

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEOREMA DE CASTIGLIANO

FÓRMULA DE CLAPEYRON

TEOREMA DE KIRCHHOFF

TEOREMA DE RECIPROCIDAD DE BETTI-MAXWELL

**Teorema del Mínimo
o de Menabrea**

MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA
DE MOHR – MAXWELL

9

TEOREMAS ENERGÉTICOS



Roberto Guerra Fontana

9. TEOREMAS ENERGÉTICOS



9.1. PROCESO ENERGÉTICO DE LA DEFORMACIÓN Y FÓRMULA DE CLAPEYRON

En un cuerpo elástico, cuando inciden sobre el mismo un conjunto de acciones exteriores P_1, P_2, \dots, P_n , se producen deformaciones que ocasionan el corrimiento de los puntos de aplicación de las citadas acciones, y que simbolizaremos por $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, y en consecuencia se producirá un trabajo.

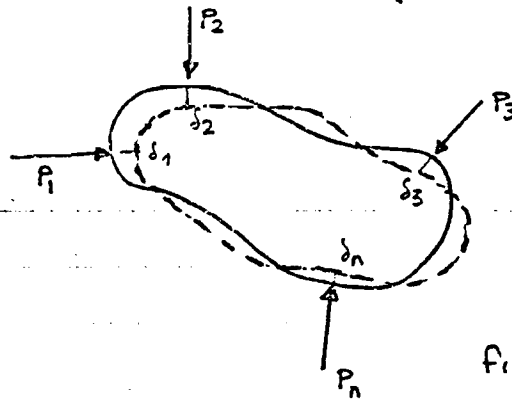


Fig. 9.1.1.

Este trabajo genera una energía que se utilizará en la deformación de cada uno de los elementos diferenciales que constituyen el sólido.

Una parte de dicha energía se utiliza para incrementar la temperatura del sólido, tal como estudió Lord Kelvin, si bien, dado el insignificante valor relativo de la energía utilizada en este fenómeno, hace que se omita su consideración en la teoría que vamos a desarrollar.

Por lo tanto, podremos establecer la igualdad entre el TRABAJO EXTERNO que efectuarán las fuerzas exteriores y la ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN, cometiendo con ello un error insignificante.

Las acciones no se aplican jamás de forma instantánea, y sólo alcanzan sus valores definitivos de forma gradual o paulatina.

Simbolicemos con asteriscos los valores finales de la acción y de la deformación, y sin los mismos representaremos los valores existentes en un momento intermedio del proceso de la deformación.

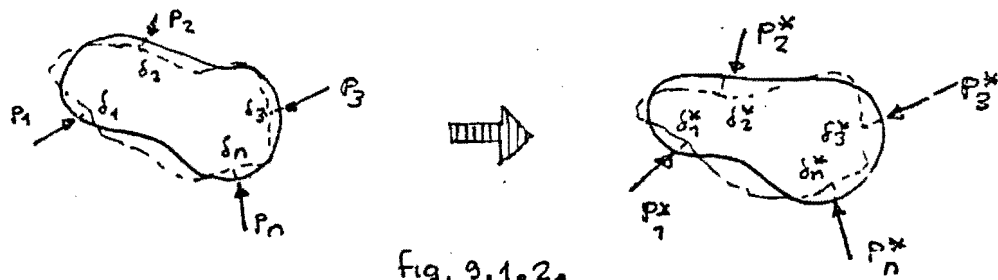


Fig. 9.1.2.

Si todas las acciones P_i se incrementan en la misma proporción, en un instante determinado se verificará:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{P_1}{P_1^*} = \frac{P_2}{P_2^*} = \dots = \frac{P_i}{P_i^*} \\ \beta &= \frac{\delta_1}{\delta_1^*} = \frac{\delta_2}{\delta_2^*} = \dots = \frac{\delta_i}{\delta_i^*} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} P_i = \alpha P_i^* \\ \delta_i = \beta \delta_i^* \end{cases}$$

Los coeficientes α y β variarán entre 0 y 1, teniendo un valor distinto para cada instante intermedio del proceso de carga.

$$\alpha \in (0, 1) \quad \beta \in (0, 1)$$

Si no existe linealidad, por no verificarse el principio de la pequeñez de las deformaciones, o por no ser constantes los módulos elásticos del material, o por otras posibles circunstancias que ya estudiaremos, la gráfica α, β no será rectilínea tal como se indica en la Fig. 9.1.3.

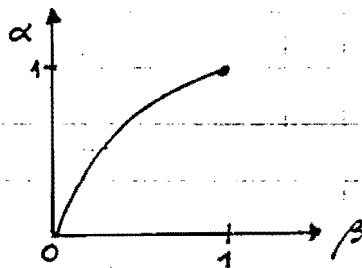


Fig 9.1.3.

Para una comprensión más intuitiva, imaginemos una viga a la que se aplican dos fuerzas puntuales, cuyos valores finales serán P_1^* y P_2^* .

En dos instantes consecutivos, el valor de los coeficientes se incrementarán en $d\alpha$ y $d\beta$, es decir, pasarán de α, β a

$\alpha + d\alpha$ y $\beta + d\beta$, lo que implica lo que se representa en la fig. 9.1.4.

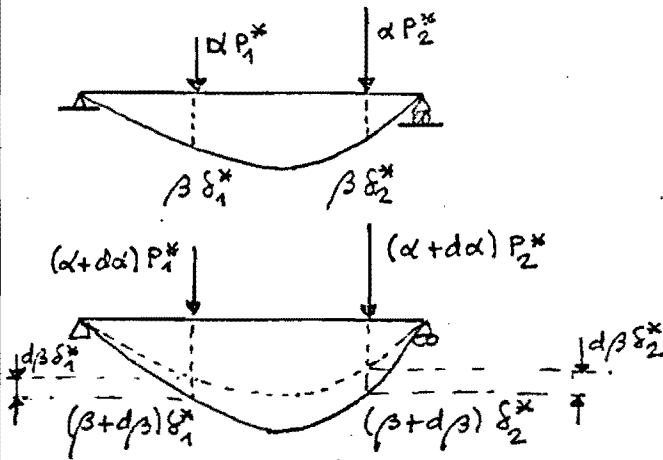


fig 9.1.4.

En ese intervalo diferencial de tiempo se producirá un diferencial del TRABAJO EXTERNO, puesto que la elástica ha variado de forma, con desplazamientos adicionales diferenciales, así pues:

$$dW = (\alpha P_1^*) (d\beta \delta_1^*) + (\alpha P_2^*) (d\beta \delta_2^*)$$

El incremento diferencial de trabajo lo efectúan las acciones existentes en dicho instante αP_i^* , por el desplazamiento adicional $d\beta \cdot \delta_i^*$. La carga adicional que es diferencial $d\alpha P_i^*$ generará también un cierto trabajo, pero el mismo es despreciable por generar términos infinitesimales de orden superior $\underbrace{d\alpha P_i^*}_{\text{de orden superior}} \underbrace{d\beta \delta_i^*}_{\text{de orden superior}} \cdot k$

Por lo tanto, generalizando:

$$dW = \alpha d\beta \sum P_i^* \delta_i^*$$

Observese que el factor $\sum P_i^* \delta_i^*$ es constante, pues lo determinan los valores finales de las acciones y de los desplazamientos definitivos que aquellas generan.

El trabajo final, será:

$$W = \sum P_i^* \delta_i^* \int_0^1 \alpha d\beta$$

La integral expresa el área de la gráfica α - β , que podemos simbolizar por Ω , así pues:

$$W = \Omega \cdot \sum P_i^* \delta_i^* \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{W}{\sum P_i^* \delta_i^*}$$

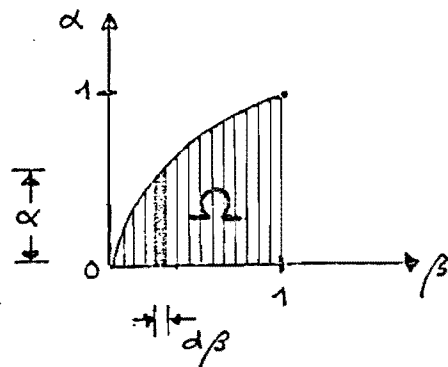


Fig. 9.1.5.

Luego el área Ω expresa la razón entre el TRABAJO EXTERIOR REAL y el que producirían las cargas P_i^* si con valor constante se desplazaran δ_i^*

Engesser definió el concepto de ENERGIA COMPLEMENTARIA DE DEFORMACIÓN y que presenta interés en procesos no lineales, así como para la aplicación de los principios variacionales que utilizan las técnicas de análisis más modernas.

La energía complementaria de deformación se define mediante el producto:

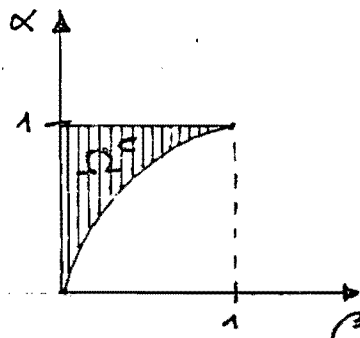


Fig. 9.1.6.

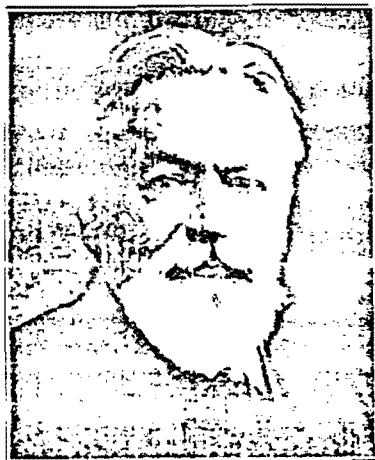
$$W^c = \Omega^c \cdot \sum P_i^* \delta_i^*$$

Donde Ω^c representa el área complementaria de Ω en el cuadrado de 1×1 , por lo que:

$$\Omega^c = 1 - \Omega$$



$$W^c = (1 - \Omega) \cdot \sum P_i^* \delta_i^*$$



Friedrich Engesser

Si el proceso de la deformación es perfectamente lineal, la gráfica $\beta\alpha$ es la indicada en la Fig. 9.1.7, y en consecuencia $\Omega = \Omega^c = 0.5$, y por lo tanto:

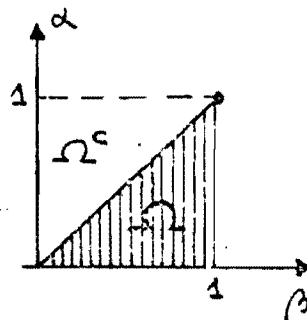


Fig. 9.1.7

$$W = \frac{1}{2} \sum P_i^* \delta_i^*$$

$$W^c = W$$

(9.1.10)
FORMULA DE
CLAPEYRON



9.2. FÓRMULA DE CLAPEYRON GENERALIZADA A TENSIONES Y CORRIMIENTOS DEL CONTORNO EXTERIOR

En cada punto de la superficie del CONTORNO EXTERIOR DE UN SÓLIDO se ejerce una presión o TENSION exterior, y unos corrimientos debido al proceso de la deformación que afecta no sólo a dichos puntos, sino a todo punto del sólido como ya sabemos.

Las tensiones exteriores aplicadas a elementos superficiales producirán fuerzas, a las que podremos aplicar la fórmula de Clapeyron (9.1.10), y en consecuencia deducir el TRABAJO EXTERNO que realizarán las tensiones exteriores actuantes en el contorno. En efecto, en cada diferencial ds de la superficie del contorno podremos establecer:

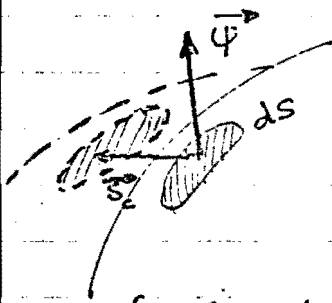


Fig. 9.2.0.1.

$\vec{\Psi}$ (Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z) tensión exterior
 \vec{S} (u, v, w) vector corrimiento

Descomponiendo el problema en las componentes según cada uno de los ejes de referencia, a fin de que sean

colineales las fuerzas y los corrimientos, tal como se ha supuesto en (9.1.10), obtendremos:

$$dW = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot \vec{\Psi} ds$$

$$dW = \frac{1}{2} u \Psi_x ds + \frac{1}{2} v \Psi_y ds + \frac{1}{2} w \Psi_z ds$$

(supuesto que el sistema de referencia es ortogonal)

Integrando:

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\Psi_x u + \Psi_y v + \Psi_z w) ds$$

(9.2.10)

9.3. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN INTERNA

La energía que liberan las fuerzas exteriores al desplazarse como consecuencia de la deformación los puntos de aplicación, se utilizará en deformar cada elemento diferencial de volumen.

Si un elemento diferencial se ve sometido a una tensión σ_x , el alargamiento que se producirá será:

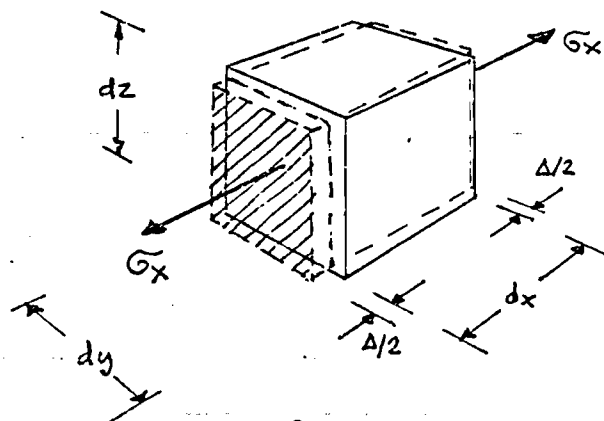


Fig. 9.3.1.0

$$\Delta = \epsilon_x \cdot dx$$

La fuerza exterior que genera σ_x , es:

$$F_x = \sigma_x \, dy \, dz$$

Aplicando la fórmula de Clapeyron:

$$dU = \frac{1}{2} F_x \Delta = \frac{1}{2} (\sigma_x \, dy \, dz) \cdot (\epsilon_x \, dx)$$



$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \, dx \, dy \, dz$$



$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \, dV$$

Si existen simultáneamente σ_x , σ_y y σ_z , según el principio de superposición se verificará:

$$dU = \frac{1}{2} dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z) \quad (9.3.1.0)$$

Analicemos ahora, la energía de deformación que consumen las tensiones tangenciales en producir cizalladuras en el elemento di-



ferencial,

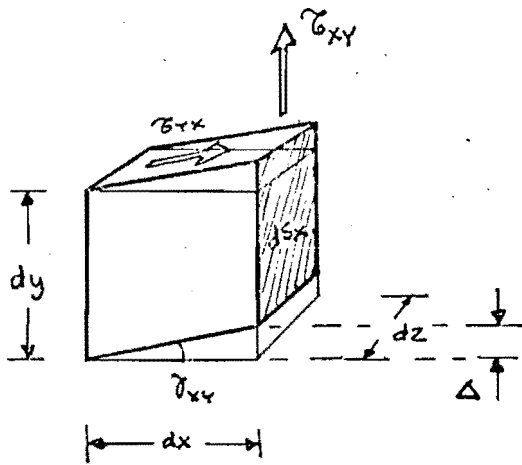


Fig. 9.3.2.

Si fijamos e inmovilizamos una de las caras dS_x , la otra sufrirá un desplazamiento Δ de valor:

$$\Delta = dx \gamma_{xy}$$

Las fuerzas exteriores que actúan en las caras dS_x , es de:

$$dF_y = dS_x \cdot \tau_{xy} = dy dz \tau_{xy}$$

Y según Clapeyron:

$$dU = \frac{1}{2} \Delta \cdot dF_y = \frac{1}{2} (dx \cdot \gamma_{xy}) (dy dz \tau_{xy})$$

$$\boxed{dU = \frac{1}{2} dV \cdot \gamma_{xy} \tau_{xy}}$$

Si existen tensiones tangenciales en todas las caras:

$$\boxed{dU = \frac{dV}{2} (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{yz} \gamma_{yz})} \quad (9.3.2)$$

Si simultáneamente actúan tensiones normales y tangenciales la expresión de la ENERGÍA DE DEFORMACIÓN INTERNA, es:

$$dU = \frac{dV}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (9.3.3)$$

Si convenimos que el signo: \star corresponde a la siguiente operación entre matrices, que queda definida mediante el ejemplo que a continuación indicamos, podrá ser factible expresar (9.3.3.) tal como se indica en (9.3.5.)

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22}} \quad (9.3.4)$$



$$dU = \frac{dV}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \delta_{xy} & \frac{1}{2} \delta_{zx} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \delta_{yz} \\ \frac{1}{2} \delta_{zx} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (9.3.5.)$$

$$dU = \frac{dV}{2} [T_T] * [T_D] \quad (9.3.6.)$$

Sustituyendo $[T_D]$ por la expresión tensorial de Hooke

$$[T_D] = \frac{1+\nu}{E} [T_T] - \frac{\nu}{E} d_1^T [I] \quad \begin{matrix} (d_1^T = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ ([I] \text{ MATRIZ UNIDAD}) \end{matrix}$$

$$dU = \frac{dV}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} [T_T] * [T_T] - \frac{\nu}{E} d_1^T [T_T] * [I] \right)$$

$$dU = \frac{dV}{2E} \left((1+\nu) [T_T] * [T_T] - \nu d_1^T [T_T] * [I] \right) \quad (9.3.7.)$$

Desarrollando:

$$dU = \frac{dV}{2E} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1+\nu)(\delta_{xy}^2 + \delta_{zx}^2 + \delta_{yz}^2) \right)$$

(9.3.8.)

OPCIONAL

9.4. IGUALDAD ENTRE EL TRABAJO EXTERNO Y LA ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN

Si el trabajo externo, le sumamos el trabajo que efectúan las fuerzas másicas por los corrimientos u, v, w , debe coincidir con la energía interna de deformación, por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S (\psi_x u + \psi_y v + \psi_z w) ds + \frac{1}{2} \int_V (u p_x + v p_y + w p_z) dV = \\ & = \frac{1}{2E} \int_V \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1+\nu)(\delta_{xy}^2 + \delta_{zx}^2 + \delta_{yz}^2) \right) dV \end{aligned}$$

Generalmente se desprecia el término correspondiente a \vec{p} . (9.4.1a)



OPCIONAL

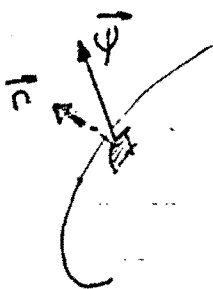
La igualdad anterior también puede deducirse, de la siguiente forma.

Sabemos que el trabajo de las fuerzas superficiales que se ejercen exteriormente sobre el contorno, viene determinado por:

$$W = \frac{1}{2} \int_S [s_c]^T [\phi] ds \quad \text{siendo: } [s_c] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix}$$

Aplicando el tensor de tensiones, se debe verificar:



$$[\psi] = [\sigma] [n] \quad ([T_r] = [\sigma] \text{ en base ortogonal})$$

Consecuentemente:

$$W = \frac{1}{2} \int_S [s_c]^T [\sigma] [n] ds \quad \vec{n} ds \equiv (dy dz, dx dz, dx dy)$$

Fig 9.4.1.

$$W = \frac{1}{2} \int_S [u \ v \ w] \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy dz \\ dx dz \\ dx dy \end{bmatrix}$$

Aplicando Ostrogradsky o Gauss:

$$W = \frac{1}{2} \int_V [u \ v \ w] [\sigma] [\nabla] dV \quad (9.4.2.)$$

Recordando el significado que se concedió al operador matricial $*$, se puede verificar que (9.4.2.), equivale a:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} + [u \ v \ w] \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$



OPCIONAL

Simbólicamente:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left([\Omega] * [\sigma] + [s_c]^T ([\sigma][\Delta]) \right) dV \quad \left. \vphantom{W} \right\} \\ \text{Como: } [\sigma][\Delta] + [\rho] = [0]$$

Resulta:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left([\Omega] * [\sigma] + [s_c]^T (-[\rho]) \right) dV$$

Si simbolizamos por U la primera parte de la integral, que representará LA ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN, resultará finalmente:

$$W + \frac{1}{2} \int_V [s_c]^T [\rho] = \frac{1}{2} \int_V [\Omega] * [\sigma] dV = U$$

$$W + \frac{1}{2} \int_V [s_c]^T [\rho] = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{2} ([\Omega] + [\Omega]^T) * [\sigma] dV$$

$$W + \frac{1}{2} \int_V [s_c]^T [\rho] = \frac{1}{2} \int_V [\tau_0] * [\tau_r] dV \quad \begin{cases} \frac{1}{2} ([\Omega] + [\Omega]^T) = [\tau_0] \\ [\sigma] = [\tau_r] \end{cases}$$

Naturalmente, desarrollando y operando alcanzamos nuevamente (8.4.10). En efecto:

$$\frac{1}{2} \int_S [s_c]^T [\psi] ds + \frac{1}{2} \int_V [s_c]^T [\rho] = \frac{1}{2} \int_V [\tau_r] * \left(\frac{1+\nu}{E} [\tau_r] - \frac{\nu}{E} \Delta^T [I] \right) dV$$

$$\frac{1}{2} \int_S [u \ v \ w] \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix} ds + \frac{1}{2} \int_V [u \ v \ w] \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} dV =$$

$$= \frac{1}{2E} \int_V \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right) dV$$

tal como se quería volver a demostrar.



OPCIONAL

9.5. ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES

La energía potencial elástica o energía interna de deformación, puede también expresarse en función de los INVARIANTES del tensor de tensiones

Sabemos que:

$$d_1^T = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$d_2^T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2$$



$$d_1^{T^2} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x \sigma_y + 2\sigma_x \sigma_z + 2\sigma_y \sigma_z$$

Simbolizando: $\alpha = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z$

$$d_1^{T^2} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\alpha$$



$$\begin{cases} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = d_1^{T^2} - 2\alpha \\ \tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2 = \alpha - d_2^T \\ \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z = \alpha \end{cases}$$



$$U = \frac{1}{2E} \int_V (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2)) dV$$

$$U = \frac{1}{2E} \int_V (d_1^{T^2} - 2\alpha - 2\nu(\alpha) + 2(1+\nu)(\alpha - d_2^T)) dV$$

$$U = \frac{1}{2E} \int_V (d_1^{T^2} - d_2^T(1+\nu)2) dV \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{d_1^{T^2}}{E} - \frac{d_2^T}{G_T} \right) dV} \quad (9.5.1)$$

Lo que nos demuestra el CARACTER INVARIANTE respecto al sistema de referencia de la ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN, lo que así debía ser lógicamente atendiendo al concepto físico que representa.



OPCIONAL

9.6. UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO.
TEOREMA DE KIRCHHOFF.

La expresión de la energía interna de deformación es siempre positiva, ya que si adoptamos los ejes principales del tensor de tensiones, la expresión se reduce a:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z))$$

Dado que: $\nu \leq 0.5$, se verificará:

$$2E \frac{dU}{dV} \geq \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \quad (9.6.10)$$

Vamos a demostrar que el miembro derecho de la igualdad (9.6.10) es siempre positivo, ya que:

$$\Downarrow$$

$$2\sigma_x^2 + 2\sigma_y^2 + 2\sigma_z^2 - 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y) + (\sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_x\sigma_z) + (\sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_y\sigma_z) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \geq 0 \quad \text{lo que evidentemente es cierto.}$$

Kirchhoff basándose en la conclusión anterior, demostró la unicidad del problema elástico, para ello razonó de la forma siguiente:

Supongamos que unas ciertas leyes de las tensiones son solución del problema elástico:

$$\sigma_x = f_1(x, y, z)$$

$$\tau_{xy} = f_4(x, y, z)$$

$$\sigma_y = f_2(x, y, z)$$

$$\tau_{yz} = f_5(x, y, z)$$

$$\sigma_z = f_3(x, y, z)$$

$$\tau_{xz} = f_6(x, y, z)$$

Ello significará que el conjunto indicado de tensiones, las tensiones superficiales aplicadas al contorno, y las fuerzas másicas ex-



OPCIONAL

tentes en todo el recinto, deben verificar las:

- * ECUACIONES DE CONTORNO
- * ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO INTERNO
- * ECUACIONES DIFERENCIALES DE COMPATIBILIDAD

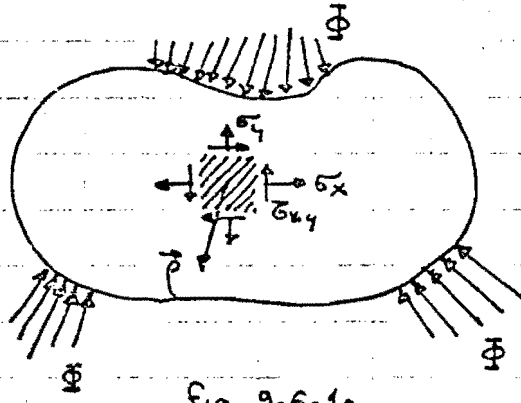


Fig. 9.6.1o

ESTADO-1



Gustav Robert Kirchhoff

Kirchhoff planteo, que en el caso de que existiere otro estado tensional $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \sigma'_{xy}, \sigma'_{zx}, \sigma'_{yz}$ que también verificasen el triple grupo de ecuaciones fundamentales, implicará que el conjunto tensional diferencia (ESTADO-3), sea solución de un problema elástico carente de tensiones exteriores superficiales de contorno y con fuerzas másicas inexistentes.

