ESTADOS ÚLTIMOS
10. - ESTADOS ÚLTIMOS
EL PROBLEMA DEL ESTADO ÚLTIMO

Se denomina TENSIÓN DE FLUENCIA, la tensión que es preciso aplicar a una probeta solicitada a TRACCION O COMPRESIÓN SIMPLE para que se produzca el inicio de deformaciones plásticas, las cuales se caracterizan por dos hechos diferentes que son:

* Cesada la tensión, se producirán deformaciones remanentes

* Si se mantiene la tensión de fluencia, el material no se opondrá a un incremento de la deformación.

Las peculiaridades indicadas correspondientes a la tensión de fluencia quedan reflejadas en el siguiente diagrama tensión-deformación

Si cesa la tensión $\sigma_f$, en un punto de deformación $\epsilon$, todo el incremento de deformación producido desde que se alcanzó por primera vez la tensión de fluencia ($\sigma_f$), será deformación remanente $\epsilon_r$, por lo que a tensión nula, le corresponderá el punto $O_1$, cuya abscisa es precisamente $\epsilon_r$.

Análogo proceso se produce si la tensión $\sigma_f$ se deja de ejercer, cuando se habrá alcanzado el punto $P_2$.

La tensión de fluencia $\sigma_f$ se asocia por todo lo expuesto, a que la barra ha alcanzado la máxima tensión y, por lo tanto se dice que está colapsada, puesto que no es capaz de colaborar en limitar las deformaciones que se produzcan en el sistema estructural en el que la misma esté integrada, debiéndolo eficazmente otros
elementos que no estén colapsados, caso de que no existan, se dirá que es el conjunto estructural el que está colapsado.

El inicio de las deformaciones plásticas se produce para el siguiente estado tensional.

\[
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\]

MATRIZ DE TENSIONES ASOCIADA A UN ESTADO DE TRACCION O COMPRESION PURA.

Pero si el estado tensional, no corresponde a una compresión o tracción pura, ¿cómo podrá conocerse si se van a producir deformaciones plásticas o no? ¿cómo será posible en función de la matriz de tensiones asociada, saber si se iniciarán dichas deformaciones o no?

\[
\begin{bmatrix}
\sigma_x & \sigma_y & \tau_{zx} \\
\tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\
\tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z
\end{bmatrix}
\]

MATRIZ DE TENSIONES ASOCIADA A UN ESTADO TENSIONAL GENERAL.

Y en caso negativo, determinar que coeficiente \( \gamma \) será preciso multiplicar todos los elementos de la matriz de tensiones para que se produzcan las DEFORMACIONES PLÁSTICAS.

\[
\begin{bmatrix}
\sigma_x & \gamma \tau_{yx} & \gamma \tau_{zx} \\
\gamma \tau_{xy} & \gamma \sigma_y & \gamma \tau_{zy} \\
\gamma \tau_{zx} & \gamma \tau_{zy} & \gamma \sigma_z
\end{bmatrix}
\]

ESTADO TENSIONAL PARA EL CUAL SE INICIARÁN LAS DEFORMACIONES PLÁSTICAS, en cuyo caso, \( \gamma \) será el COEFICIENTE DE SEGURIDAD.

Para que sea posible detectar si el estado tensional corresponde a un régimen elástico o plástico es preciso conocer la causa que motiva el paso de un régimen de deformaciones a otro.

La causa de dicha paso, debe estar presente en el estado tensional:

\[
\begin{bmatrix}
\sigma_x & 0 & 0 \\
0 & \sigma_y & 0 \\
0 & 0 & \sigma_z
\end{bmatrix}
\]

tal como nos demuestra el ensayo de laboratorio correspondiente.
Los factores presentes en el momento de iniciarse las deformaciones plásticas en el citado ensayo de tracción o compresión son:

- Tensión normal: \( \sigma = \frac{G_f}{G_{nf}} \)
- Tensión tangencial: \( \sigma_{\text{max}} = \frac{G_f}{2} \)
- Deformación unitaria: \( \varepsilon_{\text{max}} = \frac{G_f}{E} \)
- Energía de deformación por unidad de volumen:
  - Energía distorsión: \( W_0 = \frac{1+\nu}{3E} G_f^2 \)
  - Energía de deformación causante de alteración de la forma sin variación de volumen:

También existen otros posibles causantes del inicio de tal tipo de deformaciones, como son la energía de deformación causante de alteraciones de volumen sin variación de la forma, la tensión tangencial y normal octaedricas, etc.

Los distintos intentos históricos, han pretendido atribuir, a uno de los citados factores la causa del inicio de la deformación plástica, pero todos ellos, no, consiguen un perfecto ajuste entre la prevención teórica y la realidad experimental, debiéndose interpretar que seguramente no es un factor exclusivamente el que condiciona el problema, sino la conjunción de varios de los factores relacionados debidamente ponderados.

