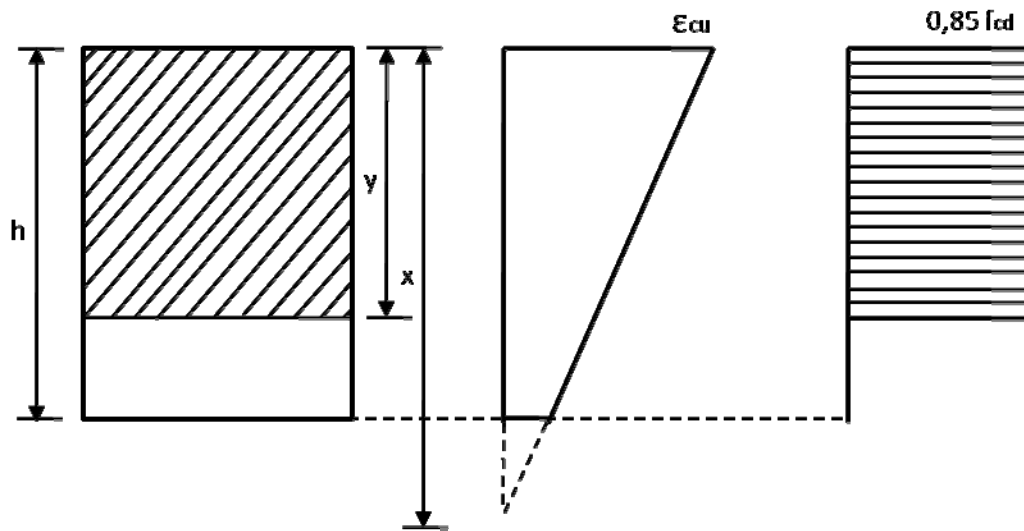


DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana



10

ESTADOS ÚLTIMOS



10.- ESTADOS ÚLTIMOS

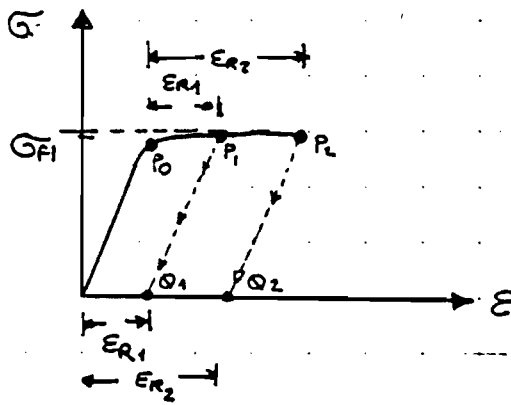


EL PROBLEMA DEL ESTADO ÚLTIMO

Se denomina TENSION DE FLUENCIA, la tensión que es preciso aplicar a una probeta solicitada a TRACCION o COMPRESION SIMPLE para que se produzca el inicio de deformaciones plásticas, las cuales se caracterizan por dos hechos diferentes que son:

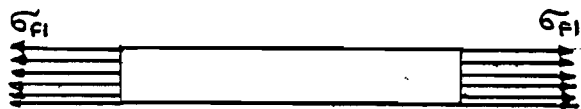
- * Cesada la tensión, se producirán deformaciones remanentes.
- * Si se mantiene la tensión de fluencia, el material no se opondrá a un incremento de la deformación.

Las peculiaridades indicadas correspondientes a la tensión de fluencia quedan reflejadas en el siguiente diagrama tensión-deformación.



Si cesa la tensión σ_f , en un punto de deformación P_1 , todo el incremento de deformación producido desde que se alcanzó por primera vez la tensión de fluencia (P_0), será deformación remanente ϵ_{R1} , por lo que a tensión nula, le corresponderá el punto Q_1 , cuya abscisa es precisamente ϵ_{R1} .

Análogo proceso se produce si la tensión σ_{FI} se deja de ejercer, cuando se habra alcanzado el punto P_2 .



La tensión de fluencia σ_{FI} se asocia por todo lo expuesto, a que la barra ha alcanzado

la máxima tensión y por lo tanto se dice que está colapsada, puesto que no es capaz de colaborar en limitar las deformaciones que se produzcan en el sistema estructural en el que la misma esté integrada, debiéndolo efectuar dicha contención otros



elementos que no estén colapsados, caso de que no existan, se dirá que es el CONJUNTO ESTRUCTURAL el que está colapsado.

El inicio de las deformaciones plásticas se produce para el siguiente estado tensional.

$$\begin{bmatrix} \sigma_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TENSIONES asociada a un estado de TRACCIÓN o COMPRESIÓN pura.

Pero si el estado tensional, no corresponde a una compresión o tracción pura, ¿cómo podrá conocerse si se van a producir deformaciones plásticas o no? ¿cómo será posible en función de la matriz de tensiones asociada, saber si se iniciarán dichas deformaciones o no?

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TENSIONES asociada a un estado TENSIONAL genérico.

Y en caso negativo, determinar que coeficiente γ sería preciso multiplicar todos los elementos de la matriz de tensiones para que se produjeran las DEFORMACIONES PLÁSTICAS

$$\begin{bmatrix} \gamma \sigma_x & \gamma \tau_{xy} & \gamma \tau_{zx} \\ \gamma \tau_{xy} & \gamma \sigma_y & \gamma \tau_{yz} \\ \gamma \tau_{zx} & \gamma \tau_{yz} & \gamma \sigma_z \end{bmatrix}$$

ESTADO TENSIONAL PARA EL CUAL SE INICIARÁN LAS DEFORMACIONES PLÁSTICAS, EN CUYO CASO, γ será el COEFICIENTE DE SEGURIDAD.

Para que sea posible detectar si el estado tensional corresponde a un régimen elástico o plástico es preciso conocer la causa que motiva el paso de un régimen de deformaciones a otro.

La causa de dicho paso, debe estar presente en el estado tensional: $\begin{bmatrix} \sigma_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tal como nos demuestra el ensayo de laboratorio correspondiente



Los factores presentes en el momento de iniciarse las deformaciones plásticas en el citado ensayo de tracción o compresión pura son:

* TENSIÓN NORMAL $\longrightarrow \sigma_{\max} = \sigma_{fl}$

* TENSIÓN TANGENCIAL $\longrightarrow \tau_{\max} = \sigma_{fl} / 2$

* DEFORMACION UNITARIA $\longrightarrow \epsilon_{\max} = \sigma_{fl} / E$

* ENERGÍA DE DEFORMACIÓN por unidad de volumen $\longrightarrow W = \frac{\sigma_{fl}^2}{2E}$

* ENERGÍA DE DISTORSIÓN por unidad de volumen, causante de alteración de la forma sin variación de volumen $\longrightarrow W_D = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{fl}^2$

también existen otros posibles causantes del inicio de tal tipo de deformaciones, como son la ENERGÍA DE DEFORMACIÓN causante de alteraciones de volumen sin variación de la forma, la tensión tangencial y normal octaédricas, etc.

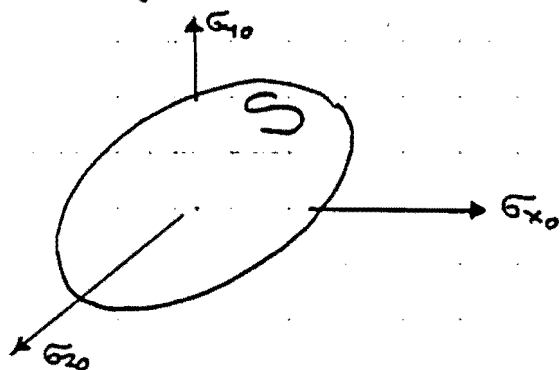
Los distintos intentos históricos, han pretendido atribuir a uno de los citados factores la causa del inicio de la deformación plástica, pero todos ellos no consiguen un perfecto ajuste entre la previsión teórica y la realidad experimental, debiéndose interpretar que seguramente no es un factor exclusivamente el que condiciona el problema, sino la conjunción de varios de los factores relacionados debidamente ponderados.

Todos los factores propuestos, pueden evaluarse perfectamente dado un estado tensional genérico, pero en tal caso, serán función de seis variables independientes. ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) lo que dificulta el problema, por lo cual se suele utilizar las tensiones principales, pues de esta forma se reducen a tres las variables independientes de nuestro problema. ($\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \sigma_{z0}$)

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{zx} \\ \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_y & \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_{zx} & \bar{\sigma}_{yz} & \bar{\sigma}_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{z0} \end{bmatrix}$$

Así pues, el problema se reduce a determinar para que conjunto de ternas de valores $(\bar{\sigma}_{x0}, \bar{\sigma}_{y0}, \bar{\sigma}_{z0})$ se producen las deformaciones plásticas, y para que conjunto de ternas $(\bar{\sigma}_{x0}, \bar{\sigma}_{y0}, \bar{\sigma}_{z0})$ se producen deformaciones elásticas.

Una forma tradicional de definir los conjuntos anteriormente citados, es determinar una superficie S en el espacio $\bar{\sigma}_{x0}, \bar{\sigma}_{y0}, \bar{\sigma}_{z0}$, tal que los puntos interiores a dicha superficie S (que lógicamente será cerrada), corresponderán a las deformaciones elásticas, en tanto que los puntos externos corresponderán a estados tensionales en los que se han iniciado como mínimo las deformaciones plásticas.



SUPERFICIE DE INTERACCION.

La superficie rayada representa el conjunto de pares $(\bar{\sigma}_{x0}, \bar{\sigma}_{y0})$, para los cuales la deformación es elástica.