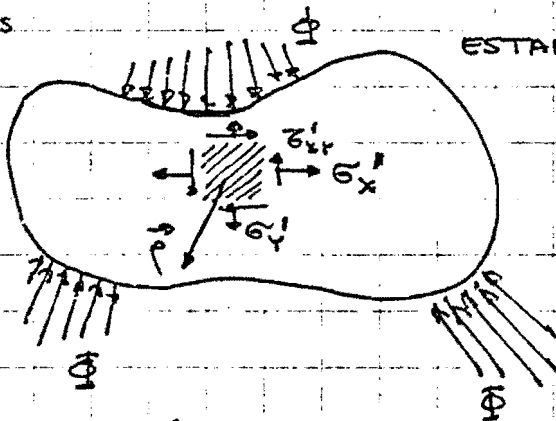


Fig. 9.6.2o

ESTADO-2

Si las deformaciones son suficientemente pequeñas se verificará el principio de linealidad, y en consecuencia el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

(ESTADO-1) - (ESTADO-2) = (ESTADO-3), ello implica que el citado estado será:

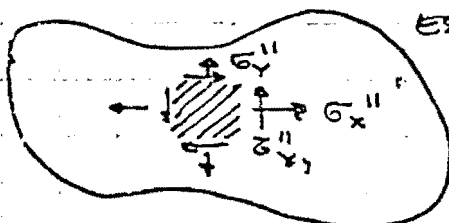


Fig. 9.6.3o

ESTADO-3

$$\sigma''_i = \sigma_i - \sigma'_i$$

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma'_{ij}$$



OPCIONAL

Las tensiones de contorno $\vec{\Phi}$ y las fuerzas másicas \vec{p} al ser iguales las de los ESTADO-1 y 2, implica la nulidad de las mismas en el estado-3.

Kirchhoff razonó que al no existir dichas acciones, la energía interna de deformación debe serlo, ya que según (9.4.1) se cumplirá:

$$\frac{1}{2} \int_S (\varphi_x u + \varphi_y v + \varphi_z w) ds + \frac{1}{2} \int_V (u p_x + v p_y + w p_z) dV = 0 =$$

$$= \frac{1}{2E} \int (\sigma_x''^2 + \sigma_y''^2 + \sigma_z''^2 - 2\nu(\sigma_x'' \sigma_y'' + \sigma_x'' \sigma_z'' + \sigma_y'' \sigma_z'') + 2(1+\nu)(\tau_{xy}''^2 + \tau_{yz}''^2 + \tau_{zx}''^2))$$

Pero como dicha integral será siempre positiva, si son no nulas las funciones σ_i'' y τ_{ij}'' , para que la misma sea cero, como exige el ESTADO-3, es preciso que:

$$\sigma_i'' = 0 \quad \forall i$$

$$\tau_{ij}'' = 0 \quad \forall i, \forall j$$

y ello implica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \sigma_i' \quad \forall i \\ \tau_{ij} = \tau_{ij}' \quad \forall i, \forall j \end{array} \right.$$

por lo que la SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELASTICO en estados lineales es UNICA.

Kirchhoff hizo sus aportaciones máximas a la teoría de la ELASTICIDAD, como discípulo de Neumann, en los famosos seminarios que este organizaba en la Universidad de Königsberg, en el periodo de 1845-1847, si bien fueron publicadas a petición de su maestro en 1850.

En la citada publicación expuso la UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO, como parte de su estudio de placas



OPCIONAL

Kirchhoff estableció los PRINCIPIOS BÁSICOS sobre los que se fundamenta hoy en día el cálculo de láminas por medio de la teoría de la Elasticidad, si bien los expuso para PLACAS.

Dichos principios son:

* Cada fibra transversal es:

- rectilínea

- perpendicular al plano medio de la placa

* Los elementos situados sobre el plano medio, no sufre acortamientos ni alargamientos en cualquiera de las direcciones contenidas en el citado plano.

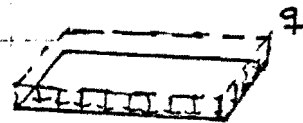
Utilizando los principios anteriores, relacionó las tensiones longitudinales o de direcciones paralelas al plano medio con los corrimientos normales al mismo $(\sigma_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$

Sustituyendo las tensiones por las funciones que las determinan en relación con el corrimiento, dedujo Kirchhoff la energía de deformación elástica de la placa, la cual es:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

De lo que dedujo, imponiendo la igualdad entre el trabajo externo y el interno, por medio de la igualdad:

$$\iint q w dx dy = U$$

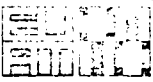


el que:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

que es la ecuación diferencial de la placa

Efectuó otra importante contribución que fue la ANALOGIA DINÁMICA para BARRAS DELGADAS.



OPCIONAL

Gustav Robert Kirchhoff, nació en Königsberg (Prusia), el 12 de Marzo de 1824, ingresando en 1842 en la Universidad de su ciudad natal.

Fue uno de los alumnos de Neumann, que vivió el sistema de seminarios que el citado profesor organizaba en la indicada Universidad destacando en los mismos, lo que originó un informe de Neumann dirigido al secretario de Educación Nacional, en el que se presentaba a Kirchhoff como una promesa de la Ciencia.

Después de su graduación como doctor, ingreso como profesor de la Universidad de Berlin, siendo más tarde contratado por la de Breslau como profesor asociado, y posteriormente en 1855 como catedrático de la Universidad de Heidelberg, en donde junto a Bunsen, y Helmholtz emprendieron estudios fundamentales como el del análisis espectroscópico de la luz que emiten diversas sustancias, lo que conduciría entre otras cosas, al descubrimiento del elemento químico, el Cesio el 10 de mayo de 1860 y un año después el Rubidio. A Kirchhoff se debe la teoría de las líneas de absorción espectrales, según las cuales indicó que los elementos presentes en el sol son: hidrógeno, helio, sodio, etc.

Kirchhoff fue el primero en indicar que la corriente eléctrica se mueve a la velocidad de la luz, efectuando importantes estudios sobre circuitos eléctricos.

En 1868 sufrió un accidente que le dejó imposibilitado de una pierna, lo que impidió a partir de la citada fecha que dirigiese los ensayos en los laboratorios.

En 1875 fue contratado como Catedrático de Física Teórica de la Universidad de Berlin, en la que había iniciado su carrera docente.

En 1884 se deterioró su salud, falleciendo tres años después el 17 de octubre de 1887, a la edad de 63 años.

9.7. LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN INTERNA EN FUNCIÓN DE LAS SOLICITACIONES

Por medio de la función de Airy, hemos deducido que :

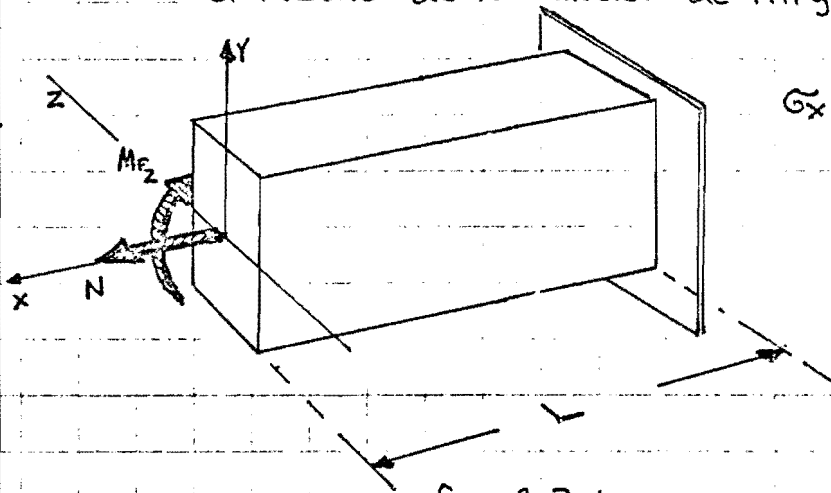


Fig. 9.7.1.

$$\sigma_x = \frac{N}{S} - M_z \frac{y}{I_z}$$

Estudiando cada una de las dos sollicitaciones por separado, podremos observar que en el caso del esfuerzo NORMAL, la tensión

es constante, lo es la deformación unitaria longitudinal ϵ_x , y en consecuencia el acortamiento longitudinal U .

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{ES} \Rightarrow \Delta L = U = \epsilon_x L$$

$$\Delta L = U = \frac{L}{ES} N$$

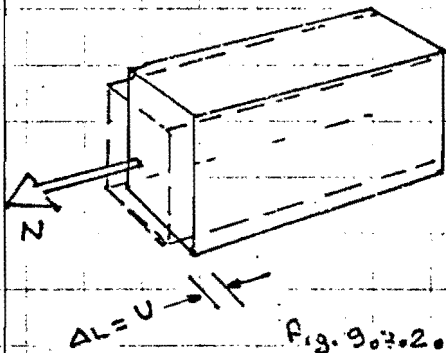
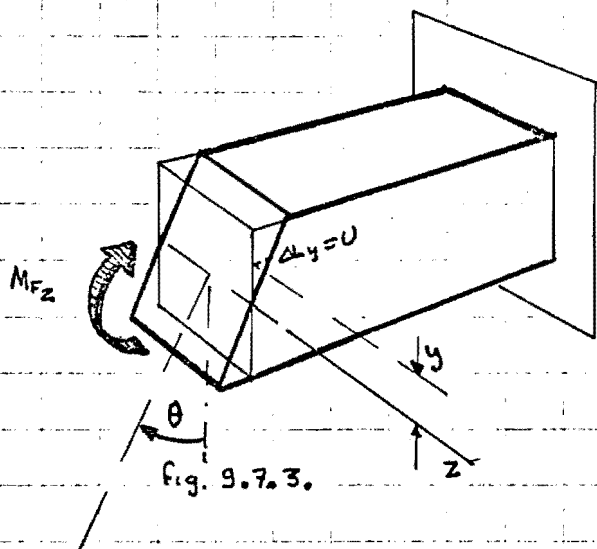
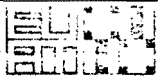


Fig. 9.7.2.

Aplicando la fórmula de Clapeyron:

$$U = \frac{1}{2} U \cdot N = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{ES} N \cdot N = \frac{L}{2ES} N^2 = U \quad (9.7.6)$$

La tensión es proporcional a su distancia al eje z , en el caso de que solo actúe el MOMENTO FLECTOR M_z , por lo que razonando de forma análoga, también lo serán los ALARGAMIENTOS o ACORTAMIENTOS que se producirán en la barra, lo que es indicativo de que la SECCIÓN PERMANECE PLANA después de las DEFORMACIONES, experimentando únicamente un giro, tal como supuso Bernoulli



$$\sigma_x = -\frac{M_{Fz}}{I_z} y$$



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{M_{Fz}}{EI_z} y$$



$$U = \Delta y = -\epsilon_x L = \frac{L}{EI_z} M_{Fz} y$$



$$\theta = \frac{U}{y} = \frac{L}{EI_z} M_{Fz}$$

Aplicando Clapeyron: $U = \frac{1}{2} \theta M_{Fz}$

$$U = \frac{1}{2} \frac{L}{EI_z} M_{Fz}^2 \quad (9.7.2.)$$

De forma análoga se deduce el término que aporta el ESFUERZO CORTANTE, o el MOMENTO TORSOR.

$$U = \frac{L}{2G_T A_R} T^2 + \frac{L}{2G_T I_T} M_T^2 \quad (9.7.3.)$$

Donde A_R se denomina AREA REDUCIDA de la sección a esfuerzos cortantes, y puede calcularse mediante el cociente

$$A_R = A/c \quad (9.7.4.)$$

donde c es un coeficiente que varía según el tipo de sección, siendo 1,2 en el caso de la rectangular y 1,185 para el de forma circular.

En perfiles laminados puede adoptarse como A_R , el área del alma

I_T es el MÓDULO DE INERCIA a la torsión, para el cual no existe expresión exacta, pero Saint-Venant propuso para el mismo el valor:

$$I_T = \frac{S^4}{4n^2 (I_y + I_z)} \quad (9.7.5.)$$



Si en vez de considerar una barra de directriz recta, con SOLICITACIONES constantes, analizamos un diferencial de longitud dx , la energía de deformación interna en función de las solicitaciones actuantes, corresponderá a la expresión:

$$dU = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_f^2}{EI_z} + \frac{T^2}{G_r A_r} + \frac{M_T^2}{I_r G_r} \right) dx$$

Si integramos a lo largo de la directriz de la barra, obtendremos la expresión general de la energía interna de deformación, independientemente de que la misma sea curva, de que varíen los parámetros geométricos (A, I_z, A_r, I_r) al variar la forma de la sección, o que como es normal varíen las solicitaciones.

$$U = \frac{1}{2} \int_C \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_f^2}{EI_z} + \frac{T^2}{G_r A_r} + \frac{M_T^2}{I_r G_r} \right) ds \quad (9.7.60)$$

Es conveniente indicar que en la práctica, la influencia de cada uno de los términos es muy distinta, pues algunos de ellos alcanzan valores muy superiores a otros, lo que origina que se prescinda de algunos de los sumandos, cuando están presentes ciertas solicitaciones.

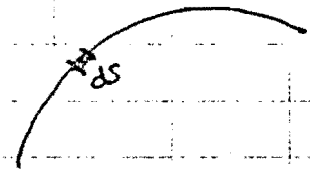
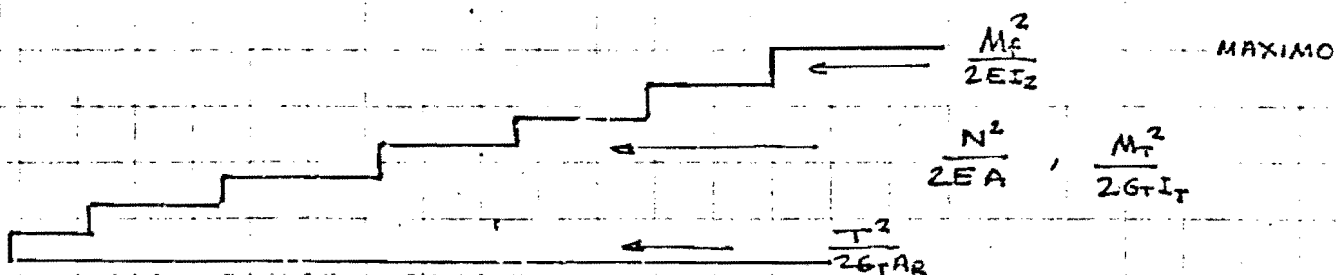


Fig. 9.7.40

De forma orientativa, se puede establecer la siguiente escala sobre la influencia de cada término



Por lo que el término que genera el esfuerzo cortante suele eliminarse, y en muchas estructuras suele considerarse únicamente



$$U = \int \frac{M_f^2}{2EI_z} ds \quad (9.7.70)$$

Caso de que la sollicitación predominante sea el MOMENTO FLECTOR

En estructuras en celosía:
$$U = \int \frac{N^2}{2EA} ds$$

si el esfuerzo normal es constante a lo largo de una barra, así como la sección de la misma, la integral anterior se transforma en:

$$U = \frac{N^2 L}{2EA}$$

La energía interna de una estructura en celosía, vendrá determinada por la suma de las energías de cada una de las barras y en consecuencia:

$$U = \frac{1}{2E} \sum \frac{N_i^2 L_i}{A_i} \quad (9.7.80)$$

Por último indiquemos, que en el caso usual de que en una barra se mantengan constante los parámetros geométricos y las constantes elásticas, la integral (9.7.6.) puede expresarse e interpretarse de la forma siguiente:

$$U = \frac{1}{EA} \int \frac{N^2}{2} ds + \frac{1}{EI_z} \int \frac{M_f^2}{2} ds + \frac{1}{G_r A_r} \int \frac{T^2}{2} ds + \frac{1}{G_r I_r} \int \frac{M_r^2}{2} ds$$

$$U = \frac{U_x^N}{EA} + \frac{U_x^{M_f}}{EI_z} + \frac{U_x^T}{G_r A_r} + \frac{U_x^{M_r}}{G_r I_r}$$

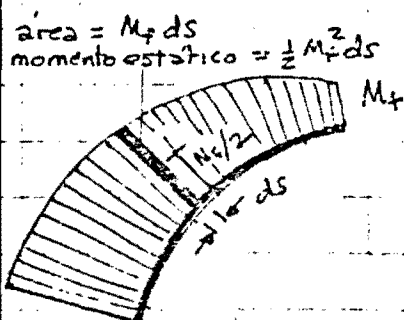


Fig. 9.7.5.

Donde los términos $U_x^{sol.}$ representan el MOMENTO ESTÁTICO del DIAGRAMA de la SOLICITACION correspondiente (indicada en el superíndice), respecto a la FIBRA MEDIA DE LA BARRA

$$U = \frac{U_x^M}{EI_z}$$

Si la sollicitación predominante es el momento flector.

La expresión de la ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN nos permite, conjuntamente con el principio de que debe ser coincidente con el trabajo externo, (al haberse despreciado las fuerzas máximas) el efectuar el cálculo del corrimiento máximo en ciertas circunstancias de simplicidad que verifican los ejemplos siguientes, y que pueden considerarse como caminos previos a los que siguieron Rayleigh y Ritz, que a su vez han sido etapas iniciales de los más modernos métodos de cálculo.

Supongamos una viga simplemente apoyada, sometida a una carga puntual en su punto medio, en el cual por condición de simetría se deberá producir el máximo corrimiento que podemos simbolizar por f .

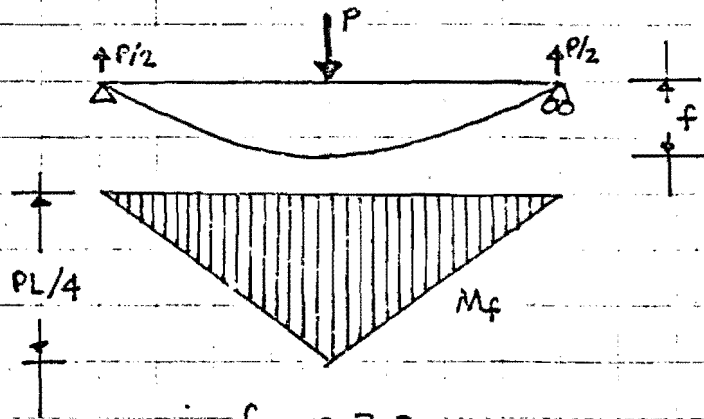


Fig. 9.706.

El trabajo externo, evidentemente valdrá según Clapeyron:

$$W = Pf/2$$

La energía interna, la podremos calcular me-

diante el momento estático de la viga referido a su eje, y dividido por EI_z

$$W = \frac{U_x^M}{EI_z} = \frac{\frac{M_{max}L}{2} \cdot \frac{1}{3} M_{max}}{EI_z} = \frac{L}{6EI_z} M_{max}^2 = \frac{L}{6EI_z} \left(\frac{PL}{4}\right)^2$$

$$W = \frac{P^2 L^3}{96 EI_z}$$

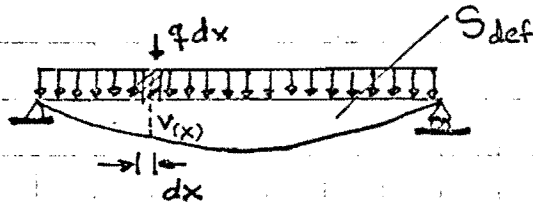
Iguando:

$$\frac{P^2 L^3}{96 EI_z} = \frac{Pf}{2} \Rightarrow$$

$$f = \frac{PL^3}{48 EI_z}$$



Si en vez de una carga puntual, actuase una carga uniformemente repartida, para calcular el trabajo externo tendremos que resolver la integral:



(S_{def} es la superficie comprendida entre la elástica y el eje de la barra)

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L v q dx = \frac{q}{2} S_{def}$$

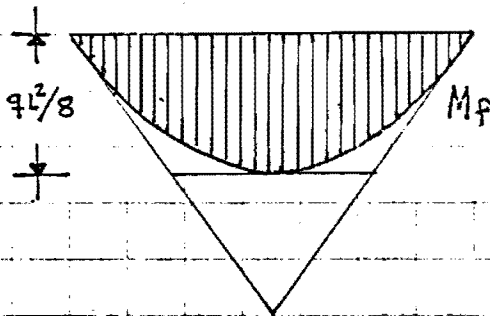


fig. 9.7.7.

El corrimiento $v(x)$ es una función que dependerá lógicamente de varios parámetros, y dado que de momento sólo disponemos de una condición $U = W$, estos no pueden determinarse con el desarrollo teórico hasta ahora realizado.

No obstante, posee un interés histórico, el verificar que si proponemos una curva cuya forma sea aproximadamente la de la deformada de la citada viga, dependiendo de un único parámetro, podrá obtenerse este, y deducir la deformada de la viga mediante la igualación del trabajo y la energía interna, siendo DESTACABLE EL HECHO DE QUE EL ERROR QUE SE PRODUCIRÁ SERÁ MÍNIMO, lo que constituye la base teórica de los métodos de Rayleigh y Ritz, así como de la teoría de los ELEMENTOS FINITOS que constituye el método más moderno de análisis.

Supongamos que la deformada sea una parábola de segundo grado, en cuyo caso la superficie comprendida entre la elástica y el eje de la barra valdrá:

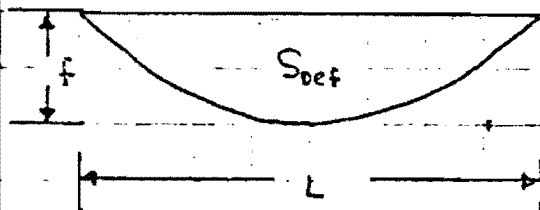
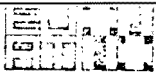


fig 9.7.8.

$$S_{def} = \frac{2}{3} f \cdot L$$

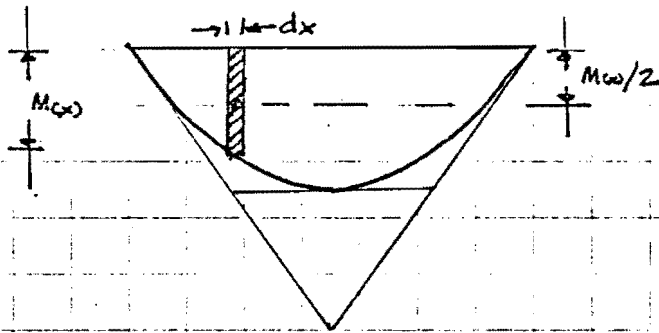
Por lo que el trabajo externo valdrá:

$$W = \frac{q}{2} S_{def} = \frac{q f L}{3} = W$$



El trabajo interno puede calcularse mediante el momento-estático del diagrama de momentos flectores, ya que recordemos que:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_f^2}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^L \frac{1}{2} M_{\text{est}} (M_{\text{est}} dx) = \frac{U_x^M}{EI_z}$$



$$U_x^M = \Omega^M \cdot \gamma_x$$

U_x^M momento estático del diagrama respecto al eje X
 Ω^M área
 γ_x distancia del c.d.e.G. al eje X

Fig. 9.7.9.

$$\Omega^M = \frac{2}{3} L M_{\text{max}} = \frac{2}{3} L \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^3}{12}$$

$$\gamma_x = \frac{2}{5} M_{\text{max}} = \frac{2}{5} \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{20}$$

$$U_x^M = \frac{qL^5}{240}$$

Por lo tanto:

$$U = \frac{qL^5}{240EI_z} \quad W = \frac{1}{3} f q L$$

$(U=W)$

$$f = \frac{qL^4}{80EI_z}$$

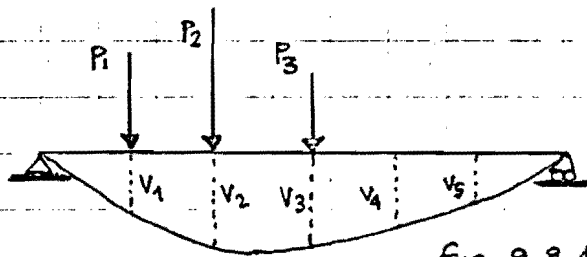
Comparando con el valor que proporciona la resolución de la ecuación diferencial aproximada de la línea elástica, que es: $f = \frac{5qL^4}{384EI_z}$, se puede verificar que el error es menor del 4%.

