm<sup>2</sup> que debe tener la sección transversal del perfil solución.

$$b = 2,383 * (-1,627 + \sqrt{0,542 * A - 1})$$

sin decimales, sólo parte entera.

$$h = 2(b+1)$$

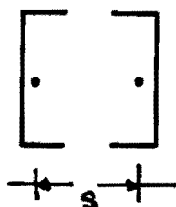


Otra regla orientativa, es que :

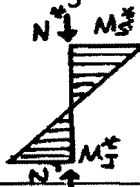
$$I_2^E = \frac{1}{2} 0,733 \cdot L_p^2 \cdot N^*$$

donde  $L_p$  en metros  
 $N^*$  en toneladas  
 $I_2^E$  en cm<sup>4</sup>, correspondiente a un solo perfil  $\text{C}$

VERIFICACIÓN-2 Elegidos los dos perfiles en  $\text{C}$  a utilizar, debemos fijar la distancia  $S$  que deben guardar sus centros de gravedad.



El soporte, tendrá un momento máximo que en general se producirá en uno de sus extremos



$$M_{max}^* = \max \left\{ |M_{s1}^*|, |M_{s2}^*| \right\}$$



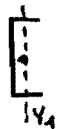
Respecto al eje Y, los dos perfiles en E tendrán un cierto momento resistente, el cual deberá valer, para que la tensión producida exclusivamente por los EFECTOS de 1er ORDEN no sobrepase la correspondiente al del acero utilizado, la cantidad de:

$$W_Y = \frac{M_{max}^*}{\sigma^* - N^*/2A} \quad \leftarrow \quad \sigma^* = \frac{N^*}{2A} + \frac{M_{max}^*}{W_Y}$$

Determinado el momento resistente, la distancia S de los c. de G, puede calcularse mediante la fórmula:

### DATOS

A área de un perfil E  
 $\rho_{Y_1}$  radio de giro de un perfil respecto a su eje  $Y_1$



e distancia del c. de G del perfil al paramento



$$p = \frac{W_Y}{2A}$$

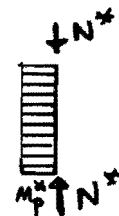
$$S = p + \sqrt{p(p + 4e) - 4\rho_{Y_1}^2}$$

(La distancia S es provisional, estará supeditada a la siguiente verificación)

### VERIFICACIÓN-3

Considerando el soporte solicitado por un momento constante, a efectos del cálculo de las tensiones generadas por los efectos de segundo orden, este deberá valer:

$$M_p^* = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,5 M_{max}^* \\ |0,5 (M_S + M_E)| \end{array} \right\}$$



Calcularemos el coeficiente  $W_Y$  para que los efectos de segundo orden sean como máximo  $\sigma^*$ . Dicho coeficiente será:

$$\sigma^* = W_Y \frac{N^*}{2A} + 0,9 \frac{M_p^*}{W_Y} \quad \Rightarrow \quad W_Y = \frac{\sigma^* - 0,9 \frac{M_p^*}{W_Y}}{N^*/2A}$$

Utilizando como  $W_Y$ , el deducido en la verificación-2.



Calculado el coeficiente  $\omega_y$ , puede calcularse de que esbeltez mecánica debe proceder mediante tablas, o por la fórmula:

$$k_1 = \frac{\sigma^*}{2,0726 \cdot 10^7}$$

$$k_2 = \frac{\sigma^* 2}{0,46825 \cdot 10^{13}} + \frac{\sigma^*}{1,62666 \cdot 10^7} + \frac{1}{0,5633 \cdot 10^6}$$

$$\lambda_y = \sqrt{\frac{\omega_y - 1}{k_2 - k_1 / \omega_y}}$$

O bien  $\boxed{\omega_y \longrightarrow \lambda_y}$  por TABLAS.

El radio de giro de las dos  $[$  deberá ser:

$$\boxed{\rho_y^{[C]} = L_p / \lambda_y}$$

Y conocido el radio de giro de una sola  $[$ , y de las dos  $[$ , puede deducirse mediante el teorema de Steiner, la distancia  $s$  que deben situarse los C. de G. que vendrá determinado por la fórmula:

$$\boxed{s' = 2 \sqrt{\rho_y^{[C]2} - \rho_{y_1}^2}}$$

- \* Si:  $s' < s$  (verificación-2) la distancia correcta es la  $s$  evidentemente
- \* Si:  $s' > s$  la distancia correcta será un valor inferior a  $s'$ , ya que en tal caso  $s'$  sólo es aproximado, puesto que se han efectuado los cálculos en función de un  $\omega_y$  que ha resultado no correcto.

A efectos prácticos puede adoptarse como distancia de los C. de G. el valor  $s'$

$$\underline{s' = s}$$

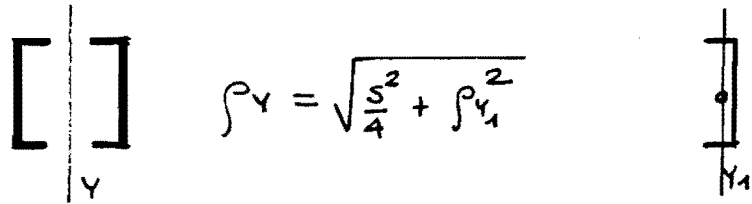
CONOCIDA la distancia  $s$  entre los C. de G. el lado del pilar será:

$$\boxed{l = 2e + s}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{+s+} \\ +l+ \end{array}$$



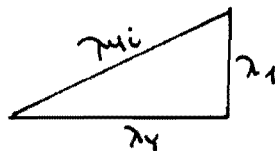
El radio de giro del conjunto de los dos perfiles  $C$  respecto al eje  $Y$ , será:



$$r_y = \sqrt{\frac{S^2}{4} + r_{y1}^2}$$

VERIFICACIÓN-4 El hecho de que los dos perfiles estén unidos de forma discontinua, debe penalizarse en la obtención de las tensiones generadas por los efectos de segundo orden, mayorando el coeficiente  $w_y$  en otro  $w_{y_i}$  (correspondiente a una esbeltez IDEAL)

La esbeltez ideal  $\lambda_{y_i}$  que permite el cálculo de  $w_{y_i}$  se obtiene según la regla:



$$\lambda_{y_i} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} \longrightarrow w_{y_i}$$