Para sistemas planos, consideraremos la intersección de esta superficie con el correspondiente plano coordenado, sea por ejemplo, un estado plano x_0y_0 , en cuyo caso:

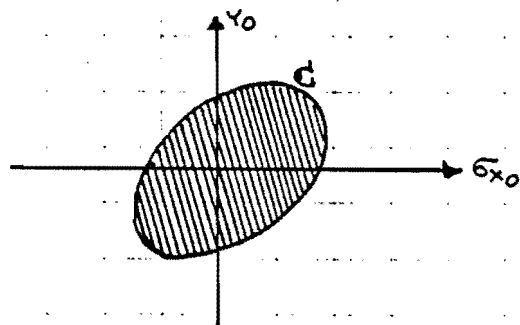


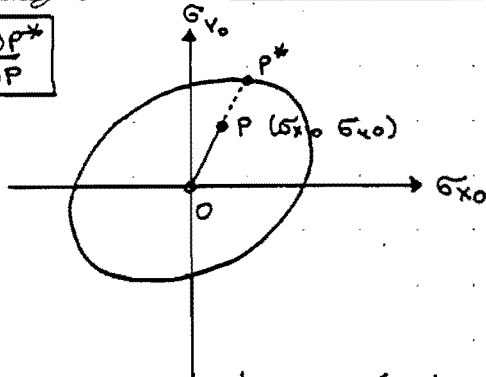
DIAGRAMA DE INTERACCION

Los puntos del contorno corresponderán a los estados tensionales para los cuales se inicia el proceso de la deformación plástica.

Si una vez establecidas las superficies de interacción o curvas de interacción, se desea establecer el coeficiente de seguridad, ello resulta inmediato, puesto que vendrá determinado por el cociente



$$\gamma = \frac{OP^*}{OP}$$



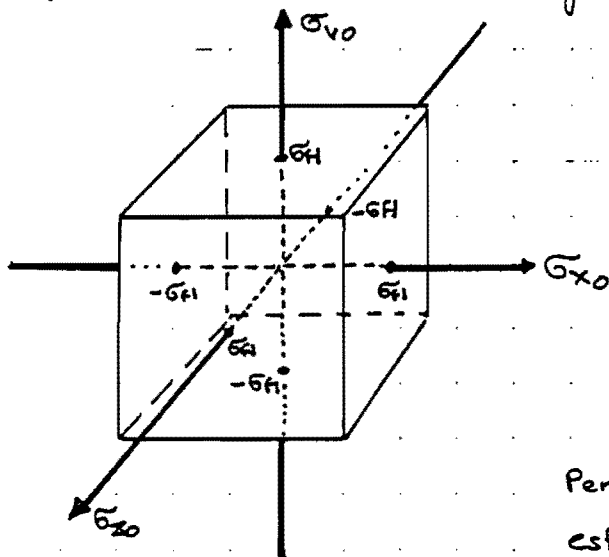
P es el punto que determinan las tensiones principales
 P^* se obtiene por intersección de la curva de interacción con la recta que define el origen y el citado punto P

Veamos a continuación los diversos criterios que históricamente se han propuesto, y las correspondientes superficies de interacción asociadas a cada uno de ellos.

CRITERIO DE RANKINE-LAMÉ

De forma intuitiva, se tiende a asociar el inicio de las deformaciones plásticas con la aparición de la tensión que en el ensayo a compresión o tracción pura las produjo, es decir, relacionar el agotamiento del material con la tensión máxima actuante, lo cual constituye el criterio que se atribuye a Rankine y a Lamé que lo enunciaron por primera vez.

En el caso de un material que se comporte igual en el ensayo a compresión que en el de tracción, el diagrama de interacción estará constituido por un cubo.



Todo punto $(\sigma_{xo}, \sigma_{yo}, \sigma_{zo})$ exterior a este cubo, significará que las deformaciones son plásticas, y los interiores definen estados tensionales en régimen elástico.

Pero la experimentación no confirmó este criterio, pues se demostró que estados tensionales como el siguiente:

$$(\sigma_{xo}, \sigma_{yo}, \sigma_{zo}) \equiv (0,9|\sigma_{fl}|, -0,8|\sigma_{fl}|, -0,8|\sigma_{fl}|)$$



que según RANKINE le correspondía régimen elástico, puesto que la máxima tensión no alcanza la de fluencia, los ensayos demostraron que se producían deformaciones plásticas, lo que descalificaba el criterio de RANKINE-LAMÉ por presentar errores hacia el lado de la inseguridad.

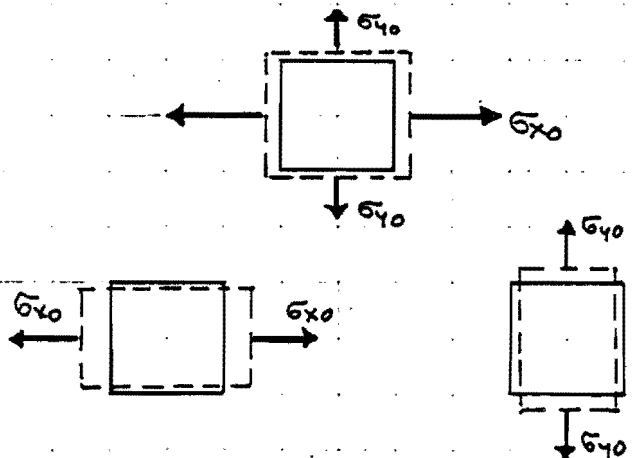
CRITERIO DE SAINT-VENANT.

Barré de Saint-Venant observó que:

- TENSIONES PRINCIPALES DE IGUAL SIGNO } → La fluencia se inicia para tensiones SUPERIORES a las que prevé el criterio de RANKINE
- TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO } → La fluencia se inicia para tensiones INFERIORES a las previstas por RANKINE

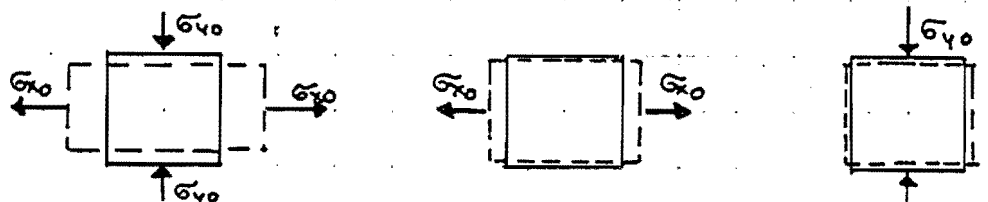
Saint-Venant atribuyó estas desviaciones a los hechos siguientes:

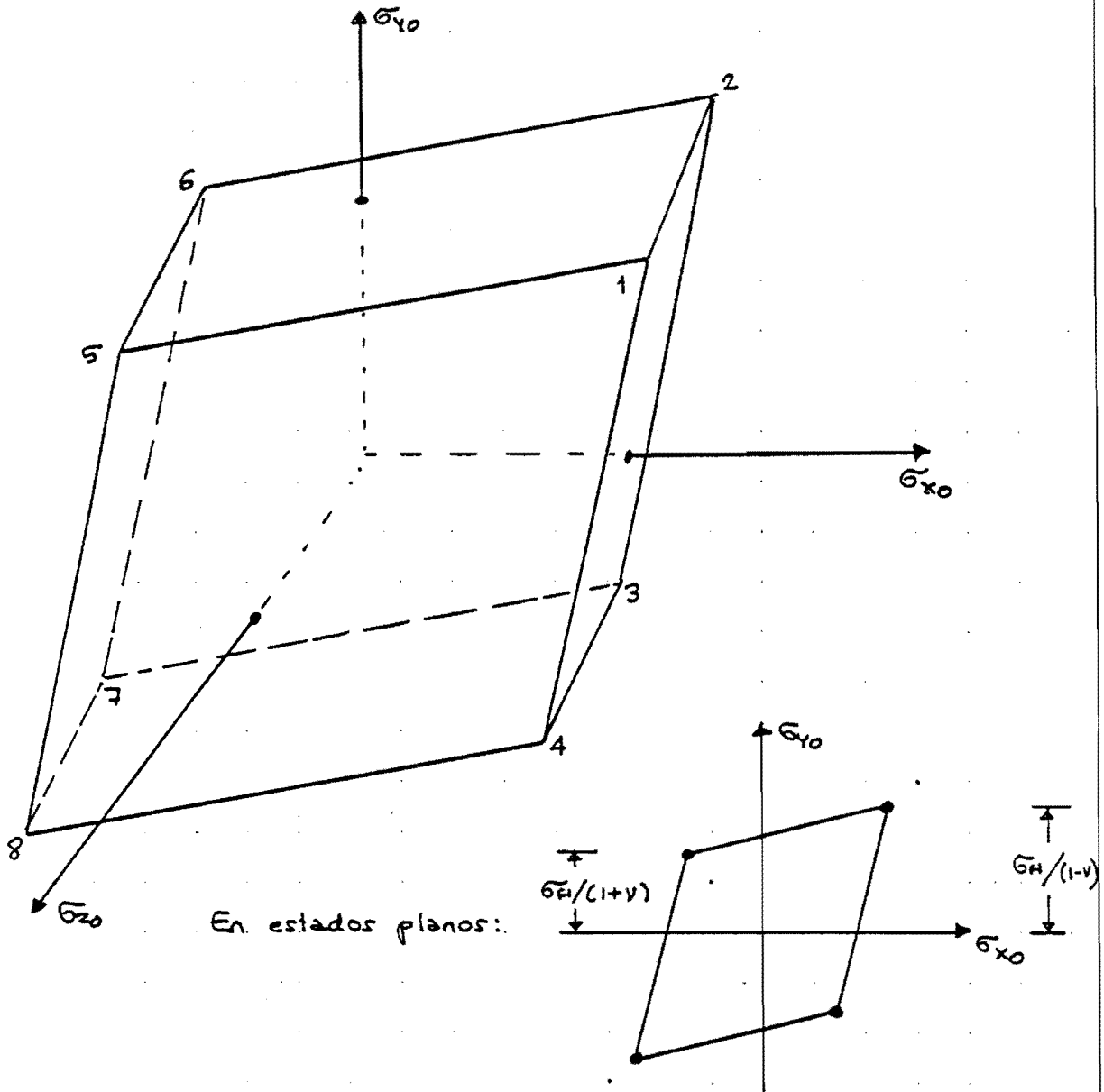
- TENSIONES PRINCIPALES DE IGUAL SIGNO } → Se producen DEFORMACIONES UNITARIAS INFERIORES, a las que se generan cuando cada una de ellas actúa aisladamente



en tanto que:

- TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO } → Se producen DEFORMACIONES UNITARIAS MAYORES, a las que se generan cuando actúan cada una de ellas de forma aislada.