9.8. TEOREMA DE RECIPROCIDAD DE BETTI-MAXWELL

Hemos deducido, que el trabajo externo de deformación es dependiente exclusivamente de los valores finales alcanzados por las acciones, y los movimientos que estas generan, según se desprende de la fórmula de Clapeyron.

En régimen lineal, la deformación final no depende del orden en que se apliquen las acciones, por lo que dicho orden tampoco influirá en el TRABAJO EXTERNO DE DEFORMACIÓN, de lo que se desprende el TEOREMA DE RECIPROCIDAD.

En efecto, tengamos una viga sobre la que primeramente aplicamos unas fuerzas P_1, P_2, P_3 , que la deformarán, y en consecuencia efectuarán un trabajo de deformación externo que podemos calcular según Clapeyron por:



$$W_1 = \frac{1}{2} (P_1 v_1 + P_2 v_2 + P_3 v_3)$$

Fig. 9.8.1.

Si una vez aplicadas las acciones anteriores, aplicamos unas nuevas P_4 y P_5 se incrementarán las deformaciones en los valores que generan dichas acciones si actuasen solas.

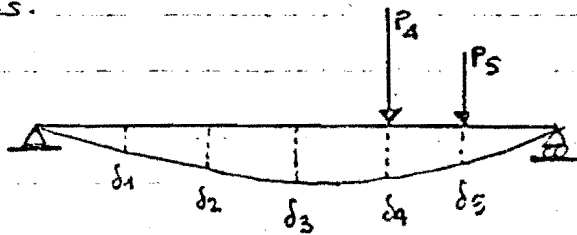


Fig. 9.8.2.

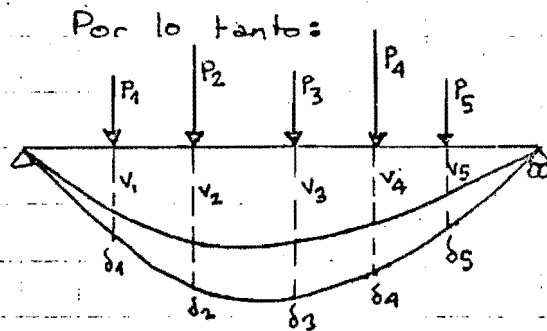


fig. 9.8.3.

Las fuerzas P_1, P_2 y P_3 sufren CON VALOR CONSTANTE, desplazamientos δ_1, δ_2 y δ_3 , por lo que estas fuerzas realizarán un trabajo:

$$P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3$$

Las fuerzas P_4, P_5 inician su aparición con unos puntos de aplicación ya desplazados v_4 y v_5 , y con valores crecientes hasta que las mismas alcanzan sus valores finales, en cuyo momento el corrimiento adicional habrá sido δ_4 y δ_5 respectivamente, lo que según Clapeyron representa un trabajo:

$$\frac{1}{2} (P_4 \delta_4 + P_5 \delta_5)$$

Por lo tanto, el trabajo externo final, será:

$$W_F = \underbrace{\frac{1}{2} (P_1 v_1 + P_2 v_2 + P_3 v_3)}_{\text{sumandos-1}} + \underbrace{P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3}_{\text{sumandos-2}} + \underbrace{\frac{1}{2} (P_4 \delta_4 + P_5 \delta_5)}_{\text{sumandos-3}}$$

(9.8.1.)

Si invirtieramos el orden de aplicación, actuando en primer lugar P_4 y P_5 , el trabajo externo inicial será:

$$W_1 = \frac{1}{2} (P_4 \delta_4 + P_5 \delta_5) \quad (\text{ver: fig. 9.8.2.})$$

Aplicando P_1, P_2 y P_3 , cuando P_4 y P_5 hubiesen alcanzado sus valores finales, se producirá una deformada según indica la fig. 9.8.4.

P_4 y P_5 , se verán desplazadas v_4 y v_5 manteniendo CONSTANTES. LOS VALORES de las mismas, como consecuencia de los movimientos que originan P_1, P_2 y P_3 , por lo que el trabajo que realizan las mismas serán:

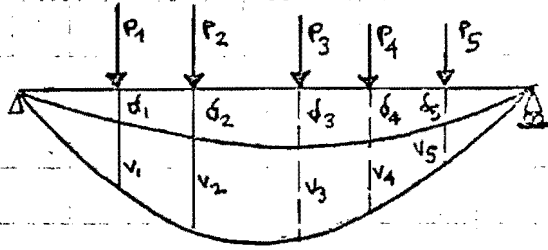
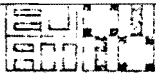


Fig. 9.8.4

$$P_4 v_4 + P_5 v_5$$

Las acciones P_1, P_2 y P_3 recorrerán respectivamente v_1, v_2 y v_3 con valores crecientes,

por lo que a las mismas deberá aplicarse la fórmula de Clapeyron, por lo que el trabajo que estas desarrollarán, será:

$$\frac{1}{2} P_1 v_1 + \frac{1}{2} P_2 v_2 + \frac{1}{2} P_3 v_3$$

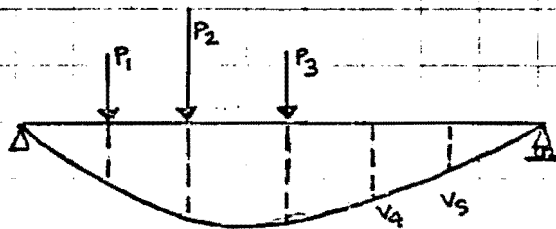
En consecuencia, el trabajo final efectuado será:

$$W_F = \underbrace{\frac{1}{2} (P_4 \delta_4 + P_5 \delta_5)}_{\text{sumandos - 4}} + \underbrace{P_4 v_4 + P_5 v_5}_{\text{sumandos - 5}} + \underbrace{\frac{1}{2} (P_1 v_1 + P_2 v_2 + P_3 v_3)}_{\text{sumandos - 6}}$$

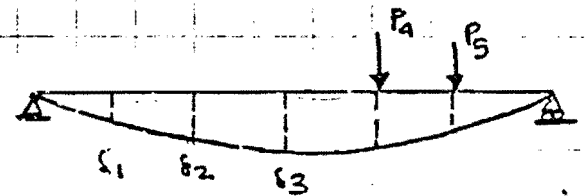
(9.8.2.)

Como el trabajo final debe ser el mismo, las expresiones (9.8.1.) y (9.8.2.) deben ser coincidentes, lo que exige que los sumandos no comunes de ambas, deben ser equivalentes, así pues:

$$P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 = P_4 v_4 + P_5 v_5 \quad (9.8.3.)$$



SISTEMA-1



SISTEMA-2

Esto permite enunciar:

EL TRABAJO QUE DESARROLLAN LAS ACCIONES DE UN SISTEMA-1 AL DESPLAZAR SUS PUNTOS DE APLICACIÓN SEGÚN LOS MOVIMIENTOS QUE PRODUCEN LAS DEFORMACIONES DE OTRO SISTEMA-2, ES IGUAL AL TRABAJO QUE REALIZAN LAS



ACCIONES DE ESTE ÚLTIMO SISTEMA, AL DESPLAZAR SUS PUNTOS DE APLICACIÓN SEGÚN LA DEFORMADA ORIGINAL POR EL DENOMINADO SISTEMA-1



James Clerk MAXWELL

Lo que se conoce como TEOREMA DE RECIPROCIDAD DE BETTI-MAXWELL

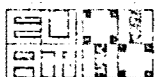
Maxwell lo desarrolló en su época de estudiante de Cambridge, si bien no trascendió a la comunidad científica, y tuvo que esperarse a que Betti lo enunciara para que el mismo fuese un instrumento utilizado de forma sistemática, lo que ha originado que se denomine con los nombres de los dos insignes científicos, y preferentemente con el nombre del último de ellos.

Si bien Maxwell no se dedicó más que de forma tangencial a nuestra ciencia, efectuó para la misma un gran número de aportaciones de primera magnitud, razón por la cual exponemos una síntesis de la biografía de uno de los científicos más importantes de la historia de la Humanidad.

James Clerk Maxwell nació el 13 de noviembre de 1831, en una familia de pura estirpe escocesa, su padre era abogado si bien en el ámbito familiar existían representantes de las más diversas profesiones, como jueces, políticos, exploradores, comerciantes, poetas y músicos.

Nació en Edimburgo, pero se educó en Glenlair distante en aquella época a dos días de carruaje, hasta la edad de 10 años que pasaría a realizar sus primeros estudios en una Academia de Edimburgo.

Jamesie como se le denominaba familiarmente, era un muchacho corto de vista, que le fascinaron desde pequeño las máquinas



Ante cuya observación inquiría a los que le rodeaban: ¿CÓMO MARCHA?, y como generalmente la explicación era genérica y no satisfactoria, añadió: ¿PERO CÓMO MARCHA ESTA EN PARTICULAR?

A los nueve años perdió a su madre, asumiendo su padre funciones como la de diseñar sus vestidos, lo que originó que su época escolar le fuese ciertamente difícil, al presentarse ante sus colegas como un estorbótico que usaba zapatos con puntas cuadradas, túnicas con lazos, lo que además tampoco encajaba con el maestro que al parecer era un hombre sumamente metódico, lo que explica que no evitase una atmósfera de humillación constante contra Maxwell, al que apodaron sus compañeros por "dafty" (bobillo).

A los trece años, al iniciar los cursos de geometría se le despertaron sus cualidades, interesándose por la construcción de poliedros, y finalmente el testarudo daimon se supo sobreponer a la enrarecida atmósfera que le rodeaba y fue distinguido con la medalla de matemáticas de la academia.

A los quince años, fue acompañado por su padre, a una de las reuniones de la Royal Society de Edimburgo, donde escuchó atentamente un debate de como dibujar las formas ovales de los capiteles jónicos, y al poco tiempo remitió un artículo sobre como trazarlos perfectamente con el sólo auxilio de alfileres y un hilo. El estudio fue leído en la Royal Society por el profesor Forbes, y publicado en el boletín de dicha entidad, si bien es preciso advertir que si bien fue una clara demostración del talento de Maxwell, en esa ocasión había sido adelantado por otro niño prodigio: Renato Descartes.

La favorable acogida recibida por su artículo, fue sin duda el hecho definitivo para que superase la difícil situación.



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.29.

ambiental que le presionaba.

A los dieciséis años tuvo ocasión de visitar el laboratorio de Nicol, inventor del prisma polarizador, lo que dio origen a que posteriormente le premiase el interés demostrado por Maxwell, con una colección de prismas, con los que estableció los FUNDAMENTOS DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS FOTOELÁSTICOS.

A partir de ese momento, le seducía la observación de fenómenos de difracción, lo que motivaba que frecuentemente se quedase absorto contemplando reflejos de un vaso, lo que motivó que frecuentemente a las horas de las comidas su tía Miss Cay le gritase: "damesie, ya estás en un teorema".

A los dieciséis años ingresó en la Universidad de Edimburgo y a los 19 años en Cambridge.

El sistema liberal de la Universidad de Edimburgo, en la que era factible elegir asignaturas, favoreció el inquieto espíritu de James, que al poco tiempo escribía a un amigo una carta en la que decía: "He estado leyendo las lecciones de Young, los "Principios de Mecánica - de Willis, la - Ingeniería Mecánica - de Mosseley, - El calor - de Dixon y - Repertorio de Óptica - de Moigno, Tengo una noción sobre la teoría de la torsión en alambres y barras, así como la de haber realizado experimentos de compresión con cristales y jalea, he efectuado estudios sobre las constantes elásticas, los puentes suspendidos por catenarias, . . . "

Mientras que permaneció en Edimburgo asistió a las reuniones de la Royal Society, en cuyas actas fueron publicados dos trabajos suyos, uno de ellos, en 1850, sobre "el equilibrio de los cuerpos elásticos", la cual es iniciada con una razonada crítica sobre la teoría de la UNICONSTANTE.



En el mismo trabajo, razona los fundamentos de la FOTOELASTICIDAD, aborda el problema de placas circulares, el análisis de la torsión en cilindros de sección circular, señalando que el problema no es lineal, existiendo un término que es cúbico con el ángulo de distorsión, si bien puede despreciarse en el campo de las pequeñas deformaciones.

También estudia el estado tensional que originan variaciones térmicas en cilindros y esferas huecas, así como el de una placa triangular que resuelve fotoelásticamente.

Al ingresar en Cambridge tuvo como tutor al afamado Prof. Hopkins, que dijo de él: "Es el hombre más extraordinario con quien me he encontrado, parece imposible que puede pensar incorrectamente cuando aborda problemas físicos".

Sus compañeros de Cambridge le consideraban genial y a la vez divertido, por sus extrañas teorías como la que indica que un gato cae siempre sobre sus patas, independientemente de la posición en la que se le lanzara.

Se graduó como segundo, por su anárquica preparación, quedando por debajo del famoso matemático Edward J. Routh, si bien ambos empataron en el Premio Smith, que era el máximo galardón de Cambridge.

En 1871 fue nombrado profesor de física experimental de Cambridge, creando el famoso laboratorio que se denominó Cavendish en honor al genial y excéntrico científico inglés, que se adelantó a la época que vivió, llegando a establecer con gran exactitud la masa de la Tierra. Maxwell publicó los escritos de Cavendish.

Entre 1864 y 1873, elaboró su teoría sobre el ELECTROMAGNETISMO, que es sin duda su máxima aportación.

Maxwell tal como ya hemos indicado aportó las funciones de tensiones para estados triples, al igual que Airy lo había realizado.



para estados planos.

Murió de cáncer, al igual que su madre, en Cambridge el cinco de noviembre de 1879.

9.9. APLICACIONES DEL TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Veamos a continuación algunas aplicaciones del teorema de RECIPROCIDAD DE BETTI-MAXWELL

Supongamos que deseamos calcular el corrimiento vertical de una viga en un cierto punto C, solicitada por un estado de cargas de cierta complejidad, tal como el que se indica en la fig. 9.9.1.

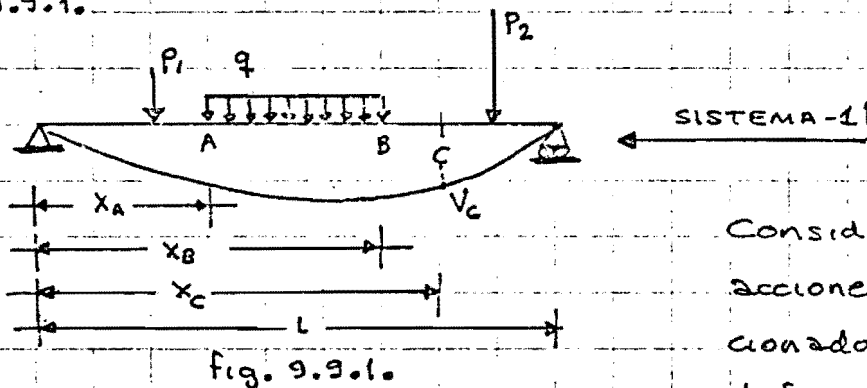


Fig. 9.9.1.

Consideremos el conjunto de acciones que nos han proporcionado como SISTEMA-1, y definamos como SISTEMA-2, una CARGA PUNTUAL UNITARIA aplicada en el citado punto C (Fig. 9.9.2.)

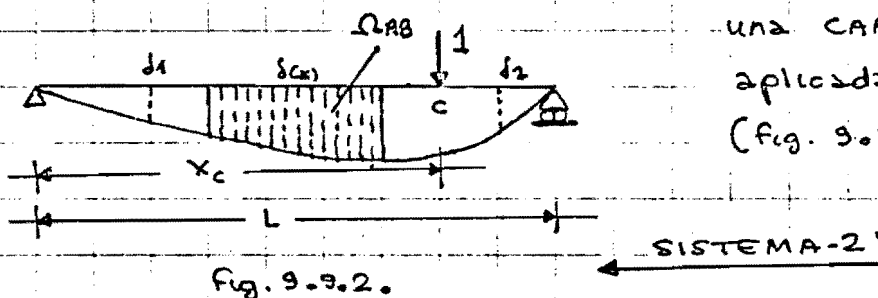


Fig. 9.9.2.

Es evidente que es mucho más sencillo calcular la deformada del sistema-2, que la del sistema-1, y vamos a demostrar que de acuerdo con la LEY DE BETTI-MAXWELL, obtenida la ECUACION DE LA ELÁSTICA DEL SISTEMA-2, podremos conocer el CORRIMIENTO EN C DEL SISTEMA-1, ¿a qué? :

$$P_1 \delta_1 + \int_{x_A}^{x_B} q dx \cdot \delta(x) + P_2 \delta_2 = 1 \cdot V_C$$

ACCIONES-1 x MOVIMIENTOS-2 = ACCIONES-2 x MOVIMIENTOS-1



La integral $\int_{x_A}^{x_B} q dx \delta(x) = q \int_{x_A}^{x_B} \delta(x) dx = q \Omega_{AB}$

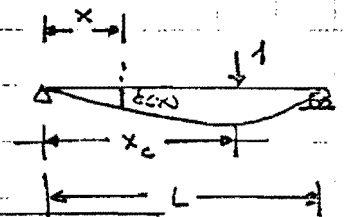
(siendo Ω_{AB} el área que delimitan la fibra media indeformada o original, la fibra media deformada o elástica, y las secciones A y B)

Por lo tanto:

$$V_c = P_1 \delta_1 + q \Omega_{AB} + P_2 \delta_2 \quad (9.9.1.)$$

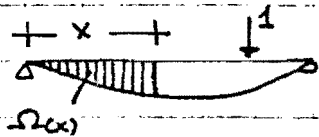
Los corrimientos $\delta(x)$, pueden deducirse de una vez para siempre, con lo que la aplicación del método anterior es inmediata por lo que consideramos de interés proporcionar la expresión que nos los proporciona, que es:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \alpha = \frac{x_c}{L} \quad \beta = 1 - \alpha$$



$$\delta(x) = \frac{L^3}{6EI_z} \left(\beta \left(\alpha(1+\beta) - \frac{1}{3} \right) \frac{x}{L} + \left[\frac{1}{3} - \alpha \right]^3 \right) \quad (9.9.2.)$$

(Recuérdese que $[U]^n \begin{matrix} u < 0 \\ u = 0 \\ u > 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ U^n \end{matrix}$)



$$\Omega(x) = \frac{L^4}{24EI_z} \left(\beta \left(2\alpha(1+\beta) - \frac{1}{3} \right) \frac{x}{L} + \left[\frac{1}{3} - \alpha \right]^4 \right) \quad (9.9.3.)$$

Expresiones que pueden tabularse como efectuamos a continuación, a intervalos de un décimo de la luz.



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.33.

δ^* ($\delta = \frac{\delta^* L^3}{EI}$)

$\alpha \backslash \alpha$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,0027	0,0047	0,0058	0,0063	0,0062	0,0059	0,0045	0,0032	0,0016
0,2	0,0047	0,0085	0,0110	0,0120	0,0118	0,0107	0,0087	0,0061	0,0032
0,3	0,0058	0,0110	0,0147	0,0165	0,0165	0,0150	0,0123	0,0087	0,0045
0,4	0,0063	0,0120	0,0165	0,0192	0,0197	0,0181	0,0150	0,0107	0,0055
0,5	0,0062	0,0118	0,0165	0,0197	0,0208	0,0197	0,0165	0,0118	0,0062
0,6	0,0055	0,0107	0,0150	0,0181	0,0197	0,0192	0,0165	0,0120	0,0063
0,7	0,0045	0,0087	0,0123	0,0150	0,0165	0,0165	0,0147	0,0110	0,0058
0,8	0,0032	0,0061	0,0087	0,0107	0,0118	0,0120	0,0110	0,0085	0,0047
0,9	0,0016	0,0032	0,0045	0,0055	0,0062	0,0063	0,0058	0,0047	0,0027

T. 9.9.1.

Ω^* ($\Omega = \frac{\Omega^* L^4}{1000 EI}$)

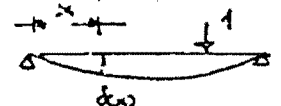
$w = \frac{y}{L}$ $\alpha = \frac{x_c}{L}$

$\alpha \backslash \alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.1388	0.2367	0.2946	0.3175	0.3104	0.2783	0.2263	0.1592	0.0821
0.2	0.5142	0.9067	1.1433	1.2400	1.2167	1.0933	0.8900	0.6267	0.3233
0.3	1.0454	1.8942	2.4413	2.6775	2.6438	2.3850	1.9463	1.3725	0.7088
0.4	1.6575	3.0533	4.0175	4.4800	4.4667	4.0533	3.3200	2.3467	1.2133
0.5	2.2854	4.2542	5.6813	6.4417	6.5104	5.9583	4.9063	3.4792	1.8021
0.6	2.8742	5.3867	7.2675	8.3467	8.5542	7.9200	6.5700	4.6800	2.4300
0.7	3.3788	6.3608	8.6413	10.0150	10.3771	9.7225	8.1463	5.8392	3.0421
0.8	3.7642	7.1067	9.6975	11.3067	11.8042	11.1600	9.4442	6.8267	3.5733
0.9	4.0054	7.5742	10.3613	12.1217	12.7104	12.0825	10.2929	7.4967	3.9488
1.0	4.0875	7.7333	10.5875	12.4000	13.0208	12.4000	10.5875	7.7333	4.0875

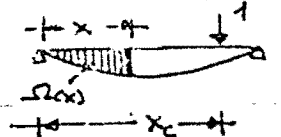
T. 9.9.2.

Mediante las cuales:

$$\delta(x) = \frac{\delta^* L^3}{EI}$$



$$\Omega(x) = \frac{\Omega^* L^4}{EI} \cdot \frac{1}{1000}$$





Generalmente, la obtención de movimientos o corrimientos en barras flexionadas corresponde a la necesidad de limitar el valor máximo de los mismos, que se denomina FLECHA.

La práctica demuestra que el descenso que se produce en el punto medio difiere muy poco del mencionado valor máximo, lo que justifica que generalmente se obtenga simplemente dicho descenso del punto central.

Si aplicamos las tablas anteriores para la obtención del descenso en $x_2 = l/2$, solo precisaremos de la columna $\alpha = 0.5$. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO. Sea la viga siguiente:

9.9.1.