Todos los factores propuestos, pueden evaluarse perfectamente dado un estado tensional genérico, pero en tal caso, serán función de seis variables independientes: \( (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \) lo que dificulta el problema, por lo cual se suele utilizar las tensiones principales, pues de esta forma se reducen a tres las variables independientes, de nuestro problema: \( (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \)
Así pues, el problema se reduce a determinar para qué conjunto de ternas de valores \((\sigma_{10}, \sigma_{40}, \sigma_{20})\) se producen las deformaciones plásticas, y para qué conjunto de ternas \((\sigma_{10}, \sigma_{40}, \sigma_{20})\) se producen deformaciones elásticas.

Una forma tradicional de definir los conjuntos anteriormente citados, es determinar una superficie \(S\) en el espacio \(\sigma_{10}, \sigma_{40}, \sigma_{20}\), tal que los puntos interiores a dicha superficie \(S\) (que lógicamente será cerrada), corresponderán a las deformaciones elásticas, en tanto que los puntos externos corresponderán a estados tensionales en los que se han iniciado como mínimo las deformaciones plásticas.

Para sistemas planos, consideraremos la intersección de esta superficie con el correspondiente plano coordenado, sea por ejemplo, un estado plano \(y_{0}y_{0}\), en cuyo caso:

La superficie rayada representa el conjunto de pares \((\sigma_{10}e_{40})\), para los cuales la deformación es elástica.

Los puntos del contorno corresponderán a los estados tensionales para los cuales se inicia el proceso de la deformación plástica.

Si una vez establecidas las superficies de interacción o curvas de interacción, se desea establecer el coeficiente de seguridad, ello resulta inmediato, puesto que vendrá determinado por el cociente...
P. es el punto que determinan las tensiones principales.

p* se obtiene por intersección de la curva de interacción con la recta que define el origen y el citado punto P.

Veamos a continuación los diversos criterios que históricamente se han propuesto, y las correspondientes superficies de interacción asociadas a cada uno de ellos.

CRITERIO DE RANKINE-LAMÉ.

De forma intuitiva, se tiende asociar el inicio de las deformaciones plásticas con la aparición de la tensión que en el ensayo a compresión o tracción pura las produjo, es decir, relacionar el agotamiento del material con la tensión máxima actuante, lo cual constituye el criterio que se atribuye a Rankine y a Lamé que lo enunciaron por primera vez.

En el caso de un material que se compore igual en el ensayo a compresión que en el de tracción, el diagrama de interacción estará constituido por un cubo.

Todo punto \((G_{x0}, G_{y0}, G_{z0})\) exterior a este cubo, significará que las deformaciones son plásticas, y los interiores definien estados tensionales en régimen elástico.

Pero la experimentación no confirmó este criterio, que se demostró que estados tensionales como el siguiente:

\[
(G_{x0}, G_{y0}, G_{z0}) = (0, 0, G_{y0})
\]
que según RANKINE le correspondía régimen elástico, puesto que la máxima tensión no alcanza la de fluencia, los ensayos demostraron que se producían deformaciones plásticas, lo que descalificaba el criterio de RANKINE-LAMÉ por presentar errores hacia el lado de la inseguridad.

CRITERIO DE SAINT-VENANT.

Barre de Saint-Venant observó que:

TENSIONES PRINCIPALES DE IGUAL SIGNO

La fluencia se inicia para tensiones SUPERIORES a las que prevé el criterio de RANKINE

TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO

La fluencia se inicia para tensiones INFERIORES a las previstas por RANKINE

Saint-Venant atribuyó estas desviaciones a los hechos siguientes:

TENSIONES PRINCIPALES DE IGUAL SIGNO

Se producen DEFORMACIONES UNITARIAS INFERIORES, a las que se generarán cuando cada una de ellas actúa aisladamente

TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO

Se producen DEFORMACIONES UNITARIAS MAYORES, a las que se generarán cuando actúan cada una de ellas de forma aislada.
Esto le sugirió a Barré de Saint-Venant que el factor toma-
do como referencia por RANKINE (la tensión) era inadecuado, y que el condicionante fundamental del problema era la DE-
FORMACION UNITARIA, por lo que las DEFORMACIONES PLÁSTI-
CAS se producen según SAINT-VENANT cuando la máxima de-
formación unitaria alcanza el valor que genera una tracción o compresión pura con tensión normal $t G A$, es decir, cuando se iguala o sobrepasa la deformación unitaria $t G A / E$

Por lo tanto, Saint-Venant propuso:

$$
\begin{bmatrix}
  \varepsilon_{x_0} \\
  \varepsilon_{y_0} \\
  \varepsilon_{z_0}
\end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix}
  1 & -\nu & -\nu \\
  -\nu & 1 & -\nu \\
  -\nu & -\nu & 1
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
  \sigma_{x_0} \\
  \sigma_{y_0} \\
  \sigma_{z_0}
\end{bmatrix}
$$