Donde  $\lambda_1$ , es la esbeltez mecánica de un solo perfil entre dos presillas, y por lo tanto:

$$\lambda_1 = \frac{L_1}{r_{y1}}$$

La tensión máxima será:

$$\sigma = \frac{N w_{y_i}}{2A^e} \quad \text{debiéndose verificar } \sigma \leq \sigma^*$$

Por lo tanto, el proceso será determinar primeramente cual puede ser el máximo valor del coeficiente  $w_{y_i}$ , mediante la expresión:

$$w_{y_i} = \frac{2A^e \cdot \sigma^*}{N} \longrightarrow \lambda_{y_i}$$

PORTABLAS

Dado que conocemos la esbeltez mecánica  $\lambda_y$ , podemos deducir cual será la esbeltez  $\lambda_1$  que genere con la anterior el





valor  $\lambda_{yc}$ , el cual será:

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda_{yc}^2 - \lambda_Y^2}$$

Hay que señalar que según la normativa:

$$\lambda_1 \geq 50$$

Por lo tanto:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{50}{\sqrt{\lambda_{yc}^2 - \lambda_Y^2}} \right\}$$

Conocido  $\lambda_1$ , la distancia entre presillas será:

$$L_1 = \lambda_1 \rho_{Y1}$$

### PROCESO FINAL: DIMENSIONADO DE LAS PRESILLAS.-

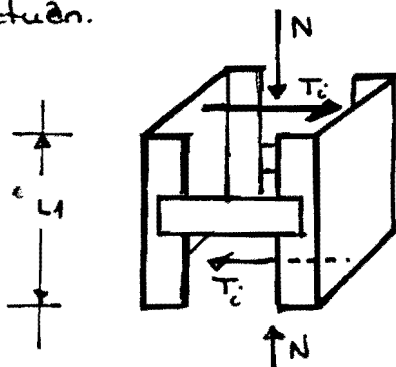
El cortante en el soporte, según los efectos de 1er orden será:

$$T = \frac{|M_s - M_E|}{L}$$

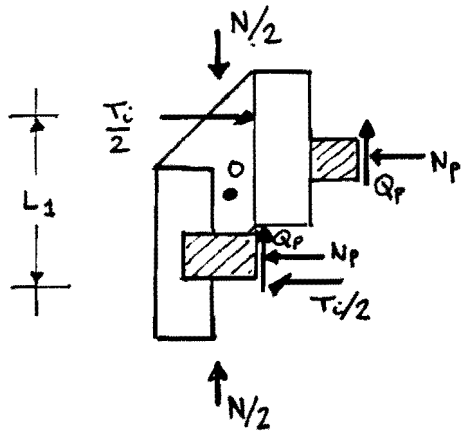
Como consecuencia de los efectos de 2º orden, el cortante será:

$$T_i = \frac{|M_s - M_E|}{L} + \frac{N \cdot \omega_{Yc}}{80} \cdot \max \left\{ \frac{1}{\frac{s}{20 \rho_{Y1}}} \right\}$$

Un método de cálculo aproximado de solicitaciones, en tipologías reticulares, con acciones en nudos, y en las que los desplazamientos son fundamentales, consiste en suponer punto de inflexión ( $M_f = 0$ ) en la sección central de la barra, y este supuesto nos permite cortar por dicha sección solo adicionando el cortante y el esfuerzo normal que sobre la misma actúan.



Si a su vez separamos los dos perfiles en  $\Gamma$ , cortando las presillas por su sección central, obtendremos el siguiente esquema:



Tomando momentos respecto al C. de G. del perfil E aislado, tendremos:

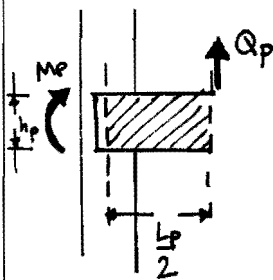
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \frac{T_i}{2} L_1 = 2 Q_p \frac{S}{2}$$



El cortante Q en el centro de la presilla será:

$$Q_p = \frac{T_i \cdot L_1}{2S}$$

El momento flector de la presilla en su sección de empotramiento será:



$$M_p = \frac{l_p}{2} Q_p$$

Donde:  $l_p = l - 3cms$

(el lado del soporte)

Conocido el momento flector de la presilla, la tensión máxima viene determinada por la expresión:

$$\sigma_p = \frac{M_p}{h_p^2 e_p / 6}$$

Si imponemos que:  $\sigma_p = \sigma^*$  del tipo de acero utilizado y

fijamos el espesor  $e_p$

resultará:

$$h_p = \sqrt{\frac{6 M_p}{e_p \sigma^*}}$$

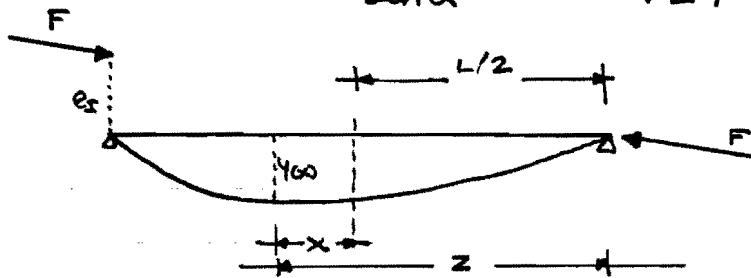
Con lo que queda totalmente dimensionado el soporte.



## 16.16. RIGIDEZ de una BARRA ISOSTÁTICA atendiendo a los EFECTOS de 2º ORDEN

Según hemos expuesto, e imponiendo que  $e_D = 0$ :

$$y(x) = \frac{e_I \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} + x \right) \right)}{\operatorname{sen} \alpha} - \left( \frac{e_I}{2} \right) - \frac{x}{L} e_I$$



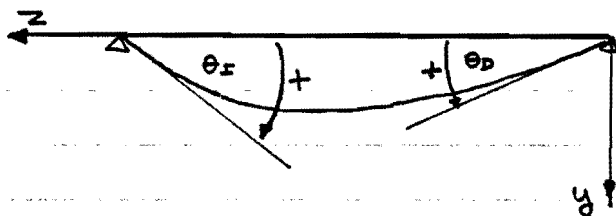
$$y(x) = e_I \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} \left( \frac{L}{2} + x \right) \right)}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{L} \left( \frac{L}{2} + x \right) \right)$$



$$y(z) = e_I \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{L} z \right)}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{z}{L} \right)$$

Donde  $z$  es la abscisa de la sección, adoptando como origen el apoyo o extremo derecho.