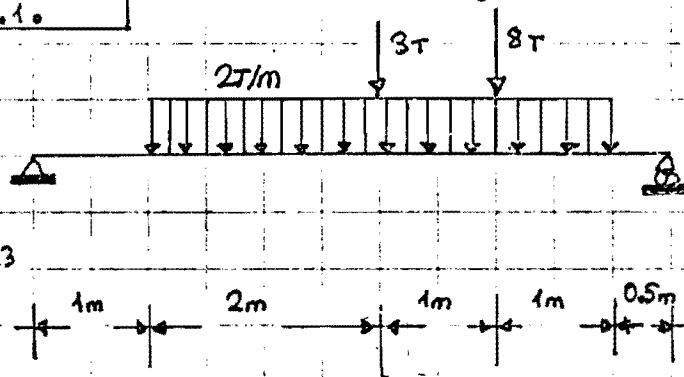


Fig. 9.9.3

Calcúlese el descenso en el punto medio, sabiendo

$$I_x = 10800 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

SOLUCIÓN

Al ser en el punto medio $\alpha = 0.5$
Estudiemos el descenso que produce cada una de las acciones:

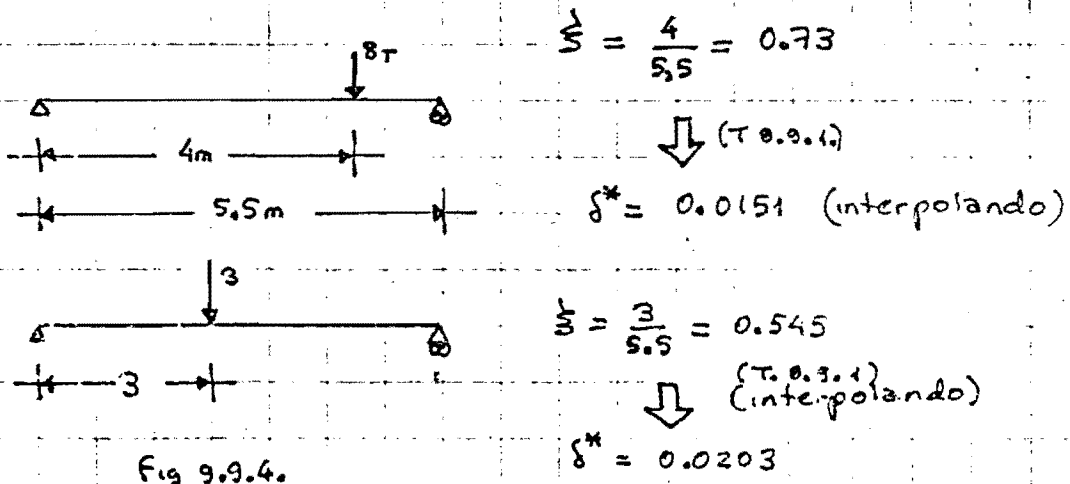


Fig. 9.9.4.

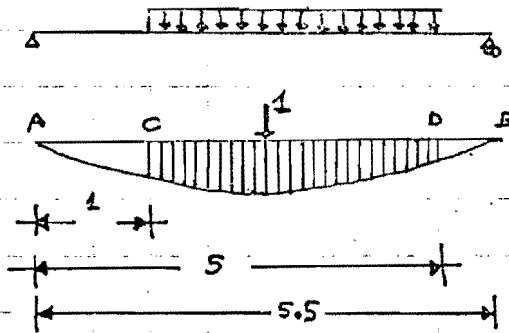


fig. 9.9.5

Para obtener el área:

Ω_{AD} calcularemos:

$$\bar{w} = \frac{5}{5.5} = 0.9091$$

(T.B.9.2.)
(interpolando)

$$\Omega_{AD}^* = 12.7386$$

Y para Ω_{AC} , efectuaremos:

$$\bar{w} = \frac{1}{5.5} = 0.1818$$

(interpolando)
(T.B.9.2.)

$$\Omega_{AC}^* = 1.0519$$

Consecuentemente:

$$\Omega_{CO}^* = 11.6867$$

Esto nos permite calcular:

(2T/m = 20 kg/cm)

$$f = \left(550^3 \cdot 8000 \cdot 0,0151 + 550^3 \cdot 3000 \cdot 0,0203 + \frac{550^4}{1000} \cdot 20 \cdot 11,6867 \right) \frac{1}{EI}$$

$$f = \frac{5,13 \cdot 10^{10}}{EI} = \frac{5,13 \cdot 10^{10}}{12800 \cdot 2,1 \cdot 10^6} \approx \boxed{2 \text{ cm} = f}$$

(El valor exacto es 2,3 cms)

f. es el descenso en el punto medio, que con muy poco error puede considerarse la flecha. (máximo corrimiento).

Si en vez de actuar fuerzas puntuales, o cargas uniformemente repartidas, lo hiciesen momentos puros, y desearamos obtener el corrimiento en un punto dado, necesitaremos conocer las pendientes de la elástica de la viga sometida a una única acción, que será una fuerza unitaria aplicada en el punto en que desearamos obtener el descenso, ya que según el TEOREMA DE RECIPROCIDAD:

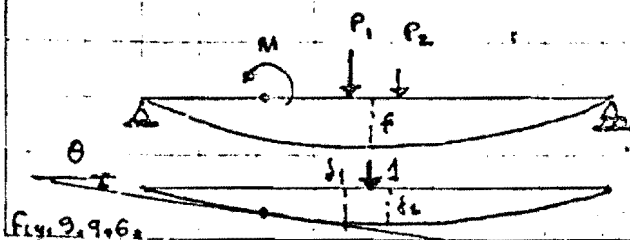


fig. 9.9.6.

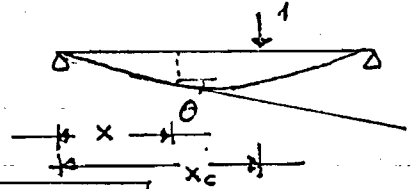
$$-M \cdot \theta + P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 = 1 \cdot f$$

signo menos, pues M y theta tienen sentidos de giro opuestos.



Los giros que se producen ante una acción puntual unitaria, vienen determinados por la expresión:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \alpha = \frac{x_c}{L} \quad \beta = 1 - \alpha$$

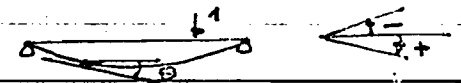


$$\theta(x) = \frac{L^2}{6EI_z} \left(\beta \alpha (1 + \beta) - 3 \beta \xi^2 + 3 \left[\xi - \alpha \right]^2 \right) \quad (9.9.4.)$$

Lo que puede tabularse, tal como se efectúa a continuación:

		θ^*								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ξ	α									
0		0,0285	0,0480	0,0595	0,0640	0,0625	0,0560	0,0455	0,0320	0,0166
0,1		0,0240	0,0440	0,0560	0,0610	0,0600	0,0540	0,0440	0,0310	0,016
0,2		0,0155	0,0320	0,0455	0,0520	0,0525	0,0480	0,0395	0,0280	0,0145
0,3		0,0080	0,0170	0,0280	0,0370	0,0400	0,0380	0,0320	0,0230	0,012
0,4		0,0015	0,0040	0,0085	0,0160	0,0225	0,0240	0,0215	0,0160	0,0085
0,5		-0,0040	-0,0070	-0,0080	-0,0060	0	0,0060	0,0080	0,0070	0,0040
0,6		-0,0085	-0,0160	-0,0215	-0,0240	-0,0225	-0,0160	-0,0085	-0,0040	-0,0015
0,7		-0,012	-0,0230	-0,0320	-0,0380	-0,040	-0,0370	-0,0280	-0,0170	-0,0080
0,8		-0,0145	-0,0280	-0,0395	-0,0480	-0,0525	-0,0520	-0,0455	-0,0320	-0,0155
0,9		-0,016	-0,0310	-0,0440	-0,0540	-0,0600	-0,0610	-0,0560	-0,0440	-0,0240
1		-0,0165	-0,032-	-0,0560	-0,0560	-0,0625	-0,0640	-0,0599	-0,0480	-0,0285

$$\theta = \frac{\theta^* L^2}{EI_z}$$



(T. 9.9.3.)

Otras aplicaciones prácticas exigen; la obtención de los corrimientos, áreas de descenso Ω , y giros, que se producen cuando la acción aplicada es un MOMENTO UNITARIO. A continuación se incluyen las expresiones algebraicas correspondientes, y las tablas que facilitan la aplicación.

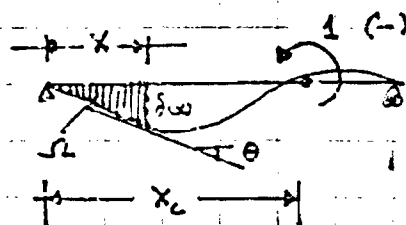


Fig. 9.9.7.

(9.9.5.)

$$\theta(x) = \frac{-L}{6EI} \left(1 - 3\beta^2 + \xi^2 \right) + 6 \left[\xi - \alpha \right]$$

$$\delta(x) = \frac{-L^2}{6EI} \left(\xi (1 - 3\beta^2 - \xi^2) + 3 \left[\xi - \alpha \right]^2 \right)$$

$$\Omega(x) = \frac{-L^3}{24EI} \left(\xi^2 (2 - 6\beta^2 - \xi^2) + 4 \left[\xi - \alpha \right]^3 \right)$$



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEOREMA ENERGÉTICOS

9.37.

θ^* ($\theta = \frac{\theta^* L}{EI}$)

$\theta^* \backslash \theta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.3333	0.2383	0.1533	0.0783	0.0133	-0.0417	-0.0867	-0.1217	-0.1467	-0.1617	-0.1666
0.1	0.2383	0.2433	0.1583	0.0833	0.0183	-0.0367	-0.0817	-0.1167	-0.1417	-0.1567	-0.1617
0.2	0.1533	0.1583	0.1733	0.0983	0.0333	-0.0217	-0.0667	-0.1017	-0.1267	-0.1417	-0.1467
0.3	0.0783	0.0833	0.0983	0.1233	0.0583	0.0033	-0.0417	-0.0767	-0.1017	-0.1167	-0.1217
0.4	0.0133	0.0183	0.0333	0.0583	0.0933	0.0383	-0.0066	-0.0417	-0.0667	-0.0817	-0.0867
0.5	-0.0417	-0.0367	-0.0217	0.0033	0.0383	0.0833	0.0383	0.0033	-0.0217	-0.0367	-0.0417
0.6	-0.0867	-0.0817	-0.0667	-0.0417	-0.0067	0.0383	0.0933	0.0583	0.0333	0.0183	0.0133
0.7	-0.1217	-0.1167	-0.1017	-0.0767	-0.0417	0.0033	0.0583	0.1233	0.0983	0.0833	0.0783
0.8	-0.1467	-0.1417	-0.1267	-0.1017	-0.0667	-0.0217	0.0333	0.0983	0.1733	0.1583	0.1533
0.9	-0.1617	-0.1567	-0.1417	-0.1167	-0.0817	-0.0367	0.0183	0.0833	0.1583	0.2433	0.2383
1	-0.1667	-0.1617	-0.1467	-0.1217	-0.0867	-0.0417	0.0133	0.0783	0.1533	0.2383	0.3333

(T. 9.9.4.)


δ^* ($\delta = \frac{\delta^* L^2}{EI}$)

$\delta^* \backslash \delta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.1	0.0285	0.0240	0.0155	0.0080	0.0015	-0.0040	-0.0085	-0.0120	-0.0145	-0.0160	-0.0165
0.2	0.0480	0.0440	0.0320	0.0170	0.0040	-0.0070	-0.0160	-0.0230	-0.0280	-0.0310	-0.0320
0.3	0.0595	0.0560	0.0455	0.0280	0.0085	-0.0080	-0.0215	-0.0320	-0.0395	-0.0440	-0.0455
0.4	0.0640	0.0610	0.0520	0.0370	0.0160	-0.0060	-0.0240	-0.0380	-0.0480	-0.0540	-0.0560
0.5	0.0625	0.0600	0.0525	0.0400	0.0225	0	-0.0225	-0.0400	-0.0525	-0.0600	-0.0625
0.6	0.0560	0.0540	0.0480	0.0380	0.0240	0.0060	-0.0160	-0.0370	-0.0520	-0.0610	-0.0640
0.7	0.0455	0.0440	0.0395	0.0320	0.0215	0.0080	-0.0085	-0.0280	-0.0455	-0.0560	-0.0595
0.8	0.0320	0.0310	0.0280	0.0230	0.0160	0.0070	-0.0040	-0.0170	-0.0320	-0.0440	-0.0480
0.9	0.0165	0.0160	0.0145	0.0120	0.0085	0.0040	-0.0015	-0.0080	-0.0155	-0.0240	-0.0285

(T. 9.9.5.)



Ω^* ($\Omega = \frac{\Omega^* L^3}{100 EJ}$)



$\frac{w}{L}$ \ $\frac{\delta}{L}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.1504	0.1195	0.0770	0.0395	0.0070	-0.0205	-0.0430	-0.0605	-0.0730	-0.0805	-0.0830
0.2	0.5400	0.4666	0.3133	0.1633	0.0333	-0.0767	-0.1667	-0.2367	-0.2867	-0.3167	-0.3267
0.3	1.0837	0.9729	0.7070	0.3862	0.0937	-0.1538	-0.3563	-0.5138	-0.6263	-0.6938	-0.7163
0.4	1.7066	1.5633	1.2000	0.7166	0.2133	-0.2267	-0.5867	-0.8667	-1.0667	-1.1867	-1.2267
0.5	2.3437	2.1729	1.7270	1.1062	0.4104	-0.2605	-0.8230	-1.2605	-1.5730	-1.7605	-1.8230
0.6	2.9400	2.7466	2.2330	1.5000	0.6466	-0.2267	-1.0200	-1.6500	-2.1000	-2.3700	-2.4600
0.7	3.4504	3.2395	2.6737	1.8529	0.8770	-0.1538	-1.1396	-1.9805	-2.5930	-2.9605	-3.0830
0.8	3.8400	3.6166	3.0133	2.1300	1.0666	-0.0767	-1.2000	-2.2034	-2.9867	-3.4667	-3.6267
0.9	4.0837	3.8529	3.2270	2.3062	1.1904	-0.0205	-1.2263	-2.3271	-3.2230	-3.8138	-4.0163
1.0	4.1666	3.9333	3.3000	2.3666	1.2333	0	-1.2333	-2.3667	-3.3000	-3.9333	-4.1667

(T. 9.9.6.)

EJEMPLO 9.9.2.

El teorema de reciprocidad, y las TABLAS que se han insertado hacen factible la resolución de problemas hiperestáticos de flexión, como el siguiente:

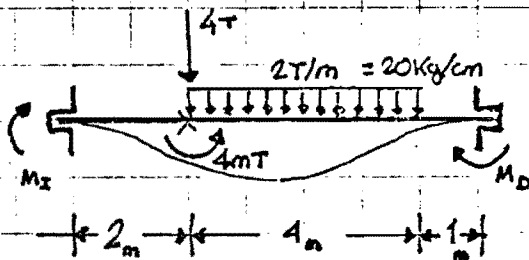


Fig. 9.9.8.

ESTADO-1

Los momentos M_x y M_p , son las acciones incógnitas que efectúan los muros sobre la viga, y que los suponemos POSITIVOS

SOLUCIÓN

Consideremos los dos ESTADOS siguientes:

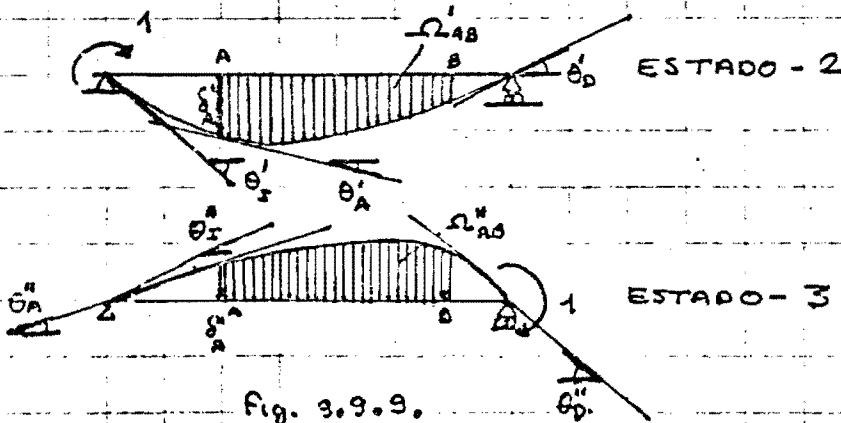


Fig. 9.9.9.



Si el estado-1, tiene los extremos empotrados en muros, no se producirán giros en los mismos, y en consecuencia:

$$\text{ACCIONES}_1 \times \text{DEF}_2 = \text{ACCIONES}_2 \times \text{DEF}_1$$



$$+M_I \cdot \theta'_I + 4000 \cdot \delta'_A - 4 \cdot 10^5 \cdot \theta'_A + 20 \cdot \Omega'_{AB} - M_D \theta'_D = 0 \cdot 1$$

$$\text{ACCIONES}_1 \times \text{DEF}_3 = \text{ACCIONES}_3 \times \text{DEF}_1$$



$$-M_I \theta''_I - 4000 \cdot \delta''_A + 4 \cdot 10^5 \theta''_A - 20 \cdot \Omega''_{AB} + M_D \theta''_D = 0 \cdot 1$$

Por lo tanto:

$$4000 \cdot \delta'_A - 4 \cdot 10^5 \theta'_A + 20 \Omega'_{AB} = -\theta'_I M_I + \theta'_D M_D$$

$$-4000 \cdot \delta''_A + 4 \cdot 10^5 \theta''_A - 20 \cdot \Omega''_{AB} = +\theta''_I M_I - \theta''_D M_D$$

(9.9.60)

Lo cual constituye un sistema de ecuaciones lineales, con dos incógnitas M_I y M_D , una vez calculados mediante las tablas los parámetros $\delta'_A, \delta''_A, \theta'_A, \theta''_A, \Omega'_{AB}, \Omega''_{AB}, \theta'_I, \theta''_I, \theta'_D$ y θ''_D .

Los parámetros los obtendremos de la forma siguiente:

El sistema-2, viene determinado por:

$$\alpha = \frac{x_0}{L} = 0$$

Los valores de: θ'_I, θ'_A y θ'_D se obtendrán en T. 9.9.4.

el: δ'_A se obtendrá en T. 9.9.5.

y el: Ω'_{AB} en T. 9.9.6.

Las posiciones serán:

$$\left. \begin{matrix} \theta'_I \\ \theta'_A \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{x}{L} = 0 = \frac{y}{L}$$



$$\left. \begin{matrix} \delta'_A & \theta'_A \\ \delta''_A & \theta''_A \end{matrix} \right\} \Rightarrow \xi = \frac{2}{7} = \underline{0.2857 = \xi_{A1}}$$

$$\text{el punto B} \left\} \Rightarrow \xi = \frac{6}{7} = \underline{0.8571 = \xi_{B1}}$$

$$\text{y el extremo D} \Rightarrow \xi_0 = 1$$

Utilizando las tablas indicadas, obtendremos

$$\left. \begin{matrix} Q = 0 \\ W = 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.4} \theta'_I = 0.3333 \xrightarrow{L=700} \theta'_I = 233,33 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 0 \\ \xi = 0.2857 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.4} \theta'_A = 0.089 \xrightarrow{L=700} \theta'_A = 62,3 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 0 \\ \xi = 1 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.4} \theta'_D = -0.1667 \Rightarrow \theta'_D = -116,67 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 0 \\ \xi = 0.2857 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.5} \delta'_A = 0.0579 \xrightarrow{L=700} \delta'_A = 28371 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 0 \\ \xi = 0.8571 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.6} \Omega'_{IB} = 3.9792$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 0 \\ \xi = 0.2857 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.6} \Omega'_{IA} = 1.0059$$

$$\left. \begin{matrix} \Omega'_{IB} = 3.9792 \\ \Omega'_{IA} = 1.0059 \end{matrix} \right\} \Omega^*_{AB} = 2.9732$$

$$\downarrow L=700 \\ \Omega'_{AB} = 1,02 \cdot 10^7 / EI$$

El sistema -2, le corresponde un valor $\alpha = 1$, por lo tanto:

$$\left. \begin{matrix} Q = 1 \\ W = 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.4} \theta''_I = -0.1667 \xrightarrow{L=700} \theta''_I = -116,67 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 1 \\ \xi = 0.2857 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.4} \theta''_A = -0.1253 \Rightarrow \theta''_A = -87,71 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 1 \\ W = 1 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.4} \theta''_D = 0.3333 \Rightarrow \theta''_D = 233,33 / EI$$

$$\left. \begin{matrix} Q = 1 \\ W = 0.2857 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T 9.9.5} \delta''_A = -0.0436 \Rightarrow \delta''_A = -21364 / EI$$



$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0.8571 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{T 9.9.6.}} \Omega_{IB}^{*II} = -3.8432$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0.2857 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{T 9.9.7.}} \Omega_{IA}^{*II} = -0.6606$$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_{IB}^{*II} = -3.8432 \\ \Omega_{IA}^{*II} = -0.6606 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Omega_{AB}^{*II} = -3.1886 \\ \downarrow \\ \Omega_{AB}^{II} = -1,094 \cdot 10^7 / EI \end{array}$$

LOS SIGNOS OBTENIDOS nos confirman el SUPUESTO INICIAL, por lo que sustituiremos en (9.9.6.), con valores absolutos para las deformaciones.

$$4000 \cdot \frac{29371}{EI} - 4 \cdot 10^5 \frac{62,3}{EI} + 20 \cdot \frac{1,02 \cdot 10^7}{EI} = -\frac{233,33}{EI} M_I + \frac{116,6}{EI} M_D$$

$$-4000 \cdot \frac{21364}{EI} + 4 \cdot 10^5 \frac{87,71}{EI} - 20 \cdot \frac{1,094 \cdot 10^7}{EI} = \frac{116,6}{EI} M_I - \frac{233,3}{EI} M_D$$



$$\left. \begin{array}{l} 10^6 \cdot 2,507691 = -2M_I + M_D \\ -10^6 \cdot 2,1307188 = M_I - 2M_D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_D = 7,02 \cdot 10^5 \text{ cmKg} \\ M_I = -9,03 \cdot 10^5 \text{ cmKg} \end{array}$$

(El momento izquierdo tiene SENTIDO OPUESTO AL SUPUESTO)
(Las respuestas exactas son: $M_I = -9,05 \cdot 10^5$ y $M_D = 7,23 \cdot 10^5$)

EJEMPLO 9.9.3 También es posible mediante la aplicación del TEOREMA DE RECIPROCIDAD calcular vigas hiperestáticas de varios tramos, tal como a continuación efectuamos.

Sea la viga de la fig. 9.9.10.

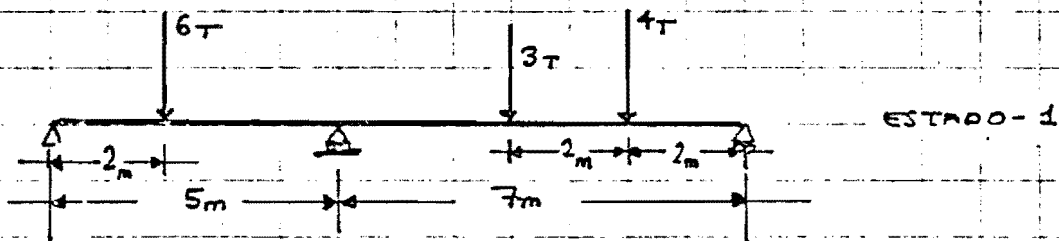


Fig. 9.9.10.

SOLUCIÓN

Sea el estado-2, que se indica en la fig. 9.9.11.