Si: $\varepsilon_{x_0} \in (-\varepsilon_A, \varepsilon_A)$

Y $\varepsilon_{y_0} \in (-\varepsilon_A, \varepsilon_A)$

Y $\varepsilon_{z_0} \in (-\varepsilon_A, \varepsilon_A)$

LAS DEFORMACIONES SON ELÁSTICAS

en caso contrario, el estado tensional produce deformacio-
nes plásticas

Lo que conduce a un DIAGRAMA DE INTERACCIÓN que
posee la forma de un cubo distorsionado, cuyas coordenadas son:

\[
\begin{align*}
\sigma_1 &= \frac{\sigma_A}{1-2\nu} \\
\sigma_2 &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \sigma_1 \\
\sigma_3 &= \frac{1-3\nu}{1+\nu} \sigma_1
\end{align*}
\]

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>$\sigma_{x_0}$</th>
<th>$\sigma_{y_0}$</th>
<th>$\sigma_{z_0}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>$\sigma_1$</td>
<td>$\sigma_1$</td>
<td>$\sigma_1$</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>$\sigma_2$</td>
<td>$\sigma_2$</td>
<td>$-\sigma_3$</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>$\sigma_3$</td>
<td>$-\sigma_2$</td>
<td>$-\sigma_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>$\sigma_2$</td>
<td>$-\sigma_3$</td>
<td>$\sigma_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>$-\sigma_3$</td>
<td>$\sigma_2$</td>
<td>$\sigma_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>$-\sigma_1$</td>
<td>$\sigma_3$</td>
<td>$-\sigma_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>$-\sigma_1$</td>
<td>$-\sigma_3$</td>
<td>$-\sigma_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>$-\sigma_2$</td>
<td>$-\sigma_2$</td>
<td>$\sigma_3$</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Pese al lógico planteamiento que representa el CRITERIO DE SAINT-VENANT, la experimentación no ha corroborado las previsiones efectuadas por el mismo, puesto que si las tensiones principales son de igual signo, el inicio de las deformaciones plásticas se produce antes que lo previsto por el criterio de Saint-Venant, e igual acontece cuando las tensiones principales son de distinto signo, si bien, en este caso, produce mejores resultados que los establecidos por RANKINE.
CRITERIO DE TRESCA-GUEST

Al observarse que los máximos errores que se producían en el criterio de RANKINE, correspondían al caso de TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO, y que en tales circunstancias es precisamente cuando las tensiones tangenciales son mayores, RANKINE propuso adoptar la tensión tangencial como factor indicativo para la determinación de si se van a iniciar o no las deformaciones plásticas.

En el ensayo de tracción pura, la tensión tangencial que se produce en un plano inclinado a 45° de la dirección del esfuerzo es:

\[ \sigma = \sigma_t / 2 \]

Tresca y Guest propusieron adoptar esta tensión tangencial como la causante del inicio de las deformaciones plásticas, por lo que se la puede denominar TENSIÓN TANGENCIAL DE FLUENCIA.

Puesto que la máxima tensión tangencial que produce un estado tensional, es la máxima semidiferencia entre las tensiones principales, resulta:

\[ \frac{\sigma_t}{2} = \sigma_1 > \text{max} \left\{ \frac{1}{2} | 6\sigma_0 - 6\tau_0 | \right\} \Rightarrow \text{DEFORMACIONES ELÁSTICAS} \]

\[ \sigma_1 > \text{max} \left\{ \frac{1}{2} | 6\sigma_0 - 6\tau_0 | \right\} \Rightarrow \text{DEFORMACIONES ELÁSTICAS} \]

La condición anterior, equivale a seis planos que delimitarán el volumen del DIAGRAMA DE INTERACCIÓN, tal como indicamos en la figura siguiente:
Cuando las tensiones principales son de igual signo, y valores que difieren en menos de $\delta_i$, la tensión tangencial permanece inferior a $\delta_i$, independientemente del valor que presente cada tensión principal considerada aisladamente, lo cual conduce a resultados totalmente desautorizados por la experiencia práctica, en dichos casos, (de tensiones principales de igual signo).

Sin embargo, cuando las tensiones principales son de distinto signo, el criterio de TRESCA-GUEST produce buenos resultados, que si bien poseen alguna desviación respecto a los resultados experimentales, los errores quedan hacia el lado de la seguridad.

Ello ha sugerido una utilización mixta de este criterio, y el criterio de RANKINE, según el siguiente principio clasificadorio:

TENSIONES PRINCIPALES DE IGUAL SIGNO $\Rightarrow$ CRITERIO DE RANKINE

TENSIONES PRINCIPALES DE DISTINTO SIGNO $\Rightarrow$ CRITERIO DE TRESCA-GUEST
Este criterio mixto proporciona resultados excesivamente conservadores, pero presenta la ventaja de que sus errores están siempre hacia el lado de la seguridad.

**CRITERIO DE BELTRAMI-HAIG**

Ante el fracaso de asociar el inicio de las deformaciones plásticas a la tensión, deformación unitaria o a la tensión tangencial, Beltrami y Haig propusieron asociar dicho fenómeno a la ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA O ENERGÍA DE DEFORMACIÓN por unidad de volumen.