Calculemos las rotaciones en los extremos, adoptando para las mismas los siguientes criterios:



Lo que implica que:

$$\theta_I = - \left( \frac{dy(z)}{dz} \right)_{z=L}$$

$$\theta_D = \left( \frac{dy(z)}{dz} \right)_{z=0}$$

En consecuencia:

$$\theta_I = -e_I \left[ \frac{\frac{\alpha}{L} \cos \left( \frac{\alpha}{L} z \right)}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{L} \right]_{z=L} = -\frac{e_I}{L} \left( \frac{\alpha}{\operatorname{tag} \alpha} - 1 \right) = \theta_I$$

$$\theta_I = \frac{e_I}{L} \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tag} \alpha} \right)$$



$$\theta_D = e_I \left[ \frac{\frac{\alpha}{L} \cos\left(\frac{\alpha}{L} z\right)}{\text{sen} \alpha} - \frac{1}{L} \right]_{z=0} = \frac{e_I}{L} \left[ \frac{\alpha}{\text{sen} \alpha} - 1 \right]$$

Si definimos como factor  $\beta$ , el cociente:

$$\beta = \frac{\theta_D}{\theta_I}$$



$$\beta = \frac{\frac{e_I}{L} \left[ \frac{\alpha}{\text{sen} \alpha} - 1 \right]}{\frac{e_I}{L} \left( 1 - \frac{\alpha}{\text{tag} \alpha} \right)} = \frac{\alpha - \text{sen} \alpha}{\text{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha} = \beta$$

Si definimos como rigidez  $K_{GG}^I$  al valor que determina el momento aplicado en el extremo de una barra, en función del ángulo girado por la tangente a la elástica, en dicho extremo, resultará:

$$M = N e_I = K_{GG}^I \theta_I \Rightarrow K_{GG}^I = \frac{N e_I}{\theta_I}$$

$$K_{GG}^I = \frac{N L}{1 - \frac{\alpha}{\text{tag} \alpha}}$$

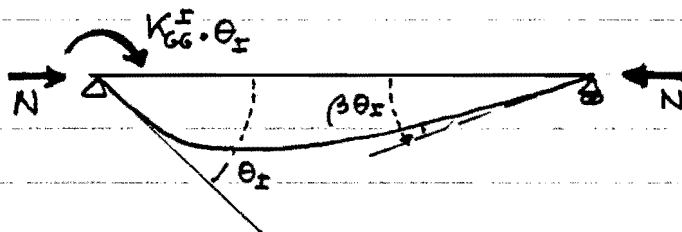
Recordando que habíamos definido como  $\alpha = L \sqrt{\frac{N}{R_g}}$ , ello nos permite sustituir  $N$  por:

$$N = \frac{\alpha^2}{L^2} R_g$$

y en consecuencia:

$$K_{GG}^I = \frac{R_g}{L} \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha}{\text{tag} \alpha}}$$

Esto nos permite establecer:





En el caso de que  $N=0$ ,  $K_{GG}^I$  y  $\beta$  deberán coincidir con los valores que se obtuvieron atendiendo exclusivamente a los efectos de 1º orden, y que fueron:

$$K_{GG}^I = \frac{3R_g}{L} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{si } N=0$$

Si aplicamos las expresiones anteriores, para este caso particular de  $N=0$ , al ser  $\alpha$  también nulo ( $\alpha = L\sqrt{N/R_g}$ ), se producen indeterminaciones del tipo  $0/0$ , que pueden resolverse si se aproxima el  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{cos } \alpha$  a:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \\ \text{cos } \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} \end{aligned} \right\} \text{ para valores de } \alpha \text{ cercanos a cero.}$$



$$\text{tag } \alpha = \frac{\alpha - \alpha^3/6}{1 - \alpha^2/2} = \frac{\alpha}{3} \frac{6 - \alpha^2}{2 - \alpha^2}$$



$$K_{GG}^I = \frac{R_g}{L} \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha}{\text{tag } \alpha}} = \frac{R_g}{L} \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha^3(2-\alpha^2)}{\alpha(6-\alpha^2)}}$$

$$K_{GG}^I = \frac{R_g}{L} \frac{\alpha^2 (6 - \alpha^2)}{6 - \alpha^2 - 6 + 3\alpha^2}$$

$$K_{GG}^I = \frac{R_g}{L} \frac{6\alpha^2}{2\alpha^2} = \frac{3R_g}{L} = K_{GG}^I \quad \text{c. q. d.}$$

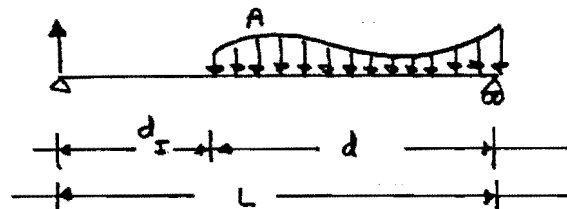
Y análogamente:

$$\beta = \frac{\alpha - \text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha - \alpha \cdot \text{cos } \alpha} = \frac{\alpha - \alpha + \alpha^3/6}{\alpha - \alpha^3/6 - \alpha + \alpha^3/2} = \frac{1/6}{-1/6 + 1/2} = \frac{1}{2} \quad \text{c. q. d.}$$



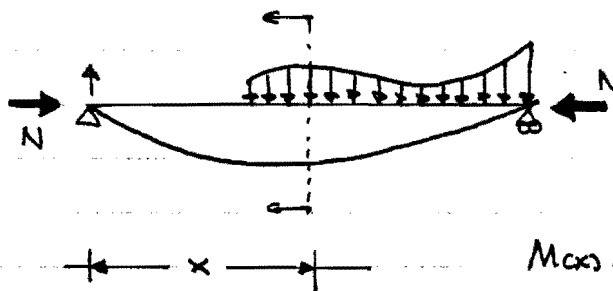
16.7. DEFORMADA DE UNA BARRA CON ACCIONES APLICADAS EN PUNTOS GENÉRICOS ATENDIENDO A LOS EFECTOS de 2º ORDEN.

