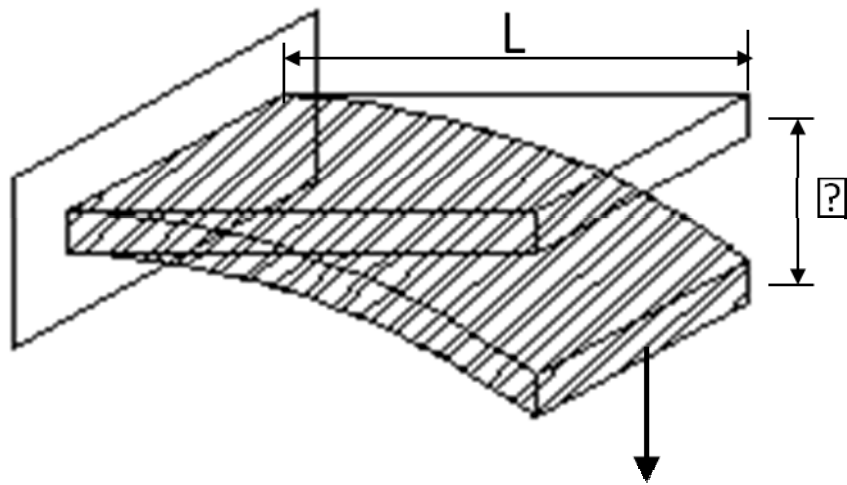


DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana



12

TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN



Roberto Guerra Fontana

12. TEORÍA GENERAL DE LA
FLEXIÓN



12.1. ESQUEMA POR EL CUAL LA RESISTENCIA DE MATERIALES DEDUCE EL ESTADO TENSIONAL EN UNA BARRA SOMETIDA A UNA SOLICITACIÓN PURA.

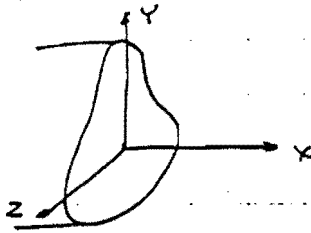
Este esquema lo expusimos de forma muy breve en la INTRODUCCIÓN, y realmente ya lo hemos aplicado al estudiar el ESFUERZO NORMAL, pero dada la simplicidad del proceso que corresponde a este tipo de SOLICITACIÓN, es difícil adquirir una visión generalizadora del método con que trabaja la RESISTENCIA DE MATERIALES, por eso, consideramos interesante su exposición como fase previa al análisis de la TEORÍA GENERAL de la FLEXIÓN, en donde se requiere una completa aplicación del citado esquema.

Vamos a exponer de forma sintetizada el método por el cual es factible obtener la tensión en un punto dado, de una cierta sección, en la que se conocen las solicitaciones actuantes.

La RESISTENCIA DE MATERIALES se caracteriza por la forma en que resuelve precisamente este problema, introduciendo una HIPÓTESIS sobre la forma en que se deformará la sección, con una única justificación, la experiencia práctica que demuestra la corrección de la misma si se admiten las cotas de errores usuales del cálculo estructural, (aproximadamente entorno del 5%)

Las HIPÓTESIS que efectúa la RESISTENCIA DE MATERIALES sobre la forma en que se deformará la sección, debe ser tal, que sea factible definir la citada deformación en función únicamente de 3 PARÁMETROS, puesto que únicamente disponemos de 3 ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Supongamos expresables las deformaciones en función de 3 parámetros, es decir que sea factible establecer:



$$E_x = f_1(y, z, c_1, c_2, c_3)$$

$$\gamma_{xy} = f_2(y, z, c_1, c_2, c_3)$$

$$\gamma_{xz} = f_3(y, z, c_1, c_2, c_3)$$

Donde y, z son las coordenadas del punto en donde se producen las deformaciones. $E_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ y c_1, c_2 y c_3 son los parámetros desconocidos que definen la deformación que por HIPÓTESIS se atribuye a la sección.

De acuerdo con las ecuaciones de LAMÉ, es factible determinar las tensiones que corresponden a una ciertas deformaciones, por lo que se obtendrán unas funciones g_i tales que:

$$\bar{\sigma}_x = g_1(y, z, c_1, c_2, c_3)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = g_2(y, z, c_1, c_2, c_3)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = g_3(y, z, c_1, c_2, c_3)$$

Al imponerse el equilibrio estático en la sección, entre las solicitaciones y las tensiones que definen las funciones g_i , estas deberán integrarse con lo que desaparecerán las variables y, z , dependiendo las tres ecuaciones de equilibrio únicamente de tres parámetros, por lo que estos podrán ser despejados.

$$\left. \begin{array}{l} \sum c_i = 0 \\ \sum j = 0 \\ \sum k = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\}$$

(Las condiciones de equilibrio, dependerá de la sollicitación analizada)

Conocidos los parámetros c_i , por medio de las funciones g_i , se obtendrá la tensión en cualquier punto de la sección, con lo cual el problema quedará resuelto en el marco de la RESISTENCIA DE MATERIALES.



12.2. DESARROLLO HISTÓRICO DE LA TEORÍA DE LA FLEXIÓN

El estudio de la FLEXIÓN por GALILEO GALILEI en su obra: "DISCORSI DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE", en 1638 no sólo es el inicio de la TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN, sino el punto de partida de la propia RESISTENCIA DE MATERIALES, que apareció de la mano de uno de los mayores genios que han existido. (Es curioso observar que GALILEO GALILEI nació un 15 de febrero de 1564, y que sólo tres días después falleció otro de los genios más importantes de la Historia de la Humanidad, MIGUEL ANGEL, pero aún resulta más notable que Galileo falleció el 8 de enero de 1642, y que el 25 de Diciembre de ese mismo año, nació Isaac Newton, que revolucionaría la FÍSICA)

Galileo en la citada obra, estudiaba el equilibrio de una viga ménsula, y deducía las tensiones que sufría el material de la forma siguiente.

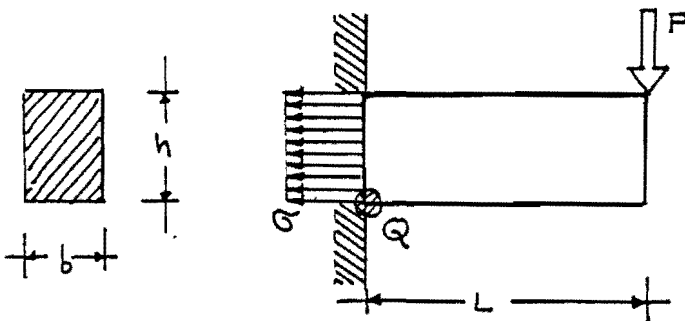


Fig 12.2.1

Supuso ley uniforme de tensiones, y aplicó la condición de suma de momentos igual a cero, respecto al punto Q, deduciendo de esta forma que:

$$P \cdot L = b h \bar{\sigma} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{2PL}{bh^2} \quad (12.2.1.)$$

De acuerdo con la fórmula anterior, y sometiendo hasta la rotura vigas ménsula de diversos materiales, dedujo las tensiones admisibles de los mismos, y verificó, que vigas de otras secciones y de distintas luces alcanzaban la rotura para las cargas cuyos valores había calculado previamente mediante la expresión:

$$P_{rot} = \frac{b h^2}{2L} \bar{\sigma}_{rot} \quad (12.2.2.)$$



lo cual pareció como prueba indiscutible de la validez del planteamiento realizado por Galileo.

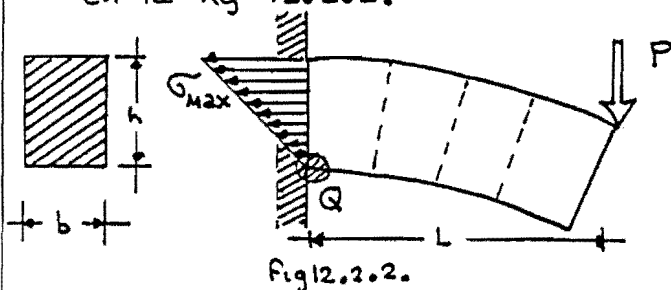
Sin embargo el método desarrollado por Galileo es incorrecto, como fácilmente puede comprobarse, ya que el sistema de la fig 12.2.1 no se encuentra en equilibrio estático.

Los resultados correctos experimentales que obtenía Galileo, tienen una simple explicación, al ser incorrecta la expresión (12.2.1.) dedució tensiones de rotura erróneas, pero al ser utilizadas en (12.2.2.) el error se compensaba automáticamente, y el valor de la carga de rotura resultaba correcto.

La tensión deducida por Galileo era tres veces menor que la real, ya que la expresión verdadera es:

$$\sigma = \frac{6PL}{bh^2} \quad (12.2.3.)$$

Jacobo Bernoulli supuso que el fenómeno de la flexión exigía un giro de unas secciones con respecto a las otras, y que por lo tanto la ley de tensiones posee carácter triangular, tal como se indica en la fig 12.2.2.



Tomando momentos respecto a Q.

$$\sigma_{max} \frac{bh}{2} \frac{2}{3} h = PL$$



$$\sigma_{max} = \frac{3PL}{bh^2} \quad (12.2.4.)$$

Bernoulli supuso una ley plana para las tensiones, ya que estableció que las secciones permanecían planas después de las deformaciones, hipótesis que ha incorporado la Resistencia de Materiales para el esquema básico que se ha expuesto anteriormente.

Bernoulli por primera vez supone la existencia de FIBRAS NEUTRAS que ni se alargan, ni se acortan, pero tal como



puede apreciarse en la fig 12.2-2, la situó incorrectamente en la cara inferior, y ello produce que la tensión máxima deducida en (12.2.40) es un medio de la correcta.

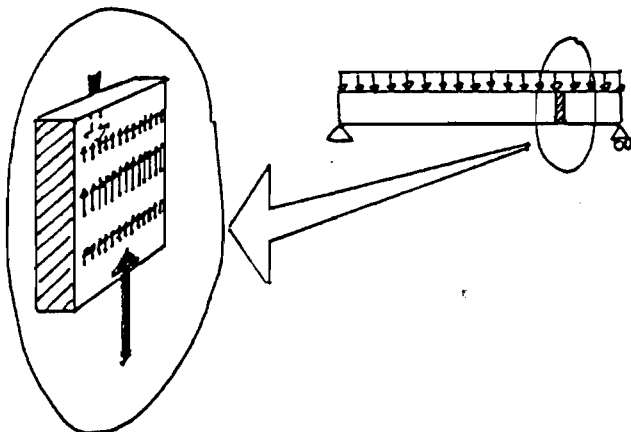
El esquema de Bernoulli, sigue sin cumplir las condiciones de equilibrio estático, por lo que su incorrección es evidente.

Será Edme MARIOTTE (1620-1684) quien en 1686 en su obra: "Traité du mouvement des eaux", en su parte V, discurso 2, situa por primera vez las tensiones nulas, en el centro de la pieza, lo cual sólo es correcto para piezas simétricas.

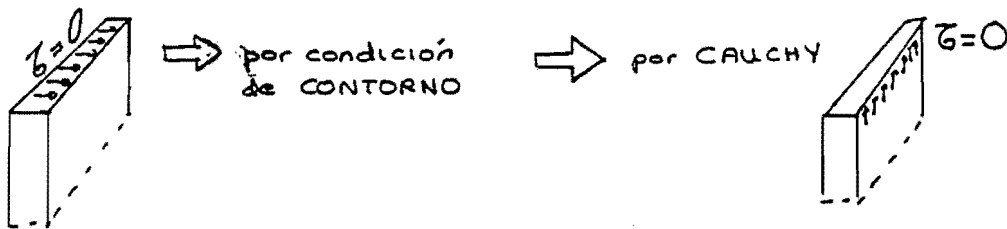
Es preciso que destaquemos la importancia y trascendencia que ha implicado para la Resistencia de Materiales, la hipótesis formulada por Jacobo Bernoulli, en sus obras: "curvatura laminae elasticae" (1694) y "Veritable hypothese de la Resistance des Solides" (1705), en donde estableció:

"LAS SUPERFICIES PLANAS PERMANECEN PLANAS DESPUÉS DE LAS DEFORMACIONES"

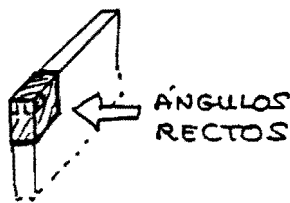
Hipótesis que si bien vamos a utilizarla, no es totalmente correcta, ya que los esfuerzos cortantes producen alabeos. En efecto, analicemos una sección solicitada a esfuerzo cortante, y que consecuentemente, deberá sufrir tensiones tangenciales a fin de que puedan cumplirse las ecuaciones generales de equilibrio de la sección. Así pues:



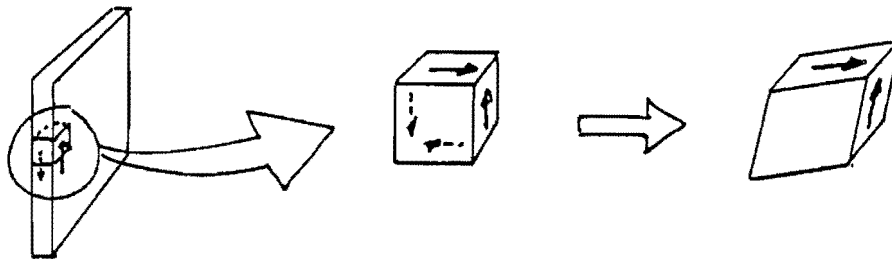
Pero es fácil de comprender que las tensiones tangenciales en las fibras extremas serán nulas, para que puedan verificarse las condiciones de contorno, y el lema de Cauchy.



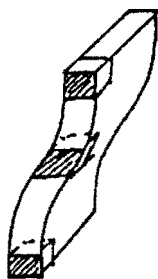
Si en los extremos superiores e inferiores de la sección, no existe tensión tangencial, tampoco existirá VARIACIÓN ANGULAR, por lo que los elementos diferenciales correspondientes mantendrán ortogonales las superficies que lo eran inicialmente



Pero en la zona central de la sección, en la que deberán forzosamente existir tensiones tangenciales, si se producirán VARIACIONES ANGULARES, y en consecuencia un cubo diferencial, se deformará tal como se indica a continuación.



Por lo tanto, el tipo de deformación de la sección deberá ser:



Pero tal como se deduce de la aplicación de la Teoría de la Elasticidad, las tensiones complementarias que genera el alabeo son muy pequeñas, siempre que el canto sea inferior a la mitad de la luz.



GALILEO GALILEI nació el 15 de febrero de 1564, recibiendo desde pequeño una formación dirigida a que fuese médico.

La primera aportación científica la realizó en su primer año de universitario en Pisa, cuando en la celebración de una Misa, observó que un candelabro suspendido por un cable, describía arcos de amplitud distinta, pero siempre en el mismo intervalo de tiempo, el cual lo midió mediante las pulsaciones de sus venas. Al regresar a su domicilio, dispuso péndulo de distinta longitud, y los obligó a oscilar con amplitudes distintas, pero los mismos se mantuvieron sincronizados.

Galileo abandonó sus estudios de medicina, al sentirse atraído hacia la geometría, después de asistir a una conferencia, e inició los de matemáticas y física en la Universidad de Florencia, para lo que buscó un mecenas, pues atravesaba dificultades económicas.

En 1586 publicó un proyecto de una balanza hidrostática de su invención lo que le proporcionó un cierto prestigio que le permitió regresar a Pisa en 1588 como profesor de matemáticas.

Galileo fue siempre lo que hoy en día denominaríamos un contestatario, lo que le llevó a fuertes enfrentamientos con sus colegas, así, al poco de ser profesor en Pisa, publicó un tratado contra el uso del birrete y la toga, que produjo la ira del resto del profesorado y el alborozo del alumnado.

Es seguramente una leyenda, la tradición de que Galileo para humillar a sus compañeros de claustro, decidió que cuando estos se dirigieran dignamente hacia sus aulas, convocar a los alumnos planteando la cuestión, de si se dejaban caer dos bolas desde lo alto de la torre de Pisa, una de hierro fundido y la otra de madera, ¿cuál de ellas llegaría primero?. Según la ciencia oficial de la época la contestación era obvia, pero experimentalmente demostró de forma incuestionable de que ambas llegaban al suelo en el mismo instante, lo que ridiculizó las enseñanzas de todos sus colegas, que jamás le perdonarían tal humillación.



Lo que no es una leyenda, es su minuciosa demostración de que la rodadura de un cuerpo sobre un plano inclinado, era independiente del peso, y que el movimiento corresponde a una aceleración constante. El experimento lo repitió más de un centenar de veces, a fin de eliminar factores ajenos como el rozamiento.

Galileo estableció la actual teoría del movimiento de los cuerpos, analizando los mismos, mediante la composición de las velocidades, y de esta forma razonó que la caída de un cuerpo, al que inicialmente se le daba un impulso horizontal, se produce según una parábola.

Para entender a Galileo, es preciso analizarlo como un adelantado en una lucha total contra la Física Aristotélica, y la de los organicistas, que conduciría finalmente a una época de marcado espíritu mecanicista. Galileo no presentó sus teorías de forma tradicional, sino que lo efectuó en forma de diálogos, en los que asignaba a uno de los protagonistas el papel de defensor de las posturas oficiales de la ciencia de su época, es decir de las teorías Aristotélicas, el cual resultaba al final totalmente desbordado y hasta cierto punto, ridiculizado, lo que evidentemente sólo contribuyó a desatar odios casi ciegos hacia su persona.

En Padua, conoció la existencia de un tubo con lentes, que se había inventado en Holanda y que permitiría ver de cerca objetos muy lejanos, lo cual estaba rodeado de un cierto secreto por el interés militar de su posible aplicación. Galileo en sólo seis meses diseñó un telescopio, observando por primera vez las montañas y cráteres lunares, así como la existencia de estrellas hasta entonces desconocidas en la constelación de Orión, el que Venus tenía fases similares a la de la Luna, y que el Sol tenía manchas, de cuya observación descubrió que este giraba con periodo de 27 días.

El 7 de enero de 1610 descubrió cuatro de los satélites de Júpiter, lo que constituyó la primera prueba contra la teorías



de Tolomeo, de que todos los cuerpos celestes giraban entorno a la Tierra, y por lo tanto, ello constituía un apoyo claro a la teoría de Copérnico publicada cincuenta años antes.

En 1611 Galileo se fue a Roma con su telescopio, invitando a los cardenales a que observaran las manchas solares, las lunas de Júpiter que él bautizó con los nombres de Io, Europa, Ganimedo y Calisto. Las reacciones que ello originó fueron diversas, pero muchos clamaron ¿cómo podía consentirse que Galileo fuese diciendo que la Tierra no era el centro del Universo? ¿Para qué iban a existir objetos celestes que no podían ser observados a simple vista? ¡era un truco!.

En 1616 el papa Pio V fue convencido de la peligrosidad de las enseñanzas de Galileo, y de la teoría de Copérnico, por lo que esta fue declarada motivo de herejía.

Galileo mantuvo hasta 1632 un absoluto silencio, pero en esa fecha publicó: "Diálogo sobre los dos mayores sistemas del mundo", en los que ante un culto personaje situó a otros dos, cada uno de los cuales defendió un sistema, uno de ellos Simplicio defendió el sistema de Tolomeo,

El Papa Pio V, fue convencido de que Simplicio era simplemente una caricatura de su persona, lo que produjo una fuerte reacción del Papa, que cortó toda relación con Galileo, e hizo que se convenciese al Gran Duque de Florencia, que protegió a Galileo, que lo dejase de amparar.

Galileo fue citado por la Inquisición, pero este que tenía ya 70 años envió un certificado médico de que no estaba en condiciones físicas para realizar el viaje, además de que se estaba quedando ciego, a lo que la Inquisición contestó enviando su propio médico, con una autorización a que si era preciso lo trajera encadenado.

El Santo Oficio, redactó una fórmula de abjuración, que si no



era firmada, sería encarcelado, ante lo cual, el 22 de junio de 1633 en Roma, en el convento de Minerva, Galileo Galilei de rodillas, medio ciego, la leyó, y la firmó, y seguramente no es exacto que al incorporarse dijese "Eppur si muove"

Después fue recluido en un convento en Arcetri, en donde dictó a su hijo Vincenzo su última obra: "Discursos y demostraciones entorno a dos nuevas ciencias", que constituye la primera obra científica sobre la Resistencia de Materiales, y que también la presenta por medio de los diálogos que mantienen tres personajes: Simplicio, Salviati, y Sagredo.

El estudio que efectúa de la viga ménsula, ya lo hemos descrito anteriormente.

Galileo en 1637 hizo su último descubrimiento, el balanceo lunar en su giro.



GALILEO GALILEI



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze

Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.

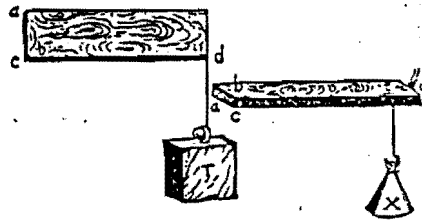
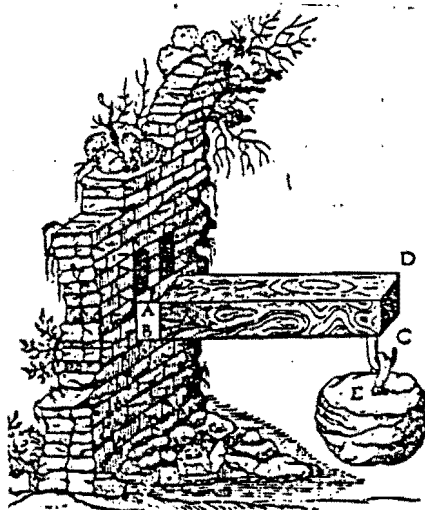
Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.



IN LEIDA.
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.



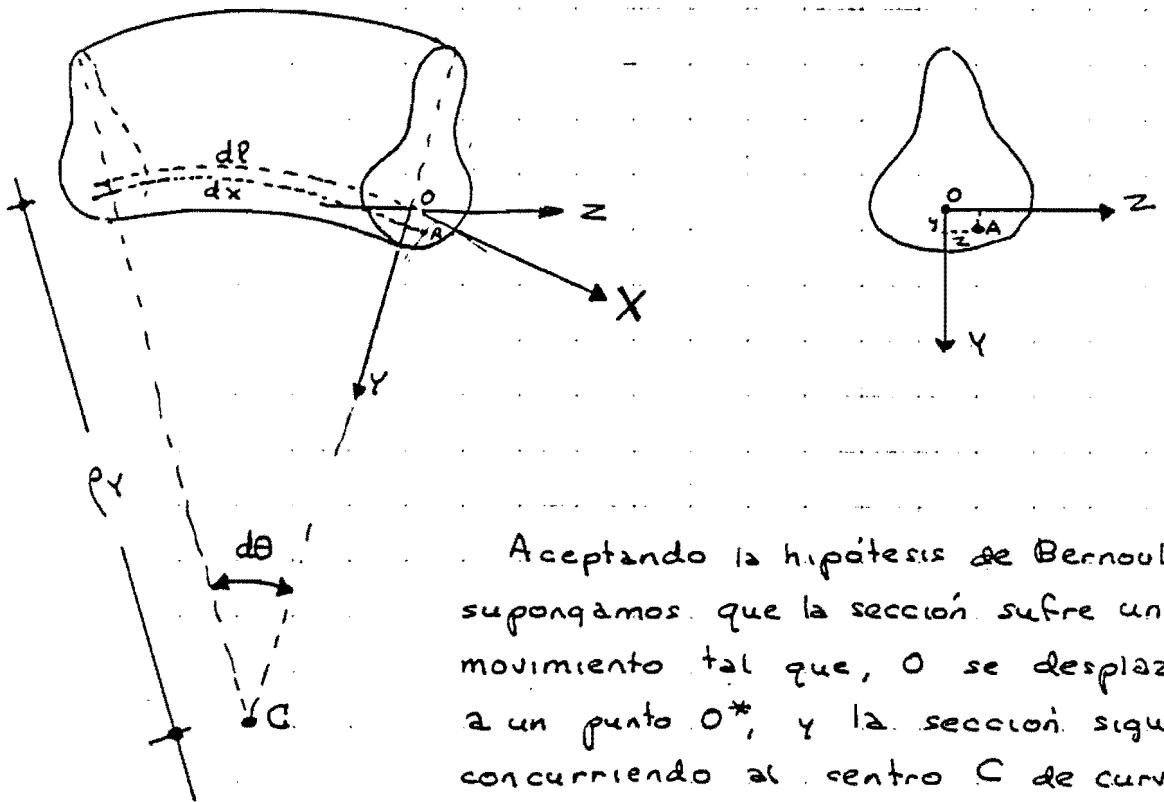
Frontispicio de una de las primeras ediciones del Diálogo, en donde aparece aparece Aristóteles, Tolomeo y Copérnico.



**12.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA FLEJO-COMPRESIÓN**

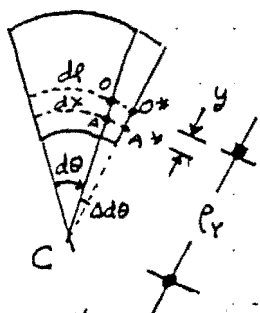
Adoptemos la hipótesis de Bernoulli, y consideremos una barra de directriz curva, cuyo radio de curvatura lo simbolizaremos por ρ , y supongamos que el sistema de referencia elegido, es tal que el eje Y es coincidente con el plano de curvatura, es decir, es la intersección de dicho plano con la sección analizada, el eje X sea tangente a la directriz de la barra, y el eje Z el ortogonal a ambos.

Para una mayor generalización puede adoptarse como directriz de la barra una fibra cualquiera de la misma, lo que equivale a indicar que el origen del sistema de referencia puede ser uno cualquiera.



Aceptando la hipótesis de Bernoulli, supongamos que la sección sufre un movimiento tal que, O se desplaza a un punto O^* , y la sección sigue concurrendo al centro C de curvatura, y posteriormente sufre un giro, con eje de rotación conteniendo O^* , de forma que la sección adopte una posición genérica.