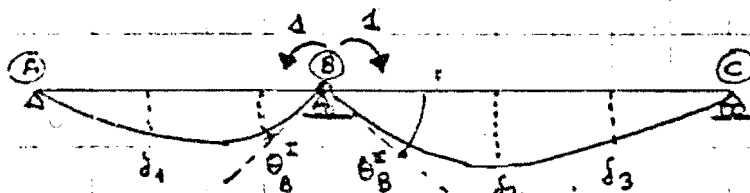


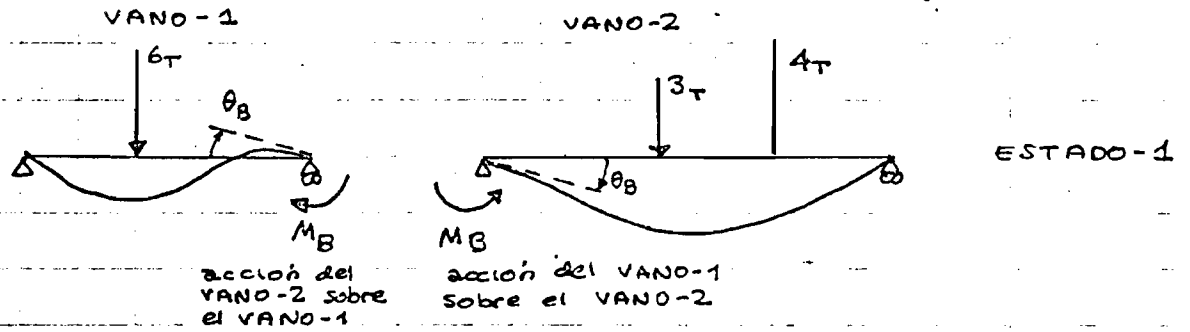
Fig. 9.9.11.

ESTADO-2

(En el apoyo B, existe una rótula que independiza la flexión de los dos vanos en este ESTADO-2)



El ESTADO-1, puede descomponerse en dos vigas también independientes, a condición de que adicionemos la acción que efectúa sobre cada tramo, el vano adyacente (fig. 9.9.12o)



Aplicando el TEOREMA DE RECIPROCIDAD :

$$\text{ACCIONES}_1 \times \text{DEFORMACIONES}_2 = \text{ACCIONES}_2 \times \text{DEFORMACIONES}_1$$



$$6000 \delta_1 - M_B \theta_B^I - M_B \theta_B^{II} + 3000 \delta_2 + 4000 \delta_3 = -1 \cdot \theta_B + 1 \cdot \theta_B$$

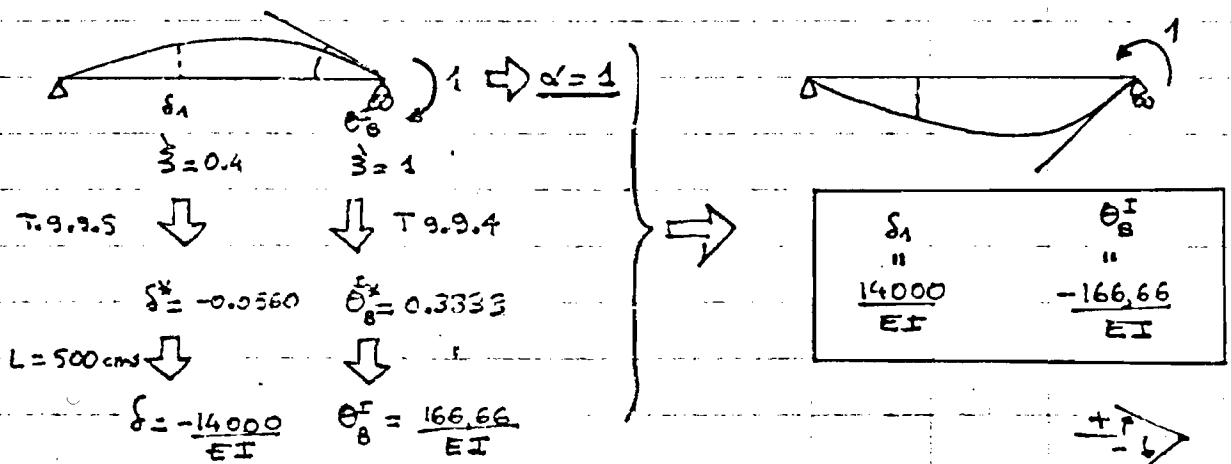


$$6000 \delta_1 + 3000 \delta_2 + 4000 \delta_3 = M_B (\theta_B^I + \theta_B^{II})$$



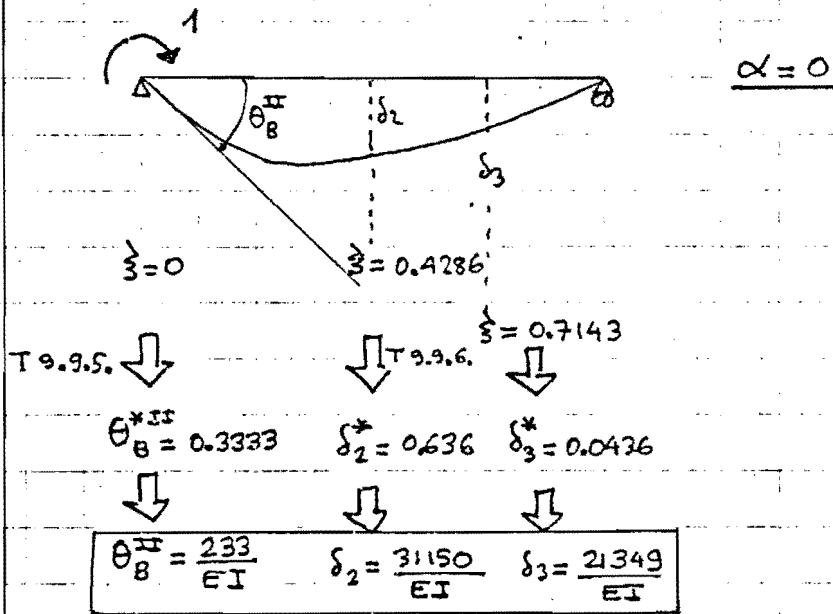
$$M_B = \frac{1}{\theta_B^I + \theta_B^{II}} (6000 \delta_1 + 3000 \delta_2 + 4000 \delta_3) \quad (9.9.7o)$$

Mediante las tablas podrán obtenerse los valores $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ θ_B^I y θ_B^{II} tal como efectuamos a continuación.





En el tramo segundo del ESTADO-2, se producen según las TABLAS, las siguientes deformaciones



Los signos obtenidos son coincidentes con los supuestos para establecer la fórmula (9.9.7.), por lo que nos limitaremos a sustituirlos en módulo, obteniéndose:

$$M_B = \frac{l}{\frac{233}{EI} + \frac{166,66}{EI}} \left(6000 \cdot \frac{14000}{EI} + 3000 \frac{31150}{EI} + 4000 \frac{21349}{EI} \right)$$

$M_B = 6,57 \cdot 10^5 \text{ cmkg.}$

El signo positivo indica que los sentidos atribuidos inicialmente a los momentos M_B , son los correctos.

Por el teorema de RECIPROCIDAD podríamos resolver de forma análoga vigas hiperestáticas de tres o más tramos, lo que es una evidente prueba de la eficacia del método.

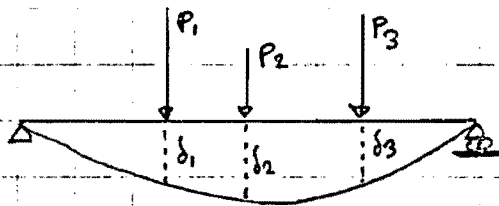


9.10. TEOREMA DE CASTIGLIANO.

El teorema de Castigliano es sin duda, la pieza fundamental del cuerpo doctrinal que estamos exponiendo bajo la denominación de TEOREMAS ENERGÉTICOS.

Como es usual, la exposición teórica que vamos a efectuar no es coincidente con la que efectuó Alberto Castigliano en su tesis doctoral defendida en 1873, pero considerando que la misma posee un interés conceptual complementario a la que vamos a efectuar, la incluiremos y desarrollaremos posteriormente.

Sea una viga sometida a un estado genérico de acciones $\{P_i\}$

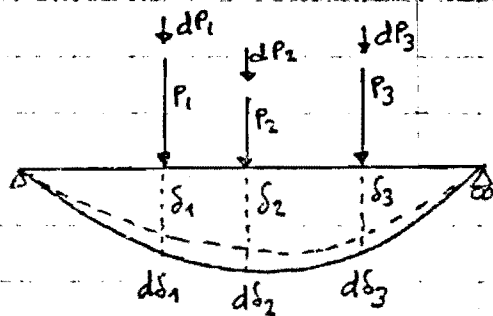


ESTADO-1 Fig 9.10.1.

al que corresponderá un cierto trabajo externo que simbolizaremos por W , y que según Clapeyron valdrá:

$$W = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3)$$

Si incrementamos las acciones exteriores en un cierto conjunto de valores $\{dP_i\}$, la elástica sufrirá unos movimientos también diferenciales, que generarán un incremento diferencial del trabajo externo, por lo que podrá expresarse como $W + dW$



ESTADO-2 Fig 9.10.2.

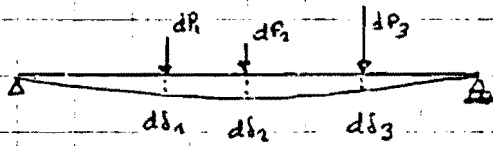
$$\Rightarrow W + dW = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3) + dW$$

El incremento del trabajo lo efectuamos las fuerzas P_1, P_2 y P_3 al desplazarse $d\delta_1, d\delta_2$ y $d\delta_3$ a valor constante (por lo que no es aplicable en tal circunstancia la fórmula de Clapeyron y en consecuencia:

$$dW = P_1 d\delta_1 + P_2 d\delta_2 + P_3 d\delta_3 \quad (9.10.1.)$$

El trabajo desarrollado por los diferenciales de las cargas dP_i al desplazarse un diferencial $d\delta_i$ es un infinitésimo de orden superior, por lo que no se considera.

Al ESTADO FINAL o ESTADO-2, también podría llegarse aplicando primeramente el conjunto de cargas diferenciales, en cuyo caso la deformada sería:

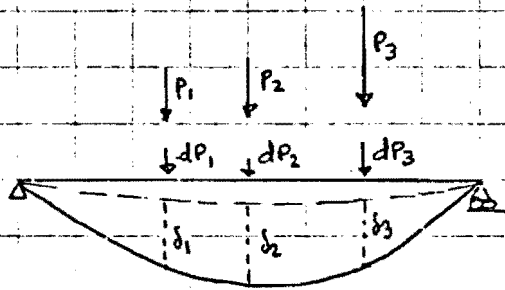


ESTADO-0

$$W=0$$

y la energía de deformación como pendiente nula, ya que sería función de diferenciales de orden dos.

Si posteriormente aplicamos el conjunto de cargas que constituyen el estado-1, alcanzaremos el estado-2



ESTADO-2

El trabajo que se producirá en este proceso será el que por una parte efectuarán las acciones P_1, P_2, P_3 , cuyo valor según el teorema será: $\frac{1}{2}(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3)$ y el que realizan las cargas diferenciales al desplazarse con va-

lor CONSTANTE δ_1, δ_2 y δ_3 , lo que proporciona un trabajo externo de valor diferencial igual a: $dP_1\delta_1 + dP_2\delta_2 + dP_3\delta_3$, por lo tanto

$$dW + W = dP_1\delta_1 + dP_2\delta_2 + dP_3\delta_3 + \frac{1}{2}(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3).$$

En consecuencia

$$dW = dP_1\delta_1 + dP_2\delta_2 + dP_3\delta_3 \quad (9.10.2.)$$

La equivalencia entre las expresiones (9.10.1.) y (9.10.2.) puede demostrarse por el teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti, ya que:



$$\text{ACCIONES}_{E-1} \times \text{DEFORMACIONES}_{E-0} = \text{ACCIONES}_{E-0} \times \text{DEFORMACIONES}_{E-0}$$

$$P_1 d\delta_1 + P_2 d\delta_2 + P_3 d\delta_3 = dP_1 \delta_1 + dP_2 \delta_2 + dP_3 \delta_3$$

Calculado el incremento diferencial del trabajo externo, cuando se incrementan las acciones exteriores, desde un análisis conceptual, nos podemos plantear cuanto valdrá dicho diferencial desde un punto de vista matemático, e imponer la coincidencia o equivalencia de las dos expresiones resultantes.

Si las deformaciones

$$\begin{aligned} \delta_1 &= f_1(P_1, P_2, P_3) \\ \delta_2 &= f_2(P_1, P_2, P_3) \\ \delta_3 &= f_3(P_1, P_2, P_3) \end{aligned}$$

es evidente que el $W = \frac{1}{2} \sum P_i \delta_i$ es función de las acciones P_1, P_2 y P_3 , es decir, existirá una cierta función f , tal que:

$$W = f(P_1, P_2, P_3)$$

Y recordando como se diferencia una función de varias variables independiente, podremos establecer:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial W}{\partial P_2} dP_2 + \frac{\partial W}{\partial P_3} dP_3 \quad (9.10.3)$$

Restando (9.10.2.) y (9.10.1.), deberá cumplirse:

$$0 = dP_1 \left(\delta_1 - \frac{\partial W}{\partial P_1} \right) + dP_2 \left(\delta_2 - \frac{\partial W}{\partial P_2} \right) + dP_3 \left(\delta_3 - \frac{\partial W}{\partial P_3} \right)$$

Si ello debe verificarse para todo dP_1, dP_2 y dP_3 , es preciso que los coeficientes que los multiplican sean nulos, y en consecuencia:

$$\delta_1 = \frac{\partial W}{\partial P_1}, \quad \delta_2 = \frac{\partial W}{\partial P_2}, \quad \delta_3 = \frac{\partial W}{\partial P_3}$$



$$\delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}$$

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO
(9.10.4o)



LA DERIVADA PARCIAL DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN CON RESPECTO A UNA ACCIÓN APLICADA EN UN PUNTO i , NOS PROPORCIONA LA COMPONENTE DEL CORRIMIENTO QUE SE PRODUCE EN EL CORRESPONDIENTE PUNTO, SEGÚN LA DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA CITADA ACCIÓN.

(2º TEOREMA DE CASTIGLIANO).

Puede trabajarse con ACCIONES Y DEFORMACIONES GENERALIZADAS, en cuyo caso

$$F \longleftrightarrow \delta$$

$$M \longleftrightarrow \theta$$

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F}$$

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M}$$

También puede razonarse, que si la relación entre acciones y corrimientos es biunívoca, ello implicará la posibilidad de poder establecer otras funciones g_1, g_2 y g_3 tales que:

$$P_1 = g_1(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

$$P_2 = g_2(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

$$P_3 = g_3(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

en cuyo caso:

$$W = g(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

Y diferenciando:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial W}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \frac{\partial W}{\partial \delta_3} d\delta_3 \quad (9.10.5)$$

Restando (9.10.1) y (9.10.5), se obtiene:

$$0 = d\delta_1 \left(P_1 - \frac{\partial W}{\partial \delta_1} \right) + d\delta_2 \left(P_2 - \frac{\partial W}{\partial \delta_2} \right) + d\delta_3 \left(P_3 - \frac{\partial W}{\partial \delta_3} \right)$$

Como debe cumplirse ello para todo conjunto de valores $d\delta_1, d\delta_2$ y $d\delta_3$, es preciso que:

$$P_1 = \frac{\partial W}{\partial \delta_1}$$

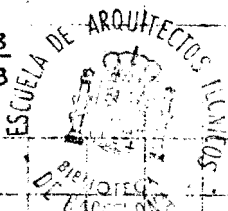
$$P_2 = \frac{\partial W}{\partial \delta_2}$$

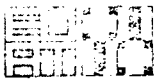
$$P_3 = \frac{\partial W}{\partial \delta_3}$$



$$P_i = \frac{\partial W}{\partial \delta_i}$$

$$(9.10.6)$$





Utilizando nuevamente el concepto de ACCIÓN Y DEFORMACIÓN GENERALIZADA, podrá escribirse:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i^M} = F_i$$

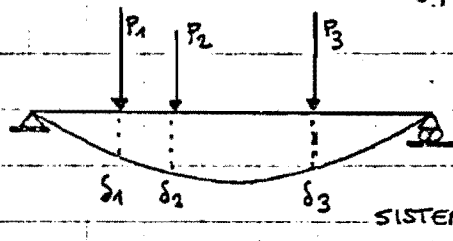
$$(9.10.7a) \quad \frac{\partial U}{\partial \delta_i^P} = P_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i$$

1er TEOREMA DE CASTIGLIANO

LA DERIVADA PARCIAL DE LA ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN, (o del TRABAJO EXTERNO), CON RESPECTO A UNA DEFORMACIÓN EXISTENTE EN UN PUNTO i , NOS PROPORCIONA LA COMPONENTE DE LA ACCIÓN ACTUANTE EN DICHO PUNTO i , SEGÚN LA DIRECCIÓN DE LA CITADA DEFORMACIÓN.

El teorema de Castigliano puede también razonarse partiendo del hecho de que en el campo de las pequeñas deformaciones, estas son función lineal de las acciones actuantes, y en consecuencia para todo conjunto de acciones $\{P_i\}$, es posible establecer unos ciertos coeficientes c_{ij} tales que:



$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (9.10.8a)$$

Fig. 9.10.5.

Las filas de la matriz de los coeficientes poseen significado propio, como puede verificarse mediante las Fig. 9.10.6. a la Fig. 9.10.8. y por la aplicación del TEOREMA DE RECIPROCIDAD.

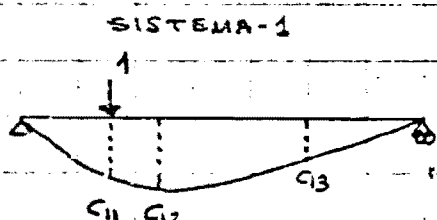


Fig. 9.10.6.

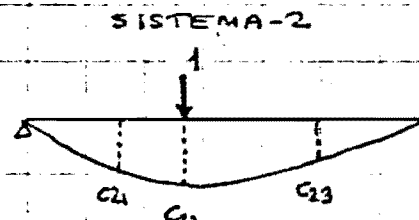


Fig. 9.10.7.

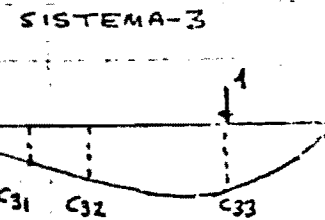


Fig. 9.10.8.



$$\left. \begin{array}{l} \text{SISTEMA-0} \\ \text{con} \\ \text{SISTEMA-1} \end{array} \right\} 1 \cdot \delta_1 = P_1 c_{11} + P_2 c_{12} + P_3 c_{13} \quad \text{Lo cual es la 1era fila de (9.10.8.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SISTEMA-0} \\ \text{con} \\ \text{SISTEMA-2} \end{array} \right\} 1 \cdot \delta_2 = P_1 c_{21} + P_2 c_{22} + P_3 c_{23} \quad (2^{\text{a}} \text{ fila})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SISTEMA-0} \\ \text{con} \\ \text{SISTEMA-3} \end{array} \right\} 1 \cdot \delta_3 = P_1 c_{31} + P_2 c_{32} + P_3 c_{33} \quad (3^{\text{a}} \text{ fila})$$

Por lo que las citadas filas de la matriz $[c_{ij}]$ son los corrimientos que se producen en los puntos analizados bajo la acción de una única fuerza de carácter unitario.

Utilizando el TEOREMA DE RECIPROCIDAD, entre los sistemas 1 al 3, puede demostrarse fácilmente que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{SISTEMA-1} \\ \text{con} \\ \text{SISTEMA-2} \end{array} \right\} \Rightarrow c_{12} = c_{21}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SISTEMA-1} \\ \text{con} \\ \text{SISTEMA-3} \end{array} \right\} \Rightarrow c_{13} = c_{31}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SISTEMA-2} \\ \text{con} \\ \text{SISTEMA-3} \end{array} \right\} \Rightarrow c_{23} = c_{32}$$

Por lo que $c_{ij} = c_{ji}$, es decir la MATRIZ ES SIMÉTRICA y en consecuencia las COLUMNAS de dicha matriz poseen el mismo significado que el de las FILAS.

Los coeficientes c_{ij} se suelen denominar de INFLUENCIA o INFLUJOS.

Castigliano aplicando (9.10.8.) y la fórmula de Clapeyron dedujo que el TRABAJO DE DEFORMACIÓN se podría calcular mediante (9.10.9):

$$W = \frac{1}{2} [P_1 \ P_2 \ P_3] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{fórmula de Clapeyron})$$

$$W = \frac{1}{2} [P_1 \ P_2 \ P_3] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (9.10.9.)$$



Por lo tanto, enunció que el trabajo de deformación es una función de segundo grado de las acciones actuantes, lo que le indujo a que la derivada parcial de dicho trabajo respecto a una acción sería una función lineal de las acciones, y que dicha función era la que precisamente determinaba el movimiento en el punto de actuación de la acción. En efecto:

$$\frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{1}{2} [P_1 \ P_2 \ P_3] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= [c_{i1} \ c_{i2} \ c_{i3}] \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \delta_i$$



$\frac{\partial W}{\partial P_i} = \delta_i$

(2º TEOREMA DE CASTIGLIANO)

Para demostrar el primer teorema, si la relación entre los corrimientos δ_i y las fuerzas P_i es biunívoca, (se trata pues de una aplicación), implica que existirá la MATRIZ INVERSA de $[c_{ij}]$ que simbolizaremos por $[f_{ij}]$, así pues:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^{-1}$$



$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (9.10.10.)$$

Aplicando Clapeyron, y sustituyendo (9.10.10.) obtenemos

$$W = \frac{1}{2} \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = W \quad (9.10.11)$$

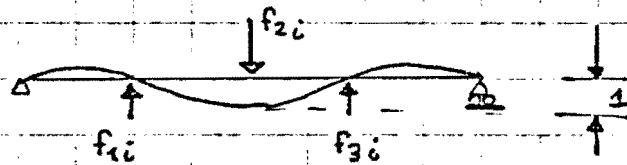


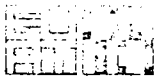
Ello nos demuestra que el trabajo de deformación es una función de segundo grado de los corrimientos existentes, y por lo tanto, la derivada parcial del citado trabajo respecto a un corrimiento será una función lineal de los corrimientos, y Castigliano observó que esta función lineal es precisamente la que relaciona los movimientos con las fuerzas según se ha expuesto en (9.10.10.), ello conduce pues al 1er TEOREMA DE CASTIGLIANO. En efecto:

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left[\frac{1}{2} [\delta_1 \delta_2 \delta_3] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \right] = [f_{i1} \ f_{i2} \ f_{i3}] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = P_i = \frac{\partial W}{\partial \delta_i}$$

(1er TEOREMA DE CASTIGLIANO)

Los elementos f_{ij} poseen significado propio, cada fila i o columna i , esta compuesta por una serie de elementos que indican las fuerzas que habría que aplicar en los puntos considerados para que en i se produjese un corrimiento unitario y en los restantes, corrimientos nulos.



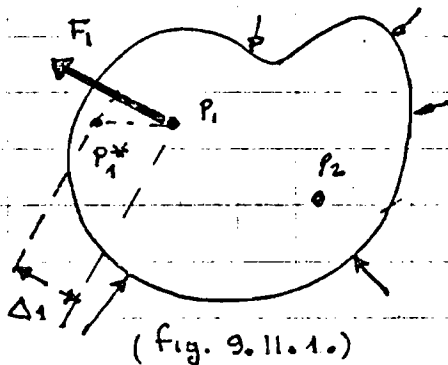


9.11. COROLARIOS DE LOS TEOREMAS DE CASTIGLIANO

1er COROLARIO

Derivando parcialmente el trabajo de deformación respecto a dos fuerzas COLINEALES IGUALES Y DE SENTIDOS OPUESTOS, se obtiene la VARIACIÓN DE LA LONGITUD DEL SEGMENTO P_1P_2 , como consecuencia de las deformaciones existentes, y el signo con que se obtendrá la citada deformación será positivo si el movimiento relativo entre P_1 y P_2 es coincidente con el asignado a las citadas fuerzas.

En efecto, si consideramos únicamente una de dichas fuerzas, obtendremos el corrimiento absoluto del punto en que la misma está aplicada, según la dirección de la citada fuerza; (Fig. 9.11.1.)