Pese al lógico planteamiento que representa el CRITERIO DE SAINT-VENANT, la experimentación no ha corroborado las previsiones efectuadas por el mismo, puesto que si las tensiones principales son de igual signo, el inicio de las deformaciones plásticas se produce antes que lo previsto por el criterio de Saint-Venant, e igual acontece cuando las tensiones principales son de distinto signo, si bien, en este caso, produce mejores resultados que los establecidos por RANKINE.

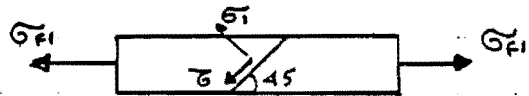


CRITERIO DE TRESCA-GUEST

Al observarse que los máximos errores que se producían en el criterio de RANKINE, correspondían al caso de TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO, y que en tales circunstancias es precisamente cuando las tensiones tangenciales son mayores, RANKINE propuso adoptar la tensión tangencial como factor indicativo para la determinación de si se van a iniciar o no las deformaciones plásticas.

En el ensayo de tracción pura, la tensión tangencial que se produce en un plano inclinado a 45° de la dirección del esfuerzo es:

$$\tau = \sigma_{fl} / 2$$



Tresca y Guest propusieron adoptar esta tensión tangencial como la causante del inicio de las deformaciones plásticas, por lo que se la puede denominar TENSION TANGENCIAL DE FLUENCIA

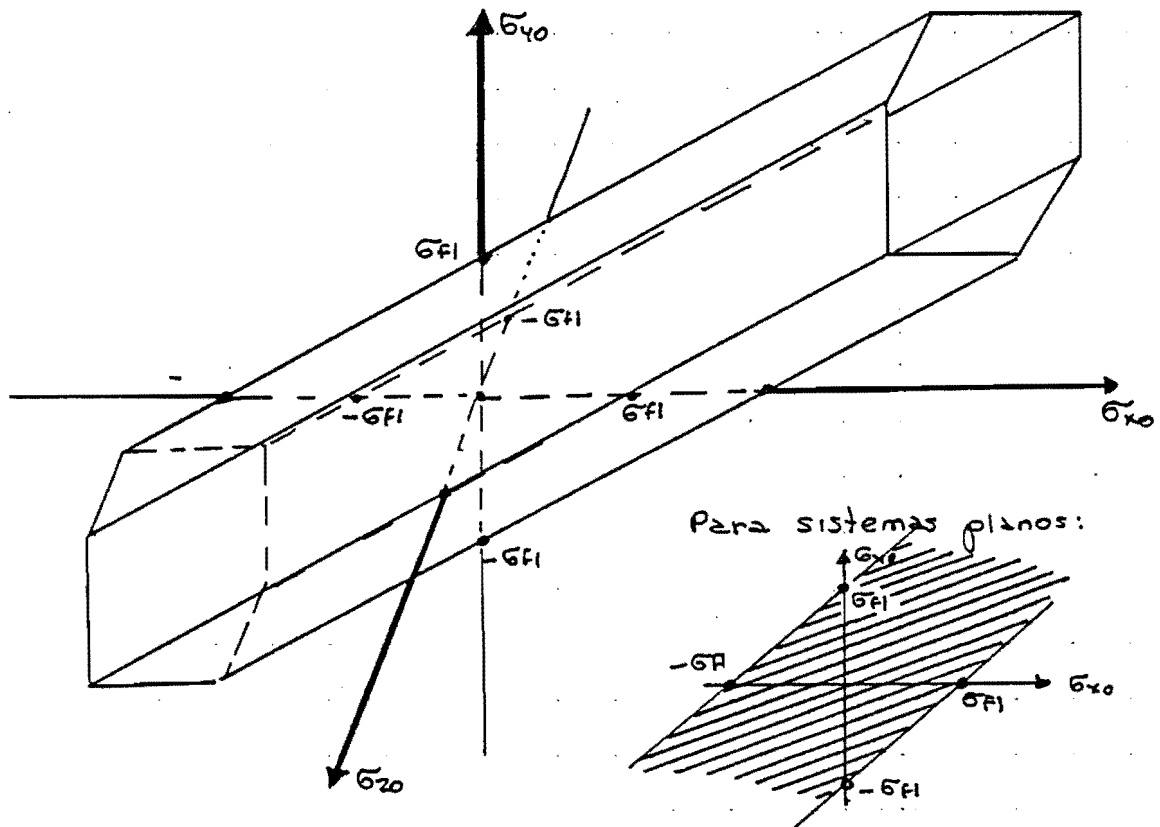
Puesto que la máxima tensión tangencial que produce un estado tensional, es la máxima semidiferencia entre las tensiones principales, resulta:

$$\frac{\sigma_H}{2} = \tau_{fl} > \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} |\sigma_{x0} - \sigma_{y0}| \\ \frac{1}{2} |\sigma_{x0} - \sigma_{z0}| \\ \frac{1}{2} |\sigma_{y0} - \sigma_{z0}| \end{array} \right\} \Rightarrow \text{DEFORMACIONES ELÁSTICAS}$$



$$\tau_{fl} > \max \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_{x0} - \sigma_{y0}| \\ |\sigma_{x0} - \sigma_{z0}| \\ |\sigma_{y0} - \sigma_{z0}| \end{array} \right\} \Rightarrow \text{DEFORMACIONES ELÁSTICAS}$$

La condición anterior, equivale a seis planos que delimitarán el volumen del DIAGRAMA DE INTERACCIÓN, tal como indicamos en la figura siguiente:

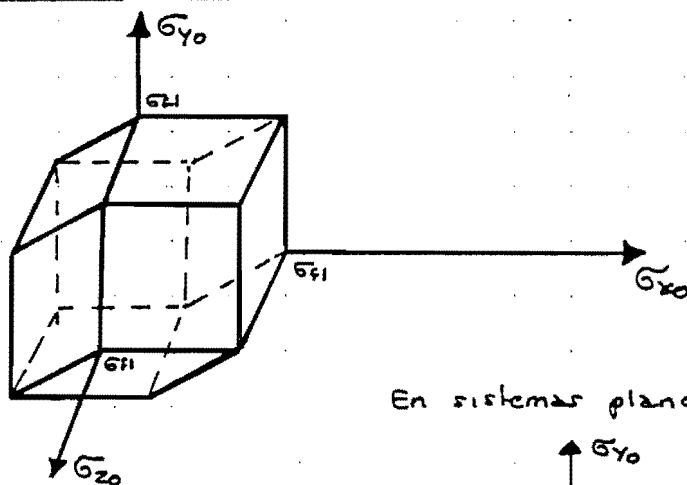


Cuando las tensiones principales son de igual signo, y valores que difieran en menos de σ_{FI} , la tensión tangencial permanece inferior a σ_{FI} , independientemente del valor que presente cada tensión principal considerada aisladamente, lo cual conduce a resultados totalmente desautorizados por la experiencia práctica, en dichos casos, (de tensiones principales de igual signo).

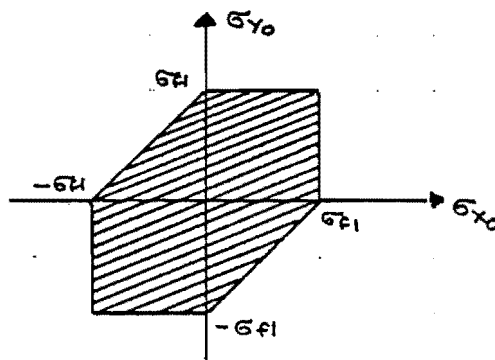
Sin embargo, cuando las tensiones principales son de distinto signo, el criterio de TRESCA-GUEST produce buenos resultados, que si bien poseen alguna desviación respecto a los resultados experimentales, los errores quedan hacia el lado de la seguridad.

Ello ha sugerido una utilización mixta de este criterio, y el criterio de RANKINE, según el siguiente principio clasificatorio:

- TENSIONES PRINCIPALES de IGUAL SIGNO } → CRITERIO DE RANKINE
- TENSIONES PRINCIPALES de DISTINTO SIGNO } → CRITERIO DE TRESCA-GUEST



En sistemas planos:



Este criterio mixto proporciona resultados excesivamente conservadores, pero presenta la ventaja de que sus errores están siempre hacia el lado de la seguridad.

CRITERIO DE BELTRAMI-HAIG

Ante el fracaso de asociar el inicio de las deformaciones plásticas a la tensión, deformación unitaria o a la tensión tangencial, Beltrami y Haig propusieron asociar dicho fenómeno a la ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA o ENERGÍA DE DEFORMACIÓN por unidad de volumen.