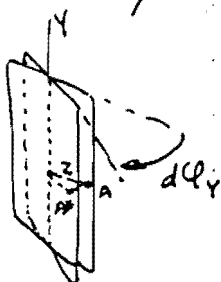
Analicemos cual sería el alargamiento de una fibra A , cuya longitud inicial sea dx , ante el primero de los movimientos descritos.



$$\left. \begin{aligned} \overline{OO^*} &= \Delta d\theta \cdot p_r \\ \overline{AA^*} &= \Delta d\theta \cdot (p_r - y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA^* = \frac{\overline{OO^*}}{p_r} (p_r - y)$$

$$(\Delta dl = \overline{OO^*})$$

$$AA^* = \overline{\Delta dl} \left(1 - \frac{y}{p_r}\right) \quad (1)$$

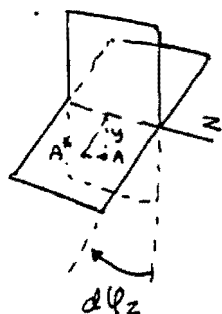


Calculemos ahora el alargamiento de dicha fibra como consecuencia del giro de la sección, el cual puede descomponerse en dos rotaciones, una con eje Y, y la otro con eje Z, en cuyo caso:

$$AA^* = z d\phi_y + y d\phi_z \quad (2)$$

El alargamiento total de la fibra, será:

$$\Delta dx = AA^* = \overline{\Delta dl} \left(1 - \frac{y}{p_r}\right) + z d\phi_y + y d\phi_z$$



La longitud de la fibra A, puede calcularse en función de la longitud de la fibra O,

del radio de curvatura, y de la distancia entre ambas.

$$\left. \begin{aligned} dl &= d\theta \cdot p_r \\ dx &= d\theta (p_r - y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow dx = \frac{dl}{p_r} (p_r - y)$$

$$dx = dl \left(1 - \frac{y}{p_r}\right)$$

El alargamiento unitario de dicha fibra, será:

$$E_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\Delta dl \left(1 - \frac{y}{p_r}\right) + z d\phi_y + y d\phi_z}{dl \left(1 - \frac{y}{p_r}\right)}$$

$$E_x = \frac{\Delta dl}{dl} + \frac{z}{1 - \frac{y}{p_r}} \frac{d\phi_y}{dl} + \frac{y}{1 - \frac{y}{p_r}} \frac{d\phi_z}{dl}$$

Los cocientes $\Delta dl/dl$, $d\phi_y/dl$ y $d\phi_z/dl$ son independientes del punto analizado, y en definitiva son los tres parámetros que son precisos para definir la posición de un plano.



Simolicemos mediante c_1 , c_2 y c_3 los tres parámetros desconocidos, en cuyo caso:

$$E_x = c_1 \frac{z}{1 - \frac{y^2}{\rho_y^2}} + c_2 \frac{y}{1 - \frac{y^2}{\rho_y^2}} + c_3$$

$$c_1 = \frac{d\varphi_1}{dl}$$

$$c_2 = \frac{d\varphi_2}{dl}$$

$$c_3 = \Delta dl/dl$$

Representemos por:

$$z^* = \frac{z}{1 - \frac{y^2}{\rho_y^2}}$$

$$y^* = \frac{y}{1 - \frac{y^2}{\rho_y^2}}$$

en cuyo caso:

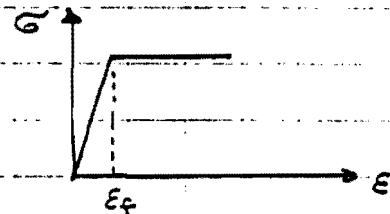
$$E_x = [c_1 \ c_2 \ c_3] \begin{bmatrix} z^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} \iff E_x = [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que las deformaciones E_x no superarán en ningún punto de la sección la E_f , se verificará la ley de Hooke, y en consecuencia

$$\bar{\sigma}_x = E E_x$$



$$\bar{\sigma}_x = [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} E \cdot c_1 \\ E \cdot c_2 \\ E \cdot c_3 \end{bmatrix}$$



Simbolizando por:

$p_i = E c_i$, resultará:

$$\bar{\sigma}_x = [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = E \frac{d\varphi_1}{dl}$$

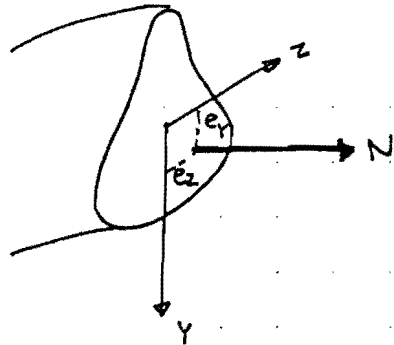
$$p_2 = E \frac{d\varphi_2}{dl}$$

$$p_3 = E \frac{\Delta dl}{dl}$$

Para la obtención de los parámetros desconocidos p_i , utilizaremos las ECUACIONES GENERALES DE EQUILIBRIO, pero previamente es preciso que definamos que solicitaciones actúan sobre la barra.



Supongamos que existe un esfuerzo normal N , aplicado en un punto de coordenadas (e_z, e_y) respecto al sistema de referencia.



En cuyo caso, las sollicitaciones son:

$$N \neq 0$$

$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$M_T = 0$$

$$M_y = N \cdot e_z$$

$$M_z = -N e_y$$

Utilizando la expresión general de equilibrio, según la cual:

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_T \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \int_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -z & y \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} ds$$

Eliminando las filas que corresponden a sollicitaciones idénticamente nulas, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \int_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} ds$$

Como la segunda y la tercera columna de la matriz cuadrada son nulas, pueden eliminarse de la matriz columna σ_{xy} y σ_{xz} , en consecuencia:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N \cdot e_z \\ -N e_y \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ -y \end{bmatrix} \sigma_x ds$$

Cambiando de signo una fila, y cambiando el orden:



$$\begin{bmatrix} Ne_z \\ Ne_y \\ N \end{bmatrix} = \int_s \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_x ds$$

Sustituyendo la expresión de σ_x :

$$\begin{bmatrix} Ne_z \\ Ne_y \\ N \end{bmatrix} = \int_s \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^* & y^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} ds$$

Operando:

$$\begin{bmatrix} Ne_z \\ Ne_y \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int z z^* ds & \int z y^* ds & \int z ds \\ \int y z^* ds & \int y y^* ds & \int y ds \\ \int z^* ds & \int y^* ds & \int ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Simbolizando por: } \int z ds = U_y \quad \int y ds = U_z \quad \int ds = A$$

$$\int z^* ds = \int \frac{z}{1 - y/p_y} ds = U_y^* \quad \int y^* ds = \int \frac{y}{1 - y/p_y} ds = U_z^*$$

$$\int z z^* ds = \int \frac{z^2}{1 - y/p_y} ds = I_y^* \quad \int y y^* ds = \int \frac{y^2}{1 - y/p_y} ds = I_z^*$$

$$\int z y^* ds = \int z^* y ds = \int \frac{z y}{1 - y/p_y} ds = P_{zy}^*$$

resulta:

$$\begin{bmatrix} Ne_z \\ Ne_y \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Lo que permite la obtención de los parámetros desconocidos:

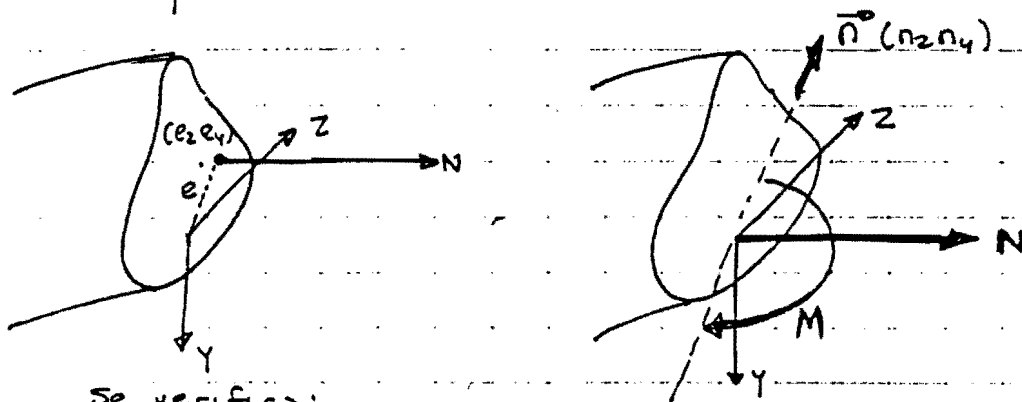
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Ne_z \\ Ne_y \\ N \end{bmatrix}$$

Y por lo tanto la tensión en un punto vendrá determinada por la expresión:



$$\bar{\sigma}_x = [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \bar{\sigma}_x = [z^* \ y^* \ 1]^{-1} \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N e_z \\ N e_y \\ N \end{bmatrix}$$

También puede expresarse las solicitaciones por un esfuerzo normal aplicado en el ORIGEN DEL SISTEMA DE REFERENCIA Y UN MOMENTO CON CIERTA ORIENTACIÓN que a continuación definiremos, para que constituya un sistema equivalente.



Se verifica:

$$N e_z = N e n_z = M n_z$$

$$N e_y = N e n_y = M n_y$$

En consecuencia, también es válido el calcular la tensión mediante la fórmula:

$$\bar{\sigma}_x = [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M n_z \\ M n_y \\ N \end{bmatrix}$$

Si la barra es de DIRECTRIZ RECTA, $p \rightarrow \infty$, en cuyo caso:

$$z^* = \frac{z}{1-y/p} = z \quad \text{y análogamente:}$$

$$y^* = \frac{y}{1-y/p} = y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_y^* \rightarrow I_y \\ I_z^* \rightarrow I_z \\ P_{zy}^* \rightarrow P_{zy} \\ U_y^* \rightarrow U_y \quad U_z^* \rightarrow U_z \end{array} \right.$$

En consecuencia:

$$\bar{\sigma}_x = [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M n_z \\ M n_y \\ N \end{bmatrix} \quad \text{BARRAS DE DIRECTRIZ RECTA.}$$



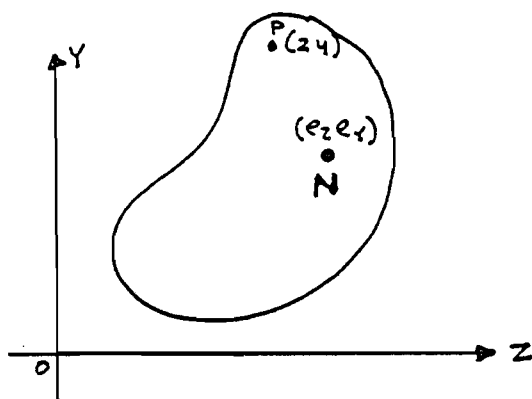
O bien:

$$\bar{G}_x = [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N \cdot e_z \\ N \cdot e_y \\ N \end{bmatrix}$$

O la expresión equivalente:

$$\bar{G}_x = N [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al considerarse barras de directriz recta, desaparece el condicionante inicial, de que el eje Y deba ser coincidente con el plano de curvatura, y en consecuencia, el sistema de ejes Z e Y NO POSEE RESTRICCIÓN ALGUNA



Las expresiones anteriores, permiten calcular las tensiones, en cualquier punto genérico P, cuando actúa un esfuerzo axial N, en un punto de coordenadas (e_z, e_y) , calculando los parámetros geométricos, respecto a

un par de ejes Z e Y, que si no poseer condicionante alguno, se adoptarán aquellos para los cuales resulte más fácil la obtención de:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_y \quad I_z \quad P_{zy} \\ U_y \quad U_z \\ A \end{array} \right.$$

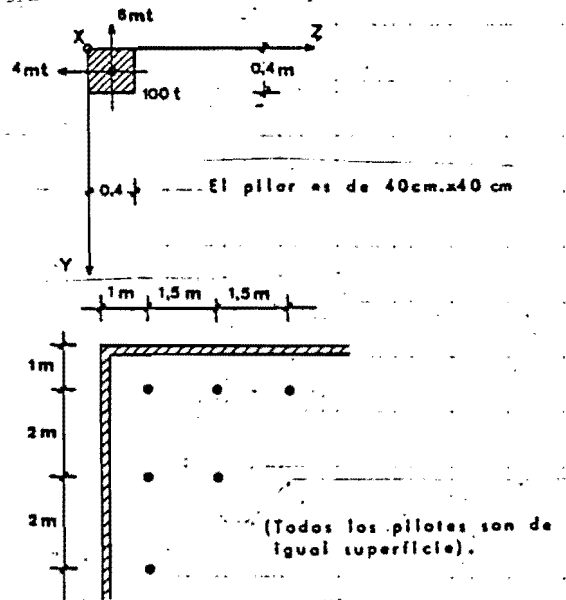


EJERCICIO 12.3.1.

Un pilar de esquina posee un esfuerzo normal de 100 toneladas, y dos momentos de 6 mT y 4 mT según los planos YX y ZX respectivamente - que se definen en el croquis y según los sentidos indicados.

Debido a la existencia de medianeras, los pilotes con que se resuelve la cimentación no pueden situarse según los ejes Y y Z, ni es posible disponerlos concéntricamente con el soporte, lo que obliga a la disposición croquizada.

Obtener el esfuerzo normal que absorbe cada pilote, considerando que los mismos se obtienen mediante las tensiones que generan las sollicitaciones transmitidas por el soporte a una sección ideal constituida por 6 áreas puntuales iguales de cada una de las mencionados pilotes.



SOLUCIÓN

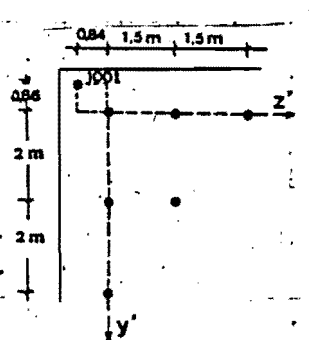
Obtenemos el punto de aplicación de las 100 TONELADAS

calcularemos los momentos estáticos con respecto a los ejes Z' e Y'.

$$A_T = 6 \cdot A$$

$$U_{Y'} = A \cdot 1,5 + A \cdot 1,5 + A \cdot 3 = 6A = U_{Y'}$$

$$U_{Z'} = A \cdot 2 + A \cdot 2 + A \cdot 4 = 8A = U_{Z'}$$



$\delta_y = \frac{6}{100} = 0,06$
 $\delta_z = \frac{4}{100} = 0,04$
 $e_z = (0,8 + 0,04)$
 $e_y = (0,8 + 0,06)$
 $-0,84 = e_z$
 $-0,86 = e_y$

$N = -100 \tau$ (compresión)
 $N \cdot e_z = 84 \text{ mT}$
 $N \cdot e_y = 86 \text{ mT}$

Calcularemos los momentos de inercia con respecto a los ejes Z' e Y'.

(Por ser $\rho \rightarrow \infty$, resulta: $I_x^* = I_x$)

$$U_x^* = U_x$$

$$y^* = y, \quad z^* = z$$

$$I_{Y'} = A \cdot 1,5^2 + A \cdot 1,5^2 + A \cdot 3^2 = 13,5 A = I_{Y'}$$

$$I_{Z'} = A \cdot 2^2 + A \cdot 2^2 + A \cdot 4^2 = 24 A = I_{Z'}$$

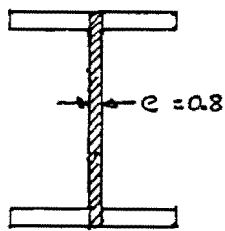
$$P_{Z'Y'} = A \cdot 1,5 \cdot 2 = A \cdot 3 = P_{Z'Y'}$$

Así pues:

$$\sigma_x = [z \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 13,5A & 3A & 6A \\ 3A & 24A & 8A \\ 6A & 8A & 6A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84 \\ 86 \\ -100 \end{bmatrix}$$

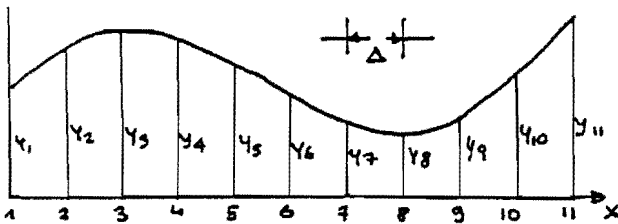
La fuerza que absorberá cada pilote, será:

$F_i = A \sigma_{x_i}$ obteniéndose σ_{x_i} , sustituyendo las coordenadas de dicho pilote en la matriz fila. En consecuencia:



En una primera fase, calcularemos I_z^* y U_z^* del ALMA, prescindiendo de las ALAS.

Para el cálculo de estos parámetros geométricos, aplicaremos el siguiente método de integración numérica que exige la obtención de ordenadas \approx intervalos iguales, y en un mínimo de 9 puntos, adoptándose en este caso 11. (10 intervalos)



$$I = \int_{x_1}^{x_{11}} y dx = \Delta \left(\frac{y_1}{3} + \frac{3.875}{3} y_2 + \frac{2.5}{3} y_3 + \frac{3.125}{3} y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{3.125}{3} y_8 + \frac{2.5}{3} y_9 + \frac{3.875}{3} y_{10} + \frac{y_{11}}{3} \right)$$

La función a integrar, en un caso sería:

$U_z^* = e \int \frac{y}{1-y/p} dy$ y en el otro $I_z^* = e \int \frac{y^2}{1-y/p} dy$, por lo que elaboraremos la siguiente tabla, para el cálculo de las 11 ordenadas.

ALMA $p = 80$	y	$1 - y/p$	$\frac{y}{1 - y/p}$	$\frac{y^2}{1 - y/p}$	coef. de integración
	-18	1.225	-14.6939	264.4898	0.3
	-14.4	1.18	-12.2034	175.7288	1.2916
	-10.8	1.135	-9.5154	102.7665	0.83
	-7.2	1.09	-6.6055	47.5596	1.0416
	-3.6	1.045	-3.4450	12.4019	1
	0	1	0	0	1
	3.6	0.955	3.7696	13.5707	1
	7.2	0.91	7.9121	56.9670	1.0416
	10.8	0.865	12.4855	134.8439	0.83
	14.4	0.82	17.5610	252.8780	1.2916
	18	0.775	23.2258	418.0645	0.3
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
			$c_3 \cdot c_5$	$c_4 \cdot c_5$	

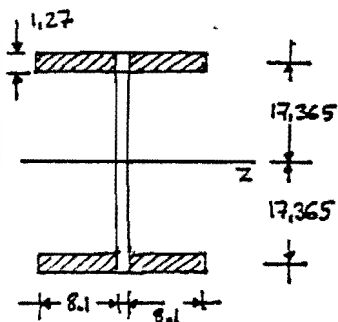
$$U_z^{ALMA} = 0.8 \int \frac{y}{1-y/p} dy =$$

$$0.8 \cdot (3.6 \cdot \sum c_3 \cdot c_5) = \boxed{40,1038} = U_z^{ALMA}$$

$$I_z^{ALMA} = 0.8 \int \frac{y^2}{1-y/p} dy =$$

$$= 0.8 \cdot (3.6 \cdot \sum c_4 \cdot c_5) = \boxed{3208,3193} = I_z^{ALMA}$$

Para el cálculo de I_z^{ALA} y U_z^{ALA} , puede considerarse que $1/(1-y/p)$ permanece constante, por la pequeña



variación que presenta y respecto a p , si bien presentara' valores distintos para cada ala.

ALA SUPERIOR ($y = -17,365$) $\Rightarrow \frac{1}{1-y/p} = 0.8217$

ALA INFERIOR ($y = 17,365$) $\Rightarrow \frac{1}{1-y/p} = 1,2772$



$$\begin{aligned}
 U_z^{*ALAS} &= \int_{ALA\ INF} \frac{y ds}{1-y/\rho} + \int_{ALA\ SUP} \frac{y ds}{1-y/\rho} = \left(\frac{1}{1-y/\rho}\right)_{ALA\ INF} \int y ds + \left(\frac{1}{1-y/\rho}\right)_{ALA\ SUP} \int y ds = \\
 &= 1,2772 \cdot U_z^{ALA\ INF} + 0,8217 U_z^{ALA\ SUP} = 1,2772 \cdot (16,2 \cdot 1,27 \cdot 17,365) + \\
 &\quad + 0,8217 \cdot (16,2 \cdot 1,27 \cdot (-17,365)) = \\
 &= 162,7677 = U_z^{ALAS}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $U_z^* = 40,1038 + 162,7677 = \boxed{202,8715 = U_z^*}$

$$\begin{aligned}
 I_z^{*ALAS} &= \int_{ALA\ INF} \frac{y^2 ds}{1-y/\rho} + \int_{ALA\ SUP} \frac{y^2 ds}{1-y/\rho} = \left(\frac{1}{1-y/\rho}\right)_{ALA\ INF} \int y^2 ds + \left(\frac{1}{1-y/\rho}\right)_{ALA\ SUP} \int y^2 ds = \\
 &= 1,2772 I_z^{ALA\ INF} + 0,8217 I_z^{ALA\ SUP} = 2,0989 I_z^{ALA} = 2,0989 \frac{16,2}{3} (18^3 - 16,7^3) = \\
 &= I_z^{*ALAS} = 13027
 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $I_z^* = 3208,3153 + 13027 = \boxed{16235 = I_z^*}$

Calculemos ahora: $I_y^* = \int \frac{z^2 ds}{1-y/\rho} = \int \frac{dy}{1-y/\rho} \int_{-e/2}^{e/2} z^2 dz = \frac{e^3}{12} \int \frac{dy}{1-y/\rho}$

Luego esta integral podrá descomponerse en las zonas de igual espesor:

$$\begin{aligned}
 I_y^* &= I_y^{*ALMA} + I_y^{*ALAS} = \frac{0,8^3}{12} \int_{ALMA} \frac{dy}{1-y/\rho} + \frac{(17^3 - 0,8^3)}{12} \int_{ALAS} \frac{dy}{1-y/\rho} = \\
 &= \frac{0,8^3}{12} \left(3,6 \cdot \sum \frac{C_{5i}}{C_{2i}} \right) + \frac{(17^3 - 0,8^3)}{12} \left[\left(\frac{1}{1-y/\rho}\right)_{ALA\ INF} \int dy + \left(\frac{1}{1-y/\rho}\right)_{ALA\ SUP} \int dy \right] \\
 &= 1,5627 + 409,374 \left(1,2772 A_{ALA\ INF} + 0,8217 \cdot A_{ALA\ SUP} \right) = \boxed{1093 = I_y^*}
 \end{aligned}$$

(Puede observarse que: $I_y^{*ALMA} \approx 0$)

Los elementos U_y^*, U_y, U_z y ρ_{zy}^* son nulos, por lo cual, ya conocemos todos los parámetros geométricos de la expresión:

$$\bar{G}_x = [z^x \ y^x \ 1] \begin{bmatrix} I_y^* & \rho_{zy}^* & U_y^* \\ \rho_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M \cdot n_z \\ M \cdot n_y \\ N \end{bmatrix}$$



Sustituyendo: $\bar{\sigma}_x = [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} 1093 & 0 & 0 \\ 0 & 16235 & 202,87 \\ 0 & 202,87 & 69,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -20000 \end{bmatrix}$

Operando: $\bar{\sigma}_x = [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -60,20 \\ -111,31 \end{bmatrix}$

Si adoptamos $y=18$, a lo que corresponde $y^*=23,23$, resultará sustituyendo:

$$\bar{\sigma}_x = -1509,61 \text{ Kg/cm}^2 \quad (y=18)$$

Si $y=-18$, resulta que $y^*=-14,69$, y operando:

$$\bar{\sigma}_x = 773,09 \text{ Kg/cm}^2 \quad (y=-18)$$

Por lo tanto:

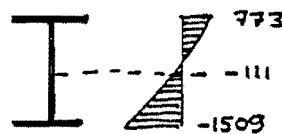
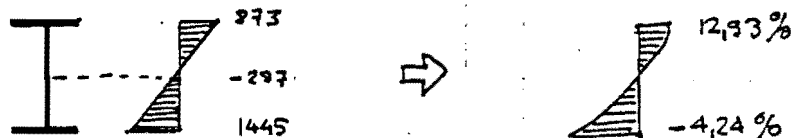
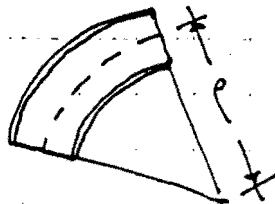
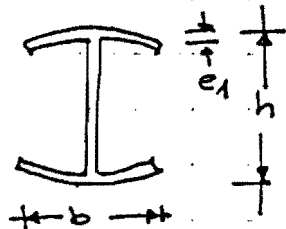


DIAGRAMA DE TENSIONES $\bar{\sigma}_x$.

Si se hubiese prescindido de la curvatura, los resultados que se habrían obtenido, serían:



NOTA.— En la práctica, para un caso tal como el resuelto debe tenerse presente, que la curvatura reduce la eficacia de las alas en los perfiles en I



$$\beta = 1,32 \frac{b}{\sqrt{e_1 \rho}}$$

$$b^* = \frac{b}{\beta} - \frac{b}{2\pi\beta^3}$$

Representando b^* , la longitud eficaz del ala que debe considerarse en los cálculos que conducen a la determinación del estado tensional.

12.4. ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FLEXIÓN COMPUESTA EN BARRAS DE DIRECTRIZ RECTA

Sabemos que: $G_x = N [z \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$



$$G_x = \frac{N}{A} [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} I_y/A & P_{zy}/A & z_G \\ P_{zy}/A & I_z/A & y_G \\ z_G & y_G & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Donde z_G y_G son las coordenadas del centro de gravedad, puesto que representan los cocientes U_y/A y U_z/A respectivamente)

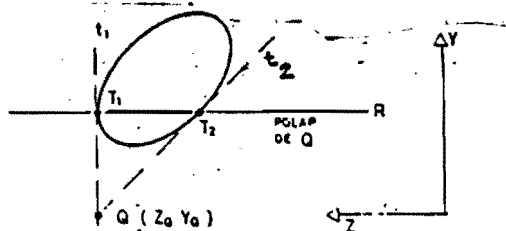
Recordemos que, la inversa de una matriz simétrica, es también simétrica, y que la ecuación de una cónica puede expresarse de forma matricial mediante la igualdad

conica $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{parábola} \\ \text{hipérbola} \end{cases}$

$$[z \ y \ 1] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

siendo $a_{ij} = a_{ji}$

Se entiende por polar de un punto Q con respecto a una cónica, a la recta R que definen los dos puntos T_1 y T_2 de tangencia, correspondientes a las dos tangentes t_1 y t_2 que desde Q pueden trazarse a la cónica.