Según hemos expuesto:



$$M(x) = \frac{A}{c!} \left( \frac{[d_1]^c}{L} x - [x - d_2]^c \right)$$

Si además consideramos los efectos de 2º orden generados por un cierto esfuerzo normal  $N$ , y la deformación por flexión de la barra, la ecuación de momentos flectores, será:



$$M(x) = Ny + \frac{A}{c!} \left( \frac{[d_1]^c}{L} x - [x - d_2]^c \right)$$

Si utilizamos la ecuación diferencial aproximada de la línea elástica, (por ser las deformaciones suficientemente pequeñas), se podrá establecer:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{R_g} M(x)$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{R_g} \left[ Ny + \frac{A}{c!} \left( \frac{[d_1]^c}{L} x - [x - d_2]^c \right) \right]$$

La resolución de la ecuación diferencial anterior, nos conduce a:

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \alpha \frac{x}{L} \right) + c_0 \cos \left( \alpha \frac{x}{L} \right) - \frac{A}{N} \left[ \frac{[d_1]^c}{c!} \frac{x}{L} - \frac{[x - d_2]^c}{c!} + \frac{R_g}{N} \frac{[x - d_2]^{c-2}}{(c-2)!} - \frac{R_g^2}{N^2} \frac{[x - d_2]^{c-4}}{(c-4)!} \right]$$

Donde:  $\alpha = L \sqrt{\frac{N}{R_g}}$

Siempre que:  $c \leq 5$  (16.7.10)



Lo cual puede simbolizarse para todo  $c$ , de la forma siguiente:

$$F(x, n) = \frac{A}{N} \sum_{i=0}^{2i \leq n} \left(-\frac{Rg}{N}\right)^i \frac{[x - d_I]^{n-2i}}{(n-2i)!}$$

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C_0 \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) - \frac{A \Gamma d_I^5}{N c!} \frac{x}{L} + F(x, c)$$

(16.17.2)

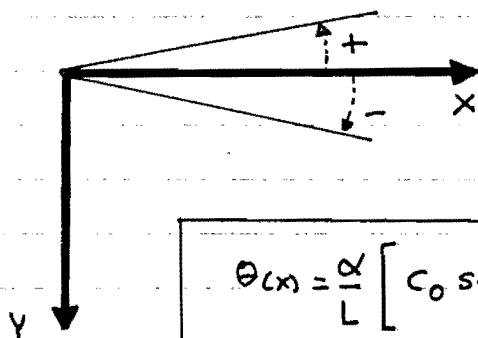
Donde  $F$  es una función integrada por un conjunto de sumandos limitados por la condición de que los exponentes sean positivos.

Para el desarrollo posterior, se precisará el cálculo de la función  $F$  en  $x = d_I$ , lo que hace aconsejable la definición de una función especial, que simplifique el cálculo y que se reduce a:

$$\varphi(n) \begin{cases} n \text{ impar} & \rightarrow = 0 \\ n \text{ par} & \rightarrow = \frac{A}{N} \left(-\frac{Rg}{N}\right)^{n/2} \end{cases} \quad (16.17.3)$$

siendo equivalente a  $\varphi(n)$  con  $F(d_I, n)$

La ecuación de las pendientes de la elástica, se obtiene por simple derivación, adicionándose un signo menos, si se desea utilizar el siguiente criterio de signos:



$$\Rightarrow \theta(x) = -\frac{dy(x)}{dx}$$



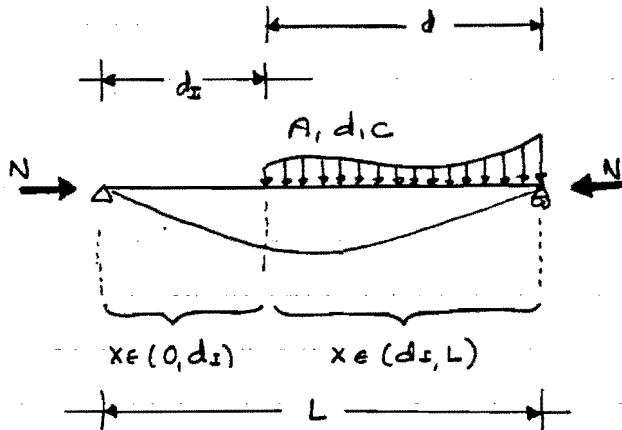
$$\theta(x) = \frac{\alpha}{L} \left[ C_0 \operatorname{sen}\left(\alpha \frac{x}{L}\right) - C_1 \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \right] + \frac{A \Gamma d_I^c}{N c! L} - F(x, c-1)$$

(16.17.4)

En donde se ha utilizado el hecho de que:  $\frac{dF(x, c)}{dx} = F(x, c-1)$  lo que es fácilmente demostrable.



La carga  $A, d, c$  se inicia en una cierta sección distante  $d_I$  del apoyo izquierdo, y  $d$  del derecho, lo que motiva que la ecuación de la elástica sea diferente en el intervalo  $(0, d_I)$  y en el  $(d_I, L)$ , al variar las constantes de integración correspondientes.



Podemos establecer la variación de las constantes de integración en función de la abscisa, atribuyéndolas la expresión:

$$C_0 \rightarrow k_0 + k_1 \Gamma x - d_I \Gamma^0$$

$$C_1 \rightarrow k_2 + k_3 \Gamma x - d_I \Gamma^0$$

en cuyo caso, la ecuación de la elástica, válida para toda  $x$  será:

$$y(x) = (k_0 + k_1 \Gamma x - d_I \Gamma^0) \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + (k_2 + k_3 \Gamma x - d_I \Gamma^0) \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) - \frac{A \Gamma d \Gamma^c}{N c! L} x + F(x, c)$$

$$\theta(x) = \frac{\alpha}{L} \left[ (k_0 + k_1 \Gamma x - d_I \Gamma^0) \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) - (k_2 + k_3 \Gamma x - d_I \Gamma^0) \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \right] + \frac{A \Gamma d \Gamma^c}{N c! L} - F(x, c-1)$$

(16.17.5.)

Las constantes  $k_0, k_1, k_2$  y  $k_3$  se determinarán imponiendo las condiciones de contorno:

$x=0 \Rightarrow y(x)=0$	1ª condición
$x=d_I \Rightarrow \begin{cases} y(x \leftarrow) = y(x \rightarrow) \\ \theta(x \leftarrow) = \theta(x \rightarrow) \end{cases}$	2ª " "
	3ª " "
$x=L \Rightarrow y(x)=0$	4ª " "

Apliquemos la 1ª condición:

$$y(0) = 0 = k_0 \cos\left(\frac{\alpha \cdot 0}{L}\right) + k_2 \sin\left(\frac{\alpha \cdot 0}{L}\right) - \frac{A \Gamma d \Gamma^c}{N c! L} \cdot 0$$





(En el intervalo  $(0, d_I)$  las constantes afectadas de  $\Gamma x - d_I \Gamma^0$  deberán no tenerse en cuenta, así como la función  $F(x, c)$  o la  $F(x, c-1)$ )

Operando:  $\boxed{0 = k_0}$  (16.17.6.)