Sabemos que:

$$\frac{dw}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1+\nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)) =$$

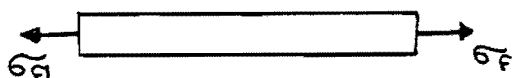
$$= \frac{dw}{dV} = \frac{1}{2E} (d_1^2 - 2(1+\nu) d_2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} d_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ d_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned} \right.$$

Si aplicamos las expresiones anteriores, al ensayo de TRACCIÓN o COMPRESIÓN PURA, cuando se ha alcanzado la tensión de fluencia, obtendremos lo que podemos definir como ENERGÍA DE DE-



FORMACIÓN DE FLUENCIA POR UNIDAD DE VOLUMEN, γ que será:



$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{FL} = \frac{\tilde{\sigma}_{FI}^2}{2E}$$

Por lo tanto, se producen deformaciones elásticas y no plásticas cuando se verifica:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{FL} > \frac{dW}{dV} \quad \text{según BELTRAMI-HAIG}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\tilde{\sigma}_{FI}^2}{2E} > \frac{1}{2E} (d_1^2 - 2(1+\nu) d_2)$$

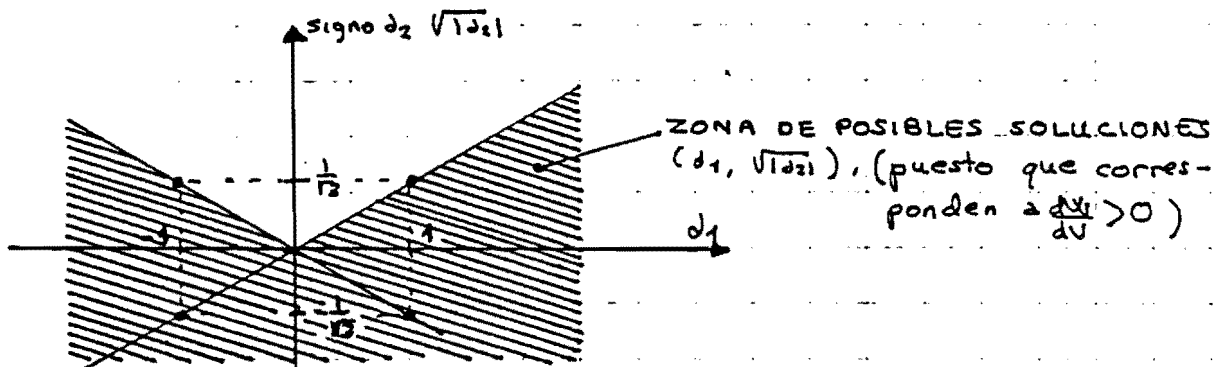
$$\boxed{\tilde{\sigma}_{FI}^2 > d_1^2 - 2(1+\nu) d_2}$$

Dado que la energía de deformación siempre es positiva, ello implica que $\forall \nu$: $d_1^2 > 2(1+\nu) d_2$ como $\nu_{max} = 0.5$

$$\Downarrow$$

$$d_1 > \sqrt{3} \sqrt{|d_2|}$$

Si adoptamos como ejes de referencia d_1 , $\sqrt{|d_2|} \cdot \text{signo } d_2$, el campo de los posibles valores de los dos invariantes, vendrá delimitado por las dos rectas siguientes:



La inecuación que formula el criterio de BELTRAMI HAIG, puede expresarse de la forma siguiente:

$$1 > \frac{d_1^2}{\tilde{\sigma}_{FI}^2} - \text{signo}\{d_2\} \frac{(\sqrt{|d_2|})^2}{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{FI}}{\sqrt{2(1+\nu)}}\right)^2}$$



Si $d_2 < 0$ la inecuación anterior define una zona delimitada por una elipse de ecuación:

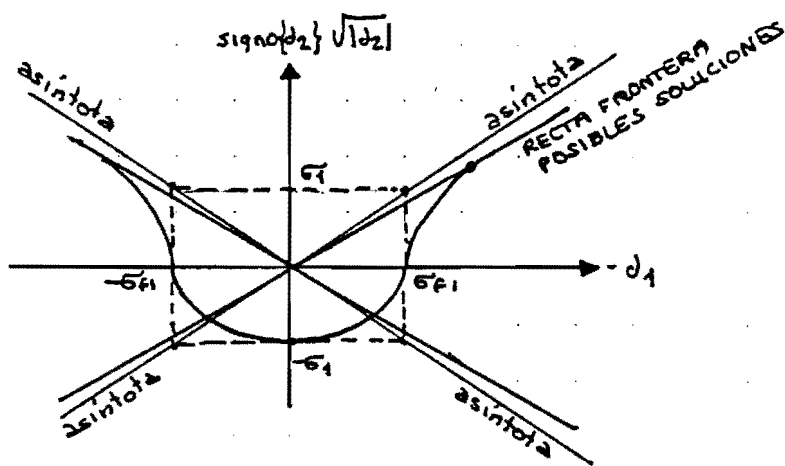
$$1 = \frac{d_1^2}{\sigma_H^2} + \frac{(\sqrt{|d_2|})^2}{\sigma_1^2} \quad \text{si } d_2 < 0$$

siendo: $\sigma_1 = \frac{\sigma_E}{\sqrt{2(1+\nu)}}$

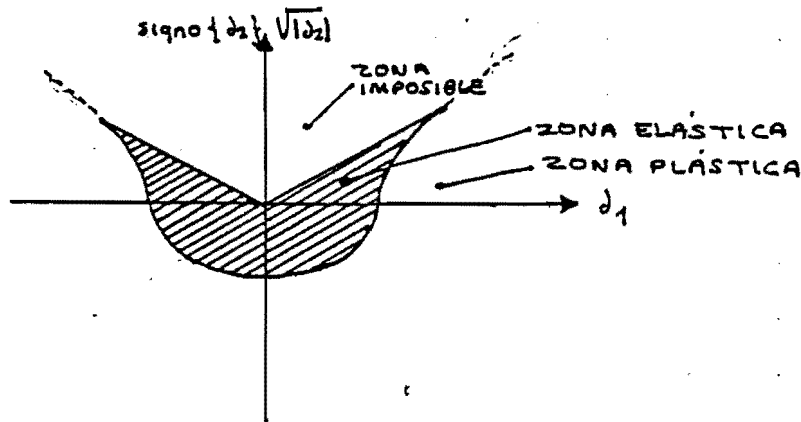
En el caso, de que $d_2 > 0$ la curva que delimita la zona que se cumple la inecuación es una hipérbola, de ecuación:

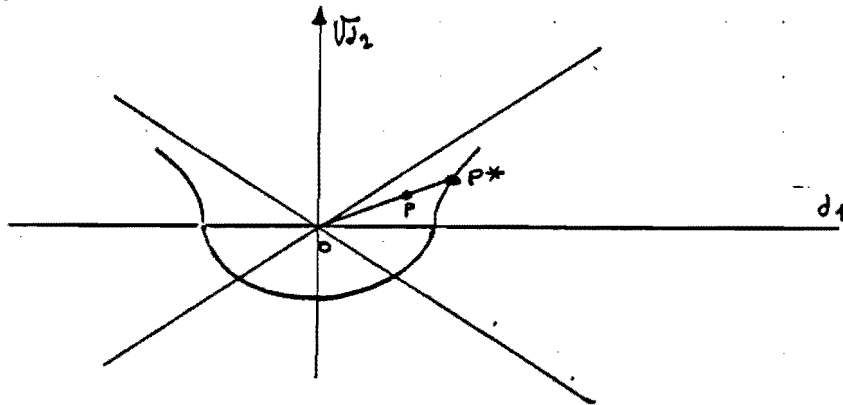
$$1 = \frac{d_1^2}{\sigma_H^2} - \frac{(\sqrt{|d_2|})^2}{\sigma_1^2} \quad \text{si } d_2 > 0$$

Y considerando únicamente la zona en que existen posibles combinaciones $(d_1, \sqrt{|d_2|})$, el campo de las deformaciones plásticas y elásticas serán:



$$\left(\sigma_1 = \frac{\sigma_H}{\sqrt{2(1+\nu)}} \right)$$





El coeficiente de seguridad correspondiente a un estado tensional cuyos invariante d_1 y d_2 definen un punto P, es:

$$\gamma = \frac{OP^*}{OP} = \sqrt{\frac{\sigma_{F1}^2}{d_1^2 - 2(1+\nu)d_2}}$$

En el caso de utilizar las tensiones principales, es factible el uso del DIAGRAMA DE INTERACCIÓN con que hasta ahora se habían separado los estados tensionales que producen deformaciones elásticas, de los que producen deformaciones plásticas, puesto que:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{F1} > \frac{dW}{dV}$$