Siendo la ecuación analítica de la recta R, - polar de Q, la siguiente ecuación:

$$[z \ y \ 1] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_Q \\ y_Q \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Los criterios de clasificación de cónicas nos enseñan que:

Si $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ la cónica es una curva, y no se trata de un par de rectas...

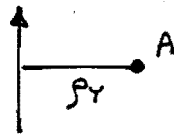
Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} > 0 \Rightarrow$ ELIPSE
 $A_{33} < 0 \Rightarrow$ HIPÉRBOLA
 $A_{33} = 0 \Rightarrow$ PARABOLA



Según lo expuesto, la matriz inversa que define la tensión en un punto genérico (z, y) en función del punto de aplicación del esfuerzo normal (e_z, e_y) , es la matriz asociada a una cónica.

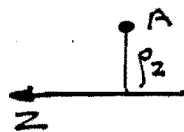
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y/A & p_{zy}/A & z_G \\ p_{zy}/A & I_z/A & y_G \\ z_G & y_G & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} p_y^2 & p_{zy}^2 & z_G \\ p_{zy}^2 & p_z^2 & y_G \\ z_G & y_G & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Siendo p_y la distancia a que habría que situar del eje Y una área puntual A, para que su momento de inercia equivaliese a la de la sección.



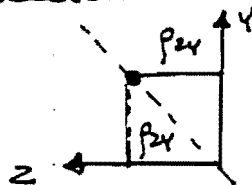
$$I_y = A \cdot p_y^2 \iff \frac{I_y}{A} = p_y^2$$

p_z la distancia del eje Z, a la que habría que situar una área puntual equivalente a la de la sección para que tuviese el mismo momento de inercia que la citada sección.



$$I_z = A \cdot p_z^2 \iff \frac{I_z}{A} = p_z^2$$

p_{zy} Es la distancia que debiera tener un área puntual o concentrada equivalente a la de la sección, a los dos ejes de referencia, para que su producto de inercia siguiera siendo el de la sección.



$$p_{zy} = A \cdot p_{zy}^2 \iff \frac{p_{zy}}{A} = p_{zy}^2$$

La citada cónica debe ser independiente del sistema de referencia, ya que establece una correspondencia que debe ser intrínseca del estado tensional que genera una flexión compuesta, al relacionar el punto de aplicación del esfuerzo normal, el punto donde calculamos



la tensión, y el valor de esta, en consecuencia, para identificar la cónica puede adoptar el sistema de referencia que simplifique máximamente el problema, y este sistema serán los EJES CENTRALES Y PRINCIPALES DE INERCIA. En efecto, si son centrales ello implica que su origen contiene el centro de gravedad, y en consecuencia: $Z_G = Y_G = 0$, y si son PRINCIPALES, el producto de inercia deberá ser nulo, y ello implica que: $p_{zy} = 0$, por lo tanto, referente a los citados EJES; la matriz asociada tomará la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

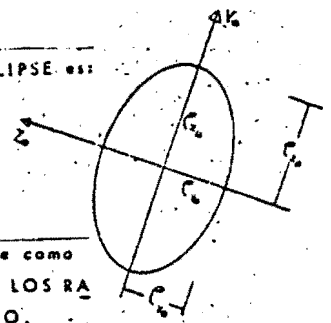
En consecuencia, la cónica será:

$$0 = [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y según los criterios de clasificación es una ELIPSE. Puesto que:

$$G = \frac{N}{A} [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la ELIPSE es:



que se conoce como la ELIPSE DE LOS RÁDIOS DE GIRO.

(Los radios de giro se colocan permutados, el e_z sobre el Y_0 y el e_y sobre el Z_0).

$$e_z = \sqrt{\frac{I_{z_0}}{A}}$$

$$e_y = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}}$$

Siendo la ecuación del EJE NEUTRO:

$$0 = [z \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

ECUACION DEL E.N.

$$0 = [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ -e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el EJE NEUTRO es la polar con respecto a la cónica indicada, tomando como polo $(-e_z, -e_y)$, lo que suele conocerse como que el EJE NEUTRO es la ANTIPOLAR del punto de aplicación del ESFUERZO NORMAL, lo que proporciona un método gráfico para la obtención del estado tensional que genera la FLEXIÓN COMPUESTA.

para calcular el EJE NEUTRO, correspondiente al estado de tensiones que se genera ante la aplicación de un esfuerzo normal excéntrico en un punto $E(x_e, y_e)$, basta con trazar la polar del punto simétrico $E'(-x_e, -y_e)$ con respecto a la ELIPSE DE LOS RADIOS DE GIRO.

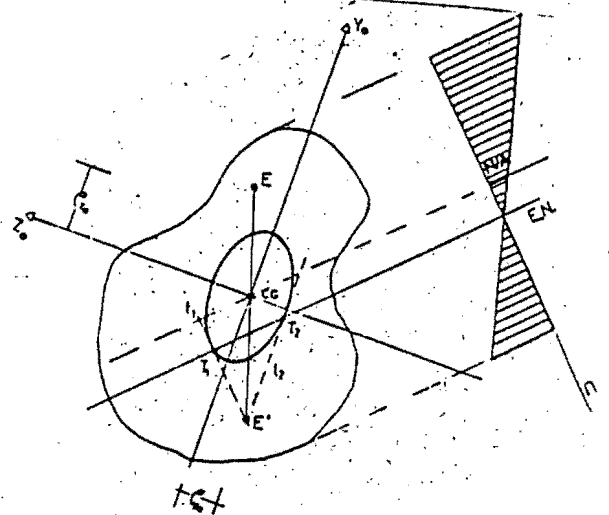
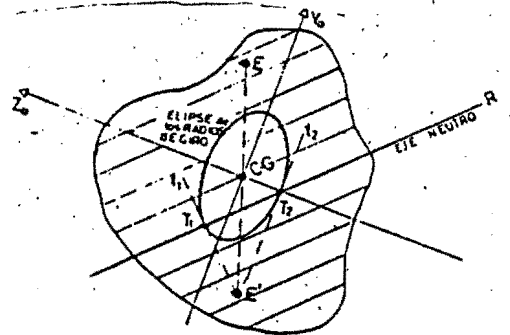
La tensión en el centro de gravedad de la sección es independientemente del punto de aplicación E del esfuerzo normal, siendo igual:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Esto nos permite conocer la tensión en cualquier punto de la sección, una vez calculada la posición del EJE NEUTRO, puesta que sabemos que la ley de variación de las mismas son lineales y conocemos la tensión en dos fibras (en la del EJE NEUTRO $\sigma_x = 0$, y en una fibra paralela al eje neutro que contenga el centro de gravedad en la que $\sigma_x = N/A$).

El procedimiento expuesto nos exige:

- * DETERMINAR LOS EJES PRINCIPALES Y CENTRALES DE INERCIA DE LA SECCION (En el caso de que exista eje de simetría será éste y su ortogonal por el C. de G.).
- * CALCULO DE LOS RADIOS DE GIRO CON RESPECTO A LOS EJES INDICADOS.
- * TRAZADO DE LA ELIPSE DE LOS RADIOS DE GIRO.
- * OBTENER LA POLAR DEL PUNTO E' , SIMETRICO CON RESPECTO AL CENTRO DE GRAVEDAD DEL E , EN EL QUE SE APLICA EL ESFUERZO CENTRAL.
- * DETERMINAR LA TENSION QUE SE PRODUCIRIA EN LA SECCION SI N ESTUVIESE CENTRADA ($\sigma_m = N/A$)



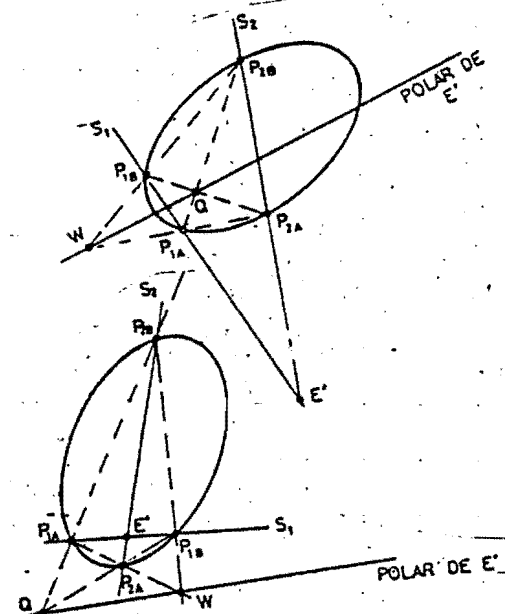
- * ELECCION DE UNA ESCALA PARA REPRESENTAR TENSIONES Y TRAZADO DEL DIAGRAMA DE σ para lo cual se traza una perpendicular n , al eje neutro, una paralela al eje neutro desde el C. de G., y en el punto de corte con n , se representa $\sigma_m = N/A$, y el extremo del segmento correspondiente se une con la intersección de n y EJE NEUTRO, la recta así definida y n constituyen el diagrama de tensiones.

PROCEDIMIENTO PARA EL TRAZADO GRÁFICO DE LA POLAR

Para trazar la polar de un punto E' puede utilizarse el siguiente procedimiento, que es de mayor exactitud que el trazado de tangentes, y que consiste en trazar dos secantes S_1 y S_2 , de las cuales una puede ser prácticamente tangente a la elipse y la otra un diámetro. La secante S_1 cortará a la elipse en dos puntos: P_{1A} y P_{1B} , y la S_2 en P_{2A} y P_{2B} . Se une P_{1B} con P_{2A} y P_{1A} con P_{2B} obtenemos dos rectas que se cortarán en un punto Q , y a continuación P_{1B} con P_{2B} y P_{1A} con P_{2A} rectas que se cortarán en un punto W .

Uniendo W con Q se obtiene la polar de E' .

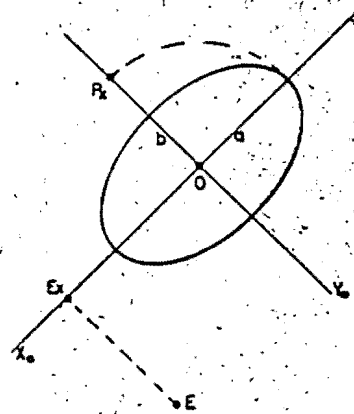
Este procedimiento no sólo permite un trazado más exacto de la polar de un punto E' , sino que permite el trazado cuando E' es interior a la ELIPSE.



PROCEDIMIENTO PARA EL TRAZADO GRÁFICO DE LA ANTIPOLAR

Puesto que el EJE NEUTRO es la polar del punto simétrico E' del punto de aplicación del esfuerzo normal E , hecho que se suele expresar indicando que el EJE NEUTRO es la ANTIPOLAR del punto E donde se aplica el esfuerzo normal es de gran utilidad el procedimiento gráfico siguiente que permite la obtención directa de la antipolar de un punto dado.

Sea el punto E , cuya proyección sobre el eje X_0 es E_x .

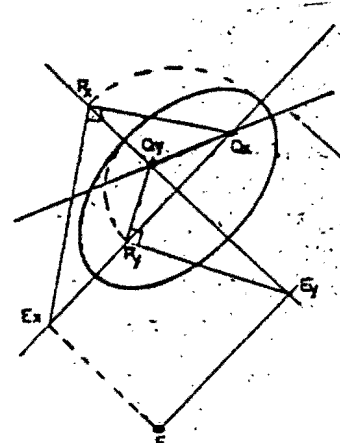
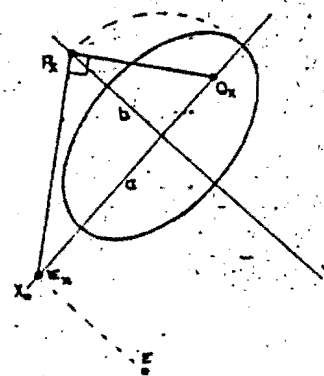


Se abate el semieje de la elipse correspondiente a la dirección X_0 situado en el lado opuesto de E_x , sobre el eje ortogonal Y_0 , utilizando como centro el de la elipse, siendo indiferente hacerlo hacia un lado u el otro.

El segmento $P_x O$ será pues a , si P_x se obtiene al abatir el semieje a sobre Y_0 .

Se une E_x y P_x , trazándose desde P_x una perpendicular a dicha recta unión, que cortará al eje X_0 en un punto Q_x que pertenece a la antipolar de E .

Repetiendo el proceso en la otra dirección principal Y_0 , obtendremos el punto Q_y que también pertenecerá a la antipolar de E , y consecuentemente nos bastará con unir Q_x y Q_y para obtener la mencionada ANTIPOLAR.



$$\overline{OP_x} = a = f_{y_0}$$

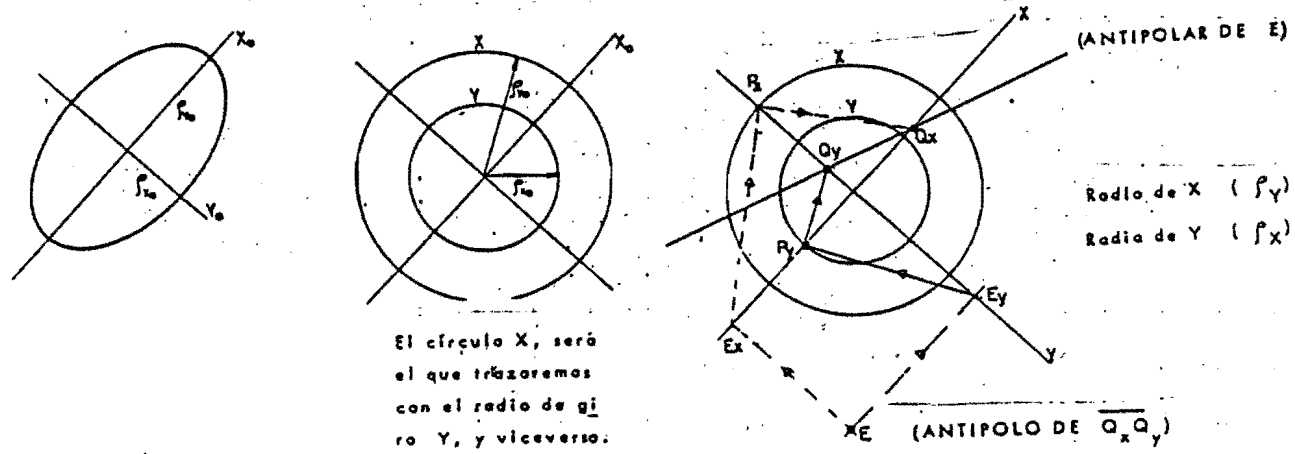
$$\overline{OP_y} = b = f_{x_0}$$

ANTIPOLAR DE E

Este procedimiento no presenta dificultad especial cuando el ANTIPOLAR está situado en el interior de la ELIPSE de los RADIOS DE GIRO.

Permite fácilmente el proceso inverso, es decir la obtención del ANTIPOLAR dada una ANTIPOLAR.

Puesto que los puntos básicos son P_x y P_y , la más práctica es trazar dos círculos que pueden denominarse X e Y con radios los semiejes de la elipse.



El círculo X, será el que trazaremos con el radio de giro Y, y viceversa.

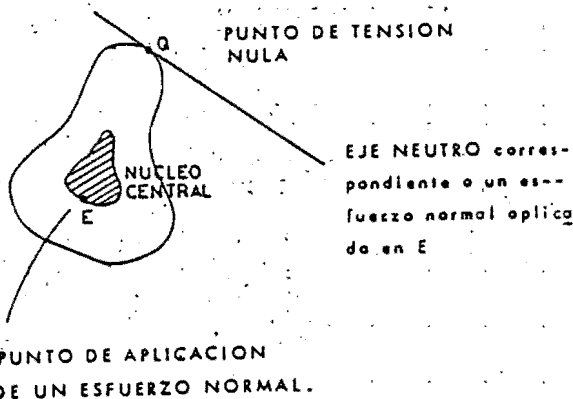
Radio de X (f_y)
Radio de Y (f_x)

12.5. NUCLEO CENTRAL

Para diversas aplicaciones prácticas es deseable conocer: EL LUGAR GEOMETRICO DE LOS PUNTOS EN LOS QUE SI SE APLICA UN ESFUERZO NORMAL TODAS LAS TENSIONES NORMALES QUE SE GENERAN EN LA SECCION SON DE IGUAL SIGNO, LUGAR GEOMETRICO QUE SE SUELE DENOMINAR NUCLEO CENTRAL.

La condición indicada equivale a imponer que el EJE NEUTRO sea exterior a la sección;

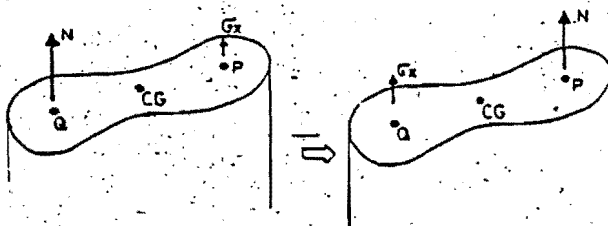
Los puntos que pertenezcan al borde del NUCLEO CENTRAL deberán verificar según lo expuesto que si aplicamos en ellos un ESFUERZO NORMAL, el EJE NEUTRO será tangente a la sección, y por lo tanto en uno o en varios puntos la tensión normal será nula.



De la ecuación de resistencia de la tracción o compresión no centrada podemos deducir importantes conclusiones entre las que cabe destacar el siguiente principio:

RECIPROCIDAD DE TENSION NORMAL ENTRE UN PUNTO GENERICO Y EL PUNTO EN QUE SE APLICA UN ESFUERZO NORMAL, es decir:

Si en un punto R se produce una tensión normal σ_x por aplicarse un esfuerzo normal N excéntrico en un otro punto Q, si dicho esfuerzo normal se aplica en el P, la tensión que se producirá en Q, será la indicada tensión σ_x .



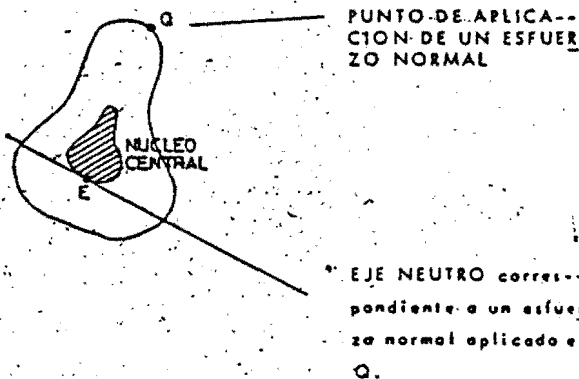
Ello es evidente si observamos el carácter de simetría que posee la matriz cuadrada que permite obtener la tensión en un punto.

$$\sigma_x = N [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix} = N [e_z \ e_y \ 1] \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para aplicando el principio de RECIPROCIDAD anteriormente expuesto, deduciremos que:

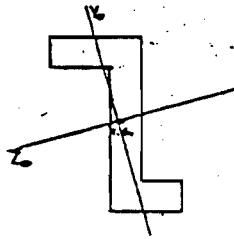
" si se aplica un esfuerzo normal en un punto perimetral de la sección, que sea punto de tangencia de una envolvente exterior, el EJE NEUTRO correspondiente será una envolvente del NUCLEO CENTRAL."

Este hecho justifica el siguiente método para el trazado del NUCLEO CENTRAL de una sección,

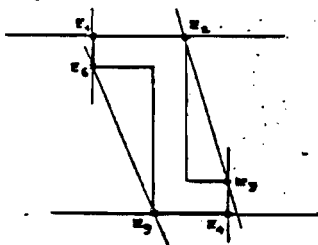


PROCESO:

1º. Se determinan los ejes principales y centros de inercia de la sección



2º. Se determinan las envolventes exteriores a la sección, que definirán una poligonal cuyas vértices simbolizaremos por E_i



3º. Se trazan las polares de los puntos E_i con respecto a la ELIPSE DE LOS RADIOS DE GIRO.

Dichas polares serán envolventes del NUCLEO CENTRAL por lo que quedará definido el mismo.

En resumen:

Si aplicásemos esfuerzos normales en los puntos E_i los ejes neutros serían las envolventes del NUCLEO CENTRAL, lo que corresponde directamente al proceso descrito.

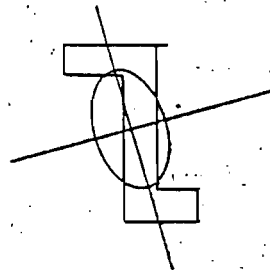
Si aplicásemos esfuerzos normales en los vértices del NUCLEO CENTRAL los ejes neutros serían las envolventes $E_i E_i$ a la sección de que hemos partido, según el principio de reciprocidad, y esto hecho es el que justifica el método expuesto.

4º. Se trazan los círculos X_0 e Y_0 correspondientes a los semiejes de la ELIPSE DE LOS RADIOS DE GIRO.

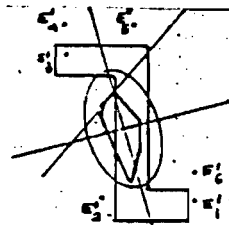
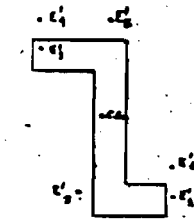


5º. Se determina el antipolo de cada una de las envolventes, cada una de las cuales será un vértice del NUCLEO CENTRAL

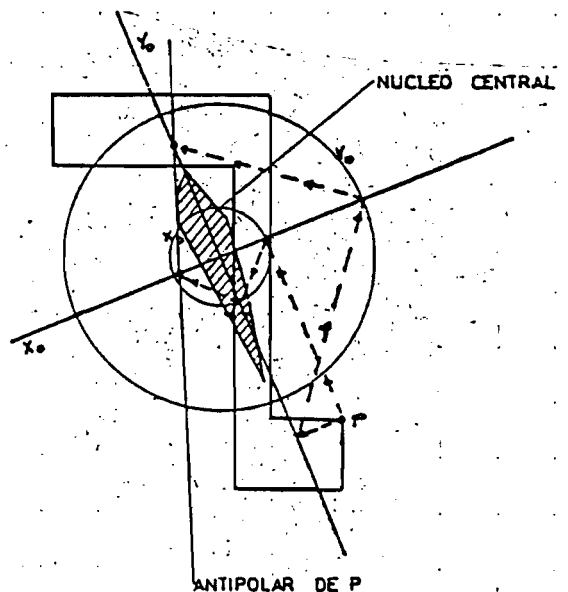
2º. Se calculan los radios de giro principales y se traza la elipse de los radios de giro.



4º. Se obtienen los puntos simétricos de los E_i con respecto al centro de gravedad, que simbolizaremos por E'_i (si la figura es perfectamente simétrica se superpondrán los puntos P_i y V_i con índices no iguales).

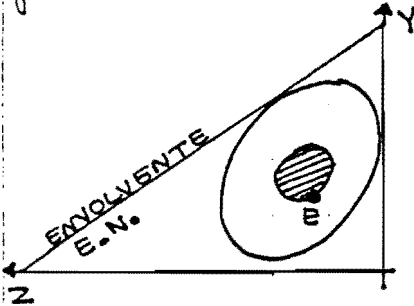


Utilizando el procedimiento de trazado de los antipolos en forma inversa, podemos obtener los ANTIPOLOS correspondientes a las envolventes de la sección, lo que nos definen los vértices del NUCLEO CENTRAL, y por lo tanto ello es otro posible método para el trazado del núcleo central que difiere en los puntos 4 y 5 del proceso anterior, los cuales pasan a ser sustituidos por:





ANALITICAMENTE el NUCLEO CENTRAL puede determinarse obteniendo los puntos de aplicación del esfuerzo normal, para que el EJE NEUTRO sea una envolvente de la sección, ya que dichos puntos son del CONTORNO DEL NUCLEO CENTRAL



$$c_1 z + c_2 y + c_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} z & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$$

El vector C_0 correspondiente a una envolvente dada, es fácilmente determinable.

Recordemos que la ecuación del E.N. es:

$$\sigma_x = N \begin{bmatrix} z & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

En consecuencia, se deberá verificar:

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δ es un coeficiente a determinar.

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

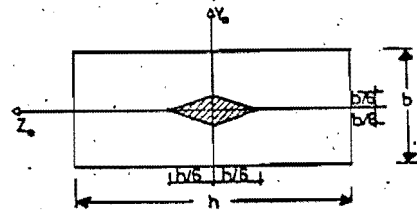


$$\Delta = \begin{bmatrix} U_y & U_z & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

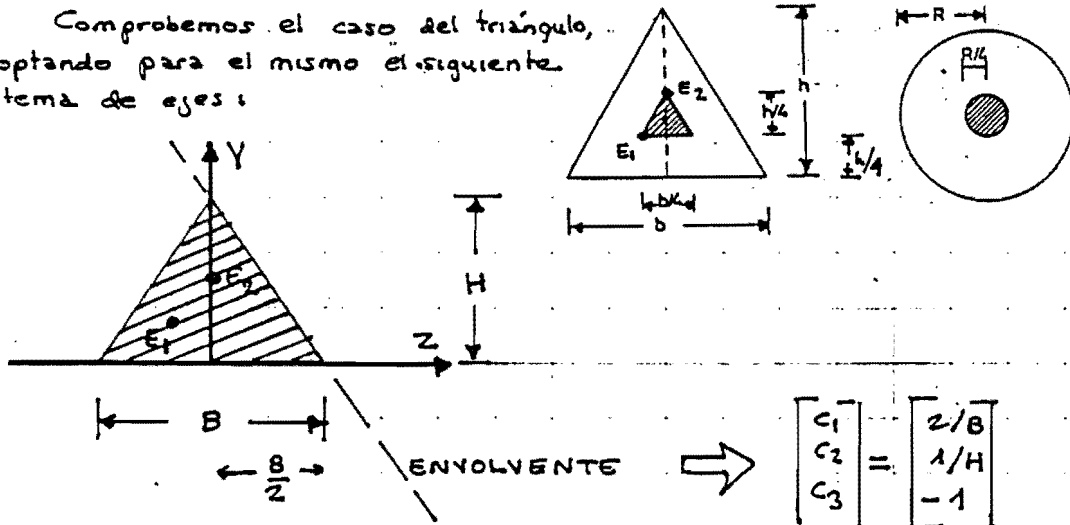
$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$



Existen figuras que por su simplicidad y su uso frecuente hace recomendable el conocimiento directo del NUCLEO CENTRAL, por lo cual adjuntamos, tres secciones especialmente característicos.