Sabemos que:

\[
\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} \left( \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - 2\nu (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) + 2(1+\nu) (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) \right) =
\]

\[
= \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} \left( \dot{\varepsilon}_1^2 - 2(1+\nu) \dot{\varepsilon}_2^2 \right),
\]

si aplicamos las expresiones anteriores, al ensayo de TRACCIÓN o COMPRESIÓN PURA, cuando se ha alcanzado la tensión de fluencia, obtenremos lo que podemos definir como ENERGÍA DE DE-
FORMACIÓN DE FLUENCIA POR UNIDAD DE VOLUMEN, y que será:

\[
\left( \frac{dW}{dV} \right)_f = \frac{G_f}{2E}
\]

Por lo tanto, se producen deformaciones elásticas y no plásticas cuando se verifica:

\[
\left( \frac{dW}{dV} \right)_f > \frac{dW}{dV}
\]

según BELTRAMI-HAIG

Sustituyendo:

\[
\frac{G_f}{2E} > \frac{1}{2E} \left( \frac{\sigma_4^2 - 2(1+\nu) \sigma_2}{\sigma_2} \right)
\]

\[
G_f > \sigma_4^2 - 2(1+\nu) \sigma_2
\]

Dado que la energía de deformación siempre es positiva, ello implica que \( \forall \nu \):

\[
\sigma_4^2 > 2(1+\nu) \sigma_2 \quad \text{como} \quad \nu_{\text{max}} = 0.5
\]

\[
\sigma_4 > \sqrt{3} \sqrt[3]{\sigma_2}
\]

Si adoptamos como ejes de referencia \( \sigma_4, \sqrt[3]{\sigma_2} \), el campo de los posibles valores de los dos invariantes, vendrá delimitado por las dos rectas siguientes:

La inequación que formula el criterio de BELTRAMI-HAIG, puede expresarse de la forma siguiente:

\[
1 > \frac{\sigma_4^2}{G_f^2} - \text{signo} \left( \frac{\sigma_2}{\sqrt{2(1+\nu)}} \right) \frac{\left( \sqrt{3} \sqrt[3]{\sigma_2} \right)^2}{\left( \frac{G_f}{\sqrt{2(1+\nu)}} \right)^2}
\]
Si \( d_2 < 0 \) la inequación anterior define una zona delimitada por una elipse de ecuación:

\[
\lambda = \frac{d_4^2}{6\eta^2} + \frac{(\sqrt{d_2})^2}{\xi_4^2}
\]

si \( d_2 < 0 \)

siendo: \( \xi_4 = \frac{\xi_1}{\sqrt{2(1+y)}} \)

En el caso, de que \( d_2 > 0 \) la curva que delimita la zona que se cumple la inequación es una hipérbola, de ecuación:

\[
\lambda = \frac{d_4^2}{6\eta^2} - \frac{(\sqrt{d_2})^2}{\xi_4^2}
\]

si \( d_2 > 0 \)

Y considerando únicamente la zona en que existen posibles combinaciones \((d_4, \sqrt{d_2})\), el campo de las deformaciones elásticas y plásticas serán:

![Diagrama de la zona elástica y plástica](attachment:image.png)

\[
(\xi_4 = \frac{\xi_1}{\sqrt{2(1+y)}})
\]

![Diagrama de la zona imposible](attachment:image.png)
El coeficiente de seguridad correspondiente a un estado tensional cuyos invariantes \( d_1 \) y \( d_2 \) definen un punto \( P \), es:

\[
\gamma = \frac{\sigma P_2}{\sigma P} = \frac{\sigma_{F1}}{\sigma_{P}} = \sqrt{\frac{\sigma_{F1}}{\sigma_{P}}} = \sqrt{\frac{d_1^2 - 2(1 + \nu)d_2}{d_1^2}}
\]

En el caso de utilizar las tensiones principales, es factible el uso del diagrama de interacción con que hasta ahora se habían separado los estados tensionales que producen deformaciones elásticas, de los que producen deformaciones plásticas, puesto que:

\[
\left( \frac{d\psi}{d\nu} \right)_{F1} > \left( \frac{d\psi}{d\nu} \right)
\]

\[
\frac{\sigma_{F1}^2}{2E} > \frac{1}{2E} \left( \sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2 + \sigma_{z0}^2 - 2\nu(\sigma_{x0}\sigma_{y0} + \sigma_{x0}\sigma_{z0} + \sigma_{y0}\sigma_{z0}) \right)
\]

\[
\Rightarrow \left[ \frac{\sigma_{F1}}{\sigma_{P}} \right]^2 > \sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2 + \sigma_{z0}^2 - 2\nu(\sigma_{x0}\sigma_{y0} + \sigma_{x0}\sigma_{z0} + \sigma_{y0}\sigma_{z0})
\]

\[
1 > (\frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{F1}})^2 + (\frac{\sigma_{y0}}{\sigma_{F1}})^2 + (\frac{\sigma_{z0}}{\sigma_{F1}})^2 - 2\nu (\frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{F1}}\frac{\sigma_{y0}}{\sigma_{F1}} + \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{F1}}\frac{\sigma_{z0}}{\sigma_{F1}} + \frac{\sigma_{y0}}{\sigma_{F1}}\frac{\sigma_{z0}}{\sigma_{F1}})
\]