$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \Delta_1 \quad (\text{según el 2º Teorema de Castigliano})$$

Si derivamos respecto a F_2 ; (9.11.2)

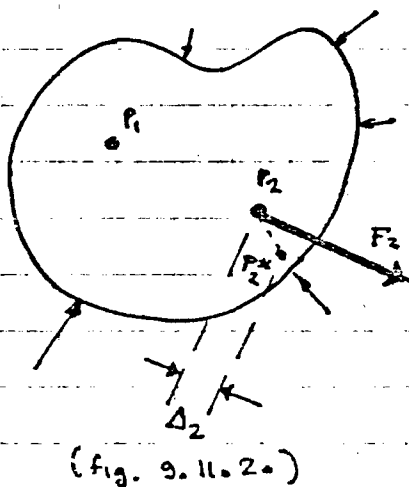
$$\frac{\partial W}{\partial F_2} = \Delta_2$$

Por lo que si derivamos respecto a F_1 y a F_2 , obtendremos:

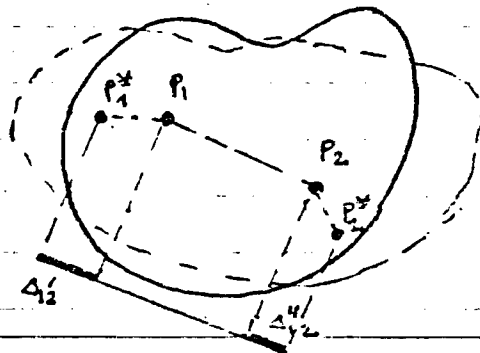
$$\frac{\partial W}{\partial F_1} + \frac{\partial W}{\partial F_2} = \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_{12} = \frac{\partial W}{\partial F_1} + \frac{\partial W}{\partial F_2}$$

(9.11.1.)

Donde Δ_{12} representa el movimiento relativo entre P_1 y P_2



(Fig. 9.11.3.)





2º COROLARIO. - La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a un momento, proporcional a la variación angular que sufre un segmento $P_1 P_2$ como consecuencia de la deformación existente.

En efecto, consideremos por un par de fuerzas \vec{F}_1, \vec{F}_2 aplicadas en P_1 y en P_2 respectivamente, y procedamos de forma análoga al caso anterior, estudiemos el significado de $\frac{\partial W}{\partial F_1}$ primeramente, luego el de $\frac{\partial W}{\partial F_2}$, y por último analizar el resultado que nos proporcionará $\frac{\partial W}{\partial F_1} + \frac{\partial W}{\partial F_2}$.

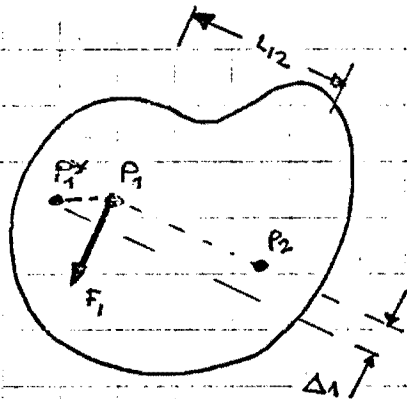


fig. 9.11.4.

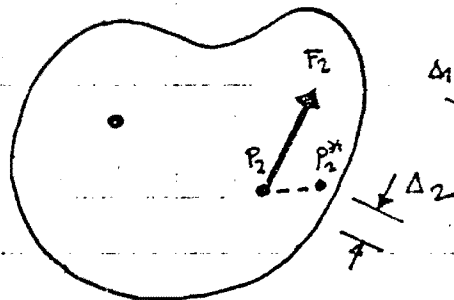


fig. 9.11.5.

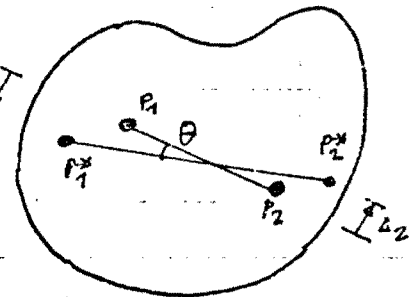


fig. 9.11.6.

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \Delta_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_2} = \Delta_2$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} + \frac{\partial W}{\partial F_2} = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} \frac{1}{L_{12}} + \frac{\partial W}{\partial F_2} \frac{1}{L_{12}} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{L_{12}} \quad (9.11.2.)$$

Pero como: $M = F_1 L_{12}$ o $F_2 L_{12} = M$, es evidente que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial M} = \frac{1}{L_{12}} \quad \text{o} \quad \frac{\partial F_2}{\partial M} = \frac{1}{L_{12}} \quad (9.11.3.)$$

Sustituyendo (9.11.3.) en (9.11.2.), se deduce que:

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial M} + \frac{\partial W}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial M} = \frac{1}{L_{12}} \theta \approx \theta \quad (\text{por el principio de la pequeñez de las deformaciones } \tan \theta \approx \theta)$$

y ello implica: $\frac{\partial W}{\partial M} = \theta$ (9.11.4.)


EJERCICIO 9.11.1.

Calcúlese por el 1er TEOREMA DE CASTIGLIANO los axiles que se producen en la siguiente estructura articulada. (Fig. 9.11.7.)

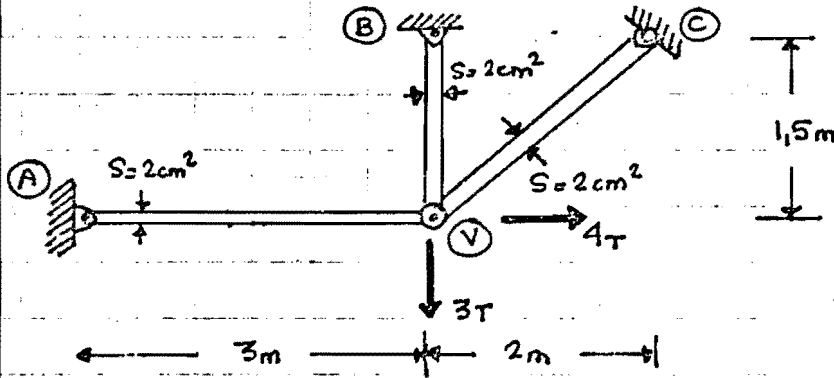


Fig. 9.11.7.

SOLUCIÓN

El punto V sufrirá un corrimiento horizontal y vertical que simbolizaremos respectivamente por δ_H y δ_V , tal como indicamos en la fig. 9.11.8.

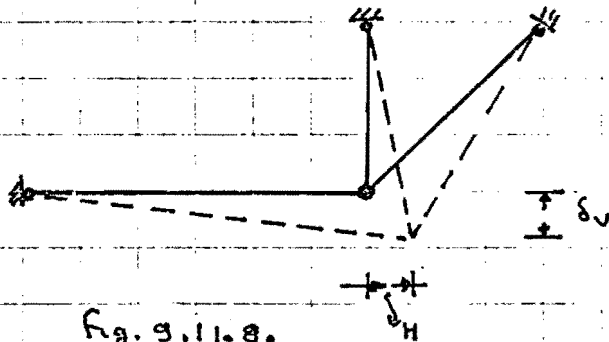


Fig. 9.11.8.

En función de dichos corrimientos puede calcularse el esfuerzo normal o el alargamiento o acortamiento de cada barra, y en función a su vez de estas magnitudes

puede determinarse la energía de deformación.

$$\left. \begin{matrix} \delta_V \\ \delta_H \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \Delta L \\ N \end{matrix} \right\} \longrightarrow W$$

$$W = f(\delta_V, \delta_H)$$

Por lo expuesto, nos será posible obtener $\partial W / \partial \delta_V$ o $\partial W / \partial \delta_H$ que según el 1er TEOREMA DE CASTIGLIANO deben valer 3000 kg y 1000 kg respectivamente, lo que equivale a dos ecuaciones con dos incógnitas (δ_H y δ_V), y en consecuencia el problema pasa a poseer solución.

En efecto:



El alargamiento de la barra \overline{AV} será: $\Delta L_{AV} = \delta_H$, el de la barra BV : $\Delta L_{BV} = \delta_V$, y para la barra VC tendremos que proyectar el vector corrimiento $\vec{\delta}$ (δ_H, δ_V), sobre dicha barra para obtener ΔL_{VC}

Para la proyección del vector $\vec{\delta}$ sobre VC podemos calcular un versor colineal con la barra \vec{n}_{VC} , que multiplicado escalarmente por $\vec{\delta}$ nos proporcionará el alargamiento buscado:

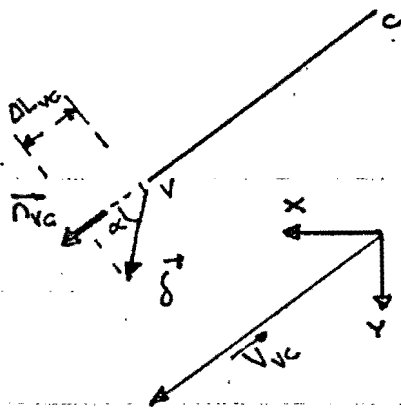


fig. 9.11.9.

$$\Delta L_{VC} = \vec{n}_{VC} \cdot \vec{\delta} \quad \left(\text{ya que:} \right.$$

$$\vec{n}_{VC} \cdot \vec{\delta} = |\vec{n}_{VC}| |\vec{\delta}| \cos \alpha =$$

$$= |\vec{\delta}| \cos \alpha = \Delta L_{VC} \left. \right)$$

Calculemos pues \vec{n}_{VC} , para lo cual nos bastará con considerar el vector \vec{V}_{VC} de componentes

$$\vec{V}_{VC} (2, 1,5m)$$

y dividido por su módulo:

$$|\vec{V}_{VC}| = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5$$

$$\vec{n}_{VC} = \frac{1}{|\vec{V}_{VC}|} \vec{V}_{VC} = (0,8 \quad 0,6)$$

Por lo tanto: $\Delta L_{VC} = 0,8 \delta_H + 0,6 \delta_V$

Sabemos, que la energía de deformación de una barra según Clapeyron puede calcularse mediante:

$$W = \frac{1}{2} \Delta L \cdot N$$

Sabemos que si el esfuerzo normal es constante a lo largo de la barra, deberá verificarse según Hooke

$$\Delta L = \frac{L}{EA} N \quad \text{y por lo tanto:}$$

$$N = \frac{EA}{L} \Delta L$$

Si sustituimos la primera igualdad obtenemos la expresión ya indicada, de que: $W = \frac{1}{2} \frac{L}{EA} N^2$, pero si utilizamos la segunda igualdad alcanzaremos la conclusión de que:

$$W = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \Delta L^2$$



Dado que ya hemos deducido el ΔL para cada barra en función de δ_H y δ_V , solo precisamos deducir el valor de EA/L para calcular la energía de deformación.

$$\left(\frac{EA}{L}\right)_{AV} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{300} = 14000 \text{ kg.cm}$$

$$\left(\frac{EA}{L}\right)_{BV} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{150} = 28000 \text{ kg.cm}$$

$$\left(\frac{EA}{L}\right)_{CV} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{250} = 16800 \text{ kg.cm}$$

Por lo que:

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \left(\frac{EA}{L}\right)_i \Delta L_i^2 =$$

$$W = 7000 \delta_H^2 + 14000 \delta_V^2 + 8400 (0,8 \delta_H + 0,6 \delta_V)^2$$

Derivando:

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_H} = 14000 \delta_H + 2 \cdot 8400 (0,8 \delta_H + 0,6 \delta_V) \cdot 0,8 = -4000 = \frac{\partial W}{\partial \delta_H}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_V} = 28000 \delta_V + 2 \cdot 8400 (0,8 \delta_H + 0,6 \delta_V) \cdot 0,6 = 3000 = \frac{\partial W}{\partial \delta_V}$$

(El signo menos de 4000 es por ser esta fuerza contraria al eje X)

Por lo que el sistema a resolver será:

$$\left. \begin{aligned} 24752 \delta_H + 8064 \delta_V &= -4000 \\ 8064 \delta_H + 34048 \delta_V &= 3000 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene que los corrimientos que experimenta V, son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_H &= -0,206 \text{ cm} \\ \delta_V &= 0,137 \text{ cms} \end{aligned} \right\}$$

Según lo expuesto, los alargamientos de cada barra serán:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta L_{AV} &= 0,206 \text{ cm} \\ \Delta L_{BV} &= 0,137 \text{ cm} \\ \Delta L_{CV} &= -0,083 \text{ cms} = (0,8 \delta_H + 0,6 \delta_V) \end{aligned} \right.$$



Multiplicando los alargamientos por el factor EA/L anteriormente calculados, obtenemos los esfuerzos normales en cada barra:

$$\begin{aligned} N_{AV} &= 2884 \text{ kg} \\ N_{BV} &= 3836 \text{ kg} \\ N_{CV} &= -1394 \text{ kg} \end{aligned}$$

EJERCICIO 9.11.2.

Resuélvase nuevamente el ejercicio 9.11.1, ahora por el 2º TEOREMA DE CASTIGLIANO.

SOLUCIÓN

Si eliminásemos una barra, el esquema estructural propuesto se transforma en isostático, es decir resoluble mediante las condiciones del equilibrio estático.

Puede eliminarse una barra, si la misma es sustituida por la acción que efectuaba, tal como se indica en la fig. 9.11.10.

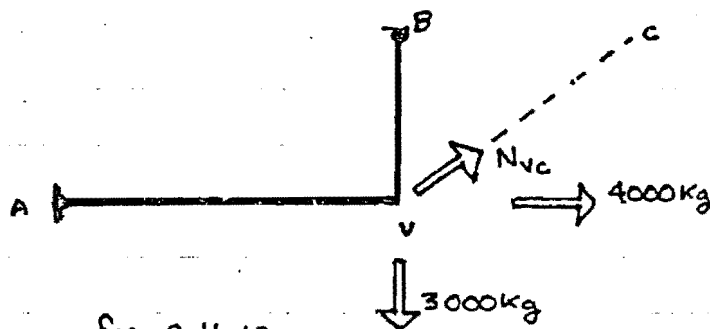


fig. 9.11.10.

En donde N_{cv} es un esfuerzo incógnita, que lo suponemos de tracción (+). Para calcular los esfuerzos que se producen en la estructura isostática simplificada, se

puede recurrir al principio de superposición, tal como se indica mediante las figuras 9.11.11 y 9.11.12.

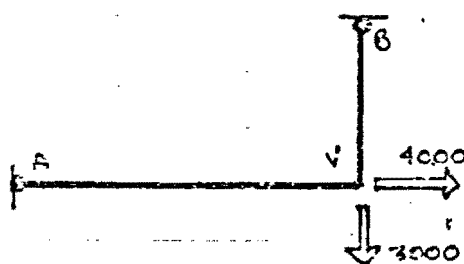


fig 9.11.11.

SISTEMA-1

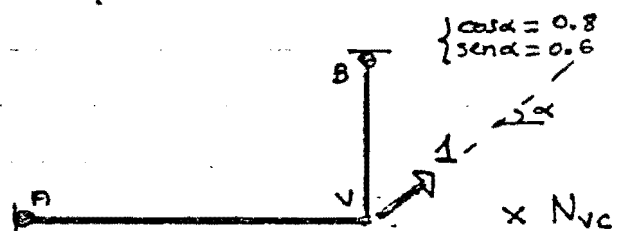


fig 9.11.12.

SISTEMA-2



Los esfuerzos normales del sistema-1, serán evidentemente:

$$N'_{AV} = 4000 \text{ kg}$$

$$N'_{VB} = 3000 \text{ kg}$$

y los del sistema-2, serán a su vez:

$$n_{AV} = 0.8$$

$$n_{VB} = -0.6$$

} que deberán multiplicarse por N_{vc}

Consecuentemente, los axiles en la estructura real serán:

$$N_{AV} = N'_{AV} + n_{AV} \cdot N_{vc} = 4000 + 0.8 N_{vc}$$

$$N_{BV} = N'_{BV} + n_{BV} N_{vc} = 3000 - 0.6 N_{vc}$$

Y el axil de N_{vc} es el utilizado como parámetro para expresar el de las restantes barras.

Como el esfuerzo normal en cada barra es constante, la energía de deformación podrá calcularse mediante la expresión ya indicada de:

$$W = \sum \frac{1}{2} \frac{L_i}{EA_i} N_i^2$$

(Se calculará la energía de deformación de la estructura isostática o simplificada)

Los factores $(EA/L)_i$ de cada barra han sido ya deducidos en el ejercicio anterior, y a continuación los incorporamos para el nuevo cálculo de la energía de deformación W , de la estructura isostática.

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14000} (4000 + 0.8 N_{vc})^2 + \frac{1}{28000} (3000 - 0.6 N_{vc})^2 \right)$$

$$W = \frac{1}{56000} \left(2(4000 + 0.8 N_{vc})^2 + (3000 - 0.6 N_{vc})^2 \right)$$

Según el segundo teorema de Castigliano, $\partial W / \partial N_{vc}$ nos proporcionará la componente del corrimiento del punto V, según la dirección vc , lo cual no será otra cosa que el alargamiento de la barra vc , y como tal también podrá ser calculado mediante la ley de Hooke, es decir:

$$\Delta L_{vc} = \left(\frac{L}{EA} \right)_{vc} N_{vc} = \frac{N_{vc}}{16800}$$



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.59.

$$\Delta v_c = -\Delta l_{vc}$$

$$\frac{\partial W}{\partial N_{vc}} = \Delta v_c = -\left(\frac{N_{vc}}{16800}\right)$$

↓

Caso de que la barra se alargue (tracción), el movimiento se produce en sentido opuesto al que corresponde a N_{vc} , de ello se deduce el signo MENOS.

$$\frac{1}{56000} (3,2 (4000 + 0,8 N_{vc}) - 1,2 (3000 - 0,6 N_{vc})) = \frac{-N_{vc}}{16800}$$

$$12800 + 2,56 N_{vc} - 3600 + 0,72 N_{vc} = -3,3 N_{vc}$$

$$N_{vc} = \frac{-12800 + 3600}{3,3 + 2,56 + 0,72} = -1391 \text{ kg} = N_{vc}$$

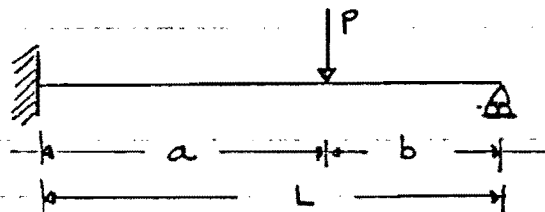
Los restantes esfuerzos resultan de sustituir N_{vc} , en las expresiones que ya habíamos deducido. Así:

$$N_{Av} = 4000 + 0,8 \cdot N_{vc} = 2887 \text{ kg}$$

$$N_{Bv} = 3000 - 0,6 \cdot N_{vc} = 3834 \text{ kg}.$$

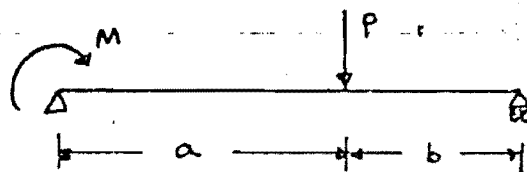
Llegándose a los mismos resultados, que cuando se aplicó el 1er teorema de Castigliano.

EJERCICIO 9.11.3. Aplicando Castigliano, deduzcarse el momento de empotramiento perfecto de la siguiente viga.



SOLUCIÓN

Transformémosla en una viga simplemente apoyada, a la que aplicaremos como una acción exterior un momento M que deberá equivaler a la acción que ejerce el empotramiento perfecto. (Dicho momento M , lo supondremos con un sentido de giro tal que produzca flexión positiva, a fin de que se despeje con su signo correspondiente). Así pues:



La condición hiperestática que se tendrá que imponer en la nulidad de giro en el



extremo izquierdo, lo cual puede efectuarse según el 2º teorema de Castigliano, ya que:

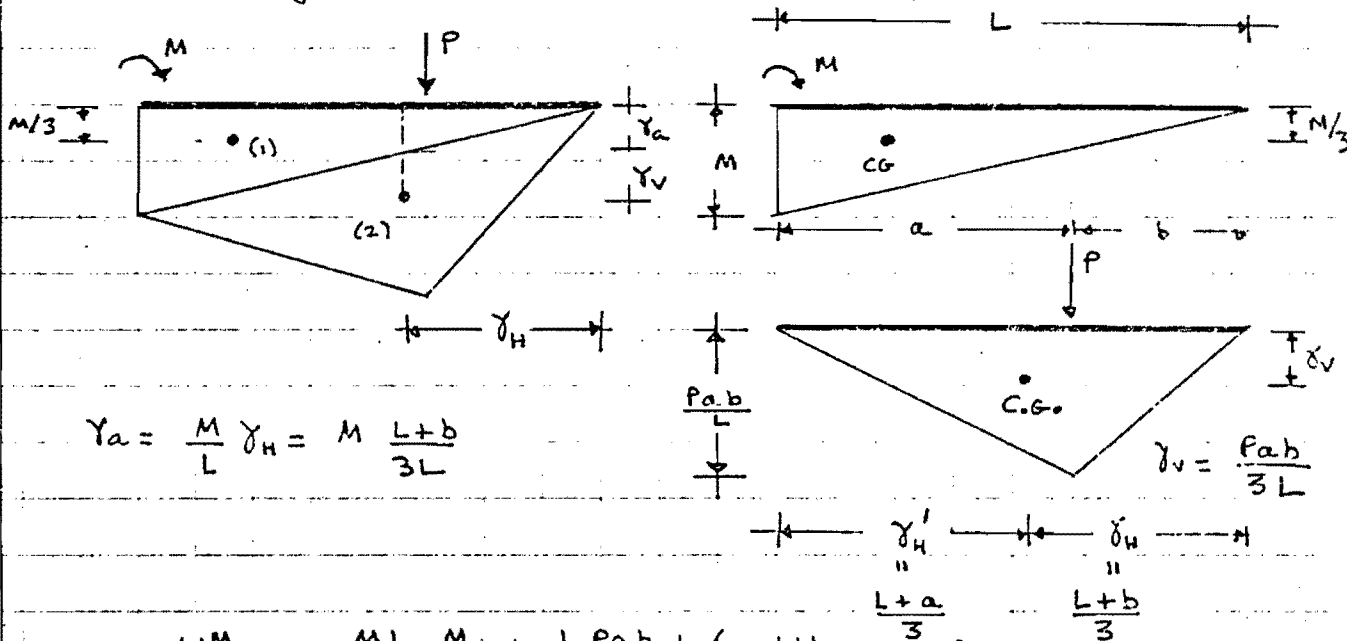
$$\frac{\partial W}{\partial M} = \theta = 0$$

Calculemos pues, la energía de deformación, la cual es:

$$W = \frac{U_x^M}{EI}$$

(U_x^M momento estático del diagrama de Momentos flectores respecto a la directriz de la viga)

El diagrama de momentos flectores, será:



$$\gamma_a = \frac{M}{L} \gamma_H = M \frac{L+b}{3L}$$

$$\gamma_v = \frac{Pab}{3L}$$

$$W = \frac{U_x^M}{EI} = \frac{\frac{ML}{2} \frac{M}{3} + \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} L \left(M \frac{L+b}{3L} + \frac{Pab}{3L} \right)}{EI}$$

$$W = \frac{L}{6EI} \left(M^2 + \frac{Pab}{L} \left(M \left(1 + \frac{b}{L} \right) + \frac{Pab}{L} \right) \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{L}{6EI} \left(2M + \frac{Pab}{L} \left(1 + \frac{b}{L} \right) \right)$$

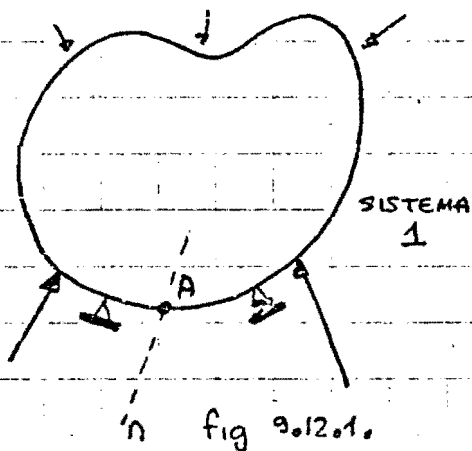
Imponiendo que: $\frac{\partial W}{\partial M} = 0$, resulta:

$$M = - \frac{Pab}{2L} \left(1 + \frac{b}{L} \right)$$

9.12. EL MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA DE MOHR-MAXWELL

El método de la carga unitaria aporta la metodología precisa para la utilización práctica de los teoremas de Castigliano, debiéndose a Mohr su divulgación, pero fue Maxwell quien lo había utilizado por primera vez, en una de sus aportaciones geniales que efectuó en su época de estudiante de Cambridge, si bien restringido a estructuras en celosía, (y llegando al mismo mediante el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES)

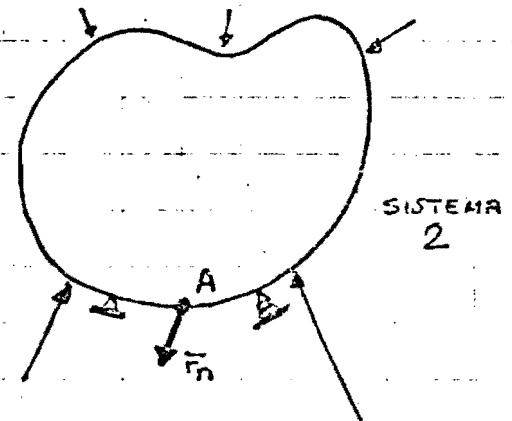
Sea el sólido de la figura 9.12.1., y si necesitamos deducir el corrimiento que experimenta el punto A, según una cierta dirección n , será preciso según Castigliano calcular:



$$\delta_n = \frac{\partial W}{\partial F_n}$$

Puesto que F_n no tiene por qué existir, vamos a sustituir el esquema propuesto, por el indicado en la fig. 9.12.2., que denominaremos SISTEMA-2

El sistema-2 se transforma automáticamente en el SISTEMA-1, con sólo imponer la nulidad de la acción \vec{F}_n . ($|\vec{F}_n| = 0$).