Comprobemos el caso del triángulo, adoptando para el mismo el siguiente sistema de ejes:



Los parámetros geométricos respecto a los ejes elegidos, son:

$$I_y = \frac{B^3 H}{48} \quad p_{zy} = 0 \quad I_z = \frac{B H^3}{12} \quad U_y = 0 \quad U_z = \frac{B H^2}{6} \quad A = \frac{B H}{2}$$

El punto E_1 , será:

$$\Delta = [U_y \quad U_z \quad A] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \left[0 \quad \frac{B H^2}{6} \quad \frac{B H}{2} \right] \begin{bmatrix} 2/B \\ 1/H \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{B H}{3} = \Delta$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_y & p_{zy} & U_y \\ p_{zy} & I_z & U_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{-3}{B H} \begin{bmatrix} B^3 H / 48 & 0 & 0 \\ 0 & B H^3 / 12 & B H^2 / 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/B \\ 1/H \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B/8 \\ H/4 \end{bmatrix}$$

El punto E_2 , lo determinaremos tomando la envolvente que es coincidente con la base del triángulo y con el eje z, a la cual puede asociarse el vector c_i siguiente

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0 \quad (\text{envolvente})$$

Aplicando la formulación expuesta: $\Delta = \frac{B H^2}{6} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H/2 \end{bmatrix}$

Con lo cual queda verificado el NUCLEO CENTRAL indicado.



12.6. APLICACIONES DEL NUCLEO CENTRAL

PUNTOS Y DISTANCIAS NUCLEARES

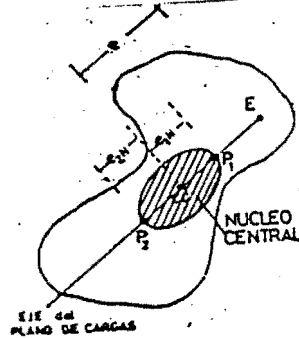
Dada una sección en la que conocemos el NUCLEO CENTRAL, podemos conocer las tensiones máximas que se producen en la misma ante un esfuerzo normal excéntrico, aplicando la siguiente expresión:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{e_2} N\right)$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{e}{e_1} N\right)$$

Uniendo E con el C. de G. definiremos el EJE del plano de cargas que cortará al NUCLEO CENTRAL en dos puntos P_1 y P_2 que denominaremos:

PUNTOS NUCLEARES, y que nos permiten definir las DISTANCIAS NUCLEARES e_2N y e_1N .

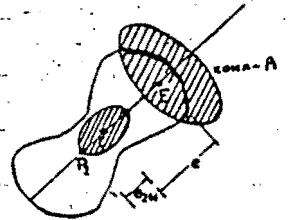


Todos los puntos situados sobre el EJE DEL PLANO DE CARGAS, al aplicarse sobre ellos un esfuerzo normal les corresponderán EJES NEUTROS para tales.

Si aplicásemos el cargo en P_2 , en la zona A se producirán tensiones de signo contrario, como consecuencia de la excentricidad y lo que genera el esfuerzo normal (de valor: $\sigma = N/A$). En todos las puntas esta última tensión supera a la primera, salvo en uno a en varios, pero los que ambas tensiones son iguales, puesto que la tensión total debe ser cero, ya que sabemos que al aplicarse un esfuerzo normal en el borde del NUCLEO CENTRAL EL EJE NEU-

TRO correspondiente será tangente a la sección, lo que implica las mencionadas puntas de tensión nula. Por lo tanto

$$\sigma_{exc} = -N/A$$



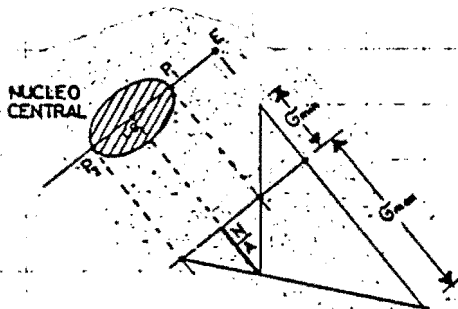
Si el esfuerzo normal en vez de aplicarse en P_2 se aplica en E, la tensión cambia de signo y el valor variará en función del cociente $\frac{e}{e_2N}$, por lo que en el punto en que antes la tensión era mínima, pasará a ser de tensión máxima y de valor según el principio de superposición:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} - \frac{e}{e_2N} \left(-\frac{N}{A}\right)$$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{e_2N}\right) \text{ tal como queríamos demostrar.}$$

La tensión mínima se razona de forma análoga.

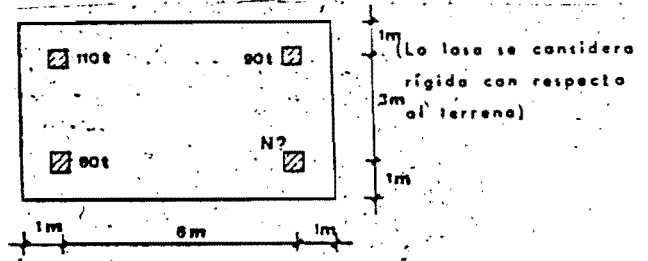
Las fórmulas anteriores equivalen como fácilmente puede demostrarse a la siguiente construcción gráfica:





EJERCICIO 12.6.1.

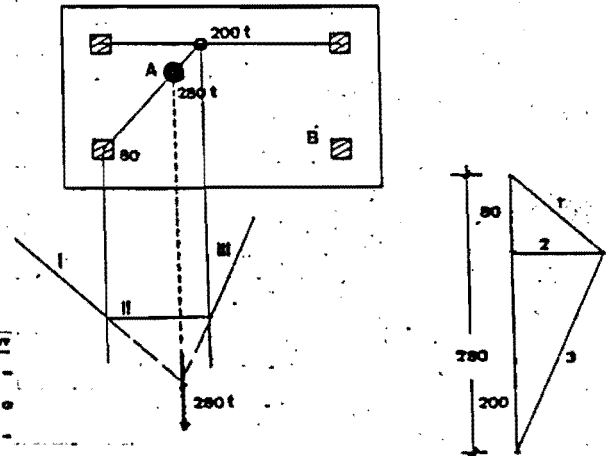
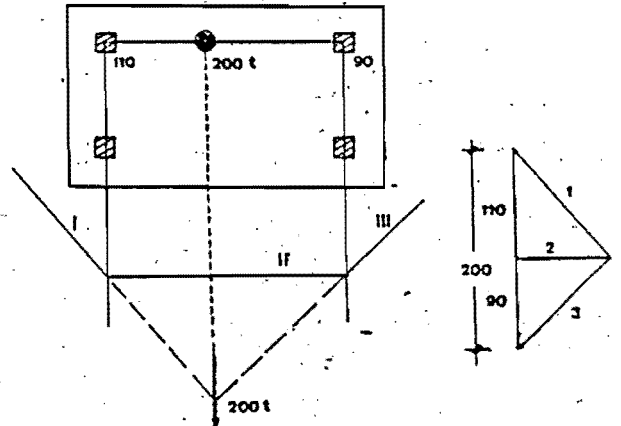
Una losa de cimentación transmite al terreno los cargas de cuatro pilares según el croquis. Los esfuerzos normales de tres pilares son conocidos: 80 T, 90T, 110 T.. Se desea determinar entre qué límites puede variar el esfuerzo normal del cuarto pilar para que las tensiones que transmita la losa al terreno sea en todos los puntos de compresión, y determinese el valor de la tensión máxima que genera el esfuerzo normal -- máxima.



SOLUCION

Resolvamos el ejercicio gráficamente .

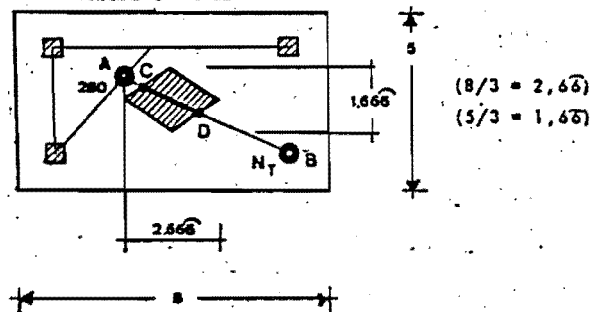
Determinemos en primer lugar el punto de aplicación de la resultante de las 3 esfuerzos normales conocidos, lo cual puede efectuarse mediante polígonos funiculares.



La resultante general se obtendrá componiendo la fuerza de 280 TONELADAS con el esfuerzo normal N, siendo preciso que dicho resultante tenga como punto de aplicación uno que pertenezca al NUCLEO CENTRAL.

El lugar geométrico de los posibles puntos de aplicación de la resultante general de los cuatro pilares ($N \rightarrow 280$ T), lo constituye la recta que une A con B. Si N es pequeña la resultante será cercana a A, y si el valor de N es mucho mayor que 280 T será próxima a B.

El punto de aplicación de la resultante para que se cumplan las condiciones del enunciado, es preciso que pertenezca al intervalo CD. El punto C corresponde al N mínimo y el D al N máximo.



$(8/3 = 2,66)$
 $(5/3 = 1,66)$

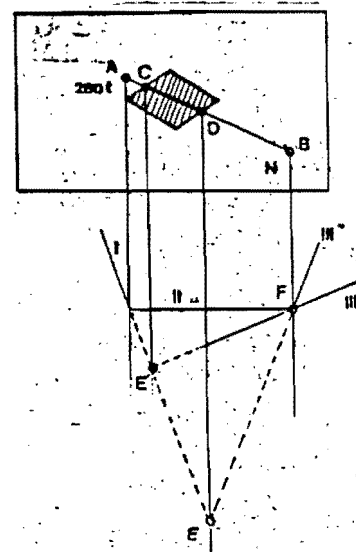
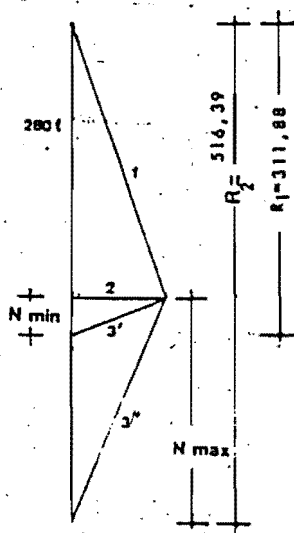
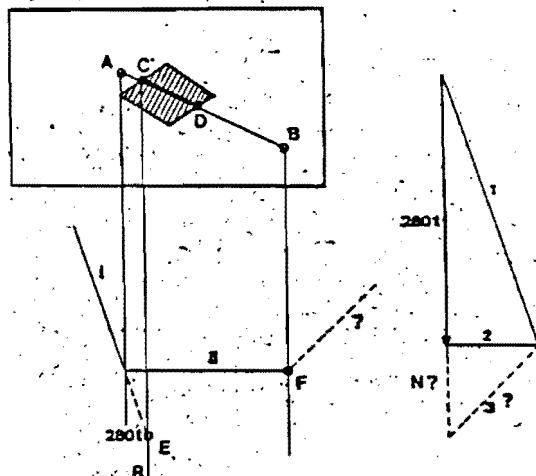
Para determinar el valor N preciso, para que la resultante general esté aplicada en C o en D, puede efectuarse aplicando la teoría de los polígonos funiculares, utilizando el hecho de que los lados funiculares extremos se deben cortar sobre la línea de acción de la resultante.



Al no conocer N , el radio polar 3 y el lado funicular III tampoco se conocen directamente.

Si los lados funiculares extremos se cortan sobre la resultante, implica que lo han de hacer sobre el punto E , y por lo tanto la prolongación del lado III debe pasar por dicho punto, y puesto que a la vez debe contener F , queda determinado dicho lado funicular III, y consecuentemente el radio polar 3 , lo que permite medir gráficamente el valor de N , que será el $N_{\text{mínimo}}$.

Si en vez de efectuar el proceso anterior tomando como punto de aplicación C , adoptamos D , se obtendrá $N_{\text{máximo}}$.



Por lo tanto:

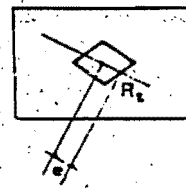
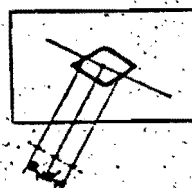
$$N \in (31,88 \quad , \quad 236,39)$$

$$R : (R_1, R_2) = (311,88 \quad , \quad 516,39)$$

La tensión máxima que se producirá para N_{max} es decir para cuando $R = R_2$ con punto de aplicación D , se obtiene aplicando la fórmula:

Puesto que $e = e_N$, obtendremos:

$$\sigma_{\text{max}} = 2 \frac{R}{S_{\text{sup}}} = \frac{2 \times 516,39 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^4} = 2,582 \text{ Kg/cm}^2 = \sigma_{\text{max}}$$



$$\sigma_{\text{max}} = \frac{R_N}{S_{\text{sup}}} \left(1 + \frac{e}{e_N} \right)$$



Resolvamos ahora el problema analíticamente:

Las coordenadas de los pilares con respecto a los ejes de simetría de la losa, son:

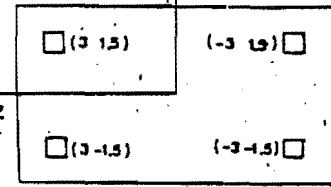
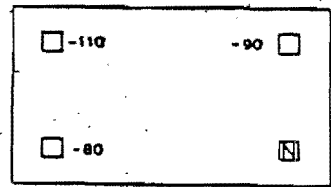
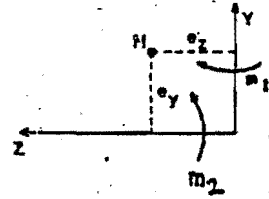
Calculamos la resultante y su punto de aplicación.

$$R = -280 + N$$

$$m_1 = \sum N_i \cdot z_i = 3(-110 - 80 + 90 - N)$$

$$= -300 - 3N = m_1$$

$$M_2 = \sum N_i \cdot y_i = 1,5(-110 - 90 - 80 - N) = -180 - 1,5N = m_2$$



Los momentos de inercia con respecto al sistema de referencia propuesto, son:

$$I_z = \frac{5^3 \cdot 8}{12} = 83,3$$

$$I_y = \frac{8^3 \cdot 5}{12} = 213,3$$

$$P_{zy} = 0$$

$$S_{up} = 5 \cdot 8 = 40$$

$$U_y = 0$$

$$U_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 213,3 & 0 & 0 \\ 0 & 83,3 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}^{-1}$$

Por lo tanto:

$$\tilde{Q}_x = [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{213,3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{83,3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -300 - 3N \\ -180 - 1,5N \\ -280 + N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{213,3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{83,3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

El valor de N_{min} corresponde al hecho de que para el mismo la tensión en A sea nula, y el valor de N_{max} para cuando la tensión en B sea cero.

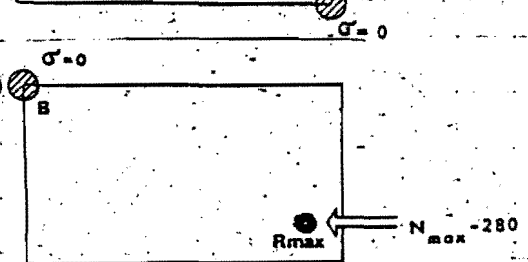
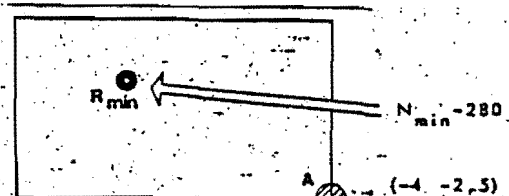
Sustituyendo:

$$0 = [-4 \ -2,5 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{213,3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{83,3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -300 - 3N_{min} \\ -180 - 1,5N_{min} \\ -280 + N_{min} \end{bmatrix}$$

Desarrollando:

$$0 = 0,025 N_{min} - 7 + 11,025 + 0,10125 N_{min}$$

$$0 = 0,12625 N_{min} + 4,025 \Rightarrow N_{min} = -31,88 \text{ T}$$



$$0 = [4 \ 2,5 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{213,3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{83,3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -300 - 3N_{max} \\ -180 - 1,5N_{max} \\ -280 + N_{max} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 0,025 N_{max} - 7 - 11,025 - 0,10125 N_{max} \\ 0 &= -0,07625 N_{max} - 18,025 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$N_{max} = -236,39 \text{ T}$$



Roberto Guerra Fontana

La tensión máxima para N_{max} , se produce en el punto A (-4, -2,5)

$$R_{max} = -236,39 - 280 = -516,39$$

Para N_{max} , los valores de m_1 y m_2 son:

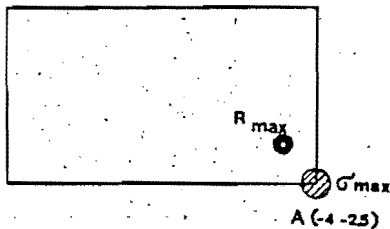
$$m_1 = -300 + 2 \cdot 236,39 = 409,17$$

$$m_2 = -180 + 1,5 \cdot 236,39 = 174,59$$

Sustituyendo:

$$\sigma_x = [-4 \quad -2,5 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{213,3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{82,3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 409,17 \\ 174,59 \\ -516,39 \end{bmatrix} = -25,82 \text{ T/m}^2 =$$

$$\sigma_{max} = -2,58 \text{ kg/cm}^2$$

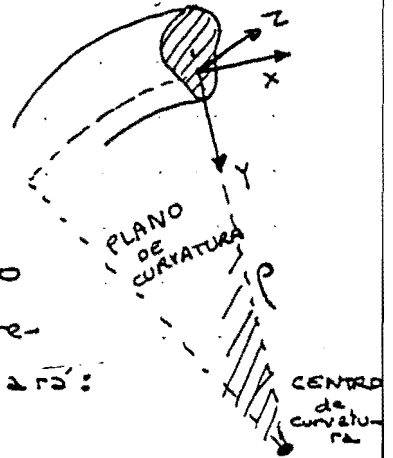




12.7. PARTICULARIZACIÓN DEL SISTEMA DE REFERENCIA, ADOPTANDO EJES CENTRALES

Se ha deducido para un sistema de ejes genérico, (con la única condición de que el eje Y , este contenido en el plano de curvatura), el que se verifica:

$$\bar{G}_x = N E [z^* \ y^* \ 1] \cdot \begin{bmatrix} I_Y^* & P_{ZY}^* & U_Y \\ P_{ZY}^* & I_Z^* & U_Z \\ U_Y & U_Z & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Si el origen de ejes se situa en el CENTRO de GRAVEDAD de la sección, en cuyo caso los ejes reciben la denominación de CENTRALES, se verificará:

$$\boxed{U_Y = 0 \quad U_Z = 0}$$

Así como:

$$U_Y^* = \int_s \frac{z}{1-y/\rho} ds = \int_s \frac{z(1-\frac{y}{\rho} + \frac{y}{\rho})}{1-y/\rho} ds = \int_s z ds + \frac{1}{\rho} \int_s \frac{zy}{1-y/\rho} ds = \boxed{\frac{1}{\rho} P_{ZY}^* = U_Y^*}$$

$$U_Z^* = \int_s \frac{y}{1-y/\rho} ds = \int_s \frac{y(1-\frac{y}{\rho} + \frac{y}{\rho})}{1-y/\rho} ds = \int_s y ds + \frac{1}{\rho} \int_s \frac{y^2}{1-y/\rho} ds = \boxed{\frac{1}{\rho} I_Z^* = U_Z^*}$$

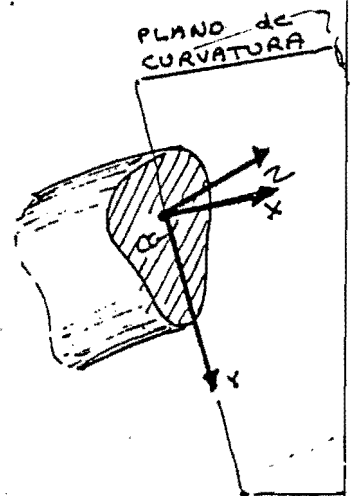
Por lo tanto:

$$\bar{G}_x = N E [z^* \ y^* \ 1] \cdot \begin{bmatrix} I_Y^* & P_{ZY}^* & 0 \\ P_{ZY}^* & I_Z^* & 0 \\ \frac{1}{\rho} P_{ZY}^* & \frac{1}{\rho} I_Z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operando, puede demostrarse que:

$$\bar{G}_x = \frac{N E}{d_2^*} [z^* \ y^* \ 1] \cdot \begin{bmatrix} I_Z^* & -P_{ZY}^* & 0 \\ -P_{ZY}^* & I_Y^* & 0 \\ 0 & -\frac{U_Z^*}{A\rho} & \frac{U_Y^*}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

siendo: $d_2^* = \begin{vmatrix} I_Z^* & -P_{ZY}^* \\ -P_{ZY}^* & I_Y^* \end{vmatrix}$



(12.7.10)



Si la barra es de directriz recta, el radio de curvatura será infinito, y en consecuencia:

$$\begin{array}{l} z^* \rightarrow z \\ y^* \rightarrow y \end{array} \quad \begin{array}{l} I_z^* \rightarrow I_z \\ I_y^* \rightarrow I_y \\ P_{zy}^* \rightarrow P_{zy} \end{array} \quad \frac{dz^*}{ds} \rightarrow 0 \quad J_z^* = J_z = \begin{vmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{vmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{J_z} [z \ y \ 1] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} & 0 \\ -P_{zy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_z}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_z = \begin{vmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{vmatrix} \quad (12.7.20)$$

Lo que equivale a:

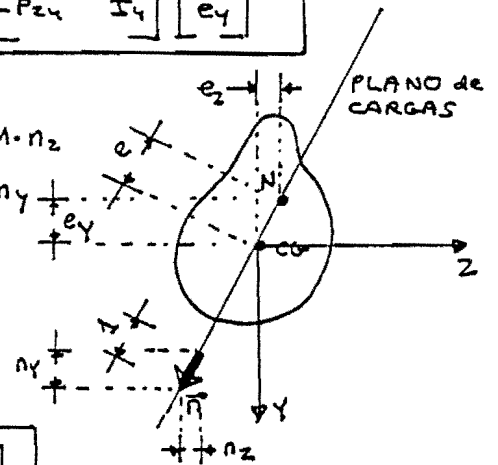
$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A} + \frac{N}{J_z} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix} \quad (12.7.30)$$

Como:

$$N \cdot e_z = N \cdot e \cdot n_z = M \cdot n_z$$

$$N \cdot e_y = N \cdot e \cdot n_y = M \cdot n_y$$

$$M = N \cdot e$$



Sustituyendo:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{J_z} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \quad (12.7.40)$$

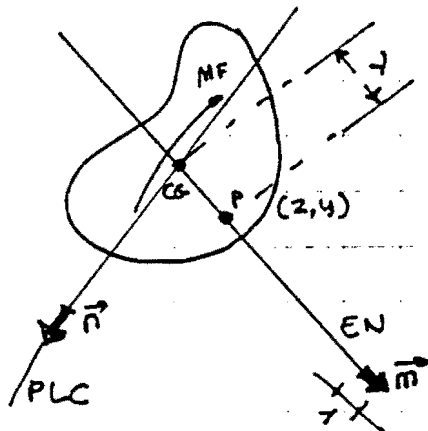
En el caso de FLEXIÓN PURA, ($N=0$), la ecuación anterior se reduce a:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{M}{J_z} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \quad (12.7.50)$$



En el caso de barras rectas, es fácil determinar el LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS DE TENSION NULA, que se suele denominar EJE NEUTRO, puesto que:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{M}{J^2} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix}$$



$$\Leftrightarrow \begin{matrix} z = \lambda \cdot m_z \\ y = \lambda \cdot m_y \end{matrix}$$

$$0 = \frac{M \cdot \lambda}{J^2} [m_z \ m_y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix}$$

Donde λ indica la distancia de un punto de dicho lugar geométrico al origen.