Utilicemos la 2ª condición de contorno:

$$x = d_I \quad \theta = \alpha \frac{d_I}{L}$$

$$y(d_I \leftarrow) = \cancel{k_0} \cos \theta + k_2 \operatorname{sen} \theta - \frac{A \Gamma d_I^c}{N c L} d_I$$

$$y(d_I \rightarrow) = (\cancel{k_0} + k_1) \cos \theta + (k_2 + k_3) \operatorname{sen} \theta - \frac{A \Gamma d_I^c}{N c L} d_I + \varphi(c)$$

(Recuérdese que  $F(d_I, c) = \varphi(c)$ )

Por lo tanto:  $y(d_I \leftarrow) = y(d_I \rightarrow)$

$$\boxed{k_1 \cos \theta + k_3 \operatorname{sen} \theta + \varphi(c) = 0} \quad (16.17.7.)$$

La tercera condición de contorno nos permitirá establecer:

$$x = d_I \quad \theta = \alpha d_I / L$$

$$\theta(d_I \leftarrow) = \frac{\alpha}{L} [ \cancel{k_0} \operatorname{sen} \theta - k_2 \cos \theta ] + \frac{A \Gamma d_I^c}{N c L}$$

$$\theta(d_I \rightarrow) = \frac{\alpha}{L} [ (\cancel{k_0} + k_1) \operatorname{sen} \theta - (k_2 + k_3) \cos \theta ] + \frac{A \Gamma d_I^c}{N c L} - \varphi(c-1)$$

$$\theta(d_I \leftarrow) = \theta(d_I \rightarrow)$$

$$\frac{\alpha}{L} k_1 \operatorname{sen} \theta - \frac{\alpha}{L} k_3 \cos \theta - \varphi(c-1) = 0$$

$$\boxed{k_1 \operatorname{sen} \theta - k_3 \cos \theta - \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) = 0} \quad (16.17.8.)$$

Resolviendo el sistema que definen las igualdades (16.17.7.) y la (16.17.8.) de incógnitas  $k_1$  y  $k_3$ , se obtiene el que:



$$K_1 = \operatorname{sen} \theta \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) - \operatorname{cos} \theta \varphi(c)$$

(16.17.9.)

$$K_3 = -\operatorname{cos} \theta \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) - \operatorname{sen} \theta \varphi(c)$$

Imponiendo la 4ª condición, calcularemos  $K_2$

$$x=L \Rightarrow y(x)=0$$

$$0 = \left( \varphi(c-1) \operatorname{sen} \theta - \varphi(c) \operatorname{cos} \theta \right) \operatorname{cos} \alpha + \left( K_2 - \operatorname{cos} \theta \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) - \operatorname{sen} \theta \varphi(c) \right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{A \Gamma d^5}{N c!} + F(L, c)$$

$$K_2 = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \left[ \frac{A \Gamma d^5}{N c!} - F(L, c) + \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) \left( \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \alpha \right) + \varphi(c) \left( \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \alpha \right) \right]$$

$$K_2 = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \left[ \frac{A \Gamma d^5}{N c!} - F(L, c) + \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \varphi(c) \operatorname{cos}(\alpha - \theta) \right]$$

Simbolizando la diferencia  $\alpha - \theta$  por:

$$\alpha - \theta = \alpha - \alpha \frac{d}{L} = \alpha \left( 1 - \frac{d}{L} \right) = \alpha \left( \frac{L-d}{L} \right) = \frac{\alpha d}{L}$$

Resultará:

$$K_2 = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \left[ \frac{A \Gamma d^5}{N c!} - F(L, c) + \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha d}{L} \right) + \varphi(c) \operatorname{cos} \left( \frac{\alpha d}{L} \right) \right]$$

(16.17.10.)

Sustituyendo las constantes  $K_0, K_1, K_2, K_3$  en (16.17.5.), se obtiene la expresión de los movimientos atendiendo a los efectos de 2º orden:

$$y(x) = \Gamma x - d \Gamma^0 \left[ \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) \left( \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \left( \frac{\alpha x}{L} \right) - \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha x}{L} \right) \right) + \varphi(c) \left( -\operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \left( \frac{\alpha x}{L} \right) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha x}{L} \right) \right) \right] + \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha x}{L} \right)}{\operatorname{sen} \alpha} \left[ \frac{L}{\alpha} \varphi(c-1) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha d}{L} \right) + \varphi(c) \operatorname{cos} \left( \frac{\alpha d}{L} \right) - F(L, c) + \frac{A \Gamma d^5}{N c!} \right] - \frac{A \Gamma d^5 x}{N c! L} + F(x, c)$$



$$y(x) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha x}{L}\right)}{\sin \alpha} \left[ \frac{L}{\alpha} \psi(c-1) \sin\left(\frac{\alpha d}{L}\right) + \psi(c) \cos\left(\frac{\alpha d}{L}\right) - F(L, c) + \frac{A \Gamma d^c}{N \cdot c!} \right]$$

$$- \Gamma x - d_1 \Gamma^0 \left[ \frac{L}{\alpha} \psi(c-1) \sin\left(\frac{\alpha}{L}(x-d_1)\right) + \psi(c) \cos\left(\frac{\alpha}{L}(x-d_1)\right) \right]$$

$$- \frac{A \Gamma d^c}{N c!} \frac{x}{L} + F(x, c)$$

$$\theta(x) = -\frac{\alpha}{L} \frac{\cos\left(\frac{\alpha x}{L}\right)}{\sin \alpha} \left[ \frac{L}{\alpha} \psi(c-1) \sin\left(\frac{\alpha d}{L}\right) + \psi(c) \cos\left(\frac{\alpha d}{L}\right) - F(L, c) + \frac{A \Gamma d^c}{N \cdot c!} \right]$$

$$+ \Gamma x - d_1 \Gamma^0 \left[ \psi(c-1) \cos\left(\frac{\alpha}{L}(x-d_1)\right) - \frac{\alpha}{L} \sin\left(\frac{\alpha}{L}(x-d_1)\right) \psi(c) \right]$$

$$+ \frac{A \Gamma d^c}{N c! L} - F(x, c-1)$$

(16.17.11.)