Lo que corresponde al espacio interior que delimita un elipsode, que se representa en la figura siguiente, en la que se acotan los semiejes principales del mismo.
Para estados planos, la ecuación se reduce a:
\[ \sigma_{xy}^2 > \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - 2 \nu \sigma_{xx} \sigma_{yy} \]

El criterio de Beltrami-Haig es el más exacto de cuantos se han propuesto para estados triples, si bien no se ajusta totalmente a la experimentación, por proporcionar resultados ligeramente hacia el lado de la seguridad cuando las tensiones principales son de igual signo, así, si \( \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \) el punto \( P \) \( (o P') \) límite tendrá un valor
\[ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{3(1-\nu)}} \]
(\( \approx 0.91 \sigma_{xy} \) para \( \nu = 0.3 \))
y en estados planos
\[ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{2(1-\nu)}} \]
(\( \approx 0.85 \sigma_{xy} \) para \( \nu = 0.3 \))
No obstante, las zonas, donde se producen estas desviaciones hacia la seguridad son muy reducidas, coincidiendo en el resto prácticamente con los ensayos de laboratorio.

CRITERIO DE VON-MISES.

Von-Mises propuso descomponer la energía de deformación en dos sumandos, uno que correspondiese a la ALTERACIÓN DE LA FORMA SIN VARIACIÓN DE VOLUMEN, y otro, que fuese la energía utilizada para CAMBIAR EL VOLUMEN sin alteración alguna de la forma, y atribuyó que el fenómeno del inicio de las DEFORMACIONES PLÁSTICAS estaba asociado a la primera de dichas energías.

Si tenemos un estado tensional genérico, tal como el siguiente, podrá descomponerse en dos:

Para que no se produzca variación de forma en 1, es preciso que no actúen tensiones tangenciales, y que todas las tensiones normales sean iguales, las cuales simbolizaremos por \( \sigma_0 \).

En el estado 2, es preciso que la variación de volumen sea cero, lo que precisa que el invariante lineal del tensor de deformación...
ciones sea nulo, y ello implica que el invarianté lineal del tensor de tensiones también lo sea, dada la relación existente entre ambos invariantes, por lo que:

\[ (\sigma_x - \sigma_0 + \sigma_y - \sigma_0 + \sigma_z - \sigma_0) = 0 \implies \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\Delta V}{\rho G_0} \]

La energía de deformación utilizada en la ALTERACION DE VOLUMEN SIN ALTERACION DE FORMA, valdrá:

\[ (\frac{dW}{dV})_{\Delta V} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)) = \frac{1}{2E} (3\sigma_0^2 - 6\nu \sigma_0^2) = \frac{3(1-2\nu)\sigma_0^2}{2E} \]

Sustituyendo \( \sigma_0 \) por \( \frac{\Delta V}{\rho} \), resulta:

\[ (\frac{dW}{dV})_{\Delta V} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \frac{\Delta V}{\rho} = \frac{(1-2\nu) \Delta V}{6E} \]

La energía de deformación necesaria para alterar la forma sin variación de volumen, será:

\[ (\frac{dW}{dV}) = (\frac{dW}{dV})_{\Delta V} + (\frac{dW}{dV})_{\Delta F} = \frac{1}{2E} (\frac{d_4^2 - 2(1+\nu) d_2}{\rho G_0}) \]

\[ \uparrow \quad \text{VARIACIÓN DE VOLUMEN} \quad \text{VARIACIÓN DE FORMA} \quad \text{ENERGÍA DE DEFORMACIÓN TOTAL} \]

\[ (\frac{dW}{dV})_{\Delta F} = \frac{1}{2E} \left( \frac{d_4^2 - 2(1+\nu) d_2}{\rho G_0} \right) - \frac{(1-2\nu) \Delta V}{6E} \]

\[ (\frac{dW}{dV})_{\Delta F} = \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{d_2^2}{3} - d_2 \right) \]

En el ensayo de tracción pura, los invariantes toman los valores siguientes: \( d_4 = \sigma_0 \) \( d_2 = 0 \), lo que implica: 
Por lo que según Von-Mises, la condición de que las deformaciones se mantengan en régimen elástico es:

\[
\left( \frac{dW}{dV} \right)_{\text{af}} > \left( \frac{dW}{dV} \right)_{\text{af}}
\]

\[
\frac{1 + V}{3E} \sigma_{f1}^2 > \frac{1 + V}{E} \left( \frac{3}{3} \right) - d_2
\]

\[
6\sigma_{f1}^2 > 3d_2
\]

CRITERIO DE VON-MISES

Lo cual puede expresarse de la forma siguiente:

1 > \frac{d_2}{6\sigma_{f1}^2} - \text{signo} \left[ d_2 \left( \frac{\sqrt{d_2}}{6\sigma_{f1}/\sqrt{3}} \right)^2 \right]

Si \( d_2 < 0 \), la inecuación anterior se transforma en el recinto que delimita la siguiente elipse y el eje de abscisas.