Se deberá cumplir en consecuencia:

$$0 = [m_z \ m_y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = P_{PG,EN} \quad (12.7.6)$$

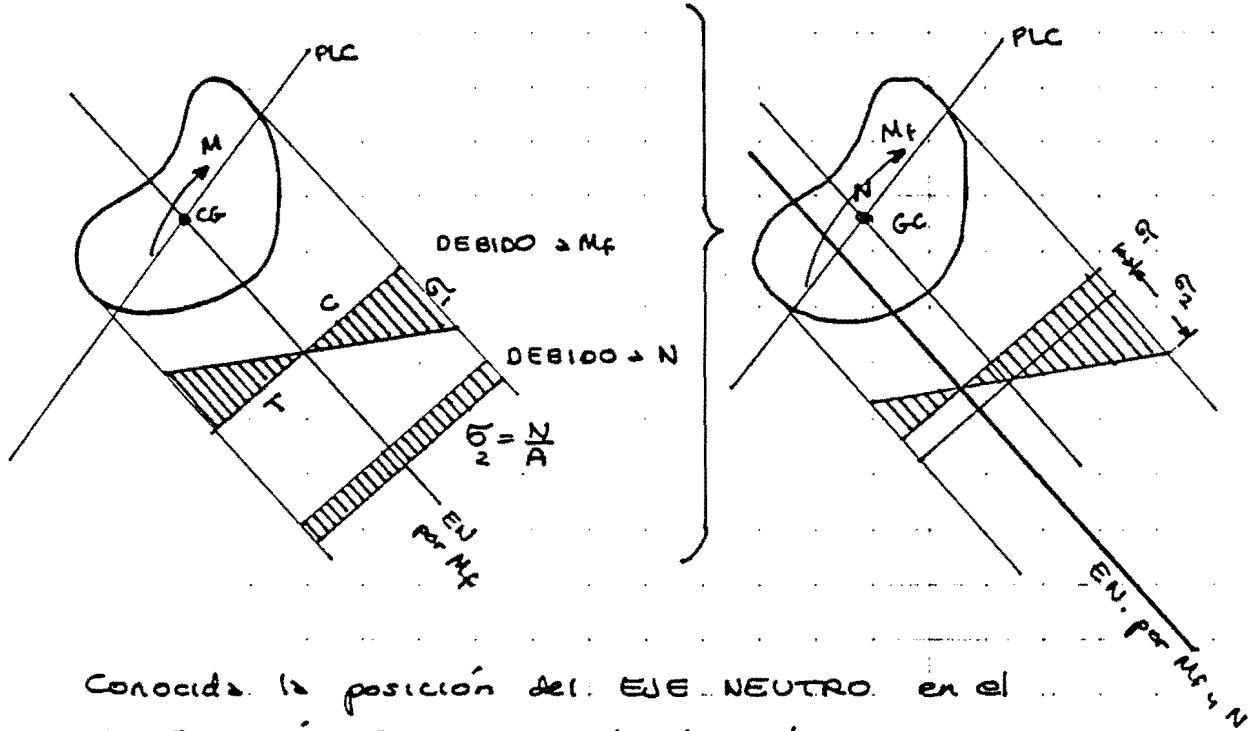
$$0 = P_{nm}$$

(Recordando la expresión que determina el producto de inercia respecto a dos ejes).

En consecuencia:

EL EJE NEUTRO que es el LUGAR GEOMETRICO DE LOS PUNTOS DE TENSION NULA, es a su vez el EJE CONJUGADO DE INERCIA CENTRAL, del EJE QUE CONTIENE AL PLANO DE CARGAS, en secciones solicitadas a FLEXIÓN PURA ($N=0$)

Si existiese esfuerzo normal, el eje neutro sufrirá un desplazamiento, paralelo a la posición anteriormente definida, lo cual es consecuencia del término constante que en tal caso hay que considerar, y que es: N/A , y por lo tanto, dicho eje neutro dejará de contener al C. de G.



Conocida la posición del EJE NEUTRO en el caso de FLEXIÓN PURA, puede demostrarse que :

- * si calculamos el vector $\vec{\Phi}$ que asocia el tensor de inercia al vector \vec{n} , indicativo del PLANO DE CARGAS, de componentes:

$$\begin{bmatrix} \Phi_z \\ \Phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix}$$

- * cuyo módulo será:

$$|\vec{\Phi}| = \sqrt{\Phi_z^2 + \Phi_y^2}$$

- * mediante el cociente $\partial_z / |\vec{\Phi}|$, se obtiene:

$$P_{MF, EN} = \frac{-\partial_z}{|\vec{\Phi}|} \quad (12.7.7)$$

- * y por otro lado, la distancia de un punto P (z,y) al eje neutro, es calculable por la expresión:

$$Y = \frac{1}{|\vec{\Phi}|} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} Y \equiv \text{DISTANCIA de} \\ \text{un punto al} \\ \text{EJE NEUTRO} \end{matrix} \quad (12.7.8)$$

En consecuencia, la fórmula (12.7.5) se puede transformar en:

$$\sigma_x = \frac{M}{\partial_z} [z \ y] \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_x = \frac{-M_t \cdot Y}{P_{MF, EN}} \quad (12.7.9)$$



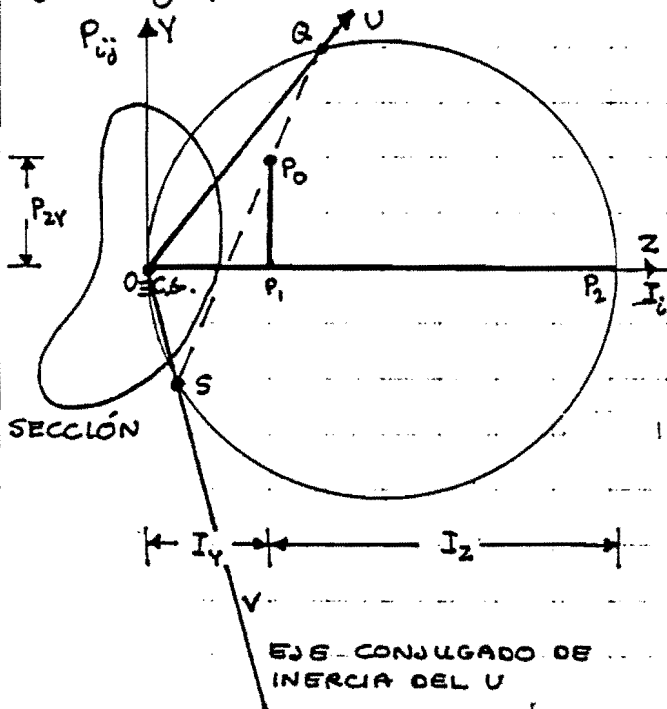
12.8. ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FLEXIÓN DISIMÉTRICA MEDIANTE EL CÍRCULO DE LAND

Según se ha deducido: $\sigma_x = \frac{M_x \cdot Y}{|P_{MP, EN}|}$

por lo que el problema de la flexión disimétrica se reduce a la obtención del EJE NEUTRO que es el EJE CENTRAL Y CONJUGADO DE INERCIA DEL EJE DEL PLANO DE CARGAS (si $N=0$), y la obtención del PRODUCTO DE INERCIA DE LA SECCIÓN con respecto al citado EJE NEUTRO y al EJE CENTRAL cuya DIRECCIÓN es la del vector MOMENTO FLECTOR, así como la distancia Y del punto en que se quiere calcular la tensión al EJE NEUTRO.

El círculo de LAND permite fácilmente el cálculo del eje CONJUGADO DE INERCIA DE UNO DADO, por lo que puede utilizarse para la obtención gráfica del EJE NEUTRO.

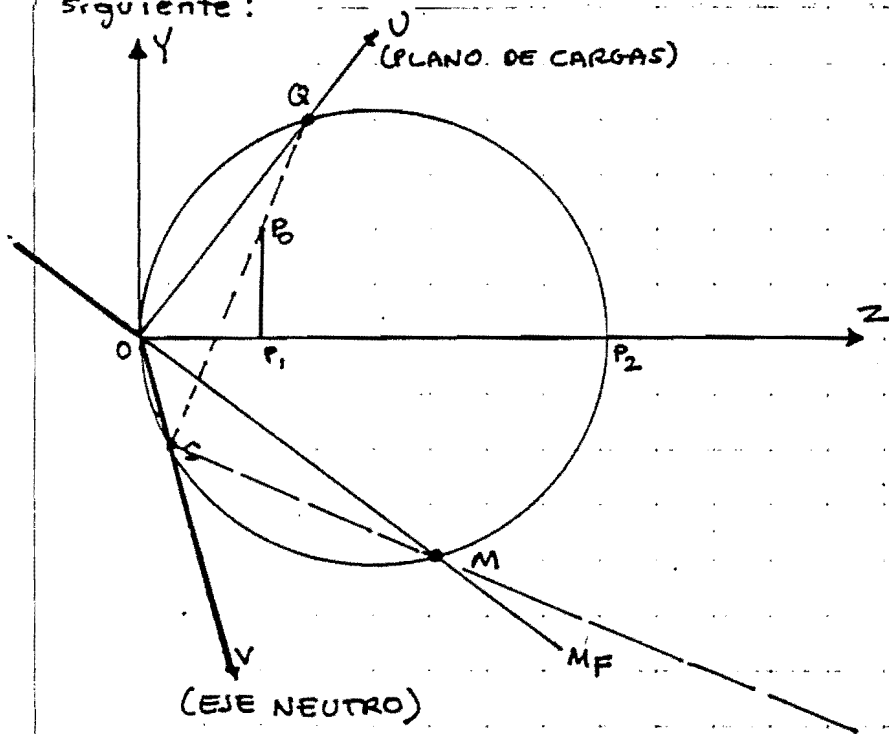
Si los ejes Z e Y, son ejes centrales de la sección, el eje conjugado de inercia del U será:



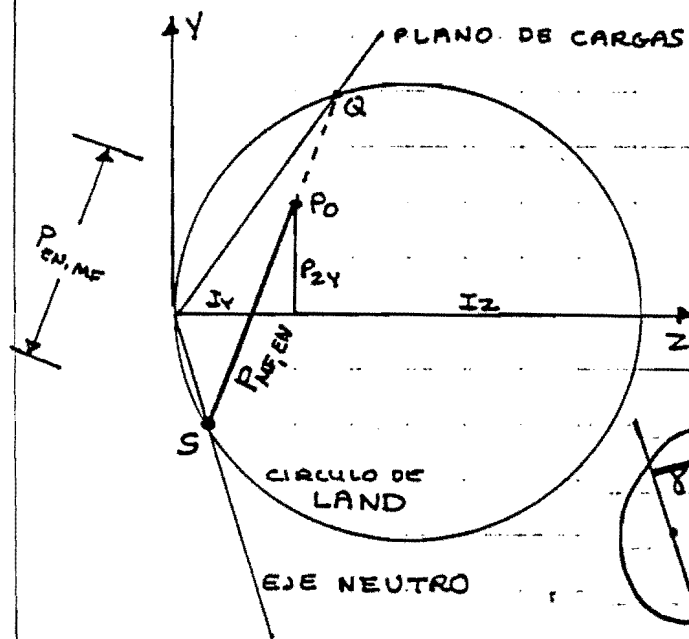
- $OP_1 \rightarrow I_y$
- $P_1P_2 \rightarrow I_z$
- $P_1P_0 \rightarrow P_{zy}$
- círculo capaz de $OP_2 \rightarrow$ CÍRCULO DE LAND
- $Q \rightarrow$ punto de corte de U con el círculo de LAND
- $S \rightarrow$ punto de corte del círculo con la recta QP_0
- $OS \rightarrow$ EJE CONJUGADO DE INERCIA DEL U, que simbolizaremos por V

Si U es la TRAZA DEL PLANO DE ACTUACIÓN DE LAS CARGAS, el eje V será el EJE NEUTRO.

La obtención del producto de inercia respecto al eje MF y al eje NEUTRO, también se puede efectuar mediante el círculo de LAND, puesto que dicho producto de inercia viene determinado por la distancia del punto principal P_0 a la secante que definen los puntos M y S, tal como se indica en la figura siguiente:



La distancia mínima del punto P_0 a la secante \overline{SM} es $\overline{P_0S}$, puesto que $\overline{P_0S}$ es perpendicular a \overline{SM} ya que el arco que abarca S según P_0 y M es \widehat{QM} , el mismo arco que abarca O con los ejes U y MF, que por construcción son ORTOGONALES, en consecuencia el ángulo \widehat{QSM} es recto, y $\overline{P_0S}$ es la mínima distancia de P_0 a la secante SM, en consecuencia $\overline{P_0S}$ es el producto de inercia $P_{GN, MF}$, por lo que puede simplificarse la figura a:

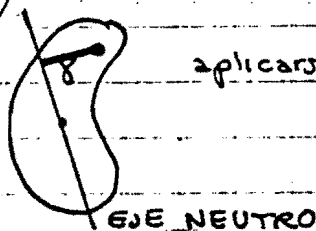


La distancia de un punto P al EJE NEUTRO, γ , se obtendrá fácilmente representando gráficamente la sección a una cierta escala.

Por lo que podrá aplicarse la expresión:

$$I_{xy} = \frac{M_F}{|P_{MF, EN}|} \gamma$$

al conocerse todos sus términos.



12.9. DIMENSIONADO EN RÉGIMEN ELÁSTICO DE BARRAS SOLICITADAS A FLEXIÓN DISIMÉTRICA, ATENDIENDO A LA TENSION MÁXIMA

En el caso de la flexión disimétrica, la tensión la determina la fórmula:

$$\sigma_x = \frac{M_F}{|P_{MF,EN}|} \gamma$$

La tensión máxima se produce en el punto máximamente distante del EJE NEUTRO.

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{F \max}}{|P_{MF,EN}|} \gamma_{\max}$$

Como existen infinitas orientaciones posibles, existen también infinitos valores de la razón:

$$W_{MP} = |P_{MF,EN}| / \gamma_{\max}$$

lo que imposibilita que el mismo pueda estar tabulado para las direcciones que no sean las principales de inercia, y en consecuencia no es aplicable el método empleado en la flexión simétrica.

En la flexión disimétrica se procede por tanteo, eligiendo una sección de forma arbitraria, y verificando el estado tensional que se produce en la misma.

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{F \max}}{|P_{MF,EN}|} \gamma_{\max}$$

Si: $\sigma_{x \max} > \sigma_{ad}$ (tensión admisible del material)

deberá incrementarse las dimensiones de la sección

Si: $\sigma_{x \max} \leq \sigma_{ad}$ la sección es correcta.

En el caso de que la sección fuere insuficiente, puede deducirse el coeficiente K de homotecia, por el que habría



que multiplicar todas las cotas de la sección para que la tensión máxima fuese precisamente la admisible del material.

El producto de inercia se alterará según la cuarta potencia del factor de homotecia (k^4), en tanto que la máxima distancia variará proporcionalmente a dicho factor, en consecuencia:

$$\bar{\sigma}_{ad} = \frac{M_{F, \max}}{k^4 \cdot |P_{MF, EN}| / \gamma_{\max} \cdot k}$$

$$\bar{\sigma}_{ad} = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{M_{F, \max}}{|P_{MF, EN}| / \gamma_{\max}} = \frac{\bar{\sigma}_{x, \max}}{k^3}$$



$$k = \sqrt[3]{\frac{\bar{\sigma}_{x, \max}}{\bar{\sigma}_{ad}}}$$

Expresión que permite obtener el factor de homotecia que hay que aplicar a una sección, en la que se produciría una tensión $\bar{\sigma}_{x, \max}$.

Como en general, los perfiles laminados no guardan una perfecta proporcionalidad entre todas sus cotas, la obtención del coeficiente k es simplemente de carácter orientativo.

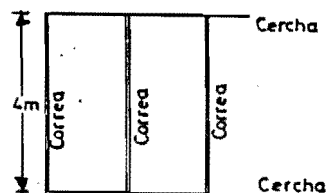
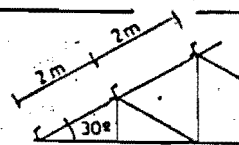
Los momentos de inercia de la posible sección solución, los determina el coeficiente k . Así pues

$$\begin{aligned} I_{z, \text{sol}} &\geq I_z \cdot k^4 & (P_{z, \text{sol}} = P_z \cdot k^4) \\ I_{y, \text{sol}} &\geq I_y \cdot k^4 \end{aligned}$$



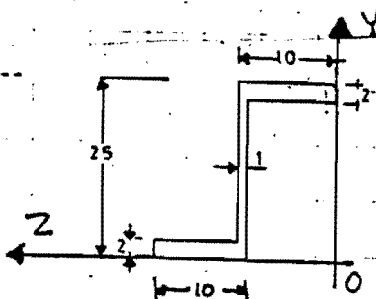
EJERCICIO 12.9.10

Das cuchillos distan 4 m. poseen una pendiente de 30° grados, sobre los que se apoyan unas correas cada dos metros que reciben el peso de una cubierta en la que cada metro cuadrado sufre 250 Kilogramos. Sabiendo que la tensión máxima admisible es de 1730 Kg/cm², determinar las cotas de la sección homotética de la que se croquizo para que se produzca la mencionada tensión.



SOLUCION

Calculemos en primer lugar los característicos geométricos de la sección con respecto a los ejes Y y Z.



$$A = 10 \cdot 25 - 9 \cdot 23 + 9 \cdot 2 = 61$$

$$U_z = 10 \cdot 25 \cdot 12,5 - 9 \cdot 23 \cdot 11,5 + 9 \cdot 2 \cdot 1 = 762,5$$

$$U_y = 10 \cdot 23 \cdot 5 - 9 \cdot 21 \cdot 4,5 + 9 \cdot 2 \cdot 9,5 - 9 \cdot 2 \cdot 4,5 = 579,5$$

$$I_z = \frac{10 \cdot 25^3}{3} - \frac{9 \cdot 23^3}{3} + \frac{9 \cdot 2^3}{3} = 15606,3$$

$$I_y = \frac{23 \cdot 10^3}{3} - \frac{21 \cdot 9^3}{3} + \frac{2 \cdot 19^3}{3} - \frac{2 \cdot 9^3}{3} = 6650,3$$

$$P_{zy} = 10 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 12,5 - 9 \cdot 23 \cdot 4,5 \cdot 11,5 + 9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (19 - 4,5) = 5173,75$$

La matriz a invertir, será:

$$\begin{bmatrix} I_y & P_{zy} & U_y \\ P_{zy} & I_z & U_z \\ U_y & U_z & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6650,3 & 5173,75 & 579,5 \\ 5173,75 & 15606,3 & 762,5 \\ 579,5 & 762,5 & 61 \end{bmatrix}$$

Si conocidos los parámetros geométricos anteriores, obtuviéramos los momentos de inercia respecto a ejes centrales paralelos a los dados, la inversión de la matriz es más inmediata, si bien, la ventaja que ello significa queda contrarrestada por el proceso operatorio que exige el cálculo de los citados momentos de inercia centrales.

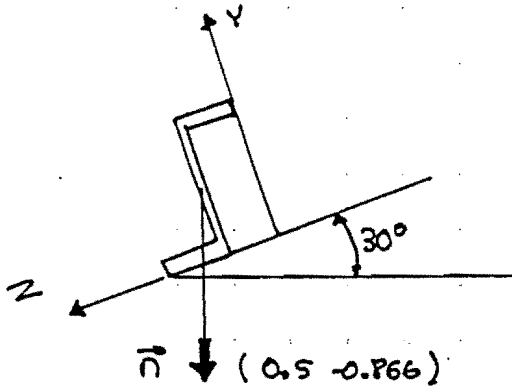
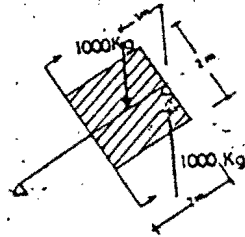
La inversa es:

$$\begin{bmatrix} 2,2740 \cdot 10^{-3} & 7,7482 \cdot 10^{-4} & -3,1288 \cdot 10^{-2} \\ 7,7482 \cdot 10^{-4} & 4,2862 \cdot 10^{-4} & -1,2719 \cdot 10^{-2} \\ -3,1288 \cdot 10^{-2} & -1,2719 \cdot 10^{-2} & 4,7261 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$



El momento flector valdrá en la sección central de la barra:

$$M = 1.000 \text{ Kg} \cdot \text{m} = 1.000 \text{ Kg} \cdot \text{m} = 10^5 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$



El vector indicativo del plano de cargas tendrá las siguientes componentes: $\vec{n} = (0,5 \quad -0,866)$

En consecuencia:

$$\sigma = [z \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 2,2740 \cdot 10^{-3} & 7,7482 \cdot 10^{-4} & -3,1288 \cdot 10^{-2} \\ 7,7482 \cdot 10^{-4} & 4,2862 \cdot 10^{-4} & -1,2719 \cdot 10^{-2} \\ -3,1288 \cdot 10^{-2} & -1,2719 \cdot 10^{-2} & 4,7261 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \cdot 10^5 \\ -0,866 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = [z \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 46,5988 \\ 1,6229 \\ -462,9749 \end{bmatrix}$$

Si imponemos que la tensión sea nula obtendremos la ecuación del EJE NEUTRO.

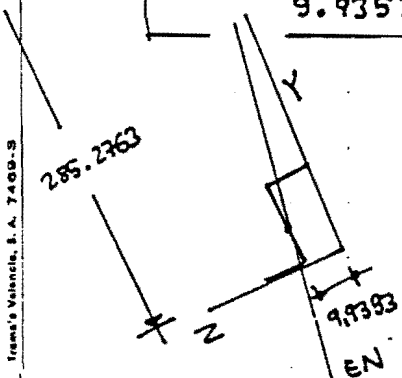
$$1 = \frac{z \cdot 46,5988}{462,9749} + \frac{y \cdot 1,6229}{462,9749}$$

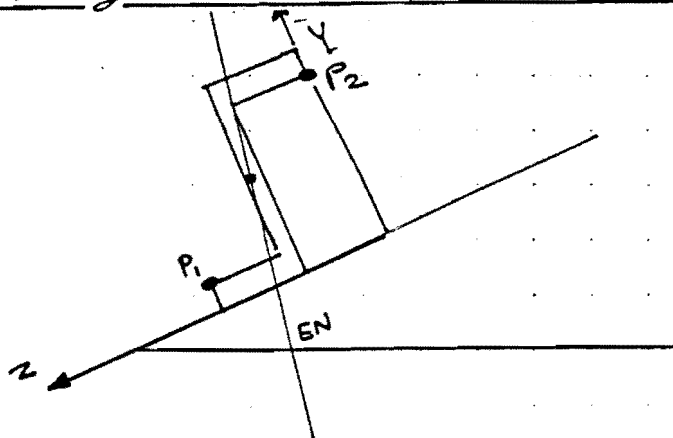
$$1 = \frac{z}{9,9353} + \frac{y}{285,2763} \quad \text{E.N.}$$

(El centro de gravedad de la sección pertenece a este eje)

Conocido el EJE NEUTRO

puede determinarse fácilmente el punto más alejado del mismo, el cual resulta ser: P_1 ó P_2 de la siguiente figura





$$P_2 (0, 23)$$

$$P_1 (19, 2)$$

En consecuencia:

$$\sigma_{P_2} = [0 \ 23 \ 1] \begin{bmatrix} 46.5988 \\ 1.6229 \\ -462.9749 \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_{P_2} = -425,65$$

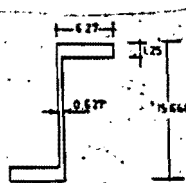
$$\sigma_{P_1} = 425,65$$

$$\sigma_{P_1} = [19 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 46.5988 \\ 1.6229 \\ -462.9749 \end{bmatrix} =$$

El factor de homotecia será: $K = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ad}}} = \sqrt[3]{\frac{425,65}{1733}}$

$$K = 0,6263$$

Multiplicando por k , todas las cotas de la sección, se obtendrá la sección requerida:



Los momento de inercia se obtendrán multiplicando por k^4 los de la sección primitiva.

$$I_2 = 1560^3 \cdot 0,6263^4 = 2401 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = 6650^3 \cdot 0,6263^4 = 1023 \text{ cm}^4$$

El área correspondiente se obtiene multiplicando la original por k^2

$$A = 61 \cdot 0,6263^2 = 23,93 \text{ cm}^2$$



12.10. DIMENSIONADO DE PIEZAS SOLICITADAS A COMPRESIÓN

COMPUESTA DISIMÉTRICA - (EN RÉGIMEN ELÁSTICO)

(SÓLO ANTE EFECTOS DE 1er ORDEN)

Sabemos que la tensión que se produce en un punto dado viene determinado por la expresión:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A} + \frac{N}{J_z} \begin{bmatrix} z & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix}$$

Fórmula que requiere la previa elección de una determinada sección, para que conozcamos los parámetros geométricos de la misma, A , I_y , I_z y P_{zy}

Lógicamente la sección elegida en un primer análisis no es la correcta, ya sea porque la tensión $\bar{\sigma}_x$ es muy inferior a la admisible, o por ser esta muy superior, pero en ambos casos deberá elegirse una nueva sección, verificándose nuevamente la tensión.

El proceso habitual es el de tanteos sucesivos, pero también puede aplicarse el concepto de coeficiente de homotecia con que resolvimos la flexión disimétrica.

La tensión máxima, se producirá para un punto P de coordenadas (z_p, y_p) , máximamente distante del EJE NEUTRO.

$$\bar{\sigma}_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{N}{J_z} \begin{bmatrix} z_p & y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}_{\max} = \bar{\sigma}_N + \bar{\sigma}_e$$

donde:

$$\bar{\sigma}_N = \frac{N}{A}$$

$$\bar{\sigma}_e = \frac{N}{J_z} \begin{bmatrix} z_p & y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix}$$

Si multiplicáramos todas las cotas de la sección por un cierto coeficiente K , conseguiremos una cierta variación de la tensión máxima, siendo el objetivo el que esta sea la admisible del material, en cuyo caso se verificará:



$$\bar{\sigma}_{ad} = \frac{N}{A'} + \frac{N}{J'_2} \begin{bmatrix} z'_p & y'_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_z & -P'_{zy} \\ -P'_{zy} & I'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix}$$

Los parámetros geométricos de la nueva sección, guardarán las siguientes relaciones con los primitivos y el coeficiente de homotecia k .

$$A' = A \cdot k^2$$

$$z'_p = z_p \cdot k$$

$$I'_y = I_y \cdot k^4$$

$$y'_p = y_p \cdot k$$

$$I'_z = I_z \cdot k^4$$

$$J'_2 = k^8 \cdot J_2$$

$$P'_{zy} = P_{zy} \cdot k^4$$

En consecuencia:

$$\bar{\sigma}_{ad} = \frac{N}{A \cdot k^2} + \frac{N}{J_2 \cdot k^8} \begin{bmatrix} k \cdot z_p & k \cdot y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z \cdot k^4 & -P_{zy} \cdot k^4 \\ -P_{zy} \cdot k^4 & I_y \cdot k^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}_{ad} = \frac{N}{A} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \frac{N}{J_2} \begin{bmatrix} z_p & y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z & -P_{zy} \\ -P_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}_{ad} = \frac{\bar{\sigma}_2}{k^2} + \frac{\bar{\sigma}_3}{k^3}$$



$$k^3 - k \frac{\bar{\sigma}_N}{\bar{\sigma}_{ad}} - \frac{\bar{\sigma}_e}{\bar{\sigma}_{ad}} = 0$$

ECUACIÓN que nos permite deducir el coeficiente de homotecia preciso, para corregir la tensión al valor $\bar{\sigma}_{ad}$.