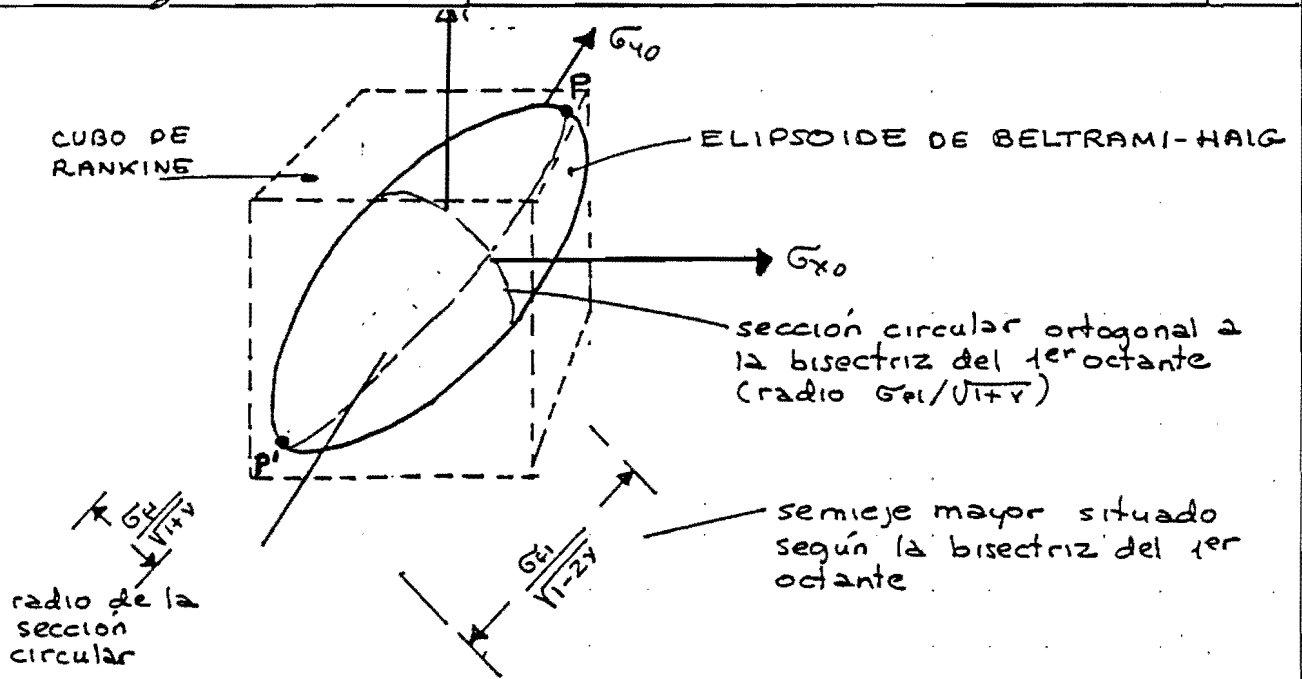
$$\frac{\sigma_H^2}{2E} > \frac{1}{2E} (\sigma_{x_0}^2 + \sigma_{y_0}^2 + \sigma_{z_0}^2 - 2\nu(\sigma_{x_0}\sigma_{y_0} + \sigma_{x_0}\sigma_{z_0} + \sigma_{y_0}\sigma_{z_0}))$$



$$\sigma_H^2 > \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{y_0}^2 + \sigma_{z_0}^2 - 2\nu(\sigma_{x_0}\sigma_{y_0} + \sigma_{x_0}\sigma_{z_0} + \sigma_{y_0}\sigma_{z_0})$$

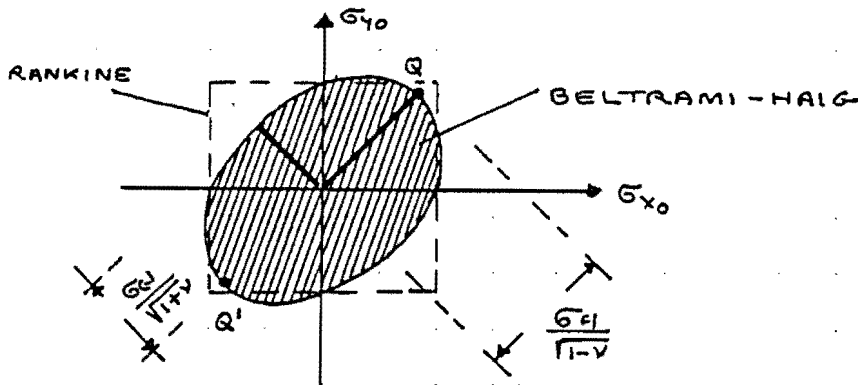
$$1 > \left(\frac{\sigma_{x_0}}{\sigma_{F1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{y_0}}{\sigma_{F1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{\sigma_{F1}}\right)^2 - 2\nu\left(\frac{\sigma_{x_0}}{\sigma_{F1}}\frac{\sigma_{y_0}}{\sigma_{F1}} + \frac{\sigma_{x_0}}{\sigma_{F1}}\frac{\sigma_{z_0}}{\sigma_{F1}} + \frac{\sigma_{y_0}}{\sigma_{F1}}\frac{\sigma_{z_0}}{\sigma_{F1}}\right)$$

Lo que corresponde al espacio interior que delimita un elipsoide, que se representa en la figura siguiente, en la que se acotan los semiejes principales del mismo.



Para estados planos, la inequación se reduce a :

$$\sigma_H^2 > \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{y_0}^2 - 2\nu \sigma_{x_0} \sigma_{y_0}$$



EL CRITERIO DE BELTRAMI-HAIG es el más exacto de cuantos se han propuesto para ESTADOS TRIPLES, si bien no se ajusta totalmente a la experimentación, por proporcionar resultados ligeramente hacia el lado de la seguridad cuando las TENSIONES PRINCIPALES SON DE IGUAL SIGNO, así, si $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = \sigma_{z_0}$ el punto P (o P') límite tendrá un valor

$$P \text{ o } P' \Rightarrow \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = \sigma_{z_0} = \frac{\sigma_{FI}}{\sqrt{3(1-2\nu)}} \quad (\approx 0,91 \sigma_{FI} \text{ para } \nu = 0,3)$$

y en estados planos

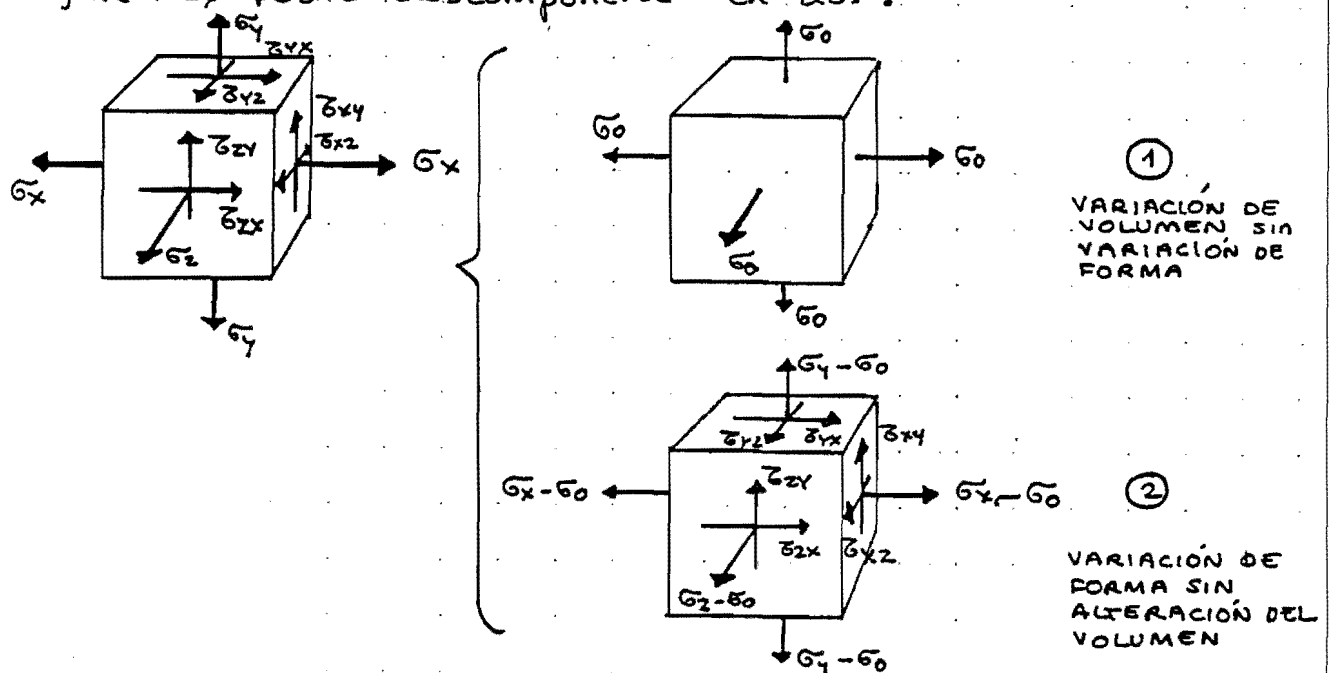
$$Q \text{ o } Q' \Rightarrow \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = \frac{\sigma_{FI}}{\sqrt{2(1-\nu)}} \quad (\approx 0,85 \sigma_{FI} \text{ para } \nu = 0,3)$$

No obstante, las zonas, donde se producen estas desviaciones hacia la seguridad son muy reducidas, coincidiendo en el resto prácticamente con los ensayos de laboratorio.

CRITERIO DE VON-MISES.

Von-Mises propuso descomponer la energía de deformación en dos sumandos, uno que correspondiere a la ALTERACIÓN DE LA FORMA SIN VARIACIÓN DE VOLUMEN, y otro, que fuese la energía utilizada para CAMBIAR EL VOLUMEN sin alteración alguna de la forma, y atribuyó que el fenómeno del inicio de las DEFORMACIONES PLÁSTICAS estaba asociado a la primera de dichas energías.

Si tenemos un estado tensional genérico, tal como el siguiente, podrá descomponerse en dos:



Para que no se produzca variación de forma en ①, es preciso que no actúen tensiones tangenciales, y que todas las tensiones normales sean iguales, las cuales simbolizaremos por σ_0 .