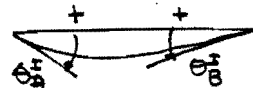
Lo que puede estructurarse según el organigrama siguiente:

$$R_A = \frac{A \Gamma d^c}{c! L} \quad \alpha = L \sqrt{\frac{N}{R_{ig}}}$$

$$\gamma = \alpha \frac{d}{L} \quad \psi = \alpha \frac{d_1}{L} \quad S_1 = \frac{L}{\alpha} \psi(c-1) \quad S_2 = \psi(c)$$

$$S_0 = S_1 \cdot \sin \gamma + S_2 \cdot \cos \gamma - F(L, c) + \frac{R_A L}{N}$$

$$\theta_A^F = \frac{\alpha}{L} S_0 - \frac{R_A}{N}$$



$$\theta_B^F = \frac{R_A}{N} + \frac{\alpha}{L} (S_1 \cos \gamma - S_2 \sin \gamma - S_0 \cos \alpha) - F(L, c-1)$$

(16.17.12.)

Fijado un X:

$$\beta = \alpha \frac{x}{L} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = \sin \beta \cdot S_0 - \frac{R_A \cdot x}{N} \\ \theta_1 = -\frac{\alpha}{L} \cos \beta S_0 + \frac{R_B}{N} \end{cases}$$

$$U = x - d_1 \xrightarrow{U \leq 0} \begin{cases} y_2^i = 0 \\ \theta_2^i = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{U > 0} w = \alpha \cdot U / L \begin{cases} y_2 = F(x, c) - S_1 \sin w - S_2 \cos w \\ \theta_2 = \frac{R}{L} (S_1 \cos w - S_2 \sin w) - F(x, c-1) \end{cases}$$

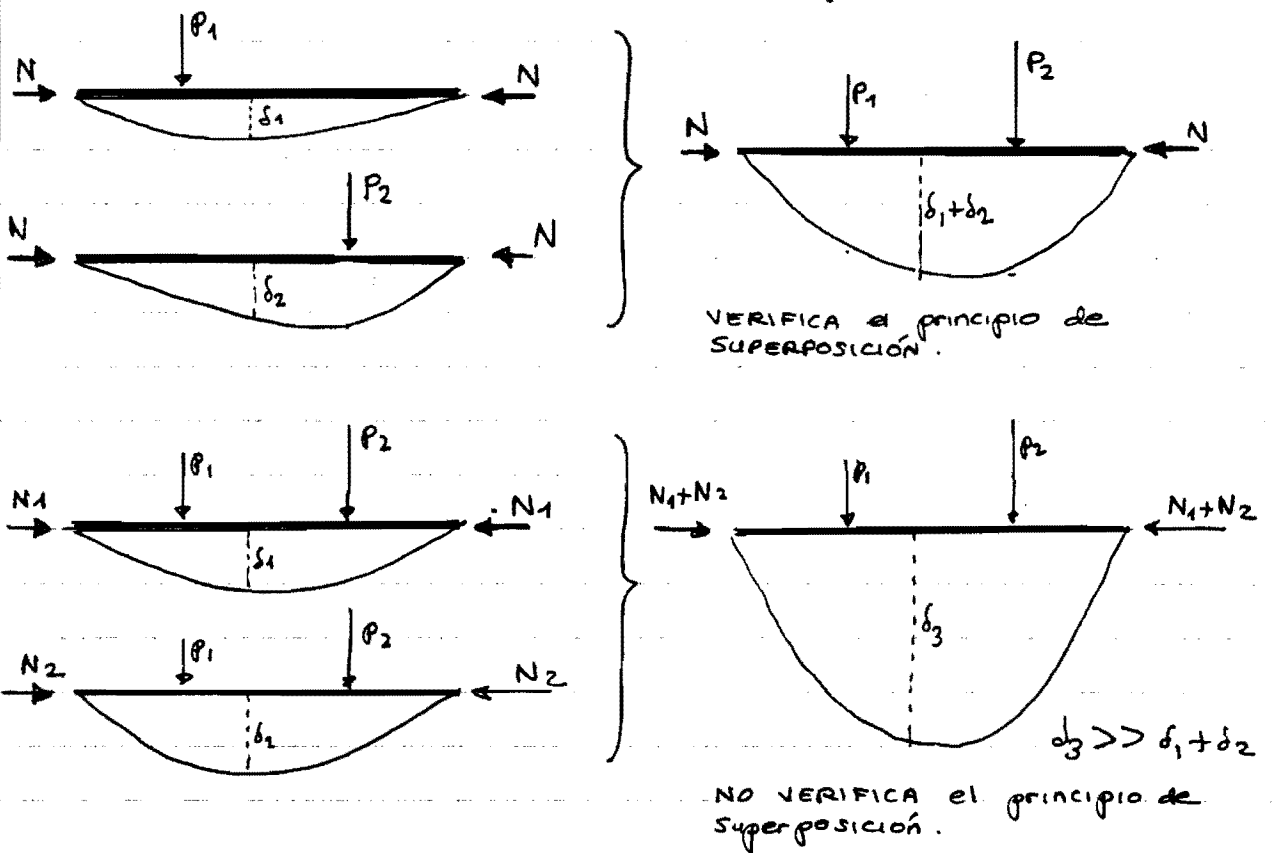


$$y(x) = y_1 + y_2$$

$$M(x) = R_{AX} - \frac{P(x-d_s)^c}{c!} + N \cdot y(x)$$

$$\theta(x) = \theta_1 + \theta_2$$

Con este proceso, pueden calcularse perfectamente los efectos de 2º orden para cualquier sistema de acciones, siendo factible aplicar el principio de superposición respecto a las acciones transversales, pero no con referencia a  $N$



Dada la validez del principio de superposición, con respecto a las acciones transversales, puede utilizarse la técnica ya expuesta, de descomponer cualquier acción, en un conjunto de acciones características elementales, y aplicar a las mismas el proceso operatorio que acabamos de deducir.

El programa que se aportó en capítulos anteriores, restringido a vigas simplemente apoyadas sin voladizos, adicionándole las fórmulas anteriores nos permite calcular viga, ante cualquier estado de cargas lo que acontece según los efectos de 1º y 2º orden.



# DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

EFFECTOS de 2º ORDEN en la FLEXOCOMPRESIÓN

16.50.