La ecuación de tercer grado, puede resolverse mediante la aplicación de la REGLA DE NEWTON

$$k' = k - \frac{k^3 - k \frac{\bar{\sigma}_N}{\bar{\sigma}_{ad}} - \frac{\bar{\sigma}_e}{\bar{\sigma}_{ad}}}{3k^2 - \frac{\bar{\sigma}_N}{\bar{\sigma}_{ad}}}$$

$$k' = \frac{2k^3 + \frac{\bar{\sigma}_e}{\bar{\sigma}_{ad}}}{3k^2 - \frac{\bar{\sigma}_N}{\bar{\sigma}_{ad}}}$$

Fórmula que permite deducir el coeficiente de homotecia correcto, por aproximaciones sucesivas, hasta que k y k' sean coincidentes.



En general σ_e es bastante superior a σ_N , en cuyo caso, un valor aproximado se puede obtener prescindiendo de σ_N , para una primera determinación del coeficiente K :

$$K_0 = \sqrt[3]{\frac{\sigma_e}{\sigma_{ad}}}$$

Según la regla de Newton, un valor más exacto de K será:

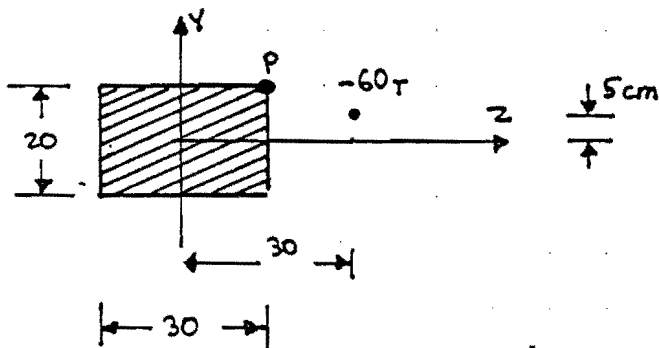
$$K = \frac{2K_0^3 + \sigma_e/\sigma_{ad}}{3K_0^2 - \sigma_N/\sigma_{ad}} = \frac{3\sigma_e/\sigma_{ad}}{3\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{ad}}\right)^{2/3} - \frac{\sigma_N}{\sigma_{ad}}}$$

$$K = \frac{\sigma_e}{\sqrt[3]{\sigma_{ad}\sigma_e^2 - \sigma_N/3}}$$

FÓRMULA PARA LA OBTENCIÓN APROXIMADA DEL COEFICIENTE DE HOMOTECIA

Lo que nos puede permitir la determinación de un coeficiente de homotecia suficientemente aproximado, más si se tiene en cuenta que la condición impuesta debe complementarse con el análisis de los efectos de segundo orden que serán expuestos más adelante.

EJERCICIO 12.10.1. DETERMINAR el coeficiente de homotecia preciso, para que la tensión máxima sea de $\pm 100 \text{ kg/cm}^2$, cuando se aplica un esfuerzo normal de compresión de 60 TONELADAS, en un punto de coordenadas (30, 5) respecto a unos ejes, que son los de simetría de la sección propuesta que es un rectángulo de 30x20.



SOLUCIÓN

Calculemos los parámetros geométricos de la sección propuesta:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= 600 \text{ cm}^2 \\ I_z &= \frac{30 \cdot 20^3}{12} = 20000 \text{ cm}^4 \\ I_y &= \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right.$$



$$J_2 = 20000 \cdot 45000 = 9 \cdot 10^8$$

El punto de máxima tensión será el de coordenadas $(15, 10) \equiv (z_p, y_p)$, y por lo tanto:

$$\bar{\sigma}_N = \frac{-60000}{600} = -100$$

$$\bar{\sigma}_e = \frac{-60000}{9 \cdot 10^8} [15 \ 10] \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 45000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} = -750$$

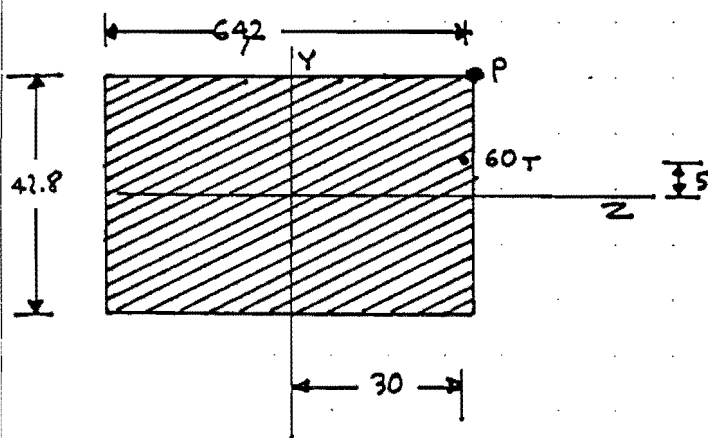
Luego la tensión máxima que se produce en la sección propuesta es de -850 Kg/cm^2

Según lo expuesto, el coeficiente de homotecia lo determinará la expresión:

$$(\bar{\sigma}_{ad} = -100)$$

$$K = \frac{-750}{\sqrt[3]{-100 \cdot 750^2 + 100/3}} = 2.14 = \frac{750}{\sqrt[3]{100 \cdot 750^2 - 100/3}}$$

Verifiquemos las tensiones que se producirán en una sección cuyas cotas están multiplicadas por el coeficiente de homotecia K :



$$A = 2747,76$$

$$I_z = \frac{64,2 \cdot 42,8^3}{12} = 419455$$

$$I_y = \frac{42,8 \cdot 64,2^3}{12} = 943773$$

$$J_2 = 3,96 \cdot 10^{11}$$

$$P(32,1 \ 21,4)$$

$$\bar{\sigma}_N = \frac{-60000}{2747,76} = -21,84$$

$$\bar{\sigma}_e = \frac{-60000}{3,96 \cdot 10^{11}} [32,1 \ 21,4] \begin{bmatrix} 419455 & 0 \\ 0 & 943773 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} = -76,50$$

Luego la tensión total será en el punto P:

$$\bar{\sigma}_{max} = +\bar{\sigma}_N + \bar{\sigma}_e = -21,84 - 76,5 = -98,34$$

Por lo cual, la sección propuesta es correcta.



12.11 FLEXIÓN PURA SIMÉTRICA, COINCIDENTE CON EL PLANO DE CURVATURA

Habíamos deducido, que si el origen de ejes era coincidente con el c. de G. la tensión en un punto, venía dado por:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A} [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} I_z^* & -P_{zy}^* & 0 \\ -P_{zy}^* & I_y^* & 0 \\ 0 & -\frac{d_z^*}{A\rho} & \frac{d_y^*}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A} + \frac{N}{A} [z^* \ y^* \ 1] \cdot \begin{bmatrix} I_z^* & -P_{zy}^* \\ -P_{zy}^* & I_y^* \\ 0 & -\frac{d_z^*}{A\rho} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_z \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como:

$$N e_z = N \cdot e \cdot n_z = M n_z$$

$$N e_y = N \cdot e \cdot n_y = M n_y$$

resulta:



$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\rho} [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} I_z^* & -P_{zy}^* \\ -P_{zy}^* & I_y^* \\ 0 & -\frac{d_z^*}{A\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $N=0$, y por otro lado los ejes son principales de inercia, lo que implica que: $P_{zy}^* = 0$, resultará:

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{M}{A\rho} n_y + \frac{M}{I_z^* I_y^*} [z^* \ y^*] \cdot \begin{bmatrix} I_z^* & 0 \\ 0 & I_y^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{M}{A\rho} n_y + \frac{M z^* n_z}{I_y^*} + \frac{M y^* n_y}{I_z^*} \quad (12.11.10)$$

Recuérdese, que en barras curvas la teoría utilizada está fundamentada en la hipótesis de que el eje Y sea coincidente con el PLANO DE CURVATURA, que en este caso además es un eje principal de inercia de la sección.

Frecuentemente, la flexión se produce en un plano coincidente con el plano de curvatura, en cuyo caso $n_y = 1$, $n_z = 0$, lo que sim-



plificar (12.11.1.);

$$\tilde{\sigma}_x = M \left(\frac{y^*}{I_z^*} - \frac{1}{A_p} \right)$$

(12.11.2.)

PLANO DE CURVATURA, EJE PRINCIPAL DE INERCIA, Y COINCIDENTE CON EL PLANO DE FLEXIÓN

$I_z^* = \rho^2 (A^* - A)$ ya que:

$$\begin{aligned} I_z^* &= \int \frac{y^2 ds}{1 - y/\rho} - \int \frac{\rho^2 (1 - \frac{y^2}{\rho^2} - 1) ds}{1 - y/\rho} = \\ &= -\rho^2 \int \left(1 + \frac{y}{\rho}\right) ds + \rho^2 \int \frac{ds}{1 - y/\rho} = \\ &= -\rho^2 A + \rho^2 \int \frac{y}{\rho} ds + \rho^2 A^* \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\tilde{\sigma}_x = M \left(\frac{y^*}{\rho^2 (A^* - A)} - \frac{1}{A_p} \right) = \boxed{\frac{M}{A_p} \left(\frac{y}{\rho - y} \frac{1}{\frac{A^*}{A} - 1} - 1 \right) = \tilde{\sigma}_x}$$

(12.11.3)

Los puntos del EJE NEUTRO tendrán una ordenada y_{EN} , tal que:

$$\tilde{\sigma}_x = 0 = \frac{M}{A_p} \left(\frac{y_{EN}}{\rho - y_{EN}} \frac{1}{\frac{A^*}{A} - 1} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\rho - y_{EN}}{y_{EN}} = \frac{1}{\frac{A^*}{A} - 1}}$$

(12.11.4.)

Sustituyendo (12.11.4.) en (12.11.3.) resultará:

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{M}{A_p} \left(\frac{y}{\rho - y} \frac{\rho - y_{EN}}{y_{EN}} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{\tilde{\sigma}_x = \frac{M}{A} \frac{y - y_{EN}}{y_{EN} (\rho - y)}}$$

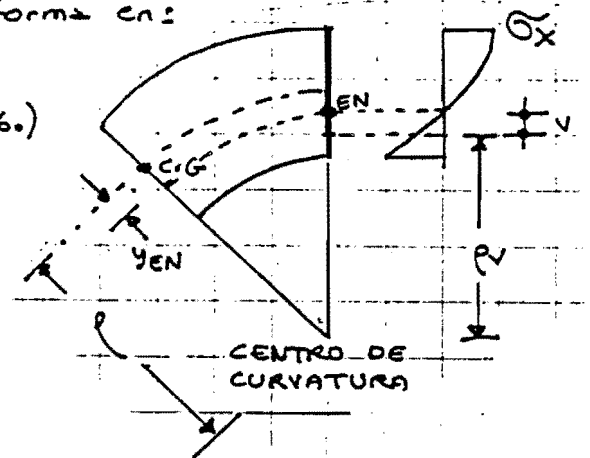
(12.11.5.)

Si la distancia de un punto al eje neutro, se simboliza por v y la distancia al centro de curvatura por ρ_v , la expresión (12.11.5.), se transforma en:

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{M}{A \cdot y_{EN}} \frac{v}{\rho_v}$$

(12.11.6.)

Por lo tanto, la determinación de la posición del EJE NEUTRO es esencial para que sea factible aplicar (12.11.5.) o (12.11.6.),





exigiéndonos ello despejar y_{EN} de la igualdad (12.11.4.), lo que permite establecer:

$$\frac{\rho - y_{EN}}{y_{EN}} = \frac{1}{\frac{A^*}{A} - 1} \Rightarrow \frac{\rho}{y_{EN}} = \frac{1}{\frac{A^*}{A} - 1} + 1 = \frac{A^*/A}{\frac{A^*}{A} - 1} = \frac{\rho}{y_{EN}}$$

$$(12.11.7.) \quad y_{EN} = \rho \left(1 - \frac{A}{A^*} \right)$$

Existe la posibilidad de calcular y_{EN} de forma aproximada, siempre que la curvatura no sea muy alta, por medio de la fórmula:

$$(si: \rho > h) \quad y_{EN} = \frac{I_z}{A \rho} \quad (12.11.8.)$$

Si la misma se aplica, (12.11.6.) puede transformarse a la expresión:

$$(si: \rho > h) \quad \tilde{G}_x = \frac{M}{I_z} \frac{\rho}{\rho^2} v \quad (12.11.9.)$$

NOTA.— La expresión (12.11.8.) se basa en el hecho de que:

$$\tilde{G}_x = \frac{M}{A y_{EN}} \frac{y - y_{EN}}{\rho - y} \quad \text{según se indicó en (12.11.5.)}$$

Puesto que suponemos flexión pura, deberá verificarse:

$$\int \tilde{G}_x ds = 0 \Rightarrow \frac{M}{A y_{EN}} \int \frac{y - y_{EN}}{\rho - y} ds = 0$$

$$\text{Desarrollando en serie: } \frac{1}{\rho - y} = \frac{1}{\rho^2} (\rho + y)$$

Por lo tanto:

$$\frac{M}{A y_{EN} \rho^2} \int (y - y_{EN}) (\rho + y) ds = 0$$

$$\frac{M}{A y_{EN} \rho^2} \left(\int y^2 ds + (\rho - y_{EN}) \int y ds - \rho y_{EN} \int ds \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$I_z - \rho y_{EN} A = 0$$

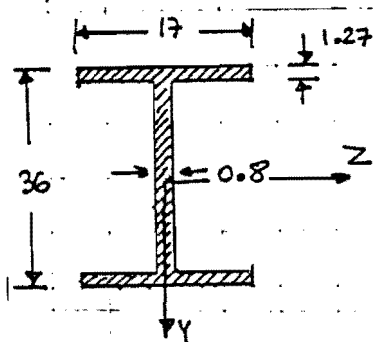
$$y_{EN} = \frac{I_z}{A \rho} \quad \text{c. q. d.}$$



EJERCICIO 12.11.1. Utilizando la formulación expuesta, resuélvase nuevamente el problema del perfil IPE-36, cuya sección idealizada croquizamos nuevamente, sabiendo que el radio de curvatura es de 80cms. en su fibra media, y que el momento flector que solicita la sección es de -10 mT , a lo cual habrá que añadir un esfuerzo normal de -20 T .

SOLUCION

Calculemos y_{EN} , es decir la distancia del C. de G. a los puntos que la flexión no les atribuirá tensión alguna (si el esfuerzo normal)



Sabemos: $y_{EN} \approx \frac{I_z}{A \rho}$

Calculemos I_z : $I_z = \frac{17 \cdot 36^3}{12} - \frac{(36 - 2.54)^3}{12} \cdot 16.2 = 15523.83 \text{ cm}^4$

$A = 17 \cdot 36 - (36 - 2.54) \cdot 16.2 = 69.948 \text{ cm}^2$

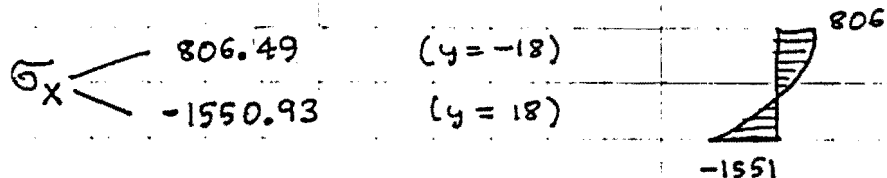
$y_{EN} = 2.7742 \text{ cms}$

Puesto que: $v = y - y_{EN} = y - 2.7742$

$\rho = \rho - y = 80 - y$

Resultará: $\sigma_x = \frac{-10^6 \cdot 80}{15523.83} \frac{y - 2.7742}{80 - y} + \frac{(20000)}{69.948}$

Sustituyendo $y = \pm 18$, obtendremos:



Resultados que son muy semejantes a los obtenidos anteriormente.

Calculemos la distribución de tensiones a continuación de forma exacta.

Tirado's Valencia, S. A. 7460-3



Hemos indica que:

$$y_{EN} = \rho \left(1 - \frac{A}{\int \frac{dA}{1-y/\rho}} \right) = \rho \left(1 - \frac{A}{A^*} \right) = y_{EN}$$

$$A^* = \int \frac{dA}{1-y/\rho}$$

$$A^* = \int_{-16,73}^{18} \frac{17 dy}{1-y/80} + \int_{-16,73}^{16,73} \frac{0,8 dy}{1-y/80} + \int_{-18}^{-16,73} \frac{17 dy}{1-y/80}$$

$$A^* = \int_{0,775}^{0,790875} \frac{1360 du}{u} + \int_{0,790875}^{1,209125} \frac{64 du}{u} + \int_{1,209125}^{1,225} \frac{1360 du}{u} \quad (u = 1 - y/80)$$

$$A^* = 1360 \left[\ln 0,790875 - \ln 0,775 + \ln 1,225 - \ln 1,209125 \right]$$

$$+ 64 \left[\ln 1,209125 - \ln 0,790875 \right] = 45,316288 + 27,16878 =$$

$$A^* = 72,4850688$$

$$y_{EN} = 80 \cdot \left(1 - \frac{69,948}{72,4850688} \right) = \boxed{2,80 = y_{EN}}$$

(el resultado aproximado obtenido anteriormente, era 2,77)

$$\sigma_y = \frac{M}{A y_{EN}} \frac{y - y_{EN}}{\rho - y} + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_x = \frac{-10^6}{69,948 \cdot 2,80} \frac{y - 2,80}{80 - y} + \frac{-20000}{69,948}$$

Sustituyendo $y = \pm 18$, se obtienen los siguientes resultados:

$$y = 18 \longrightarrow -1537 \text{ Kg/cm}^2$$

$$y = -18 \longrightarrow 798 \text{ Kg/cm}^2$$

Que presentan insignificantes desviaciones con respecto al cálculo efectuado anteriormente.

El error que implica el método aproximado se incrementa con la curvatura, por lo que en piezas sumamente curvadas ($\rho \approx h$), es preciso aplicar el método exacto que se acaba de desarrollar.



12.12. BARRAS DE DIRECTRIZ RECTA SOLICITADAS A FLEXIÓN PURA SIMÉTRICA

Se había establecido en (12.7.6) y (12.7.9) que:

$$\sigma_x = \frac{M_F}{|P_{MF,EN}|} \gamma$$

y que: $P_{PLC,EN} = 0$

Si el momento flector es coincidente con un eje principal y central de inercia, el plano de flexión, o plano de carga lo es con el otro eje principal central de inercia, y ello implica que los ejes cuyas direcciones son coincidentes con el citado PLANO DE CARGAS y con el VECTOR MOMENTO, son CONJUGADOS DE INERCIA, es decir:

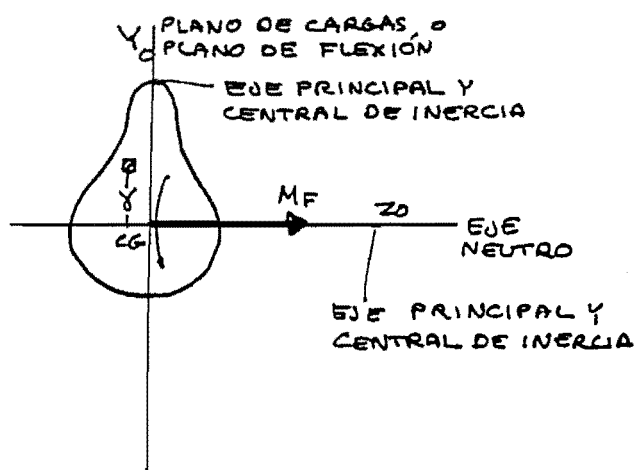
$$P_{PLC,MF} = 0$$

ello implicará que en barras de directriz recta, solicitadas a flexión pura simétrica, el EJE NEUTRO ES COINCIDENTE CON EL VECTOR MOMENTO FLECTOR, (si este se aplica en el centro de gravedad de la sección), es decir:

$$M_F \equiv EN$$

Esto implicará que:

$$\left\{ \begin{array}{l} * |P_{MF,EN}| = I_{EN} = I_{z_0} \\ * \gamma = \gamma_0 \end{array} \right.$$



Por lo cual, la tensión en un punto cualquiera de la sección, viene determinada

por la expresión:

$$\sigma_x = \frac{M_F}{I_{z_0}} \gamma_0 \quad (12.12.1.)$$

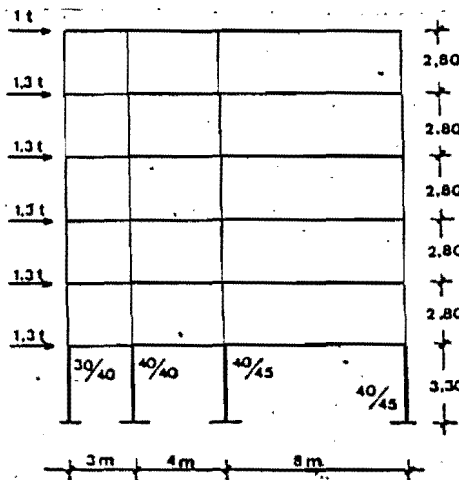
FLEXIÓN SIMÉTRICA

Que es simplemente un caso particular de (12.11.9.) $\left(\begin{array}{l} \gamma_{EN} = 0 \\ V \rightarrow \gamma_0 \\ \rho = \rho_V = \infty \end{array} \right)$



EJERCICIO 12.12.1g

Dado el pórtico croquizado sombreado o oculto nes horizontales de origen sílico, determinar los esfuerzos normales adicionales que dichas fuerzas introducen en los pilares, sabiendo que pueden determinarse mediante las tensiones que se producen en una sección ideal de cuatro áreas puntuales correspondientes a cada uno de los pilares, solicitada por el momento originado por dichas acciones horizontales.



Efectúese el cálculo en la planta baja.

NOTA.—

Se puede aplicar la teoría general de la flexión, si se supone que la cimentación es monolítica y suficientemente rígida, para que formen un plano el conjunto de secciones de empotramiento de los pilares, después de la deformación del terreno.

SOLUCION

El momento que solicita dicho sección ideal,

vale:

$$M = 1,3 \cdot 3 + 1,3 \cdot 14,5 + 1,3 \cdot 11,7 + 1,3 \cdot 8,9 + 1,3 \cdot 6,1 + 1,3 \cdot 3,3 = 17,3 + 1,3 (14,5 + 11,7 + 8,9 + 6,1 + 3,3) =$$

El área total de la sección ideal es:

$$A = 6400 \text{ cm}^2 = (1200 + 1600 + 1800 + 1800)$$

El momento estático con respecto a Y, valdrá:

$$U_y = 1600 \cdot 300 + 1800 \cdot 700 + 1800 \cdot 1500 =$$

$$U_y = 4.440.000 \text{ cm}^3$$

La coordenada del centro de gravedad, será:

$$\bar{y}_z = \frac{U_y}{A} = \frac{4.440.000}{6.400} = 693,75 \text{ cms} = \bar{y}_z$$

Calculemos el momento de inercia con respecto al eje paralelo al Y, que contiene el C. de G. y dada que la sollicitación es una flexión simétrica, y el vector momento tiene como línea de acción el indicado eje, este también será el EJE NEUTRO.

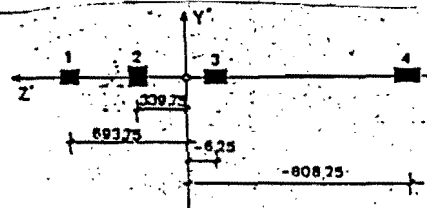
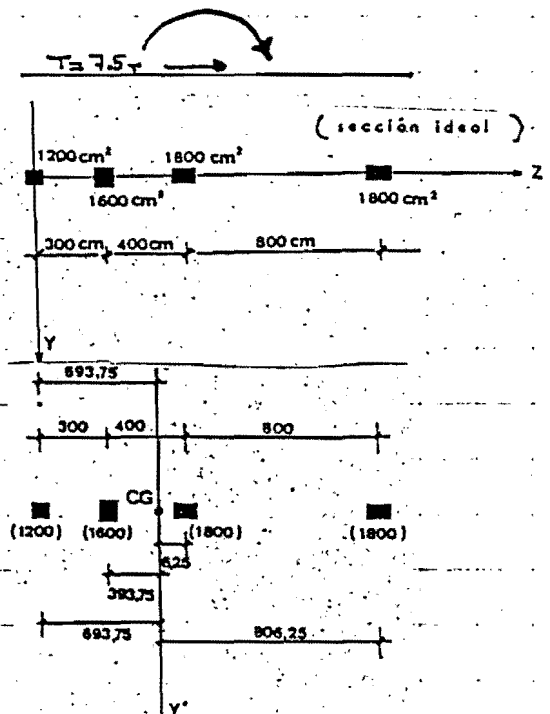
$$I_y = 1200 \cdot 693,75^2 + 1600 \cdot 393,75^2 + 1800 \cdot 6,25^2 + 1800 \cdot 806,25^2 = 1,99575 \cdot 10^9 \text{ cms}^4$$

La tensión en un punto cualquiera, de dicha sección ideal viene dada por la fórmula de la ECUACION DE RESISTENCIA DE LA FLEXION SIMETRICA.

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot y_1}{I_y} = \frac{75,15 \cdot 10^5}{1,99575 \cdot 10^9} \cdot 693,75 = 2,6123 = \sigma_1$$

$$\sigma_2 = \frac{75,15 \cdot 10^5}{1,99575 \cdot 10^9} \cdot 393,75 = 1,2793$$

$$M = 75,15 \text{ mT}$$





$$\sigma_3 = \frac{75,15 \cdot 10^5}{1,99575 \cdot 10^9} (-6,25) = -0,0235$$

$$\sigma_4 = \frac{75,15 \cdot 10^5}{1,99575 \cdot 10^9} (-806,25) = -3,0359$$

Los esfuerzos normales adicionales los obtendremos multiplicando el área de cada pilar por la tensión calculada.