En el estado ②, es preciso que la variación de volumen sea cero, lo que precisa que el invariante lineal del tensor de deforma-



ciones sea nulo, y ello implica que el invariante lineal del tensor de tensiones también lo sea, dada la relación existente entre ambos invariantes, por lo que:

$$\sigma_x - \sigma_0 + \sigma_y - \sigma_0 + \sigma_z - \sigma_0 = 0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{d_1}{3} = \sigma_0$$

La energía de deformación utilizada en la ALTERACION DE VOLUMEN SIN ALTERACION DE FORMA, valdrá

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta V} = \frac{1}{2E} \left(\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2 - 2\nu(\sigma_0\sigma_0 + \sigma_0\sigma_0 + \sigma_0\sigma_0) \right) = \frac{1}{2E} (3\sigma_0^2 - 6\nu\sigma_0^2) = \frac{3(1-2\nu)\sigma_0^2}{2E}$$

Sustituyendo σ_0 por $d_1/3$, resulta:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta V} = \frac{3(1-2\nu)d_1^2/9}{2E} = \frac{(1-2\nu)d_1^2}{6E}$$

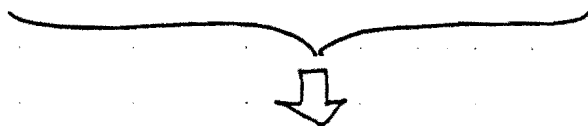
La energía de deformación necesaria para alterar la forma sin variación de volumen, será:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right) = \left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta V} + \left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta F} = \frac{1}{2E} (d_1^2 - 2(1+\nu)d_2)$$

↑
VARIACION DE VOLUMEN SIN variación de forma

↑
VARIACION DE FORMA SIN variación de volumen

↑
ENERGIA de DEFORMACION TOTAL



$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta F} = \frac{1}{2E} (d_1^2 - 2(1+\nu)d_2) - \frac{(1-2\nu)d_1^2}{6E}$$

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta F} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{d_1^2}{3} - d_2 \right) \text{ ENERGIA DE DISTORSION}$$

En el ensayo de tracción pura, los invariantes toman los valores siguientes: $d_1 = \sigma_H$ $d_2 = 0$, lo que implica:



$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta F_{F1}} = \frac{1+\nu}{3E} \bar{\sigma}_{F1}^2$$

Por lo que según VON-MISES, la condición de que las deformaciones se mantengan en régimen elástico es:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta F_{F1}} > \left(\frac{dW}{dV}\right)_{\Delta F}$$

$$\frac{1+\nu}{3E} \bar{\sigma}_{F1}^2 > \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\sigma_1^2}{3} - \sigma_2\right)$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{F1}^2 > \sigma_1^2 - 3\sigma_2} \quad \text{CRITERIO DE VON-MISES}$$

Lo cual puede expresarse de la forma siguiente:

$$1 > \frac{\sigma_1^2}{\bar{\sigma}_{F1}^2} - \text{signo}\{\sigma_2\} \frac{(\sqrt{|\sigma_2|})^2}{(\bar{\sigma}_{F1}/\sqrt{3})^3}$$

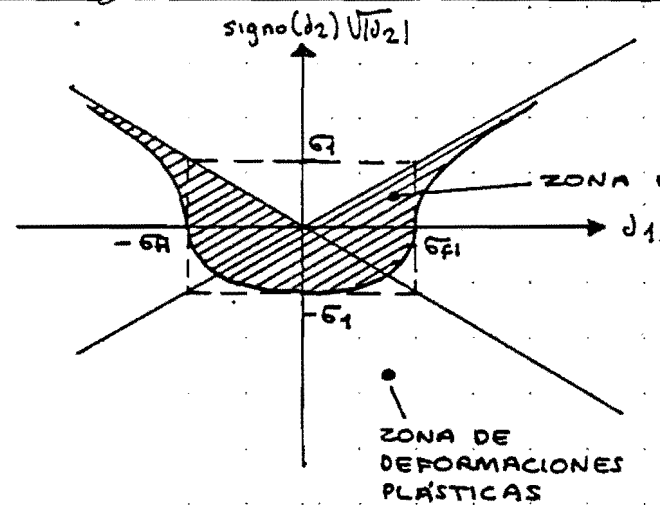
Si $\sigma_2 < 0$, la inecuación anterior se transforma en el recinto que delimita la siguiente elipse y el eje de abscisas.

$$1 = \frac{\sigma_1^2}{\bar{\sigma}_{F1}^2} + \frac{(\sqrt{|\sigma_2|})^2}{(\bar{\sigma}_{F1}/\sqrt{3})^2} \quad \text{si } \sigma_2 < 0$$

En el caso de que $\sigma_2 > 0$, la inecuación expresa el recinto delimitado por el eje de abscisas y la hipérbola de ecuación:

$$1 = \frac{\sigma_1^2}{\bar{\sigma}_{F1}^2} - \frac{(\sqrt{|\sigma_2|})^2}{(\bar{\sigma}_{F1}/\sqrt{3})^2}$$

Las asíntotas de la hipérbola anterior son precisamente las rectas que delimitaban la zona de soluciones posibles atendiendo a que la energía de deformación debe ser siempre positiva, esto nos conduce, a que el campo de posibles estados tensionales que producen deformaciones elásticas es el siguiente:



Al ser coincidentes las asíntotas y las rectas delimitadoras de posibles soluciones, el campo de los estados ten-

sionales que según VON-MISES le corresponden deformaciones elásticas no es finito, lo que nos indica que el mismo es inexacto. Para estados TRIPLES DE TENSION, no obstante para ESTADOS PLANOS DE TENSION proporciona resultados más ajustados a la experimentación que los criterios anteriores.

Para entender la diferente respuesta de este criterio ante estados planos y triples, vamos a utilizar el DIAGRAMA DE INTERACCION con respecto a las TENSIONES PRINCIPALES.

Los invariantes en función de las tensiones principales valen:

$$d_1 = \sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} + \sigma_{z_0}$$

$$d_2 = \sigma_{x_0} \sigma_{y_0} + \sigma_{x_0} \sigma_{z_0} + \sigma_{y_0} \sigma_{z_0}$$

Sustituyendo

$$\sigma_{F1}^2 > d_1^2 - 3d_2$$



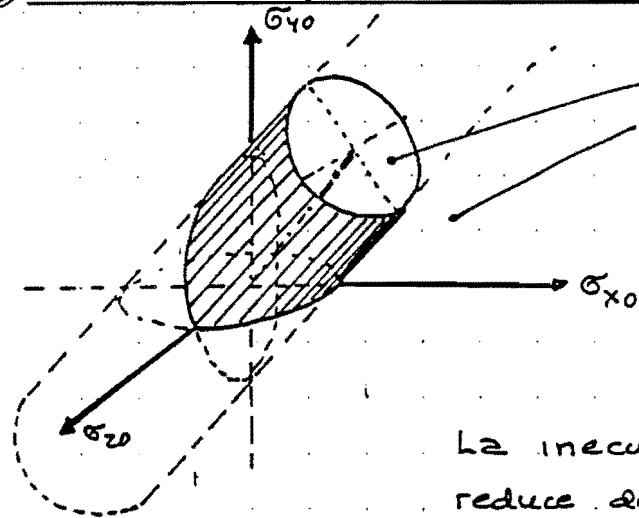
$$\sigma_{F1}^2 > (\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} + \sigma_{z_0})^2 - 3(\sigma_{x_0} \sigma_{y_0} + \sigma_{x_0} \sigma_{z_0} + \sigma_{y_0} \sigma_{z_0})$$

$$\sigma_{F1}^2 > \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{y_0}^2 + \sigma_{z_0}^2 - (\sigma_{x_0} \sigma_{y_0} + \sigma_{x_0} \sigma_{z_0} + \sigma_{y_0} \sigma_{z_0})$$

$$\sigma_{F1}^2 > \frac{1}{2} [(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0})^2 + (\sigma_{x_0} - \sigma_{z_0})^2 + (\sigma_{y_0} - \sigma_{z_0})^2]$$

CRITERIO DE VON-MISES

Lo que es una cuádrica degenerada, un cilindro de sección elíptica de directriz, la bisectriz del primer octante.



DEFORMACIONES ELÁSTICAS
DEFORMACIONES PLÁSTICAS

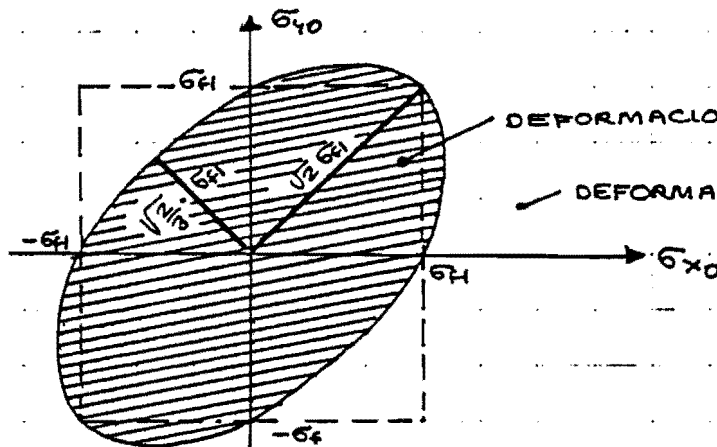
DIAGRAMA DE INTERACCIÓN correspondiente al CRITERIO DE VON-MISES.