Para deducir las solicitaciones existentes en el SISTEMA-2, en función del parámetro F_n , se puede recurrir a considerar el SISTEMA-2 como la superposición del SISTEMA-0 de la fig. 9.12.3. multiplicado por el módulo de \vec{F}_n , con el SISTEMA-1 o esquema original.

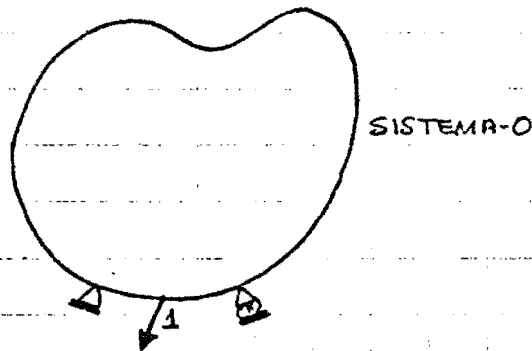
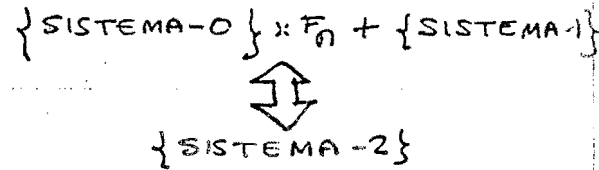


Fig. 9.12.3.



Si simbolizamos con mayúsculas las solicitaciones del SISTEMA-1, y por minúsculas las del SISTEMA-0, se verificará:

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} M_f \\ M_T \\ T \\ N \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} m_f \\ m_t \\ t \\ n \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} M_f + F_n m_f \\ M_T + F_n m_t \\ T + F_n t \\ N + F_n n \end{array} \right\} \\
 \text{SOLICITACIONES} & \text{SOLICITACIONES} & & \text{SOLICITACIONES} \\
 \text{SISTEMA-1 o} & \text{del SISTEMA} & & \text{del SISTEMA-2.} \\
 \text{SISTEMA ORIGINAL} & \text{FICTICIO o SISTEMA-0} & &
 \end{array}$$

El trabajo de deformación del SISTEMA-2, puede calcularse en función de sus solicitaciones, tal como indicamos en (9.9.6.)

$$W = \int \frac{1}{2} \frac{(M_f + F_n m_f)^2}{EI_2} ds + \int \frac{1}{2} \frac{(M_T + F_n m_t)^2}{G_r I_T} ds + \int \frac{1}{2} \frac{(T + F_n t)^2}{G_r A_r} ds + \int \frac{1}{2} \frac{(N + F_n n)^2}{EA} ds$$

Al haberse expresado W en función del parámetro F_n , podremos aplicar Castigliano, y derivar respecto al mismo, obteniéndose el corrimiento δ_n que se producirá en el SISTEMA-2, en el punto A, según n .

$$\frac{\partial W}{\partial F_n} = \delta_n = \int \frac{m_f (M_f + F_n m_f)}{EI_2} ds + \int \frac{m_t (M_T + F_n m_t)}{G_r I_T} ds + \int \frac{n (N + F_n n)}{EA} ds + \int \frac{t (T + F_n t)}{G_r A_r} ds$$



Si consideramos $F_n = 0$, el sistema-2 se transforma en el sistema-1, y la expresión de δn , seguirá siendo válida con sólo sustituir F_n por cero, lo que producirá la siguiente simplificación:

$$\delta n = \int \frac{m_f M_f}{EI_z} ds + \int \frac{m_T M_T}{G_T I_T} ds + \int \frac{n N}{EA} ds + \int \frac{t T}{G_T A_T} ds$$

(9.12.10)



Generalmente no actúan todas las sollicitaciones simultáneamente, por lo que algunos términos no será preciso considerarlos, y por otra parte, ya indicamos que la aportación de algunas sollicitaciones como el cortante, en la energía de deformación es mínima en comparación con la que efectúa el momento flector, y ello implica que en elementos flexionados sólo sea preciso considerar:

$$\delta n = \int \frac{m_f M_f}{EI_z} ds \quad (9.12.2)$$

En arcos puede adoptarse 9.12.2, o bien:

$$\delta n = \int \frac{m_f M_f}{EI_z} ds + \int \frac{n N}{EA} ds$$

Así pues, la INTEGRACIÓN DEL PRODUCTO DE LAS SOLICITACIONES QUE SE PRODUCEN EN UNA ESTRUCTURA POR LAS QUE SE GENERARÍAN EN LA MISMA ESTRUCTURA SI ACTUASE ÚNICAMENTE UNA FUERZA UNITARIA EN UN CIERTO PUNTO A, SEGÚN UNA DIRECCIÓN n , NOS PROPORCIONE EL MOVIMIENTO QUE SE PRODUCE EN EL CITADO PUNTO A, SEGÚN LA DIRECCIÓN DENOMINADA POR n , SI DICHO PRODUCTO SE DIVIDE POR EL FACTOR DE RIGIDEZ CORRESPONDIENTE A LA SOLICITACIÓN INTEGRADA ($M_f \rightarrow EI_z$, $M_T \rightarrow G_T I_T$, $T \rightarrow A_T G_T$, $N \rightarrow EA$)

9.12.1 EJERCICIO

Calcúlese el descenso que se produce en el punto medio de una viga de luz L , simplemente apoyada sobre la que actúa una carga uniformemente repartida de carga unitaria q , en toda su luz.

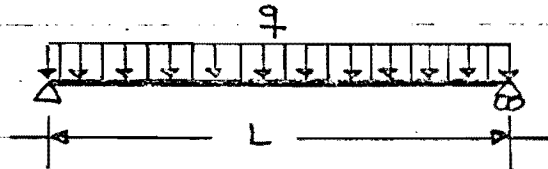


Fig. 9.12.4.

SOLUCIÓN

Calculemos primeramente la ecuación de la sollicitación del MOMENTO FLECTOR

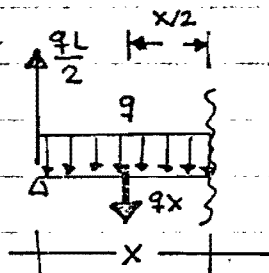


Fig. 9.12.5.

$$M_f(x) = \frac{qL}{2}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \left[\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} = M_f(x) \right]$$

(Habiendo adoptado como origen de abscisas el apoyo izquierdo).

De acuerdo con el método de la carga unitaria de Mohr, para obtener el descenso en el punto medio, aplicaremos en la viga totalmente descargada de otras acciones, una carga puntual en el citado punto, y obtendremos las ecuaciones de las sollicitaciones que se generan en dicho sistema ficticio.

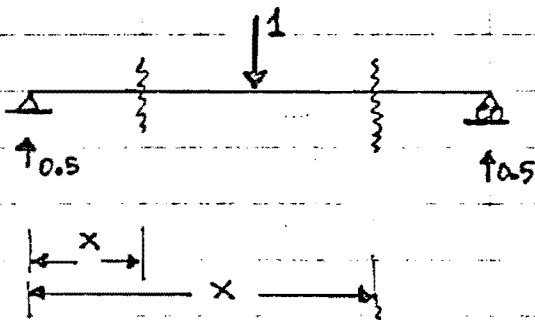


Fig. 9.12.6.

$$m_f(x) = 0.5x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x \in (0, \frac{L}{2})$$

$$m_f(x) = 0.5x - 1 \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$m_f(x) = \frac{L}{2} - 0.5x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x \in (\frac{L}{2}, L)$$

Integrando el producto de dichas sollicitaciones, divididas por la rigidez de la sección a la flexión (EI_z), a lo largo

de toda la luz, obtendremos:

$$\delta = \int_0^L M_f m_f \frac{dx}{EI_z} = \frac{1}{EI_z} \left(\int_0^{L/2} \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) 0.5x dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \left(\frac{L}{2} - x \right) dx \right)$$

$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI_z} \quad (\text{operando adecuadamente}).$$



9.13. EL MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA APLICADO A ESTRUCTURAS EN CELOSIA, DE NUDOS ARTICULADOS.

Si los nudos de una estructura en celosia son articulados, y las fuerzas exteriores se aplican directamente en los nudos de la misma, la única sollicitación que se producirá en cada barra será el ESFUERZO NORMAL, y en consecuencia el método de la carga unitaria se reduce a:

$$\delta = \int N n \frac{ds}{EA}$$

Pero como dicho esfuerzo es constante a lo largo de una misma barra, la integración anterior resulta inmediata

$$\delta = \sum_i N_i n_i \frac{L_i}{EA_i} \int_0^{L_i} ds$$



$$\delta = \sum_i N_i n_i \frac{L_i}{EA_i} \quad (9.13.1.)$$

Si simbolizamos los factores EA_i/L_i de cada barra por k_{N_i} (RIGIDEZ AL ESFUERZO NORMAL), la expresión (9.13.1.), se transforma en la:

$$\delta = \sum N_i n_i \frac{1}{k_{N_i}} \quad (9.13.2.)$$

Es interesante observar que el acortamiento que se produce en cada barra, vale:

$$\Delta L_i = N_i \frac{L_i}{EA_i} = \frac{N_i}{k_{N_i}}$$

Por lo que (9.13.2.) también puede expresarse mediante:
(9.13.3.):

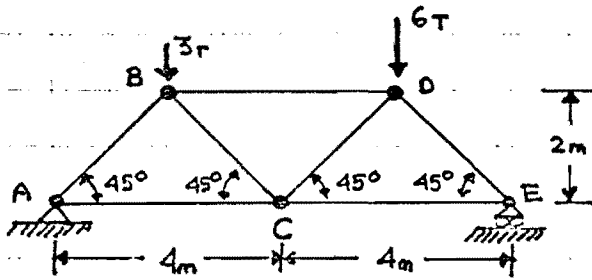
$$\delta = \sum \Delta L_i n_i \quad (9.13.3.)$$

O por:

$$\delta = \sum N_i \Delta l_i \quad (\Delta l_i = n_i/k_{N_i}) \quad (9.13.4.)$$



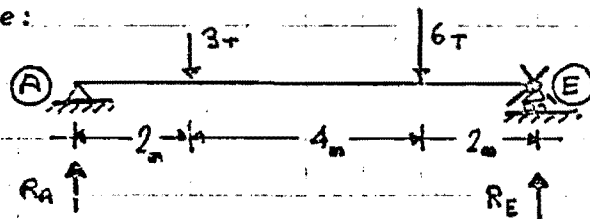
9.13.1. EJEMPLO Determinar el corrimiento vertical del nudo C, de la estructura articulada de la figura, sabiendo que el módulo de Young es $2.1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y que el área de todas las barras es de 4 cm^2 (cotas en metros y fuerzas en toneladas)



SOLUCION-1

Utilizaremos el método de la carga unitaria de Mohr, lo que nos exige la obtención de los esfuerzos normales que producen las cargas actuantes, y posteriormente determinaremos los que generan una carga unitaria vertical aplicada al nudo C, etapas previas que realizamos a continuación:

ETAPA-1 Cálculo de las reacciones en los apoyos, lo cual puede efectuarse en el presente caso, asimilando la celosía a la viga siguiente:

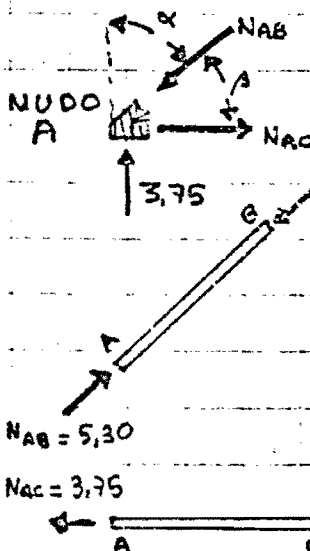


Tomando momentos respecto a E:

$$R_A \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 6 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_A = 3,75$$

$$R_E = 6 + 3 - 3,75 = R_E = 5,25$$

Los esfuerzos normales en AB y AC, se determinarán imponiendo la condición de equilibrio estático del nudo A



$$3,75 - N_{AB} \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_{AB} = 5,3033 \text{ T}$$

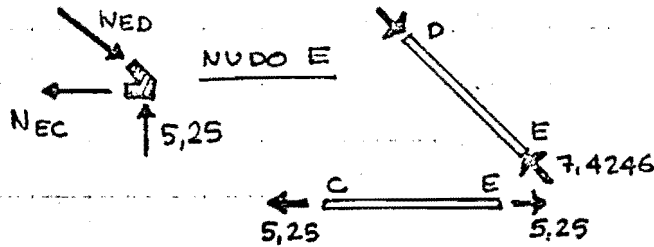
$$N_{AB} \cos \beta = N_{AC} \Rightarrow N_{AC} = 3,75 \text{ T}$$

$N_{AB} = 5,30$
 $N_{AC} = 3,75$

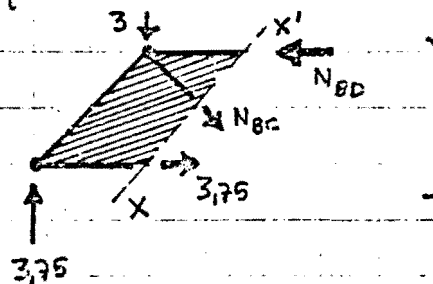
Si las acciones que efectúa la barra sobre el nudo son las cruzadas, ello implica que las recibidas por las barras en los extremos concurrentes al nudo A, son iguales, y de sentido contrario. Imponiendo que la barra debe encontrarse en equilibrio estático, y en consecuencia, las acciones que recibirá en el nudo opuesto deben ser iguales y de sentido opuesto, se observa que:

BARRA AB	COMPRIMIDA	$N_{AB} = -5,30 \text{ T}$
BARRA AC	TRACCIONADA	$N_{AC} = 3,75 \text{ T}$

En el nudo E, el proceso es análogo, tal como se desprende de las figuras adjuntas



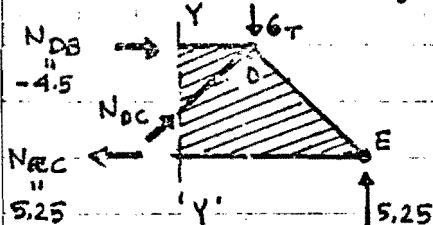
Cortando la estructura según XX' , puede determinarse los esfuerzos en las barras BC y BD imponiendo las condiciones de equilibrio estático.



$$\left. \begin{aligned} N_{bc} &= 0,75 / \cos 45 = 1,0607 \text{ (TRACCIÓN)} \\ N_{bd} &= 3,75 + 1,0607 \cdot \cos 45 = 4,5 \text{ (COMPRESIÓN)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} N_{bc} &= 1,0607 \text{ (T)} \\ N_{bd} &= -4,5 \text{ (T)} \end{aligned}}$$

Efectuando un corte YY' , se determinará el esfuerzo normal de la barra CD, que es la única que se desconoce, bastándonos

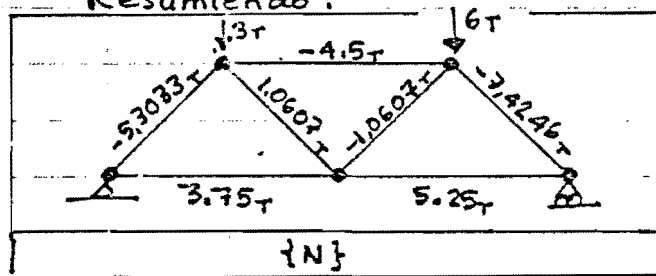


para su cálculo imponer la condición de suma de fuerzas horizontales igual a cero:

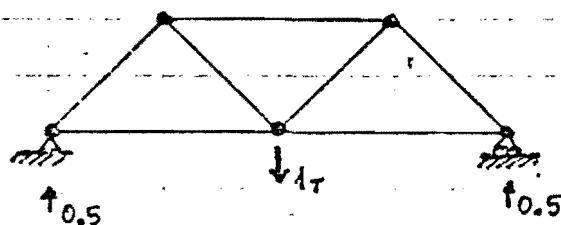
$$N_{dc} \cdot \cos 45 + 4,5 = 5,25$$

$$\boxed{N_{dc} = -1,0607 \text{ T}} \text{ (es de compresión)}$$

Resumiendo:



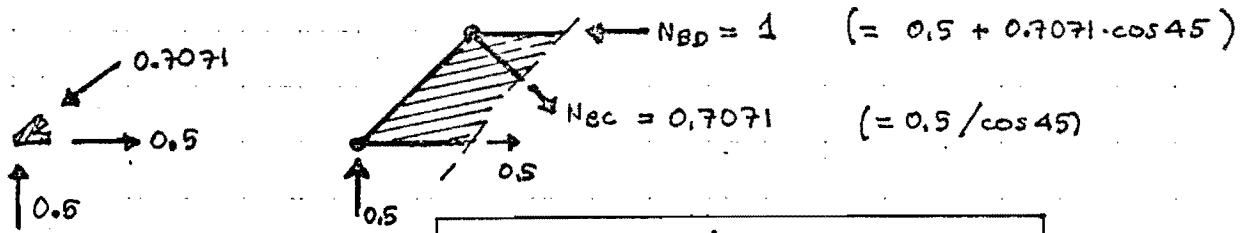
ETAPA 2 Cálculo de los esfuerzos normales que se producen como consecuencia de una acción unitaria vertical aplicada en el nudo C.



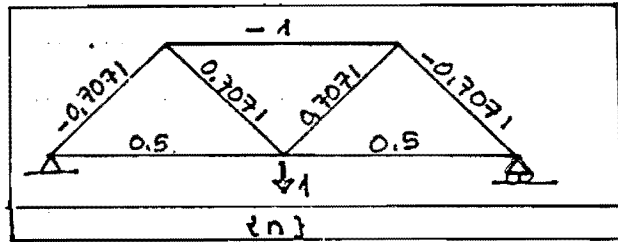
Al ser la estructura simétrica, así como el estado de cargas que ahora hemos de analizar, solo precisaremos el



estudio de la mitad de la celosía:



Consecuentemente:



3er ETAPA.-

El método de la carga unitaria de Mohr, nos proporciona el corrimiento vertical del nudo C, mediante el sumatorio:

$$\delta_c = \sum N_i n_i \frac{L_i}{EA_i} = \sum N_i n_i \frac{1}{k_{N_i}} = \sum N_i \Delta L_i = \sum \Delta L_i n_i$$

siendo:

k_{N_i} : es la rigidez de cada barra a esfuerzos normales ($k_{N_i} = EA_i/L_i$)

ΔL_i : los alargamientos que se producen en cada barra, en el estado de la carga unitaria. ($\Delta L_i = n_i/k_{N_i}$)

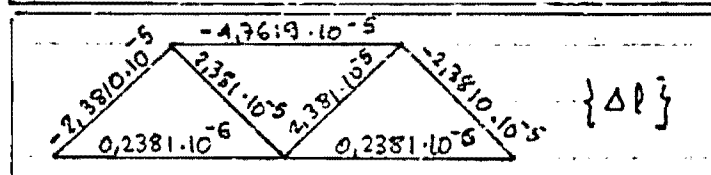
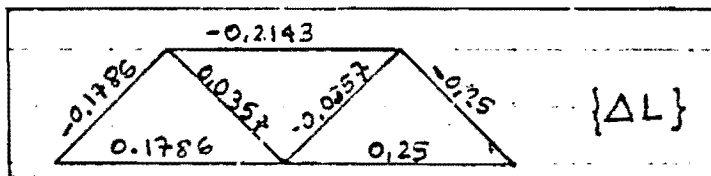
ΔL_i : los alargamientos (o acortamientos) que se producen en cada barra en el estado de cargas real. ($\Delta L_i = N_i/k_{N_i}$)

Calculemos las rigideces:

$$k_{N_{AB}} = k_{N_{BC}} = k_{N_{CD}} = k_{N_{DE}} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 4}{100 \cdot 2 / \cos(45)} = 29698 \text{ Kg/cm}$$

$$k_{N_{AC}} = k_{N_{CE}} = k_{N_{ED}} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 4}{100 \cdot 4} = 21000 \text{ kg/cm}$$

Los acortamientos de las barras, serán:





Por lo tanto:

$$\delta_c = \sum \Delta L_i n_i = (-0.1786)(-0.7071) + (-0.2143)(-1) + (-0.25)(-0.7071) + 0.5 \times 0.1786 + 0.5 \times 0.25 + 0.0357 \times 0.7071 + (-0.0357) \times 0.7071 = \boxed{0.7317 = \delta_c}$$

$$\delta_c = \sum N_i \cdot \Delta l_i = (-5303.3)(-2.381 \cdot 10^{-5}) + (-4500)(-4.7619 \cdot 10^{-5}) + (-7424.6)(-2.381 \cdot 10^{-5}) + (3750) \cdot 0.2381 \cdot 10^{-5} + 5250 \cdot 0.2381 \cdot 10^{-5} + 1060.7 \cdot 2.381 \cdot 10^{-5} + (-1060.7) \cdot 2.381 \cdot 10^{-5} = \boxed{0.7316 = \delta_c}$$

9.14. EL MÉTODO DE VERRESCHAGUIN.

El método de la carga unitaria de Mohr, efectuado tal como se ha expuesto en el EJERCICIO 9.12.1. presenta el grave inconveniente de exigir engorrosas integraciones

Verreschaguin reparó que las integrales

$$\int_a^b m M^* ds \quad \text{ó} \quad \int m_T M_T^* ds \quad \dots \dots$$

tienen la peculiaridad de que $\left(M^* = \frac{M}{EI} \quad M_T^* = \frac{M_T}{EI} \right)$ en general, m, m_T, n, t son

funciones lineales, por lo que el método de la CARGA UNITARIA exige la integración de una FUNCIÓN LINEAL, por otra que no forzosamente lo es, así pues:

$$\int_a^b f(x) F(x) dx$$

$f(x) \rightarrow$ LINEAL

$F(x) \rightarrow$ no necesariamente lineal

El método de Vereshchaguin consiste en que la citada integral equivale al área de la función $F(x)$ entre las abscisas $x=a$ y $x=b$, por el valor de la función $f(x)$ en la abscisa correspondiente al centro de gravedad, de la función $F(x)$ en el citado intervalo.