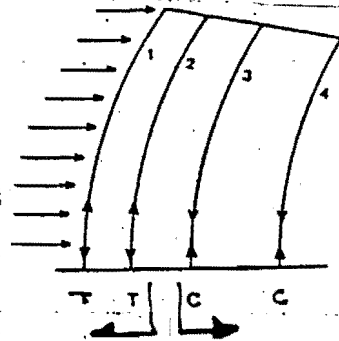
$$N_1 = 2,6123 \times 1200 = 3134,76 \text{ Kg} = N_1$$

$$N_2 = 1,2793 \times 1600 = 2046,88 \text{ Kg} = N_2$$

$$N_3 = -0,0235 \times 1800 = -42,3 \text{ Kg} = N_3$$

$$N_4 = -3,0359 \times 1800 = -5464,62 \text{ Kg} = N_4$$

Valores aproximados de los esfuerzos normales originados exclusivamente por la acción del viento en la última planta.



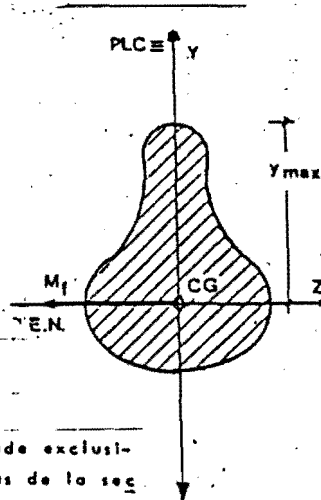


12.13. DIMENSIONADO DE BARRAS SOLICITADAS A FLEXIÓN SIMÉTRICA, ATENDIENDO A LA TENSION MÁXIMA.

Sabemos que :

$$\sigma_x = \frac{M_F}{I_z} y \quad \text{en el caso de flexión simétrica}$$

La tensión máxima se produce en los puntos máximamente distantes del EJE NEUTRO en la sección de máximo momento flector:



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{EN}} y_{\max}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{EN}/y_{\max}}$$

El cociente I_{EN}/y_{\max} depende exclusivamente de las características geométricas de la sección, y nos relaciona el momento flector que solicita la sección con la tensión máxima que se produce, y cuanto mayor sea dicho cociente para un mismo momento flector menor será la indicada tensión máxima, y mayor es consecuentemente la resistencia de la sección, lo que motiva que se denomine:

$\frac{I_{EN}}{y_{\max}}$	MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION simbolizándose por : W_x ó R_x según prontuarios.
---------------------------	---

Así pues:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

Si imponemos que la tensión máxima no sobrepase un determinado valor, que dependerá del material y que en general se denomina TENSION ADMISIBLE, resulta que:

$$\sigma_{ad} \geq \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \quad \text{Por lo tanto:}$$

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{ad}} \quad (12.13.2)$$

LA SECCION CORRECTA ATENDIENDO A TENSIONES ES TAL QUE SU MODULO O MOMENTO RESISTENTE CON RESPECTO AL EJE NEUTRO DEBE SER SUPERIOR O IGUAL AL COCIENTE DEL MOMENTO MÁXIMO Y LA TENSION ADMISIBLE.

El problema de buscar la sección que verifique dicha condición se suele resolver en el caso de perfiles laminados mediante tablas.

Se incluyen las tablas correspondientes a perfiles laminados de uso más frecuente.



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN

12-62

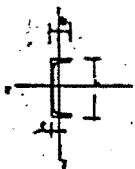
PERFILES IPN

h	b	A	I_z	W_x	P_z	I_y	W_y	P_y
8	4,2	7,57	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
10	5,0	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
12	5,8	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
14	6,6	18,2	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
16	7,4	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
18	8,2	27,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
20	9,0	33,4	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
22	9,8	39,5	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
24	10,6	46,1	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
26	11,3	53,3	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
28	11,9	61,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45
30	12,5	69,0	9800	653	11,9	451	72,2	2,56
32	13,1	77,7	12510	782	12,7	555	84,7	2,67
34	13,7	86,7	15700	923	13,5	674	98,4	2,80
36	14,3	97,0	19610	1090	14,2	818	114	2,90
38	14,9	107	24010	1260	15,0	975	131	3,02
40	15,5	118	29210	1460	15,7	1160	149	3,13
45	17,0	147	45850	2040	17,7	1730	203	3,43
50	18,5	179	68740	2750	19,6	2480	268	3,72
55	20,0	212	99180	3610	21,6	3490	349	4,02
60	21,5	254	139000	3630	23,4	4670	434	4,30

PERFILES IPE

h	b	A	I_z	W_x	P_z	I_y	W_y	P_y
8	4,6	7,64	80,1	20	3,24	8,49	3,69	1,05
10	5,5	10,3	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24
12	6,4	13,2	318	53	4,90	27,7	8,45	1,45
14	7,3	16,4	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65
16	8,2	20,1	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84
18	9,1	23,9	1320	146	7,42	101	22,2	2,05
20	10	28,5	1940	194	8,26	142	28,5	2,24
22	11	33,4	2770	252	9,11	205	37,3	2,48
24	12	39,1	3890	324	9,97	284	47,3	2,69
27	13,5	45,9	5790	429	11,2	420	62,2	3,02
30	15	53,8	8360	557	12,5	604	80,5	3,35
33	16	62,6	11770	713	13,7	788	98,5	3,55
36	17	72,7	16270	904	15	1040	123	3,79
40	18	84,5	23130	1160	16,4	1320	146	3,95
45	19	98,8	33740	1500	18,5	1680	176	4,12
50	20	116	48200	1930	20,4	2140	214	4,31
55	21	134	67120	2440	22,3	2670	254	4,45
60	22	156	92080	3070	24,3	3390	308	4,66

PERFILES J



h	b	e	A	I_z	W_x	P_z	I_y	W_y	P_y
8	4,5	1,45	11	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33
10	5	1,55	13,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47
12	5,5	1,60	17	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59
14	6	1,75	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75
16	6,5	1,84	24	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89
18	7	1,92	28	1350	150	6,95	114	22,4	2,02
20	7,5	2,01	32,2	1910	191	7,70	148	27	2,14
22	8	2,14	37,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30
24	8,5	2,23	42,3	3600	300	9,22	248	39,6	2,42
26	9	2,36	48,3	4820	371	9,99	317	47,7	2,56
28	9,5	2,53	53,3	6280	448	10,9	399	57,2	2,74
30	10	2,70	58,8	8030	535	11,7	495	67,8	2,90



PERFILES H

h	b	A	I_x	W_x	ρ_x	I_y	W_y	ρ_y
10	10	26,0	450	90	4,16	167	33	2,53
12	12	34,0	864	144	5,04	318	53	3,06
14	14	43,0	1509	216	5,93	550	79	3,58
16	16	54,3	2492	311	6,78	889	111	4,05
18	18	65,3	3831	426	7,66	1363	151	4,57
20	20	78,1	5696	570	8,54	2003	200	5,07
22	22	91,0	8091	736	9,43	2843	258	5,59
24	24	106,0	11259	938	10,3	3923	327	6,08
26	26	118,4	14919	1150	11,2	5135	395	6,58
28	28	131,4	19270	1380	12,1	6595	471	7,09
30	30	149,1	25166	1680	13,0	8563	571	7,58
32	30	161,3	30823	1930	13,8	9239	616	7,57
34	30	170,9	36656	2160	14,4	9690	646	7,53
36	30	180,6	43193	2400	15,5	10140	676	7,49
40	30	197,8	57680	2880	17,1	10819	721	7,40
45	30	218,0	79882	3550	19,1	11721	781	7,33
50	30	238,6	107176	4290	21,2	12624	842	7,27
55	30	254,1	136691	4970	23,2	13077	872	7,17
60	30	270,0	171041	5700	25,2	13530	902	7,08

Las tablas de perfiles incluidas en el texto, se utilizan generalmente para conocer las características geométricas correspondiente a un perfil, y de dichos datos -- deducir si se verifican todas las condiciones que exige la normativa, y en caso contrario se pasa a intentar con el perfil siguiente.

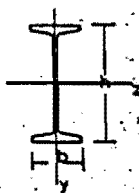
NOTA

(*) Los coeficientes ω permiten considerar el fenómeno del pandeo, tema que será objeto de análisis en capítulos posteriores.

Na obstante el proceso usual de utilizar dichas tablas conjuntamente con la de los coeficientes ω (h) representa una dificultad para la programación de calculadoras pequeñas que no dispongan de la suficiente memoria interna o externa para almacenar el contenido de dichas tablas.

Puede representar una solución al problema indicado la utilización de expresiones aproximadas que proporcionen las características geométricas fundamentales.

PERFILES-I (IPN)



$h_{inicial} = 8$
 $h < 40 \Rightarrow h_{siguiente} = h_{ultimo} + 2$
 $h > 40 \Rightarrow h_{siguiente} = h_{ultimo} + 5$
 $h \neq 60$

$A = 0,2806 + h(0,416645 + h[0,061608 + h(2,51792 \cdot 10^{-5} + h \cdot 1,15336 \cdot 10^{-7})])$

PESO = AREA \times 0,786 (Peso Kg/m) (para todos los perfiles) (A : cm²)

$I_x = 44,3245 + h(-9,2440 + h[0,9437 + h(0,072696 + h \cdot 0,0094158)])$

$W_x = 2 I_x / h$ $\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

$I_y = 24,7136 + h(-5,5712 + h[0,3795 + h(1,60845 \cdot 10^{-3} + h \cdot 2,5199 \cdot 10^{-4})])$

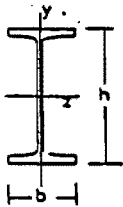
$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

$b = 0,8252 + h(0,4337 - 0,001486 \cdot h)$

$W_y = \frac{2 I_y}{b}$



PERFILES IPE



- $h_{\text{inicial}} = h$
- $h_{\text{ultimo}} < 24 \Rightarrow h_{\text{siguiente}} = h_{\text{ultimo}} + 2$
- $h_{\text{ultimo}} \in (24, 33) \Rightarrow h_{\text{siguiente}} = h_{\text{ultimo}} + 3$
- $h_{\text{ultimo}} = 36 \Rightarrow h_{\text{siguiente}} = 40$
- $h_{\text{ultimo}} \geq 40 \Rightarrow h_{\text{siguiente}} = h_{\text{ultimo}} + 5$
- $h_{\text{ultimo}} \in [60, 60]$

A $A = 4,5589 + h(-0,39866 + h[0,11206 + h(-1,8692 \cdot 10^{-3} + h[3,55566 \cdot 10^{-5}])])$

I_z $I_z = -271,62776 + h(85,10678 + h[-9,334118 + h(0,518472 + h[6,83350 \cdot 10^{-4}])])$ $\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ $W_z = 2 I_z / h$

I_y $I_y = -196,9643 + h(56,9860 + h[-5,6237 + h(0,23566 - 2,7286 \cdot 10^{-3} h)])$ $\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $W_y = \frac{2 I_y}{b}$

$h < 30$

$h > 30$

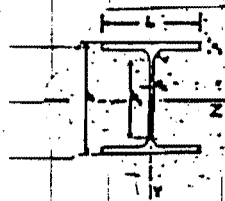
I_y $I_y = -3646,928 + h(381,02723 + h[-7,83366 + h[0,066558]])$

b $b = 2,6884 + (0,06177 + h[0,02726 + h[-6,7836 \cdot 10^{-4} + h[4,9383 \cdot 10^{-6}]]])h$

Para el dimensionado de soportes a flexión compuesta, con un solo perfil se utilizan los del tipo H, por lo que se proponen las siguientes expresiones.

PERFILES - H

- h** h inicial es 10
- Si $h_{\text{ultimo}} < 36 \rightarrow h_{\text{siguiente}} = h_{\text{ultimo}} + 2$
- Si $h_{\text{ultimo}} = 36 \rightarrow h_{\text{siguiente}} = 40$
- Si $h_{\text{ultimo}} > 40 \rightarrow \begin{cases} h_{\text{siguiente}} = h_{\text{ultimo}} + 5 \\ h_{\text{siguiente}} \geq 60 \end{cases}$



A $A = 39,1975 + h(-6,7874 + h[0,6766 + h(-0,0139 + 9,3288 \cdot 10^{-5} h)])$

I_z $I_z = -0,1389 + h(0,41904 + h[1,44995 \cdot 10^{-3} + h(-3,91453 \cdot 10^{-5} + 2,64805 \cdot 10^{-7} h)])$ $\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ $W_z = 2 I_z / h$

I_y $I_y = -3095,2338 + h(849,8024 + h[-83,9884 + h(3,6139 - 0,04509 h)])$ $\rho_y = \sqrt{I_y / A}$

$h < 34$

$h \geq 34$

$I_y = -355,93007 + h(379,20839 - 2,4629 h)$

b $h < 30 \Rightarrow b = h$ $W_y = 2 I_y / b$

$h > 30 \Rightarrow b = 30$



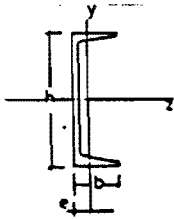
Roberto Guerra Fontana

TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN

12.0650

Los perfiles en \square se utilizan para soportes con puentes de dos perfiles de dicho tipo. Pueden proponerse las siguientes expresiones aproximadas.

PERFILES \square



$$h_{\text{inicial}} = 8$$

$$h_{\text{siguiente}} = h_{\text{ultimo}} + 2$$

$$h \neq 30$$

A $A = 3,5788 + h(0,8288 + h[-7,6149 \cdot 10^{-3} + h(2,90278 \cdot 10^{-3} - 5,08207 \cdot 10^{-5} h)])$

I_z $I_z = -242,30306 + h(71,74496 + h[-6,6550 + h(0,370278 + 2,6073 \cdot 10^{-3} h)])$

ρ_z $\rho_z = \sqrt{I_z/A}$ **W_z** $W_z = 2I_z/h$

I_y $I_y = 18,95284 + h(-4,40939 + h[0,66207 + h(-0,01788 + 6,11387 \cdot 10^{-4} h)])$

ρ_y $\rho_y = \sqrt{I_y/A}$

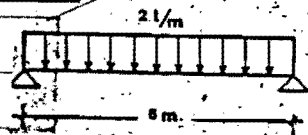
b $b = \frac{h + 10}{4}$

e $e = 0,7319 + h(0,12647 + h[-0,005646 + h(1,36679 \cdot 10^{-4} - 5,3486 \cdot 10^{-7} h)])$

W_y $W_y = \frac{I_y}{b - e}$

Con las tablas anteriores es fácil dimensionar en flexión simétrica atendiendo exclusivamente a la tensión σ_x que genera el momento ELECTOR, pues se reduce a elegir un perfil cuyo momento resistente sea superior a $W_z \geq M/E/\sigma_{ad}$

EJERCICIO 12.13.1.



Dimensionese la viga simplemente apoyada que se croquiza, con PNI y con tensión admisible de 1733 Kg/cm².

SOLUCIÓN

El momento flector máximo se produce en la sección central, puesto que en la misma el esfuerzo cortante es nulo.

El momento de las acciones que actúan a un lado de la sección central está constituido por un par de 6T con brazo mecánico de 1,5 m, por lo tanto:

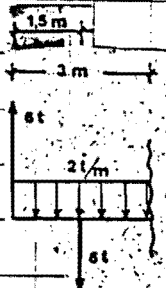
$$M_{\text{max}} = 6 \times 1,5 = 9 \text{ mT}$$

El momento resistente debe verificarse:

$$W_z \geq \frac{9 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{Kg}}{1733 \text{ Kg/cm}^2} = 519,33 \text{ cm}^3$$

Según las tablas, el PNI de $h = 28 \text{ cm}$ posee un $W_z = 542 \text{ cm}^3$, por lo que atendiendo a tensión, la solución es dicho perfil.

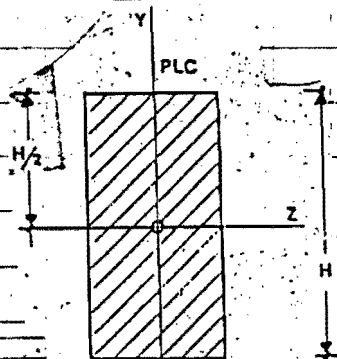
Hay que imponer la condición de que las deformaciones no sobrepasen ciertos límites lo cual se estudiará en capítulos posteriores, siendo la misma la condición casi siempre predominante en el proceso de dimensionado tal como comprobaremos en futuros ejemplos.





Si dimensionamos con secciones de madera el proceso será análogo, tal como puede comprarse si intentamos determinar la sección correcta dada una tensión admisible de 80 Kg/cm^2 para una cierta madera.

$$W_z \geq \frac{9 \cdot 10^5}{80} = 11.250 \text{ cm}^3 \quad W_z = \frac{I_z}{\gamma_{\max}} = \frac{BH^3/12}{H/2} = \frac{BH^2}{6}$$



Si la relación de escuadra la simbolizamos por λ ,

es decir: $\lambda = H/B \quad B = H/\lambda$ tendremos:

$$W_z = \frac{H^3}{6\lambda} \rightarrow H = \sqrt[3]{6\lambda W_z} \quad B = \frac{H}{\lambda}$$

Si la relación λ es 1,5, tendremos:

$$H = \sqrt[3]{9 W_z} \rightarrow H = \sqrt[3]{9 \times 11.250} = 46,61 \rightarrow H = 47$$

$$B = \frac{2}{3} H \rightarrow B = 0,666 \cdot H = 31,07 \rightarrow B = 32$$

($\lambda = 1,5$)

En la resolución anterior hemos adoptado una razón de escuadria de $H/B = 1,5$, no obstante la relación óptima hubiera sido la de $\sqrt{2}$, puesto que la sección que obtendríamos sería:

$$H = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{2} \cdot W_z} = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{2} \cdot 11250} = 45,70$$

$$B = H/\sqrt{2} = 32,31$$

El radio del tronco mínimo, del cual puede extraerse una sección rectangular de $B \times H$ viene determinado por

$$R = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + B^2} = R$$

La primera solución exigiría un radio del tronco de:

$$R_1 = 28,01$$

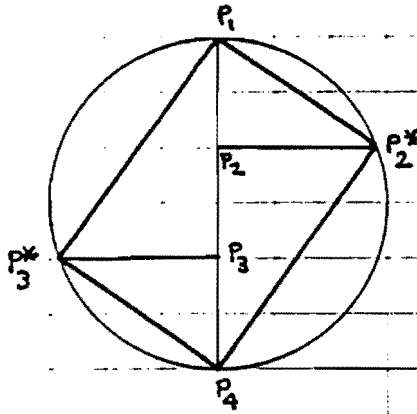
En tanto que la segunda solución implicaría un radio de:

$$R_2 = 27,98$$

Si bien, la pequeña diferencia existente justifica que con frecuencia se adopte la relación de escuadria de 1,5 en vez de la que exige un radio mínimo que es la de $\sqrt{2}$, relación de escuadria que se deduce mediante un problema de mínimos imponiendo que: $dR/d\lambda = 0$



La relación de esquadría óptima, es la que se obtiene cortando un tronco mediante el siguiente procedimiento, puesto que $H/B = \sqrt{2}$ como fácilmente puede verificarse por simples consideraciones de carácter geométrico.



(Se divide el diámetro en tres partes iguales P_1P_2 , P_2P_3 y P_3P_4 . De los tercios centrales arrancan dos normales al diámetro que cortarán a la corteza del tronco en dos puntos P_2^* y P_3^* , si dichas normales se las otorga sentidos opuestos, El rectángulo se obtiene uniendo: $P_1 P_2^* P_4 P_3^*$)



12.14. AGOTAMIENTO PLÁSTICO DE UNA SECCIÓN A FLEXIÓN PURA

Las técnicas modernas de dimensionado, imponen que ante ACCIONES MAYORADAS y RESISTENCIAS DE LOS MATERIALES MINORADAS se produzca el colapso resistente del elemento, lo que exige que un cierto punto de la sección se produzca la DEFORMACIÓN UNITARIA DE ROTURA, que simbolizaremos por E_{rot} .

El diagrama tensión-deformación de la mayor parte de los materiales es del tipo siguiente:

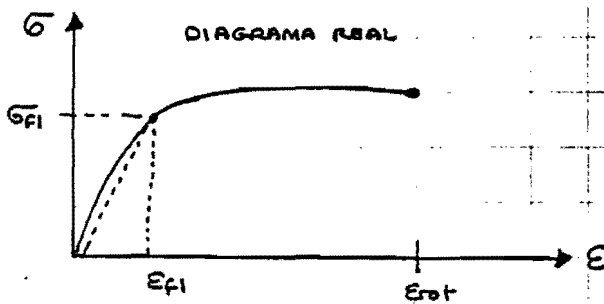


Fig 12.14.1

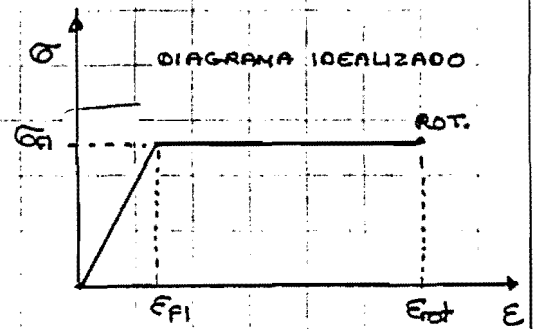


Fig 12.14.2

Donde la E_{rot} es hasta más de 10 veces la deformación de fluencia E_{fi} .

Si según la teoría general de la deformación, sabemos que el diagrama de la ley de variación de las deformaciones unitarias en la sección es del tipo:

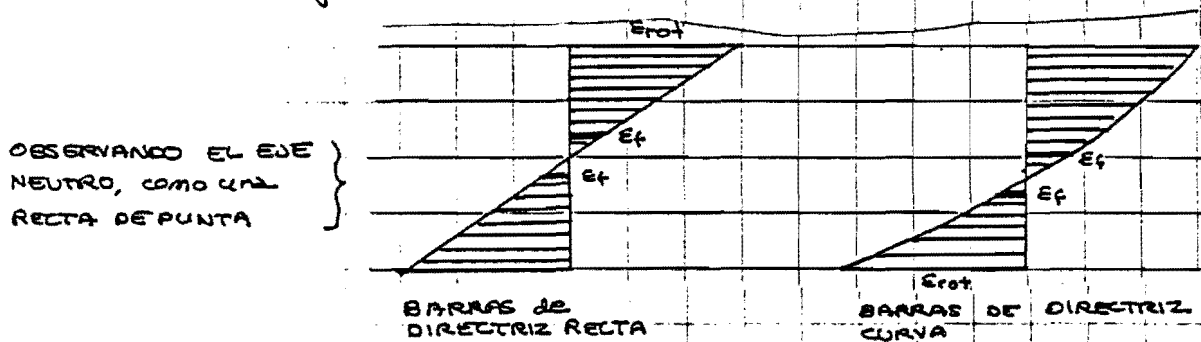


Fig 12.14.3.

Ello implica que si E_{rot} es mucho mayor que E_{fi} , la mayor parte de la sección podrá considerarse que tiene como tensión σ_{fi} , y sólo una pequeña franja entorno del EJE NEUTRO sufrirá tensiones menores, tal como se indica en la Fig. 12.14.4.

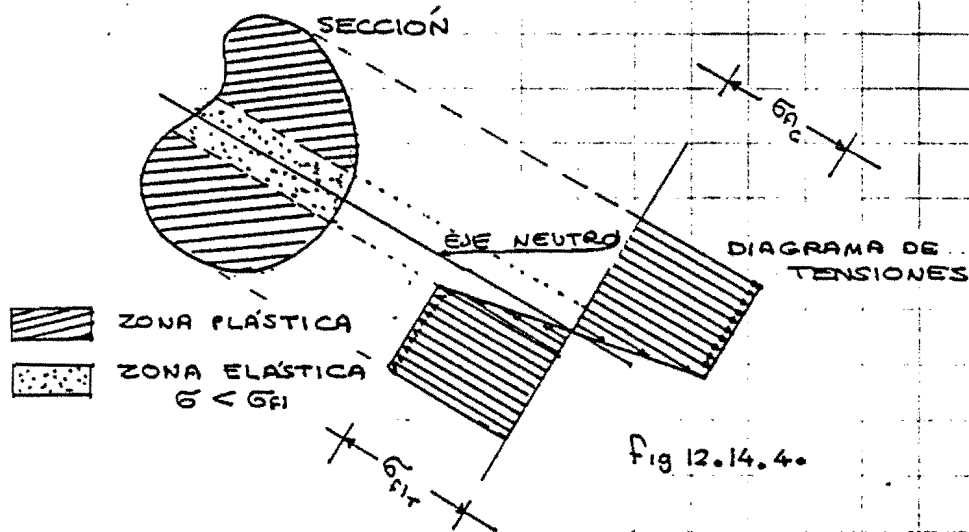


Fig 12.14.4.

Dado que en la sección existen tanto zona plástica, como elástica, se dice que la misma se encuentra en RÉGIMEN ELASTOPLÁSTICO.

A fin de simplificar los cálculos, puede suponerse que la totalidad de la sección se encuentra en régimen plástico, en cuyo caso la Fig. 12.14.4 se transforma en la 12.14.5., y el error que ello implica,

para la mayor parte de las relaciones E_{rot}/E_H es mínima.

Se dice que la sección está AGOTADA o plastificada.

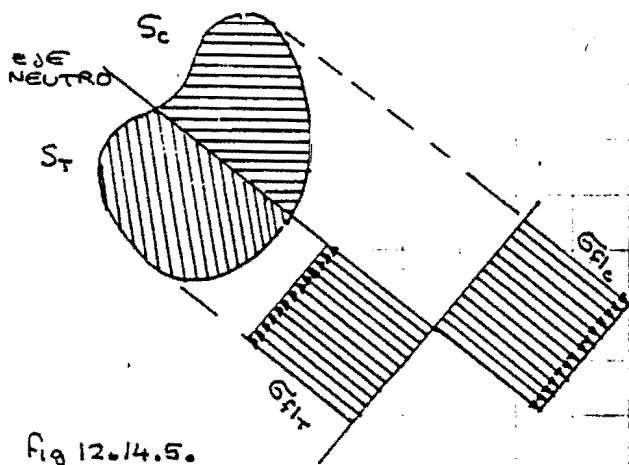


Fig 12.14.5.