La inecuación de Von-Mises, se reduce de la forma siguiente en el caso de estados planos.

$$\sigma_H^2 > \sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2 - \sigma_{x0} \sigma_{y0}$$

CRITERIO DE VON-MISES para estados planos

Lo cual corresponde al recinto delimitado por una elipse cuyos ejes de simetría son las bisectrices del 1er cuadrante, y cuyos semiejes principales valen: $\sqrt{2} \sigma_H$ y $\sqrt{2/3} \sigma_H$



Si $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = \sigma_{z0}$, las deformaciones serían siempre elásticas según el criterio de Von-Mises, independientemente del módulo de las mismas. El cilindro de Von-Mises es indefinido, tal como ya se detectó en el diagrama d_1 , signo $\{d_2\} \times \sqrt{|d_2|}$ que resultó no cerrado.

Sin embargo, si $\sigma_{z0} = 0$ y $\sigma_{x0} = \sigma_{y0}$, según Von-Mises ello corresponde a un módulo $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = \sigma_H$, lo que es prácticamente coincidente con la experimentación, y en cualquier caso, más exacto que lo propuesto por Beltrami-Haig, según el cual la tensión correspondiente era $0.85 \sigma_H$



Este hecho motiva que se suele adoptar para estados planos el criterio de VON-MISES, en tanto que para ESTADOS TRIPLES es conveniente utilizar BELTRAMI-HAIG.

Resumiendo:

ESTADOS PLANOS	$\sigma_{H1}^2 > d_1^2 - 3d_2$	(Von Mises)
ESTADOS TRIPLES	$\sigma_{H1}^2 > d_1^2 - 2(1+\nu)d_2$	(Beltrami)

Es muy frecuente los estados planos de tensión en el análisis estructural, y fundamentalmente en el análisis tensional en barras, por lo que el criterio de Von-Mises resulta de una gran incidencia práctica.

Sabiendo que en un estado plano:

$$d_1 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

la condición de Von-Mises puede formularse también de la siguiente forma:

$$\sigma_{H1}^2 > (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)$$

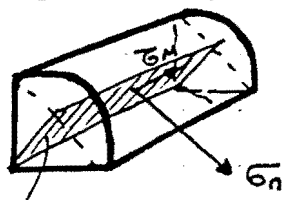
$\sigma_{H1}^2 > \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2$	condición de VON MISES para ESTADOS PLANOS GENERICOS
--	--

Si como es muy frecuente $\sigma_y = 0$, se produce la notable simplificación:

$\sigma_{H1}^2 > \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2$



En el caso de cordones de soldadura:



$$\sigma_{H1}^2 > \sigma_n + 1.8 \sigma_m^2$$

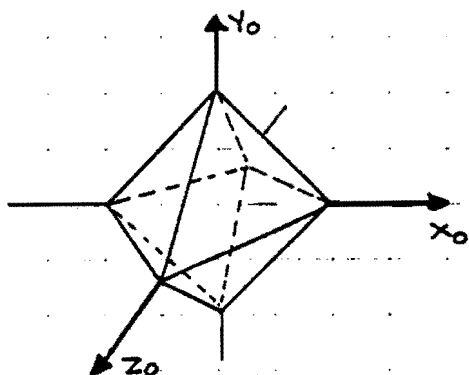
SUPERFICIE EFICAZ de un cordón de soldadura.



Es interesante observar que el criterio de VON-MISES ha conducido a la expresión:

$$\sigma_H^2 > \frac{1}{2} [(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0})^2 + (\sigma_{x_0} - \sigma_{z_0})^2 + (\sigma_{y_0} - \sigma_{z_0})^2]$$

y que puede demostrarse que si adoptando como ejes de simetría, las DIRECCIONES PRINCIPALES DEL TENSOR DE TENSIONES, y construimos el siguiente OCTAEDRO, la tensión tangencial y normal que se produce en cada una de sus caras vale



cial y normal que se produce en cada una de sus caras vale

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} + \sigma_{z_0}}{3} = \frac{\sigma_1}{3}$$

$$\tau_{nm} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0})^2 + (\sigma_{x_0} - \sigma_{z_0})^2 + (\sigma_{y_0} - \sigma_{z_0})^2}$$

tal como puede verificarse fácilmente sabiendo que el versor director asociado a una cualquiera de sus ocho caras, es de la forma: $\vec{n} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

Esto conduce a que algunos autores, en vez de exponer el criterio de VON-MISES, como resultante de limitar la energía de deformación correspondiente al fenómeno de la DISTORSIÓN, para que las deformaciones sean elásticas, limitan la tensión TANGENCIAL OCTAEDRICA, que es la tensión que se producen en las caras del octaedro anteriormente definido, llegando a la conclusión de que:

$$\sigma_H^2 > \frac{3}{2} \tau_{oct}^2$$

CRITERIO DE VON-MISES expresado en función de la tensión tangencial octaédrica.

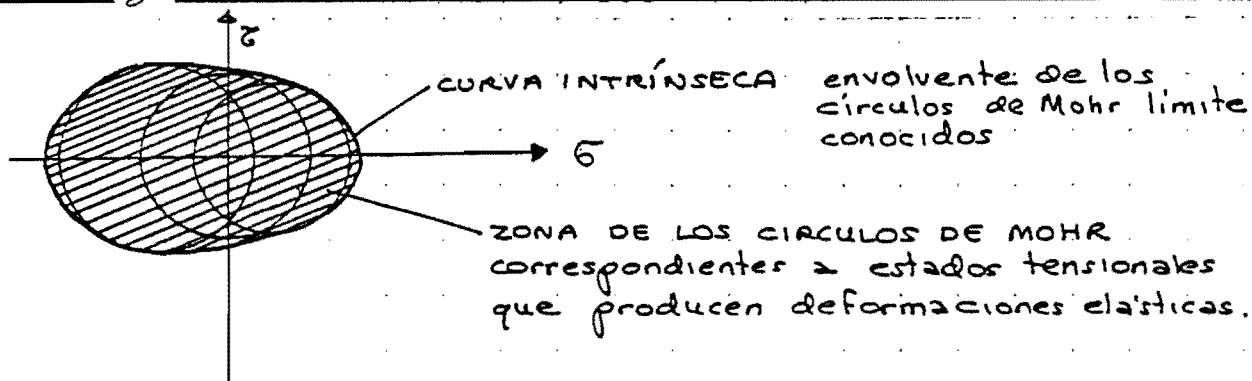
CRITERIO DE MOHR O MÉTODO DE LA CURVA INTRINSECA

Ante el sistemático fracaso de los métodos que pretendían prever el inicio de las deformaciones plásticas, atribuyéndolas a un determinado factor: (tensión, deformaciones unitarias, tensión tangencial, energía de deformación, o energía de distorsión o tensiones tangenciales octaédricas), Mohr propuso prescindir de la determinación del factor causante de dichas deformaciones y establecer de forma gráfica una delimitación entre los estados tensionales que producen o no, las citadas deformaciones plásticas.

El diagrama de interacción utilizado anteriormente, presenta el inconveniente para estados triples de su carácter espacial, lo cual Mohr lo obvió utilizando los círculos de su nombre que permiten una plasmación plana de un estado tensional triple.

Mohr propuso dibujar el círculo externo de los tres que reflejan un estado tensional espacial, para aquellos estados en los que se hubiese detectado experimentalmente que correspondían al inicio de las deformaciones de fluencia. Generalmente solo pueden detectarse experimentalmente el inicio de la plasticidad con ensayos muy simples, como el de COMPRESIÓN PURA, TRACCIÓN PURA y en algunas instalaciones CORTADURA PURA, lo que proporciona tres círculos de Mohr como máximo.

Dibujados los círculos externos correspondientes a diversos estados límites, Mohr estableció la hipótesis verificada posteriormente, de que los mismos debían ser tangentes a una cierta CURVA que denominó INTRINSECA, que envolvería a todos los círculos de Mohr correspondientes a estados tensionales que produjesen deformaciones elásticas, en tanto, que todo círculo que cortase a la citada curva, le correspondían deformaciones plásticas.



En el caso, de que solo se disponga de dos círculos límites, los correspondientes a los ensayos de COMPRESIÓN Y TRACCIÓN pura, el CRITERIO DE MOHR es equivalente a la utilización conjunta del criterio de TRESCA-GUEST Y RANKINE.

El método de la curva intrínseca es muy utilizado en mecánica de suelos, motivo por el cual ha sido expuesto.

**DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE SEGURIDAD DESEABLE**

En el estudio del problema del ESTADO ÚLTIMO se han establecido criterios suficientemente exactos, para que conocido un estado tensional y la tensión de fluencia o de rotura, pueda calcularse cual es el coeficiente de seguridad real existente.

Ahora vamos a indicar, cuales son los criterios utilizados para fijar el coeficiente de seguridad deseable.

El cálculo estructural está sufriendo una evolución apreciable en el intento de establecer los valores de las acciones y de las tensiones de los materiales, de forma que de ello resulte un grado de seguridad determinado previamente.

En un principio el método seguido fué el de obtener experimentalmente la tensión de rotura como media aritmética de los diversos ensayos realizados y el valor obtenido dividirlo por un coeficiente de seguridad según el tipo de material, tomando generalmente γ valores comprendidos entre 2 y 3, y la tensión así calculada se la denominaba TENSION ADMISIBLE, debiendo el calculista controlar que en ningún punto de la estructura este valor se superará.

Para las acciones se adaptaba el valor máximo -- previsible sin coeficiente de seguridad, puesto que este ya se había introducido en el cálculo de la tensión admisible del material.