1 = \frac{d_2^2}{6\sigma_{f1}^2} + \left( \frac{\sqrt{d_2}}{6\sigma_{f1}/\sqrt{3}} \right)^2 \quad \text{si} \quad d_2 < 0

En el caso de que \( d_2 > 0 \), la inecuación expresa el recinto delimitado por el eje de abscisas y la hipérbola de ecuación:

1 = \frac{d_2^2}{6\sigma_{f1}^2} - \left( \frac{\sqrt{d_2}}{6\sigma_{f1}/\sqrt{3}} \right)^2

Las asintotas de la hipérbola anterior son precisamente las rectas que delimitaban la zona de soluciones posibles atendiendo a que la energía de deformación debe ser siempre positiva, esto nos conduce, a que el campo de posibles estados tensionales que producen deformaciones elásticas es el siguiente:
Los invariantes en función de las tensiones principales valen:

\[ d_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \]
\[ d_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x \]

Sustituyendo:

\[ G_{f1}^2 > d_1^2 - 3d_2 \]
\[ G_{f2}^2 > (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)) \]
\[ G_{f3}^2 > \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \]
\[ G_{f4}^2 > \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] \]

**CRITERIO DE VON-MISES**

Lo que es una cuadrática degenerada, un cilindro de sección elíptica de directriz, la bisectriz del primer octante.
La inecuación de Von-Mises, se reduce de la forma siguiente en el caso de estados planos:

$$\gamma_0^2 > \gamma_0^2 + \gamma_0^2 - 2 \gamma_0 \gamma_0$$

**Criterio de Von-Mises para estados planos**

Lo cual corresponde al recinto delimitado por una elipse cuyos ejes de simetría son las bisectrices del 4° cuadrante, y cuyos semiejes principales valen: \( \sqrt{2} \gamma_0 \) y \( \sqrt{3} \gamma_0 \)

Si \( \gamma_0 = \gamma_0 = \gamma_0 \), las deformaciones serían siempre elásticas, según el criterio de Von-Mises, independientemente del módulo de las mismas. El cilindro de Von-Mises es indefinido, tal como ya se detectó en el diagrama de la fig. signo \( \pm \gamma \) \( \sqrt{2} \gamma_0 \) que resultó no cerrado.

Sin embargo, si \( \gamma_0 = 0 \) y \( \gamma_0 = \gamma_0 \), según Von-Mises ello corresponde a un módulo \( \gamma_0 = \gamma_0 = \gamma_0 \), lo que es prácticamente coincidente con la experimentación, y en cualquier caso, más exacto que lo propuesto por Beltrami-Haig, según el cual la tensión correspondiente era \( 0,85 \gamma_0 \).
Este hecho motiva que se suele adoptar para estados planos el criterio de VON-MISES, en tanto que para ESTADOS TRIPLES es conveniente utilizar BELTRAMI-HAIG.

Resumiendo:

| ESTADOS PLANOS | $G_{th}^2 > d_1^2 - 3d_2$ | (Von Mises) |
| ESTADOS TRIPLES | $G_{th}^2 > d_1^2 - 2(1+ν) d_2$ | (Beltrami) |

Es muy frecuente los estados planos de tensión en el análisis estructural, y fundamentalmente en el análisis tensional en barras, por lo que el criterio de Von-Mises resulta de una gran incidencia práctica.

Sabiendo que en un estado plano: $d_1 = S_x + S_y$

$$d_2 = \frac{S_x S_y}{S_y}$$

la condición de Von-Mises puede formularse también en la siguiente forma:

$$G_{th}^2 > (S_x + S_y)^2 - 3(S_x S_y - S_x^2)$$

$$G_{th}^2 > 6x^2 + 6y^2 - 6x y + 3\tau^2$$

condición de VON MISES para ESTADOS PLANOS GENERICOS

Si como es muy frecuente $S_y = 0$, se produce la notable simplificación:

$$G_{th}^2 > S_x^2 + 3\tau^2$$

En el caso de cordones de soldadura:

$$G_{th}^2 > G_n + 1.8 \tau^2$$

SUPERFICIE EFICAZ de un cordón de soldadura.
En interesante, observar que el criterio de Von-Mises ha conducido a la expresión:

$$G_{n}^2 > \frac{1}{2} \left[ (\epsilon_{\text{xx}} - \epsilon_{\text{xy}})^2 + (\epsilon_{\text{yy}} - \epsilon_{\text{xy}})^2 + (\epsilon_{\text{zz}} - \epsilon_{\text{xy}})^2 \right]$$

y que puede demostrarse que si adoptando como ejes de simetría, las DIRECCIONES PRINCIPALES DEL TENSOR DE TENSIONES, y construyamos el siguiente OCTAEDRO, la tensión tangencial y normal que se produzca en cada una de sus caras vale:

$$G_{n} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

$$C_{\text{an}} = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\epsilon_{\text{xx}} - \epsilon_{\text{xy}}\right)^2 + \left(\epsilon_{\text{yy}} - \epsilon_{\text{xy}}\right)^2 + \left(\epsilon_{\text{zz}} - \epsilon_{\text{xy}}\right)^2}$$