Simbolizaremos de ahora en adelante S_c , el área de la zona donde σ_{pl} es de COMPRESIÓN, y por S_T la zona en que la

tensión de fluencia actúa a TRACCIÓN.

Por las ecuaciones generales de equilibrio, entre solicitaciones y tensiones, sabemos que debe verificarse:

$$\begin{bmatrix} N_{ez} \\ N_{ey} \\ N \end{bmatrix} = \int_s \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_x ds \Rightarrow \begin{bmatrix} N_{ez} \\ N_{ey} \\ N \end{bmatrix} = \sigma_{pl} \int_{S_T} \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} ds - \sigma_{pl} \int_{S_c} \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} ds$$

En donde σ_{pl} y σ_{pl} carecen de signo, por representar el



valor absoluto de la tensión en que fluye el material a tracción o a compresión respectivamente. Si el material estudiado fuese de acero, $\sigma_{flT} = \sigma_{flC}$.

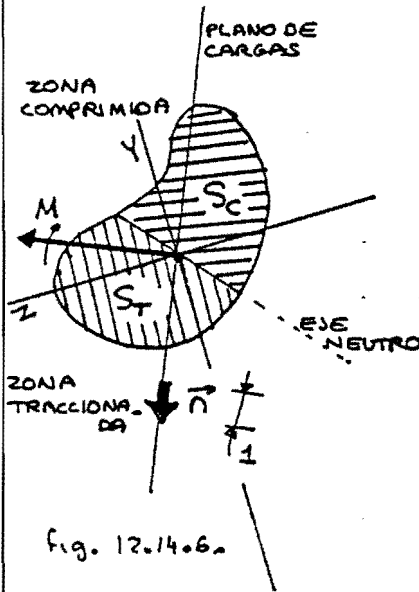
Por haberse considerado positivos los valores de σ_{flT} y σ_{flC} , se ha introducido un signo menos en la ZONA COMPRIMIDA.

Integrando:

$$\begin{bmatrix} N_{ez} \\ N_{ey} \\ N \end{bmatrix} = \sigma_{flT} \begin{bmatrix} U_Y^T \\ U_Z^T \\ S_T \end{bmatrix} - \sigma_{flC} \begin{bmatrix} U_Y^C \\ U_Z^C \\ S_C \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} &= \sigma_{flT} \begin{bmatrix} U_Y^T \\ U_Z^T \end{bmatrix} - \sigma_{flC} \begin{bmatrix} U_Y^C \\ U_Z^C \end{bmatrix} \quad (12.4.10) \\ N &= \sigma_{flT} S_T - \sigma_{flC} S_C \end{aligned}$$



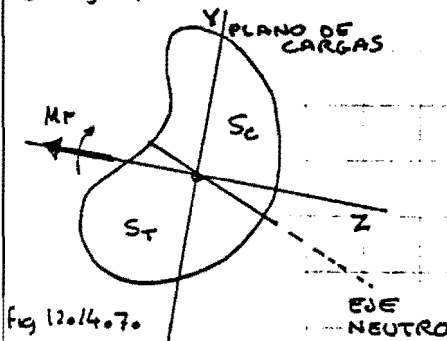
Si suponemos que la flexión es PURA, y que $\sigma_{flT} = \sigma_{flC} = \sigma_f$, resultará:

$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} &= \sigma_{fl} \cdot \left. \begin{bmatrix} U_Y^T - U_Y^C \\ U_Z^T - U_Z^C \end{bmatrix} \right\} \\ 0 &= S_T - S_C \end{aligned}$$

Por lo tanto:

EL EJE NEUTRO EN UNA SECCIÓN AGOTADA PLÁSTICAMENTE A FLEXIÓN PURA, DIVIDE A LA MISMA EN DOS ZONAS DE IGUAL SUPERFICIE ($S_C = S_T$)

Si adoptamos como eje Y, el que coincide con el plano de cargas, resultará:



$$\begin{aligned} n_z &= 0 \\ n_y &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} U_Y^T &= U_Y^C \\ M &= \sigma_{fl} (U_Z^T - U_Z^C) \quad (12.4.2) \end{aligned}$$

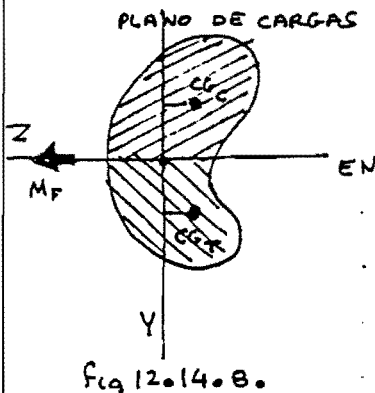


La condición: $U_T^T = U_C^C$, acaba por definir la posición del EJE NEUTRO, puesto que la condición de que dividiese a la sección en dos zonas de igual área la satisfacen los ejes.

Así pues:

LA ORIENTACIÓN DEL EJE NEUTRO ES TAL QUE LOS MOMENTOS ESTÁTICOS DE LAS ZONAS EN QUE DICHO EJE DIVIDE A LA SECCIÓN, RESPECTO AL EJE CONTENIDO EN EL PLANO DE CARGAS DEBEN SER IGUALES.

Lo que exige al ser las áreas iguales, que el centro de gravedad de la zona comprimida, deba dictar del plano de cargas, lo mismo que el centro de gravedad de la zona traccionada, y quedando ambos centros de gravedad situados hacia el mismo lado, del citado PLANO DE CARGAS.



La segunda ecuación deducida, determina el momento que agota la sección:

$$M = \sigma_{fi} (U_2^T - U_2^C)$$

Como los dos momentos estáticos tienen signos opuestos respecto al eje Z, también puede proponerse:

$$M = \sigma_{fi} (|U_2^T| + |U_2^C|) \quad (12.04.03.)$$

Si el momento flector, aplicado en el centro de gravedad, define un eje Z que es de SIMETRÍA de la sección, en tal caso, dicho eje será el EJE NEUTRO.



12.15. DIMENSIONADO PLÁSTICO EN FLEXIÓN SIMÉTRICA PURA

En régimen elástico hemos establecido que:

$$\sigma_{ad} \geq \frac{M_{max}}{W_z} \Rightarrow W_z \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{ad}} \quad (12.15.1)$$

Según (12.14.3.):

$$M_{max} \leq \sigma_{fl} (|U_z^T| + |U_z^C|) \Rightarrow |U_z^T| + |U_z^C| \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{fl}} \quad (12.15.2)$$

Si al parámetro geométrico W_z que es igual a I_z/y_{max} , lo denominamos: **MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCIÓN**, dada la similitud entre (12.15.1.) y (12.15.2.), puede convenirse en denominar al también parámetro geométrico:

$$|U_z^T| + |U_z^C|$$

MOMENTO RESISTENTE PLÁSTICO DE LA SECCIÓN, y simbolizarlo por W_{pz} , así pues:

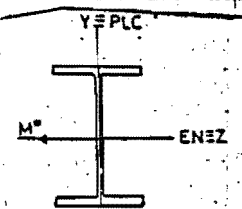
$$W_{pz} = |U_z^T| + |U_z^C|$$

(12.15.3.)

$$W_{pz} \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{fl}}$$

W_p			
h	IPN	IPE	H
8	22,8	23,2	--
10	39,8	39,4	104,2
12	63,6	60,8	165,2
14	95,4	88,4	246
16	136	123,8	354
18	186,8	166,4	482
20	250	220	642
22	325	286	828
24	412	366	1054
26	514	--	1282
27	--	484	--
28	632	--	1534
30	762	628	1868
32	914	--	2140
33	--	804	--
34	1080	--	2400
36	1276	1020	2680
38	1482	--	--
40	1714	1308	3240
45	2400	1762	3980
50	3240	2200	4820
55	4240	2780	5600
60	5460	3520	6420

A continuación se proporciona una tabla en la que se relaciona el **MODULO RESISTENTE PLASTICO** para un plano de cargas coincidente con el eje Y de simetría de la sección, de los distintos perfiles laminados de uso más generalizado.

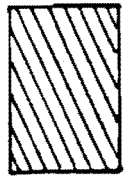


El proceso pues, es análogo al que expusimos para el cálculo elástico, puesto que determinaremos mediante el cociente M_{max}/σ_{fl} el momento resistente plástico necesario, y este se buscará en la tabla adjunta, determinándonos el primer perfil que supere dicho valor.

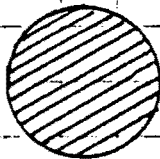


Es evidente, que el cociente W_{p2}/W_2 nos indicará la ventaja que puede representarnos la utilización del cálculo plástico sobre el elástico, denominándose a dicho cociente: FACTOR DE FORMA, que lógicamente depende de la geometría de la sección.

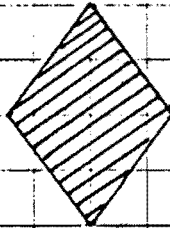
A continuación, indicamos FACTORES DE FORMA, de secciones usuales:



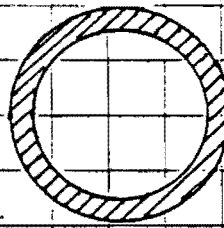
1.5



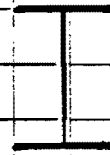
1.7



2



1.27



$J_{PN} \approx 1,16$

$H \approx 1,06$



12.16. BARRAS DE DOS MATERIALES

Como ejemplos de barras de dos materiales, pueden citarse las vigas de madera reforzadas por placas de acero, las vigas mixtas constituidas por un perfil laminado y una sección rectangular de hormigón sobre su ala superior, el hormigón pretensado y armado, si bien estas dos últimas se calculan sobre consideraciones teóricas que difieren de las que vamos a utilizar en el presente tema.

En el desarrollo de la formulación correspondiente a la teoría general de la flexión, se había establecido:

$$(12.16.1) \quad \begin{bmatrix} N e_z \\ N e_y \\ N \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_x ds \quad \text{(Ecuaciones generales de equilibrio entre tensiones y solicitaciones)}$$

y por otro lado, y de acuerdo con la hipótesis de Saint-Venant.

$$(12.16.2) \quad \epsilon_x = [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (p_1, p_2 \text{ y } p_3 \text{ parámetro a determinar, que definen la situación de la sección plana después de las deformaciones})$$

Por lo tanto, en cada material se producirán las siguientes tensiones:

$$(12.16.3) \quad \sigma_x^A = E^A \cdot \epsilon_x = E^A [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \sigma_x^B = E^B \cdot \epsilon_x = E^B [z^* \ y^* \ 1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \sigma_x^B \quad (12.16.4)$$

Sustituyendo en (12.16.1) resulta:

$$\begin{bmatrix} N e_z \\ N e_y \\ N \end{bmatrix} = \left(\int_{S_A} E_A \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} [z^* \ y^* \ 1] ds + \int_{S_B} E_B \begin{bmatrix} z \\ y \\ 1 \end{bmatrix} [z^* \ y^* \ 1] ds \right) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Donde S_A y S_B son las superficies correspondiente a uno u otro material. Operando:

$$(12.16.5) \quad \begin{bmatrix} N e_z \\ N e_y \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \text{donde } e_{ij} \text{ son:}$$



$$e_{11} = E_A \int_{S_A} z^* z \, ds + E_B \int_{S_B} z^* z \, ds$$

SA representa la superficie del material A y

$$e_{21} = E_A \int_{S_A} z^* y \, ds + E_B \int_{S_B} z^* y \, ds$$

SB la del material B.

.....

Es evidente que:



$$e_{11} = E_A \left(\int_{S_A} z^* z \, ds + \frac{E_B}{E_A} \int_{S_B} z^* z \, ds \right)$$

$$e_{21} = E_A \left(\int_{S_A} z^* y \, ds + \frac{E_B}{E_A} \int_{S_B} y z^* \, ds \right)$$

.....

Al cociente $n = E_B / E_A$ se denomina COEFICIENTE DE EQUIVALENCIA. Si asignamos densidades a las zonas de ambos materiales, uno para la zona A, y n para la B, resultará:

$$e_{11} = E_A \left(\int_{S_A} z^* z \, ds + \int_{S_B} z^* z \, ds \cdot n \right) = E_A I_y^*$$

$$n = \frac{E_B}{E_A}$$

$$e_{21} = E_A \left(\int_{S_A} z^* y \, ds + \int_{S_B} z^* y \, ds \cdot n \right) = E_A P_{zy}^*$$

.....

En donde I_y^* , P_{zy}^* , representan los parámetros geométricos de la sección, bajo el supuesto de que la zona B posee densidad n . Esto nos permite establecer:

$$\begin{bmatrix} N & e_2 \\ N & e_4 \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & E_A \\ P_2 & E_A \\ P_3 & E_A \end{bmatrix}$$



$$(12.16.6) \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E_A} \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N & e_2 \\ N & e_4 \\ N \end{bmatrix}$$

Y según (12.16.3.), resultará:

$$\sigma_x^A = E_A \epsilon_x = E_A [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N & e_2 \\ N & e_4 \\ N \end{bmatrix}$$

||
σ-x

(12.16.7)

Lo que es la expresión ordinaria de la tensión en un punto.



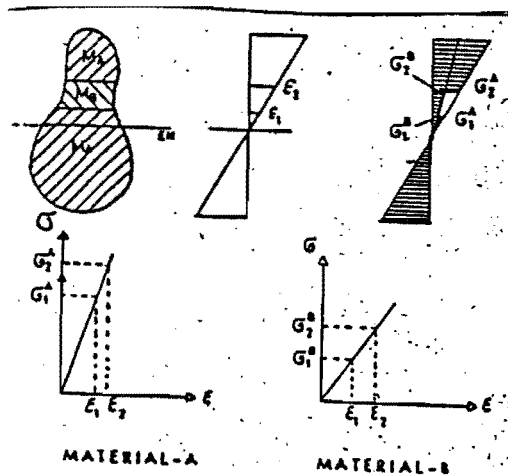
Para el material B, de acuerdo con (12.16.4):

$$\sigma_x^B = E_B \epsilon_x = E_B [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{E_B}{E_A} [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} I_y^* & E_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_e z \\ N_e y \\ N \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^B = \frac{1}{n} [z^* y^* 1] \begin{bmatrix} I_y^* & P_{zy}^* & U_y \\ P_{zy}^* & I_z^* & U_z \\ U_y^* & U_z^* & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_e z \\ N_e y \\ N \end{bmatrix} \quad (12.16.8.)$$

Lo que nos permite establecer:

SI UNA SECCIÓN ESTÁ CONSTITUIDA POR DOS MATERIALES A y B, puede suponerse que toda ella es de material A, si a las zonas del material B, se las asigna una densidad n ($= E_A/E_B$) para el cálculo de los parámetros geométricos de la sección, y las tensiones que se deducirán de esta forma, serán correctas para las zonas del material A, y para las de B, será preciso dividir las por el módulo de equivalencia n .



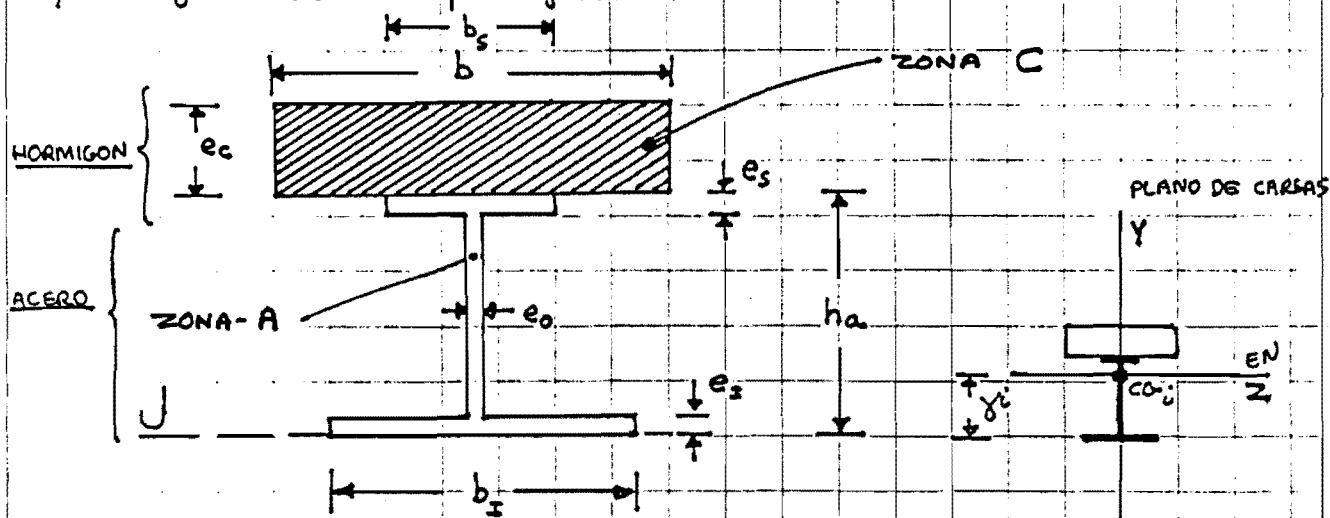
(Con frecuencia, en vez de utilizar el concepto de densidad, se cambia la longitud que es paralela al eje respecto a la cual se calcula un momento de inercia o un momento estático, lo que en efecto resulta equivalente, pero no es aplicable al producto de

INERCIA dicha corrección, razón por la cual no hemos adoptado este sistema).



12.17. VIGAS MIXTAS

Un caso de aplicación práctica de la teoría expuesta correspondiente a VIGAS O BARRAS DE DOS MATERIALES es la VIGA MIXTA, cuyo conjunto es del tipo siguiente:



Si el módulo de Young del hormigón lo simbolizamos por E_c , y el del acero por E_a , se podrá simbolizar mediante:

$$n = \frac{E_a}{E_c} \quad \text{el módulo de equivalencia.}$$

Para calcular la posición del EJE NEUTRO, trataremos toda la sección como si fuese de acero, y en consecuencia la zona de hormigón se verá afectada en todos sus parámetros geométricos por el factor n , que los dividirá.

Calculemos el momento estático respecto al eje J , así como el momento de inercia idealizado.

$$U_j^i = (b_i - e_0) e_i^2 / 2 + b_s h_a^2 / 2 - (b_s - e_0) (h_a - e_s)^2 / 2 + \frac{1}{n} b e_c \left(h_a + \frac{e_c}{2} \right)$$

$$I_j^i = (b_i - e_0) e_i^3 / 3 + b_s h_a^3 / 3 - (b_s - e_0) (h_a - e_s)^3 / 3 + \frac{1}{n} \left(b (h_a + e_c)^3 / 3 - b h_a^3 / 3 \right)$$

$$A_i = (b_i - e_0) e_i + b_s h_a - (b_s - e_0) (h_a - e_s) + \frac{1}{n} b e_c$$

La posición del centro de gravedad de la sección idealizada será:



$$\gamma_i = U_i / A_i$$

Y aplicando Steiner, el momento de inercia respecto al eje Z que contiene el CENTRO DE GRAVEDAD DE LA SECCIÓN IDEALIZADA, será:

$$I_Z^i = I_0^i - A_i \gamma_i^2$$

Según lo expuesto, si actuase un momento flector M sobre dicha sección, la tensión que se producirá en los puntos más alejados del EJE NEUTRO DEL PERFIL, que serán los de ALA INFERIOR, será de:

$$\sigma_{\text{ALAINF}} = - \frac{M_f}{I_Z^i} \gamma_i$$

La tensión en el ala superior, que será de signo contrario, vendrá determinada por

$$\sigma_{\text{ALASUP}} = \frac{M_f}{I_Z^i} (h_a - \gamma_i)$$

La tensión máxima en el hormigón, será:

$$\sigma_{\text{max}_c} = \frac{1}{n} \frac{M_f}{I_Z^i} (h_a + e_c - \gamma_i)$$

y la mínima será:

$$\sigma_{\text{min}_c} = \frac{1}{n} \frac{M_f}{I_Z^i} (h_a - \gamma_i)$$

Hemos partido del supuesto de que conocíamos la longitud eficaz de la losa de hormigón b, así como de todas las cotas del perfil metálico, lo cual constituye un problema previo al que hemos resuelto.

Vamos a indicar algunos criterios prácticos para la resolución de estas cuestiones previas.

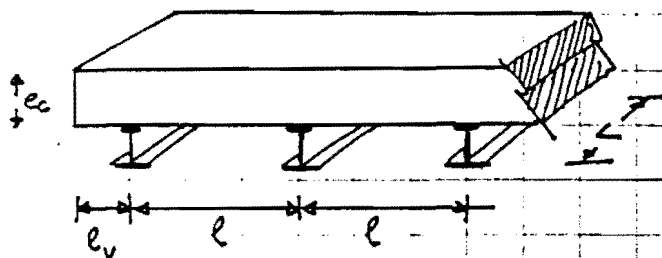


El módulo de Young que debe aplicarse para calcular el factor de equivalencia n , suele admitirse que lo proporciona la expresión:

$$E_c = 19000 \sqrt{f_{ck}} \frac{q_s + 2,5 q_c}{q_s + q_c}$$

Donde f_{ck} es la resistencia característica del hormigón en Kg/cm^2 , q_s y q_c las cargas por unidad de superficie que efectúan sobrecargas y concargas respectivamente.

El ancho eficaz de la LOSA DE HORMIGÓN depende de la distancia entre los ejes de las vigas mixtas, que simbolizaremos por l , y de la relación β que esta guardará con la luz de las vigas que representaremos por L , es decir que



$$\beta = \frac{l}{L}$$

En el caso de la viga de borde, se adoptará un β , que lo determinará la expresión: $\beta = \frac{l_v + l/2}{L}$

En función de la relación β ($=l/L$), se han efectuado diversos estudios que permiten adoptar como ancho eficaz de la losa, al menor de los siguientes valores:

$$b = \min \left\{ \frac{L}{4}, 2e_c, l\alpha \right\}$$

$$\text{y en el caso de una viga de borde } b = \min \left\{ \frac{L}{8}, 6e_c, \left(\frac{l}{2} + l_v\right)\alpha \right\}$$

expresiones en las cuales α , es un coeficiente que determina la tabla siguiente en función de β .



EN FLEXIÓN POSITIVA EXCLUSIVAMENTE

β	α
0.10	1
0.20	0.89
0.30	0.78
0.40	0.68
0.50	0.58
≥ 0.60	$0.3/\beta$

(vigas simplemente apoyadas).

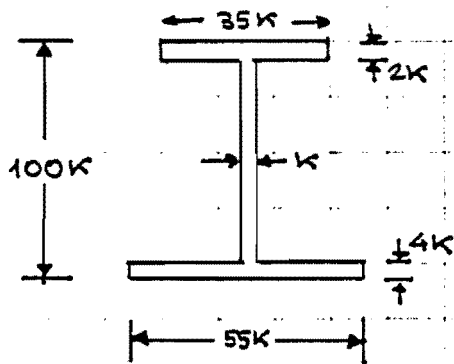
EN VIGAS en las que existen zonas con flexión negativa, se adoptará:

β	α
0.1	1
0.2	0.8
0.3	0.6
≥ 0.4	$0.18/\beta$

La elección del perfil es un problema de mayor complejidad, siendo factible el diseñar uno específico de alas asimétricas, tal como se croquizó, o bien, adoptar uno simétrico de tipo comercial, aunque resulte menos ventajoso.

A continuación proponemos unos criterios y fórmulas que permiten la determinación de un perfil asimétrico

Las expresiones siguientes tienen como objetivo determinar el coeficiente k , en función del cual las cotas del perfil serán:



$L, b, y e_c$ en metros

$$k \geq \frac{1}{9.3751} \sqrt[3]{\frac{b e_c^2}{n}}$$

para que el eje neutro de la sección idealizada corte al perfil, puesto que ello es conveniente para el aprovechamiento correcto del hormigón.

$$k \approx \frac{L}{10} \sqrt[4]{\frac{b e_c}{L}}$$

para que las tensiones que previsiblemente se deben producir no sobrepasen los límites admisibles.

$$k > \frac{L}{11} \sqrt{\frac{L}{1840} + \sqrt{\left(\frac{L}{1840}\right)^2 + \frac{b e_c}{L}}}$$

para que el perfil con su propio peso y el de la losa, simplemente apoyado no fleche en exceso.

$$K > 0,3L \sqrt[3]{\frac{(1 + 115 b e_c)}{L^3}}$$

para que la tensión como viga simplemente apoyada, soportando su peso y el de la losa, no produzca tensión excesiva.

Determinado el coeficiente K, los parámetros del perfil resultante son:

$$\begin{cases} I_z = (28,114 K)^4 & j_z = 40,33 K \\ W_z = (20,87 K)^3 \\ A = (19,60 K)^2 & z = \frac{e_s}{2} + 68,73 K \end{cases}$$

(distancia entre bs. C. de G. del hormón y acero)

Caso de preferirse la utilización de un perfil laminado comercial, los parámetros geométricos anteriores pueden utilizarse como referencia aproximada, en cuyo caso deberá verificarse la resistencia del perfil a su propio peso y el de la losa como viga simplemente apoyada, atendiendo tanto a la tensión como a la flecha.

Las hipótesis de acciones a que debe verificarse la VIGA MIXTA, son además de las condiciones que se han indicado para la elección del perfil, las siguientes.

HIPÓTESIS - 1 (se pretende que se produzca la máxima tensión de tracción en el perfil)

* peso propio del perfil y de la losa $\longrightarrow q_1 = 0,786 A + 2300 b e_c$
 (q_1 en Kg/m)
 (A en cm²)
 (b, e_c en m.)

* concargas + sobrecargas $\longrightarrow q_c + q_s$

* Retracción

* Fluencia

HIPÓTESIS - 2 (se intenta en ella determinar la máxima tensión de tracción previsible en el hormón)

* solo concargas

* Retracción

* Fluencia