DEFORMACIONES Y SOLICITACIONES atendiendo a los EFECTOS DE 2º ORDEN

```
10 REM-----VIGA-----
20 DEFINT I=N
30 DIM T(101),XM(101),Y(101),GIRO(101),D(4),A(4),D(4)
31 DIM XN2(101),YN(101),GIR02(101)
32 CLS:KEY OFF:IF RIG=0 THEN 36
33 INPUT "MOMENTO de INERCIA (cm4).....":XINER
34 INPUT "E (modulo de Young (kg/cm2).....":E
35 PRINT "RIG=XINER*E
36 INPUT "N axil en KG.....":AXIL
38 INPUT "LUZ de la viga entre apoyos (en metros).....":XL
39 IF XL<1 OR XL>15 THEN 37
40 PRINT "XL=XL*100:ALFA=XL*5GR(AXIL/RIG):CIF=ALFA*ND=2:NT=5:GOSUB 9100
41 PRINT "ALFA.....":LIT#
42 PRINT
43 INPUT "Nº de secciones (linear).....":NS
44 IF NS<2 OR NS>101 OR (NS MOD 2)=0 THEN 43
45 FOR I=1 TO NS:T(I)=0:XM(I)=0:Y(I)=0:GIRO(I)=0:NEXT I:CARGAN=0
46 FOR I=1 TO NS:XN2(I)=0:YN(I)=0:GIRO2(I)=0:NEXT I:GIROA#=0:GIROB#=0
100 REM-----PROCESO CICLICO DE ENTRADA DE CARGAS-----
110 DATA 5,M,momento,P,puntual,R,repartida,T,trapacial,F,fin
120 CARGAN=CARGAN+1:CLS:LOCATE 3,20:COLOR 0,3
125 PRINT "TIPO de la ACCION":,COLOR 6,0:PRINT CARGAN:LOCATE 3,6
130 RESTORE 110:READ N:FOR I=1 TO N:READ A$:B$:COLOR 0 6:PRINT A$: " ":COLOR 6 0
140 PRINT B$: " " :NEXT I
150 LOCATE 7,5:PRINT "TIPO DE CARGA":,LOCATE 7,19:1
160 C$=INKEY$:IF C$="" THEN 160
170 RESTORE 110:READ N:K=0:FOR I=1 TO N:READ A$:B$:IF A$=C$ THEN K=I
180 NEXT I:IF K=0 THEN 150
190 LOCATE 7,19:PRINT C$:K=K-1:IF K=4 THEN 1000
200 A$="intensidad de la ACCION":IF K=3 THEN A$=A$+" en el extr. IZQUIERDO"
205 IF K=0 THEN A$=A$+" (positivo antihorario) (mxt)":C=100000!
207 IF K=1 THEN A$=A$+" (toneladas)":C=1000
208 IF K=1 THEN A$=A$+" (t/m)":C=10
210 LOCATE 9,5:PRINT A$:INPUT "=:AI:AI=AI*C:=F=AI
220 A$="DISTANCIA":IF K=1 THEN A$=A$+" INICIAL"
230 LOCATE 10,5:PRINT A$: " al extremo IZQUIERDO": INPUT " en metros=":DI
240 DI=DI*100:IF DI>XL THEN 230
250 IF K<2 THEN 500
260 LOCATE 11,5:INPUT "DISTANCIA del FINAL de la acción al extremo DERECHO en m.=":DF
270 DF=DF*100:IF XL-DI<DF OR DF<0 THEN 260
280 IF K<3 THEN 500
290 LOCATE 12,5:INPUT "intensidad de la ACCION en el extr. DERECHO (t/m)=":AF
300 AF=AF*C:AI=AI:AFF=AF:AI=(AF-AI)/(XL-DF-DI):AF=AI
500 REM-----DESCOMPOSICION EN ACCIONES ELEMENTALES-----
510 NM=0
520 IF AI<0 THEN NM=NM+1:C(NM)=K:D(NM)=XL-DI:A(NM)=AI
530 IF K<2 OR DF=0 THEN 600
540 IF AF<0 THEN NM=NM+1:C(NM)=K:D(NM)=DF:A(NM)=-AF
550 IF K=3 THEN AI=AI:AF=AF:K=2:GOTO 520
600 REM-----MF T DE CADA ACCION ELEMENTAL-----
610 FOR I=1 TO NM:A=A(I):U=0(I):DI=XL-U:N=C(I):K=1
620 GOSUB 9000:RA=U/XL:N=N-1:GOSUB 9000:RB=V-RA
622 N=C(I)+2:U=XL-DI:GOSUB 9000
623 RFA=(RA*XL^3/6-V)/XL/RIG:RAU#=#RA/AXIL:RM#=#RAU#*XL:D1#=#DI/XL:D2#=#DI^2/XL
624 M=C(I)-1:GOSUB 9300:S1#=#XL*F#/ALFA#:M=C(I):GOSUB 9300:S2#=#F#
625 AD#=#ALFA#*D2#:A1#=#ALFA#*D1#:ALFAU#=#ALFA#/XL:X=XL:GOSUB 9200
627 S0#=#(S1#*SIN(AD#)+S2#*COS(AD#)-F#*RM#)/SIN(ALFA#)
628 GIROA#=#GIROA#-ALFAU#*S0#+RAU#:X=XL:F=C(I)-1:GOSUB 9200
629 GIROB#=#GIROB#+RAU#+ALFAU#*(S1#*COS(AD#)-S2#*SIN(AD#)-S0#*COS(ALFA#))-F#
```