tal como puede verificarse fácilmente sabiendo que el vector director asociado a una cualquiera de sus ocho caras, es de la forma: $\mathbf{R} = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Esto conduce a que algunos autores, en vez de exponer el criterio de Von-Mises, como resultado, de limitar la energía de deformación correspondiente al fenómeno de la DISTORSIÓN, para que las deformaciones sean elásticas, limitan la tensión TANGENCIAL OCTAEDRICA, que es la tensión que se producen en las caras del octaedro anteriormente definido, llegando a la conclusión de que:

$$G_{\text{eff}}^2 > \frac{3}{2} C_{\text{oct}}^2$$

criterio de Von-Mises expresado en función de la tensión tangencial octaedricta.
CRITERIO DE MOHR. O MÉTODO DE LA CURVA INTRÍNSEA

Ante el sistemático fracaso de los métodos que pretendían prever el inicio de las deformaciones plásticas, atribuyéndolas a un determinado factor: (tensión, deformaciones unitarias, tensión tangencial, energía de deformación, o energía de distorsión o tensiones tangenciales octaedricas), Mohr propuso prescindir de la determinación del factor causante de dichas deformaciones y establecer de forma gráfica una delimitación entre los estados tensionales que produzcan o no, las citadas deformaciones plásticas.

El diagrama de interacción utilizado anteriormente, presenta el inconveniente para estados triples de su carácter espacial, lo cual Mohr lo obvió utilizando los círculos de su nombre que permiten una plasmación plana de un estado tensional triple.

Mohr propuso dibujar el círculo externo de los tres que reflejan un estado tensional espacial, para aquellos estados en los que se hubiera detectado experimentalmente que correspondían al inicio de las deformaciones de fluencia. Generalmente solo pueden detectarse experimentalmente el inicio de la plasticidad con ensayos muy simples, como el de comersión pura, tracción pura y en algunas instalaciones contrapura pura, lo que proporciona tres círculos de Mohr como máximo.

Dibujados los círculos externos correspondientes a diversos estados límites, Mohr estableció la hipótesis verificada posteriormente, de que los mismos debían ser tangentes a una cierta CURVA que denominó INTRÍNSECA, que envolvería a todos los círculos de Mohr correspondientes a estados tensionales que produjeran deformaciones elásticas, en tanto que todo círculo que cortase a la citada curva, le corresponderían deformaciones plásticas.
En el caso, de que solo se disponga de dos círculos límites, las correspondientes a los ensayos de compresión y tracción pura, el criterio de Mohr es equivalente a la utilización conjunta del criterio de Tresca-Guest y Rankine.

El método de la curva intrínseca es muy utilizado en mecánica de suelos, motivo por el cual ha sido expuesto.
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE SEGURIDAD DESEABLE

En el estudio del problema del Estado Último se han establecido criterios suficientemente exactos, para que conocido un estado tensional y la tensión de fluencia o de rotura, pueda calcularse cuál es el coeficiente de seguridad real existente.

Ahora vamos a indicar, cuáles son los criterios utilizados para fijar el coeficiente de seguridad deseable.

El cálculo estructural está sufriendo una evolución apreciable en el intento de establecer los valores de las acciones y de las tensiones de los materiales, de forma que de ello resulte un grado de seguridad determinado previamente.

En un principio el método seguido fue el de obtener experimentalmente la tensión de rotura como medio aritmético de los diversos ensayos realizados y el valor obtenido dividirlo por un coeficiente de seguridad según el tipo de material, tomando generalmente valores comprendidos entre 2 y 3, y la tensión así calculada se la denomina Tensión Admisible, debiendo el calculista controlar que en ningún punto de la estructura este valor se superará.

Para las acciones se adoptó el valor máximo —previsible sin coeficiente de seguridad, puesto que esto ya se había introducido en el cálculo de la tensión admisible del material.

El cálculo estructural actual tiende a alterar en varios puntos el procedimiento expuesto, y que se pueden resumir así:

19. COEFICIENTE DE SEGURIDAD DIFERENCIADO PARA LA ESTIMACIÓN DE RESISTENCIAS DE LOS MATERIALES Y DE LAS ACCIONES

En el caso de elementos estructurales homogéneos como el acero, es equivalente introducir un solo coeficiente de seguridad general , o el menor de los valores del material con un coeficiente y mayorar los valores con otro , con tal que

Para los elementos estructurales heterogéneos como es el hormigón, sí considerar un coeficiente de seguridad para las acciones, y dos coeficientes de seguridad y que midan respectivamente acero y hormigón permite un cálculo más realista que con el coeficiente de seguridad único.
El diferenciator coeficientes de seguridad para acciones y para materiales, permite que estos últimos se ajusten según el grado de control que se ejerce en los materiales, mientras que el de las acciones depende del grado de supervisión que se efectúe sobre el proceso constructivo en general, según que en caso de siniestro afecte a la seguridad de personas o sólo se deriven daños materiales.