El cálculo estructural actual tiende a alterar en varios puntos el procedimiento expuesto, y que se pueden resumir así:

1.- COEFICIENTE DE SEGURIDAD DIFERENCIADO PARA LA ESTIMACION DE RESISTENCIAS DE LOS MATERIALES Y DE LAS ACCIONES

En el caso de elementos estructurales homogéneos, como el acero, es equivalente introducir un solo coeficiente de seguridad general γ_G , o el minorar las tensiones del material con un coeficiente γ , y mayorar las acciones con otro γ_1 , con tal que:

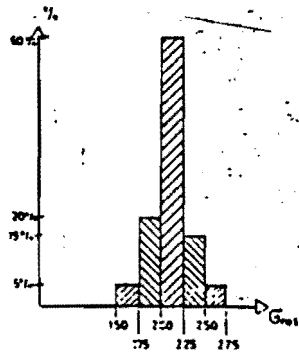
$$\gamma_G = \gamma_1 \cdot \gamma$$

Para en el caso de elementos estructurales heterogéneos como es el hormigón, el considerar un coeficiente de seguridad γ_1 que mayorare las acciones, y dos coeficientes de seguridad γ_s y γ_c que minoraren respectivamente acero y hormigón permite un cálculo más realista que con el coeficiente de seguridad único.



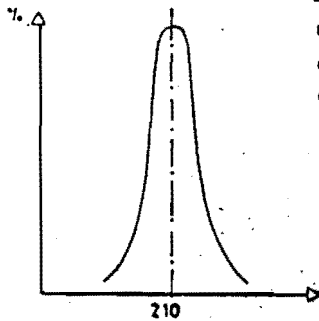
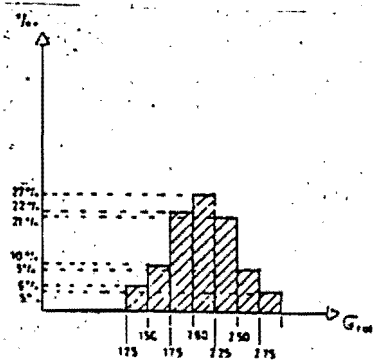
El diferenciar coeficientes de seguridad para acciones y para materiales, permite que estas últimas se ajusten según el grado de control que se ejerza en los materiales, mientras que el de las acciones depende del grado de supervisión que se efectúe sobre el proceso constructivo en general, según quejen caso de siniestro afecte a la seguridad de personas o sólo se deriven daños materiales.

2ª.- La forma de establecer la RESISTENCIA COMO MEDIA ARITMETICA SE SUSTITUYE POR UN VALOR CARACTERISTICO QUE CORRESPONDE A UN CONCEPTO ESTADISTICO.



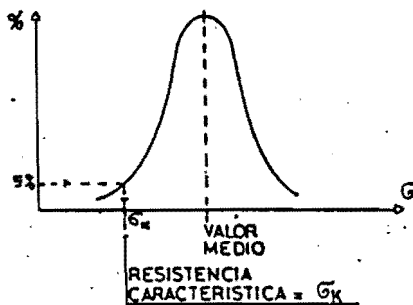
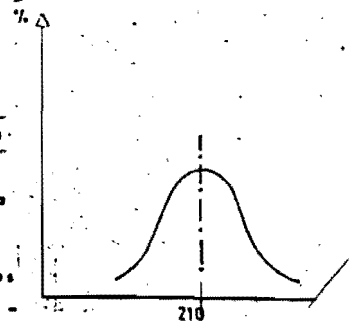
Si un material al someterlo a rotura observamos que siempre proporciona resultados muy similares, es lógico que pensemos que la probabilidad de que una nueva probeta rompa a una resistencia mucho más baja es mínima, es tanta que si los resultados experimentales nos delatan una dispersión la probabilidad de que se produzca un valor más bajo aumenta ostensiblemente.

Si en un eje de abscisas representamos intervalos de resistencia del material (por ejemplo de 250 Kg/cm² a 275 Kg/cm²) y en un eje de ordenadas el porcentaje de ensayos a rotura que nos han proporcionado resultados del correspondiente intervalo, obtendremos representaciones del tipo siguiente:



Se evidencia que aunque la resistencia medio pueda ser la misma, la probabilidad de obtener valores bajos, no es la misma en ambas cosas, y por lo tanto la tensión a adoptar también debe ser diferente.

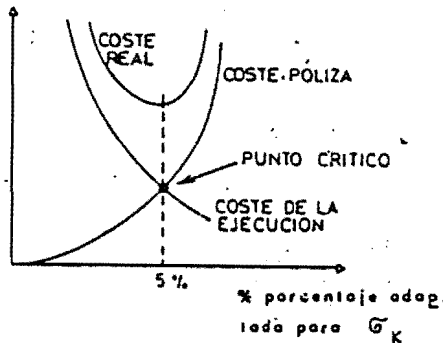
El proceso hoy en día adoptado es considerar que las representaciones de barras pueden asimilarse a una campana de Gauss, correspondiente a la probabilidad de un fenómeno, regido por el azar; y estableciendo según la dispersión existente la curva, se adopta COMO RESISTENCIA CARACTERISTICA AL VALOR QUE SOLO TIENE UNA PROBABILIDAD DEL 5% DE VERSE REBASADO INFERIORMENTE, es decir que si se efectúan cien ensayos estadísticamente lo probable es que solo se produzcan 5 con valores inferiores.



A la resistencia característica se le aplica un coeficiente de seguridad propia del material, que es evidentemente mucho menor que el adoptado cuando se trabaja con el VALOR MEDIO.

El valor del 5% puede lógicamente irse alterando en un futuro y se ha fijado en dicho valor bajo el principio del MINIMO COSTE REAL, entendiéndose como tal la suma del coste de la ejecución de la obra que aumenta al disminuir el posible porcentaje, y el importe de la póliza que cubriese los daños y responsabilidades que se derivasen de un siniestro, el cual disminuye cuando lo hace el mencionado porcentaje.

COSTE



La fórmula que permite establecer la resistencia característica es:

Dados n valores de rotura $G_{R1}, G_{R2}, \dots, G_{Rn}$

Se calcula la media:

$$G_{R_M} = \frac{1}{n} \sum G_{R_i}$$

Se obtiene el valor de la desviación unitaria con respecto al valor media:

$$d_i = \frac{G_{R_i}}{G_{R_M}} - 1 = \frac{G_{R_i} - G_{R_M}}{G_{R_M}}$$

Se entiende por dispersión a:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} (d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2)}$$

Siendo la resistencia característica:

$$G_K = G_{R_M} (1 - 1,64 \delta)$$

La resistencia de cálculo será

$$G_C = \frac{G_K}{\gamma}$$

3ª.- La idea de que las cargas son siempre desfavorables, y que por lo tanto deben estimarse en su máximo valor posible, hace ya mucho tiempo que ha sido superada en el panorama del cálculo de estructuras.

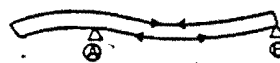
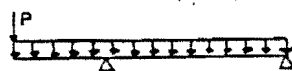
Así, si P es suficientemente pequeño:

Peró si P aumenta ostensiblemente:

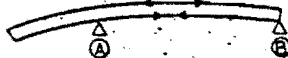
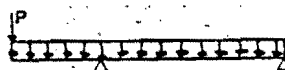
Para el cálculo de la armadura inferior entre A y B que tiene como objeto absorber las tracciones, la existencia de la carga P es favorable, puesto que la mayor sea P , menor es la tracción existente en dicha zona, hasta el punto que pueden producirse una inversión en el signo de la tensión y pasar esta a compresión, lo que nos demuestra que P debería estimarse en su mínima valor cuando se estuviese calculando la mencionada armadura.

Ello conduce a que se prevé que en el futuro del panorama del cálculo estructural, las normativas e instrucciones fijarán dos valores para cada acción: EL VALOR CARACTERÍSTICO SUPERIOR PARA CARGAS DESFAVORABLES Y EL VALOR CARACTERÍSTICO INFERIOR PARA ACCIONES FAVORABLES.

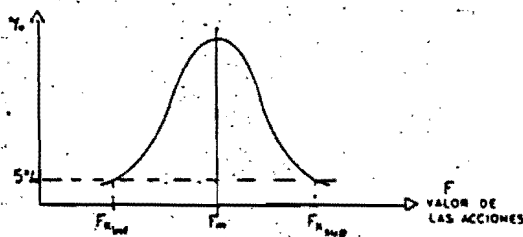
El valor característica superior será aquel para el cual la probabilidad estadística de que sea superado solo es de un 5%, y el característica inferior será para cuando la probabilidad de que el valor real sea menor solo es también del 5%.



(deformado)



(deformado)



La instrucción E.H.-82 establece que en tanto no se fijen los valores característicos superiores, se adoptará:

- ACCIONES FAVORABLES → característico inferior
= 0,9 x valor de la norma (ACCIONES PERMANENTES)
= 0 (ACCIONES VARIABLES)
- ACCIONES DESFAVORABLES → característico superior
= valor de la norma.



Roberto Guerra Fontana

ESTADOS ÚLTIMOS

10.28.

NOMENCLATURA. - No existe uniformidad de criterios en la normativa española, puesto que el símbolo que utilizo la Instrucción M.V. 103 para indicar nos que una acción está mayorada o una resistencia minorada es el asterisco, por lo tanto aparecerán - los símbolos:

G^*
 N^*
 M^*

} M.V. 103

mientras que la Instrucción del Hormigón Armado, de acuerdo con el Comité Europeo del Hormigón, establece el subíndice "d", indicativo de valor para el DISEÑO con que se señala que una acción está mayorada o una resistencia minorada.

r_d
 N_d
 M_d

} E.H.
(Instrucción española del hormigón)