DEFORMACIONES Y SOLICITACIONES atendiendo a los EFECTOS DE 2º ORDEN

```
830 XX=XL/(NS-1):X=0:Y=0
835 FOR SQ=1 TO NS U=X-DI
840 N=C(I)-1:GOSUB 9000:T=V-RA:W=N+1:GOSUB 9000:XM=FA*X-V
841 W=N+1:GOSUB 9000:GIRO=RA*X*2/2-V:W=N+1:GOSUB 9000:Y=V-RA*X*3/3
870 T(SZ)=T(SZ)+T:XM(SZ)=XM(SZ)+XM
871 GIRO(SZ)=GIRO(SZ)-RFA+GIRO/RIG
874 Y(SZ)=Y(SZ)-RFA*X+Y/RIG:RX#=RAU*X
875 AOH=ALFAU*X:YOH=SO*X*SIN(AOH)-RX#:GIRO2#=-SO*X*ALFAU*COO(AOH)+RAU#
880 IF UKO THEN 700
882 A2#=-ALFAU*U:W=2(I):GOSUB 9200:YOH=YOH+FA-S1*X*SIN(A2#)-S2*X*COO(A2#)
890 W=W-1:GOSUB 9200:GIRO2#=GIRO2#+ALFAU*X(S1*X*COO(A2#)-S2*X*SIN(A2#))-FA
700 Y2(SZ)=Y2(SZ)+YOH:GIRO2(SZ)=GIRO2(SZ)+GIRO2#
710 XM2(SZ)=XM(SZ)+AXIL*YOH
900 X=X+XX:NEXT SX:NEXT I:GOTO 100
1000 REM-----LISTADO DE RESULTADOS-----
1010 TX=0:NT=7
1020 XX=XL/(NS-1):X=0
1030 IF TX=1 THEN LPRINT CHR$(12):LPRINT "-----RESULTADOS-----"
1040 IF TX=0 THEN CLS:LOCATE 1,20:COLOR 0,6:PRINT "RESULTADOS":COLOR 6,0:L=2
1050 FOR I=1 TO NS:IF TX=1 THEN 1070 ELSE L=L+1:IF L(24) THEN 1070
1060 IF INKEY$="" THEN 1060 ELSE CLS:L=1
1070 CIF=X/100:ND=2:GOSUB 9100:A$="X="LIT$+" T="CIF=T(I)/1000
1080 GOSUB 9100:A$=A$+LIT$:CIF=X(I)/100000:GOSUB 9100
1090 A$=A$+" N="LIT$+" M2="CIF=XM2(I)/100000:GOSUB 9100:A$=A$+LIT$
1100 IF TX=0 THEN LOCATE L,1:PRINT A$ ELSE LPRINT A$
1110 X=X+XX:NEXT I:IF TX=0 THEN 1130
1120 LPRINT CHR$(12):LPRINT "-----RESULTADOS-----":GOTO 1150
1130 IF INKEY$="" THEN 1130
1140 CLS:LOCATE 1,20:COLOR 0,6:PRINT "RESULTADOS":COLOR 6,0:L=2
1150 FOR I=1 TO NS:IF TX=1 THEN 1170 ELSE L=L+1:IF L(24) THEN 1170
1160 IF INKEY$="" THEN 1160 ELSE CLS:L=1
1170 CIF=X/100:ND=2:NT=7:GOSUB 9100:A$="X="LIT$+" ANG="CIF=GIRO(I)
1180 ND=4:GOSUB 9100:A$=A$+LIT$+" ANG2="CIF=GIRO2(I):GOSUB 9100
1190 A$=A$+LIT$+" Y="ND=2:CIF=Y(I):GOSUB 9100:A$=A$+LIT$+" Y2="
1200 CIF=Y2(I):GOSUB 9100:A$=A$+LIT$
1210 IF TX=0 THEN LOCATE L,1:PRINT A$ ELSE LPRINT A$
1220 X=X+XX:NEXT I
1221 CIF=GIROAH:ND=4:GOSUB 9100
1222 A$=" GIRO IZQUIERDO="LIT$+" GIRO DERECHO="CIF=GIROB#:GOSUB 9100
1223 A$=A$+LIT$:L=L+1
1224 IF TX=0 THEN LOCATE L,1:PRINT A$ ELSE LPRINT A$
1228 IF TX=1 THEN 1260
1230 IF INKEY$="" THEN 1230
1240 CLS:INPUT "¿se desean imprimir? (S/N)="A$:IF A$="S" THEN TX=1:GOTO 1020
1250 IF A$("<"N" THEN 1240
1260 CLS:LOCATE 5,20:INPUT "¿se desean calcular más vigas? (S/N)="A$
1270 IF A$="S" THEN 32
1280 IF A$("<"N" THEN 1260
1290 END
```



# DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

EFFECTOS de 2º ORDEN en la FLEXOCOMPRESION

16.520

DEFORMADAS Y SOLICITACIONES atendiendo a los EFECTOS DE 2º ORDEN

```
9000 REM-----U=AX*(U)/N! K=1 -1 K=-1 0-
9010 V=0:IF N<0 OR N<0 OR A=0 THEN 9090
9020 IF U=0 THEN IF N<0 THEN 9090 ELSE 9060
9030 V=AX*(U)/N! I=1
9040 IF I.(N THEN I.=I.-1:V=V/I.:GOTO 9040
9050 GOTO 9090
9060 IF K=-1 THEN 9090
9070 IF K=1 THEN V=A:GOTO 9090
9080 IF K=0 AND X<XLT THEN V=A
9090 RETURN
9100 REM-----TRANSFORMACION A DOS DECIMALES--DIF=>LIT$
9110 W=FIX(ABS(DIF)*10^ND+.5)
9115 IF W=0 THEN LIT$="0."-STRING$(ND-0):GOTO 9150
9120 LIT$=MID$(STR$(W),2):N=LEN(LIT$)
9130 IF N<ND+1 THEN LIT$=STRING$(ND+1-N,0)+LIT$:N=ND+1
9140 LIT$=LEFT$(LIT$,N-ND)+"."+RIGHT$(LIT$,ND)
9150 IF DIF<0 THEN LIT$="-"+LIT$ ELSE LIT$=" "+LIT$
9155 LIT$=RIGHT$(STRING$(NT, )+LIT$,NT)
9160 RETURN
9200 REM-----F(X,M)-----A,AXIL,RIG-----
9210 F=0:U=X-DI:IF U<0 THEN 9250
9212 A0=A:J.=0:K=1
9220 N=M-2*J. IF N<0 THEN 9240
9230 F=(-RIG/AXIL)^J.:GOSUB 9000:F=F+V:J.=J.+1:GOTO 9220
9240 A=A0:FH=AXF/AXIL
9250 RETURN
9300 REM-----FI(M)-----A,AXIL,RIG-----
9310 IF (M MOD 2)<0 OR M<0 THEN FH=0:GOTO 9330
9320 J.=FIX(M/2):FH=A/AXIL*(-RIG/AXIL)^J.
9330 RETURN
```

## NOTA

Para valores  $\alpha < 0.12$  se producen errores, ya que para  $\alpha \rightarrow 0$  tiende a producirse la indeterminación  $0/0$ , lo que origina que los errores de truncamiento puedan tener importancia decisiva, por lo que si  $\alpha < 0.12$  deberán considerarse los movimientos calculados únicamente por efectos de 1º orden, pero con valores de  $\alpha$  superiores, se podrán aplicar las expresiones de 2º orden, que nos proporcionarán valores muy semejantes a los de 1º orden, hasta que  $\alpha$  se acerque al valor  $M$ , en cuyo caso los movimientos tenderán a infinito,