28. — La forma de establecer la RESISTENCIA COMO MEDIANA ARITMÉTICA SE SUSTITUYE POR UN VALOR CARACTERÍSTICO QUE CORRESPONDE A UN CONCEPTO ESTADÍSTICO.

Si un material al someterlo a rotura observamos que siempre proporciona resultados muy similares, es lógico que pensamos que la probabilidad de que un nuevo probeta tenga una resistencia mucho más baja es mínima, o sea que si los resultados experimentales nos dan un resultado que la probabilidad de que se produzca un valor más bajo aumenta sensiblemente.

Si en un eje de abscisas representamos intervalos de resistencia del material (por ejemplo de 250 Kg/cm²) o 275 Kg/cm²) y en un eje de ordenadas el porcentaje de ensayos a rotura que nos han proporcionado resultados del correspondiente intervalo, obtenemos representaciones del tipo siguiente:

Se evidencia que aunque la resistencia media pueda ser la misma, la probabilidad de obtener valores bajos no es la misma en ambos casos, y por lo tanto la tensión a adoptar también debe ser diferente.

El proceso hoy en día adoptado es considerar que las representaciones de barras pueden asemejarse a una campana de Gauss, correspondiente a la probabilidad de un fenómeno, regida por el azar; y estableciendo según la dispersión existente la curva, se adopta COMO RESISTENCIA CARACTERÍSTICA AL VALOR QUE SOLO TIENE UNA PROBABILIDAD DEL 5% DE VERSE REBASADO INFERIORMENTE, es decir que si se efectuaron cien ensayos estadísticamente la probabilidad es que solo se produjeran 5 con valores inferiores.

A la resistencia característica se le aplica un coeficiente de seguridad propio del material, que es evidentemente mucho menor que el adoptado cuando se trabaja con el VALOR MEDIO.

El valor del 5% puede lógicamente irse alterando en un futuro y no hablíado en dicho valor bajo el principio del MINIMO COSTE REAL, entendiendo como tal la suma del costo de la ejecución de la obra que aumenta al disminuir el posible porcentaje, y el impuesto de la póliza que cubrícula los daños y responsabilidades que se derivan de un siniestro, el cual disminuye cuando lo hace el mencionado porcentaje.
La fórmula que permite establecer la resistencia característica es:

Dado n valores de rango:

\[ G_1, G_2, \ldots, G_n \]

Se calcula la media:

\[ G_m = \frac{1}{n} \sum G_i \]

Se obtiene el valor de la desviación unitaria con respecto a la media:

\[ d_i = \frac{G_i - G_m}{G_m} \]

Se entiende por dispersión al:

\[ \delta = \sqrt{\frac{1}{n} (d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2)} \]

Siendo la resistencia característica:

\[ G = G_m (1 - 1.64 \delta) \]

La resistencia de cálculo será:

\[ G_C = \frac{G}{k} \]

3º.- La idea de que los cargos son siempre desfavorables, y que por lo tanto deben estimarse en su máximo valor posible, hace ya mucho tiempo que ha sido superada en el panorama del cálculo de estructuras.

Así, si P es suficientemente pequeño:

Para el cálculo de la armadura inferior entre A y B que tiene como objeto absorber las tracciones, la existencia de la carga P es favorable, puesto que en mayor se pone mayor es la tracción existente en dicha zona, hasta el punto que se puede producir una inversión en el signo de la tensión y pasar esto a compresión, la que nos demuestra que P debería estar en su mínimo valor cuando se estuviese calculando lo mencionado armadura.

Ello conduce a que se prevea que en el futuro del panorama del cálculo estructural, las normativas e instrucciones llamarán dos valores para cada acción: EL VALOR CARACTERÍSTICO SUPERIOR PARA CARGAS DESFAVORABLES Y EL VALOR CARACTERÍSTICO INFERIOR PARA ACCIONES FAVORABLES.

El valor característico superior será aquel para el cual la probabilidad estadística de que sea superado solo es de un 5%, y el característico inferior será para cuando la probabilidad de que el valor real sea menor solo es también del 5%.

La instrucción E.H.-82 establece que en tanto no se fijen los valores característicos superiores, se adoptará:

- ACCIONES FAVORABLES ➔ característico inferior ➔ 0.9 x valor de la norma (ACCIONES PERMANENTES)
- ACCIONES DESFAVORABLES ➔ característico superior ➔ valor de la norma (ACCIONES VARIABLES)
NOMENCLATURA.- No existe uniformidad de criterios en la normativa española, puesto que el símbolo que utiliza la instrucción M.V.103 para indicarnos que una acción está mayorada a una resistencia minorada es el asterisco, por lo tanto aparecerán los símbolos:

$$G^* 
N^* 
M^* \rightleftharpoons M.V. 103$$

mientras que la Instrucción del Hormigón Armado, de acuerdo con el Comité Europeo del Hormigón, establece el subíndice “d”, indicativo de valor para el DISEÑO con que se señala que una acción está mayorada o una resistencia minorada.

$$f_d 
N_d 
M_d \rightleftharpoons E.H. 
(Instrucción española del hormigón)$$