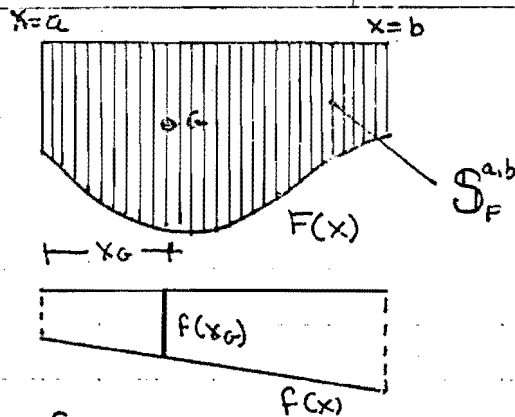


Fig 9.14.1.

En efecto:

$$I = \int_a^b F(x) f(x) dx =$$

$$= S_F^{a,b} \cdot f(x_G)$$

(9.14.1a)

$$I = \int_a^b F(x) f(x) dx = \int_a^b F(x) (mx + b) dx = m \int_a^b x F(x) dx + b \int_a^b F(x) dx$$

$$= I = m (x_G S_F^{a,b}) + b S_F^{a,b} = S_F^{a,b} (m x_G + b) =$$

$$= I = S_F^{a,b} f(x_G) \quad \text{c. q. d.}$$

En consecuencia, si sabemos calcular áreas y centros de gravedad de diagramas, podrá aplicarse fácilmente el método de la CARGA UNITARIA DE MOHR, auxiliándonos de la integración por verreschagin.

Todo diagrama puede descomponerse en diagramas parciales, correspondientes a la actuación de una acción característica exclusivamente (o descomposición en vigas ménsula), y en tal caso, las áreas y centros de gravedad de dichos diagramas son inmediatos tal como a continuación indicamos.

Dado el carácter de la ley que siguen los coeficientes que aparecen en el denominador de las expresiones que determinan las superficies y los centros de gravedad de los diagramas elementales señalados, es fácil su memorización.



	$c = 0$ $A = M$ $M_E = -M$	$S = \frac{M_E \cdot d}{1}$	$\gamma = \frac{d}{2}$
	$c = 1$ $A = P$ $M_E = -Pd$	$S = \frac{M_E \cdot d}{2}$	$\gamma = \frac{d}{3}$
	$c = 2$ $A = q$ $M_E = -\frac{q d^2}{2}$	$S = \frac{M_E d}{3}$	$\gamma = \frac{d}{4}$
	$c = 3$ $A = p$ $M_E = -\frac{p d^3}{6}$	$S = \frac{M_E d}{4}$	$\gamma = \frac{d}{5}$

Fig 9.14.2.

Si asignamos $c=0$ al momento, $c=1$ a la carga puntual, $c=2$ a la carga uniformemente repartida, y $c=3$ a la triangular creciente hacia el empotramiento, podrá indicarse con carácter general que:

$$S = \frac{M_E d}{c+1} \quad \gamma = \frac{d}{c+2} \quad (9.14.2.)$$

El momento de empotramiento perfecto, según la teoría expuesta en las ECUACIONES UNIVERSALES, viene determinado por:



$$M_E = \frac{-A \Gamma d T^c}{c!}$$

En cuyo caso, la superficie del diagrama es:

$$S = \frac{-A d^{c+1}}{(c+1)!}$$

(9.14.3.)

(eliminamos el signo ΓT , puesto que la indeterminación 0^0 no puede ya producirse, al ser el exponente $c+1$)

Veamos mediante un ejemplo, como la conjunción de los métodos de la CARGA UNITARIA DE MOHR, la INTEGRACION DE VERRESCHAGUIN, y los PARAMETROS Y FÓRMULAS UNIVERSIALES de este autor, permiten la inmediata resolución de cualquier caso de cálculo de corrimiento en vigas, sea cual sea el estado de cargas, para lo cual volveremos a elegir el ejemplo 9.9.10 que fue resuelto en su momento de forma aproximada.

EJEMPLO 9.14.10.

Sea la viga:

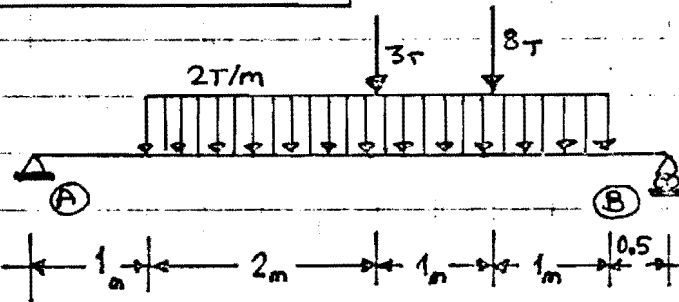


fig 9.14.3.

Obtengase el descenso en el punto medio, sabiendo que: $I_z = 10800 \text{ cm}^4$
 $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

El diagrama correspondiente a la acción unitaria del método de Mohr - Maxwell, será:

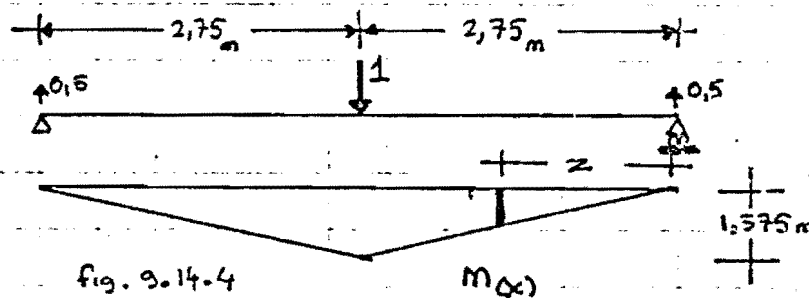


fig. 9.14.4

$$M = 0,5 \cdot z$$

(La ordenada en una sección es la distancia que la sección para del apoyo más próximo por 0,5)



Como puede apreciarse, el diagrama correspondiente a la acción unitaria es discontinuo en el punto de aplicación de la misma, lo que exige que el diagrama correspondiente a las acciones reales lo dividamos precisamente por la sección en que se produce la discontinuidad citada.

El método más simple es que efectuemos la siguiente descomposición:

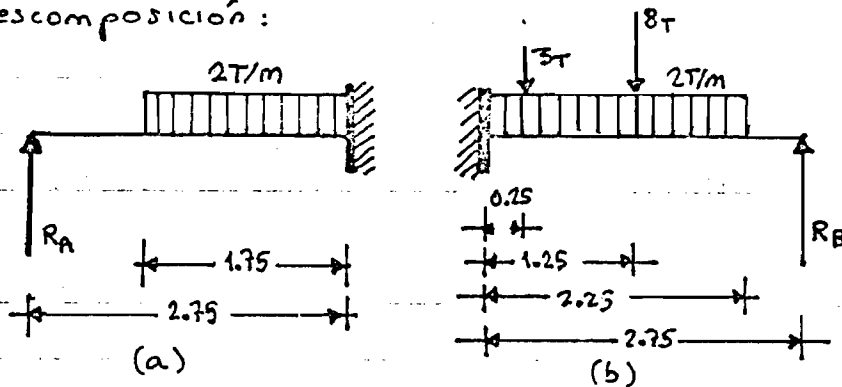


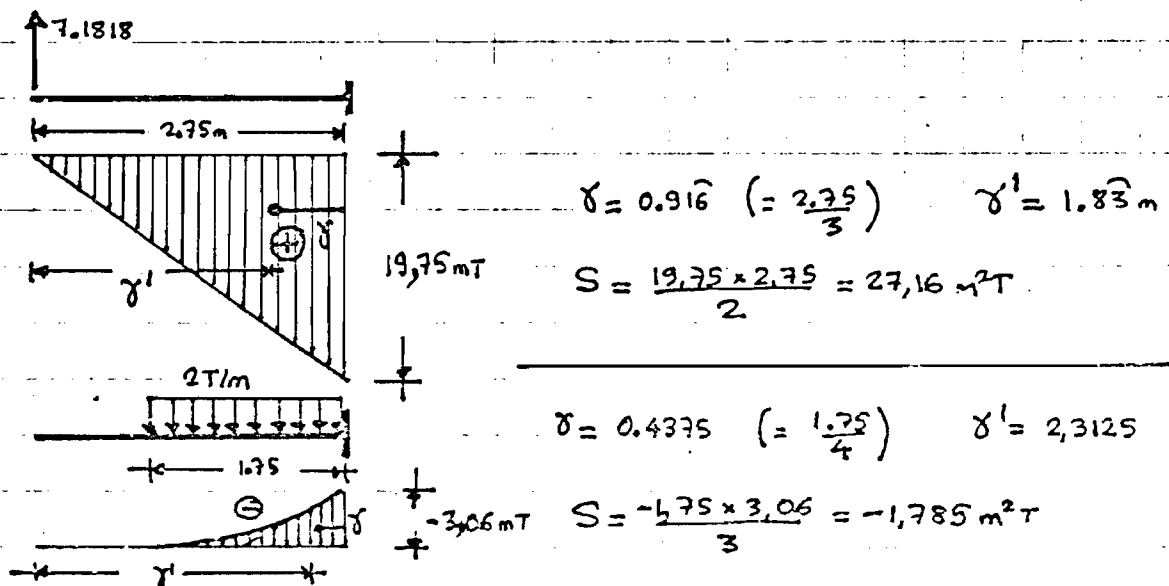
fig. 9.14.5.

Ello nos exige obtener previamente las reacciones, que poseen los siguientes valores:

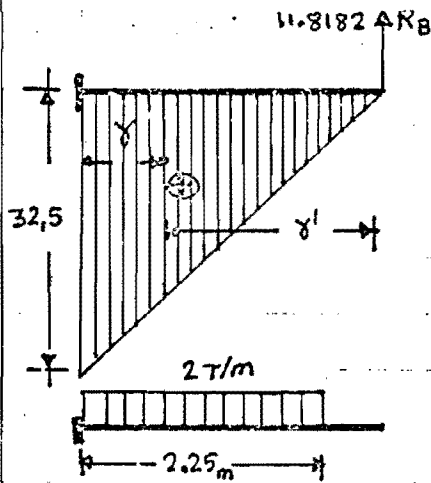
$$R_A = 7.1818$$

$$R_B = 11.8182$$

Cada una de las dos vigas ménsula en que hemos descompuesto la viga original, que son equivalentes sólo a efectos de diagrama, pueden a su vez descomponerse en los siguientes estados elementales.

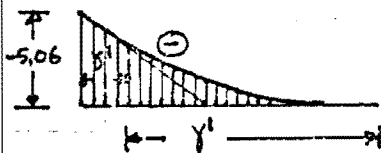


Analicemos la zona derecha (b).



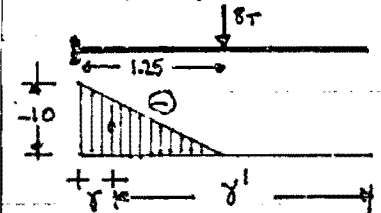
$$\gamma = 0,916 \quad \left(= \frac{2,75}{3} \right) \quad \gamma' = 1,83 \text{ m}$$

$$S = \frac{32,5 \times 2,75}{2} = 44,688 \text{ m}^2 \text{ T}$$



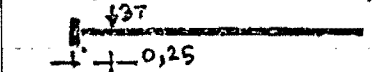
$$\gamma = 0,5625 \text{ m} \quad \gamma' = 2,1875 \text{ m}$$

$$S = \frac{-5,06 \times 2,25}{3} = -3,80 \text{ m}^2 \text{ T}$$



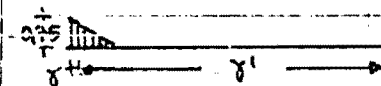
$$\gamma = \frac{1,25}{3} = 0,41\bar{6} \quad \gamma' = 2,3$$

$$S = \frac{-10 \cdot 1,25}{2} = -6,25 \text{ m}^2 \text{ T}$$



$$\gamma = \frac{0,25}{3} = 0,08\bar{3} \quad \gamma' = 2,6\bar{6}$$

$$S = \frac{-0,75 \cdot 0,25}{2} = -0,094 \text{ m}^2 \text{ T}$$



Aplicando Mohr-Maxwell, y la integración de Verreschaguin, el descenso buscado, valdrá:

$$\delta = \frac{1}{EI_z} \int M(x) m(x) dx = \frac{1}{EI} \sum S_i \frac{\gamma_i'}{2} = \frac{1}{2EI} \sum S_i \gamma_i'$$

$$\delta = \frac{10^9}{2 \cdot 10800 \cdot 2,1 \cdot 10^6} \left(27,16 \cdot 1,83 - 1,785 \cdot 2,3125 + 44,688 \cdot 1,83 - 3,80 \cdot 2,1875 - 6,25 \cdot 2,3 - 0,094 \cdot 2,6\bar{6} \right)$$

$$\delta = 2,30 \text{ cms}$$

9.15. TEOREMA DEL MÍNIMO (o de MENABREA)

El teorema del mínimo fue enunciado por primera vez por el ingeniero militar italiano L.F. Menabrea, basándose exclusivamente en su intuición, pero fue incapaz de proporcionar una demostración que lo avalase, lo que no es en cierta forma extraño, puesto que aún Castigliano no había establecido sus teoremas, y tal como veremos el método más simple es el uso de los mismos para deducir correctamente el TEOREMA DE MENABREA, tal como lo hizo Castigliano.

El teorema de Menabrea establece que en TODA ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA, LA DERIVADA PARCIAL DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN RESPECTO A CUALQUIERA DE LAS SOLICITACIONES HIPERESTÁTICAS ES NULA.

En una estructura articulada, de esfuerzos normales: $N_1, N_2 \dots N_n$, se verificará:

$$\frac{\partial W}{\partial N_i} = 0$$

Lo cual puede enunciarse señalando, que **TOCA SOLICITACIÓN HIPERESTÁTICA ES TAL QUE MINIMIZA LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN (TEOREMA DE MENABREA).**

o bien:

LAS TENSIONES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO DEBEN SER TALES QUE UNA VARIACIÓN DIFERENCIAL DE LAS MISMAS NO PRODUCE VARIACIÓN ALGUNA EN LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

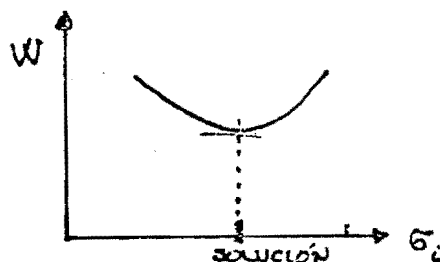


Fig. 9.15. 4.

Por lo tanto:

LAS TENSIONES SOLUCIONES DE TODO PROBLEMA ELÁSTICO, SON LAS QUE PERMITEN MINIMIZAR LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN (MENABREA)

Vamos a utilizar la vía demostrativa que en su día utilizó Alberto Castigliano, si bien generalizada, ya que él la restringió a estructuras en celosía.

Supongamos que en un elemento estructural eliminamos un rebanada diferencial de espesor dx , y para que la estructura mantenga sus condiciones originales, la sustituiremos por las acciones que la misma transmitía a cada uno de sus lados, acciones que denominamos SOLICITACIONES si el elemento estructural es una BARRA.

En tales circunstancias, puede remplazarse la rebanada eliminada por un fuelle imaginario carente de aportar resistencia a cualquier tipo de movimientos relativos entre la sección A_1 y A_2 , y no obstante se mantendrá en el resto del elemento las condiciones originales.

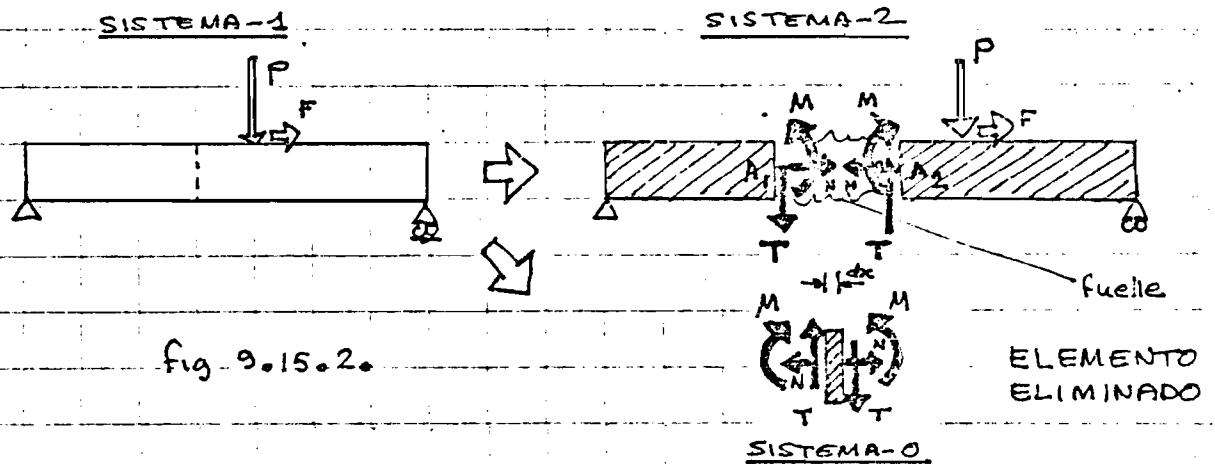


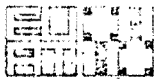
fig. 9.15.2.

La energía de deformación del elemento estructural alterado en el que se ha introducido el fuelle, lo simbolizaremos con W^* , y la correspondiente al elemento original por W

Se verificará:

$$W = W^* + \underbrace{\frac{M^2 dx}{2EI} + \frac{N^2 dx}{2EA} + \frac{T^2 dx}{2G_A} + \frac{M_T^2 dx}{2G_I}}_{\text{energía interna de deformación en la rebanada eliminada, de longitud } dx, \text{ en la que las SOLICITACIONES SON CONSTANTES.}} \quad (9.15.10)$$

energía interna de deformación en la rebanada eliminada, de longitud dx , en la que las SOLICITACIONES SON CONSTANTES.



Si derivamos respecto a cada una de las solicitaciones, obtendremos.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial N} &= \frac{\partial W^*}{\partial N} + N \frac{dx}{EA} \\ \frac{\partial W}{\partial M_F} &= \frac{\partial W^*}{\partial M_F} + M_F \frac{dx}{EI_z} \\ \frac{\partial W}{\partial T} &= \frac{\partial W^*}{\partial T} + T \frac{dx}{G_T A_R} \\ \frac{\partial W}{\partial M_T} &= \frac{\partial W^*}{\partial M_T} + M_T \frac{dx}{G_T I_T} \end{aligned} \right\}$$

(9.15.20.)

La derivada parcial $\frac{\partial W^*}{\partial N}$ según CASTIGLIANO, proporciona el movimiento relativo entre las secciones A_1 y A_2 , con el criterio de signo que corresponde al sentido de las fuerzas respecto a las que se deriva, y en consecuencia si:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \text{ y } A_2 \text{ se acercan} &\Rightarrow \frac{\partial W^*}{\partial N} > 0 \\ A_1 \text{ y } A_2 \text{ se alejan} &\Rightarrow \frac{\partial W^*}{\partial N} < 0 \end{aligned} \right\}$$

Por otro lado, el producto $N \frac{dx}{EA}$ nos proporciona el alargamiento o acortamiento de la rebanada eliminada, pero si $N > 0$, en cuyo caso A_1 y A_2 se alejarían, lo obtendremos positivo, y si existe compresión, negativo

$$\left. \begin{aligned} A_1 \text{ y } A_2 \text{ se acercan} &\Rightarrow N \frac{dx}{EA} < 0 \\ A_1 \text{ y } A_2 \text{ se alejan} &\Rightarrow N \frac{dx}{EA} > 0 \end{aligned} \right\}$$

Pero el módulo de $\left| \frac{\partial W^*}{\partial N} \right|$ indicativo del movimiento relativo entre A_1 y A_2 , y el de $\left| N \frac{dx}{EA} \right|$ representativo del alargamiento o acortamiento de la rebanada deben ser forzosamente iguales, pero según lo expuesto poseen SIGNOS OPUESTOS, y en consecuencia

$$\frac{\partial W^*}{\partial N} + \frac{N dx}{EA} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial W}{\partial N} = 0}$$

A iguales conclusiones se alcanza analizando las restantes igualdades, y en consecuencia:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial N} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial M_F} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial T} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial M_T} = 0} \quad (9.15.3.)$$

Lo que demuestra, que las SOLICITACIONES en cualquier SECCIÓN de un elemento, son tales que hacen que la ENERGÍA DE DEFORMACIÓN SE MINIMICE. (En realidad sólo hemos demostrado que hacen que W sea un extremo, pero es relativamente sencillo alcanzar como conclusión final de que dicho extremo corresponde a un MINIMO).

Mediante un proceso análogo, podría sustituirse en el proceso demostrativo, solicitaciones por tensiones y alcanzaríamos la conclusión de que dichas tensiones también deben ser las que minimizan la energía interna de deformación.

Extraigamos un cubo diferencial del interior de un sólido en un punto cualquiera del mismo, y apliquemos en las superficies interiores del hueco creado, las tensiones que experimentaba el cubo eliminado.

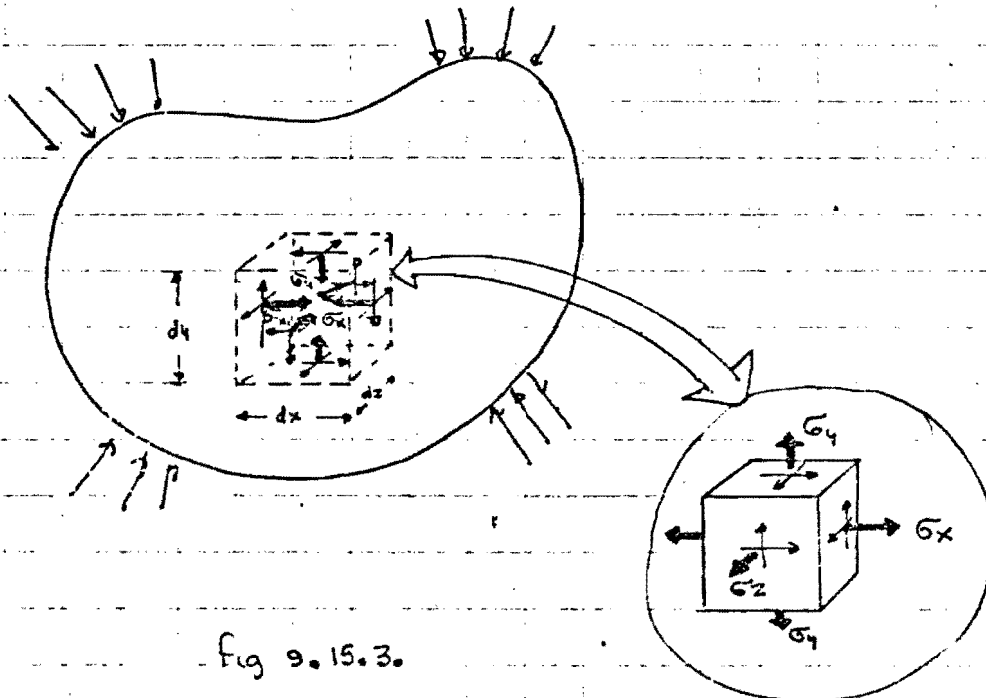
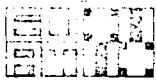


Fig 9.15.3.



La energía interna de deformación, será la del sólido con el hueco interior, más la energía interna del cubo diferencial, por lo que si simbolizamos la primera por W^* , resultará:

$$W = W^* + \frac{dV}{2E} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right)$$

Si derivamos respecto a una tensión, sea esta por ejemplo σ_x , se verificará:

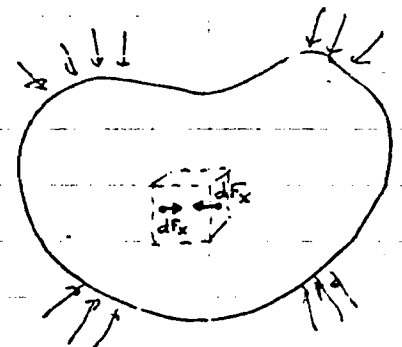
$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_x} + \frac{dV}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z)$$



$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial W^*}{\partial (\sigma_x d_y d_z)} d_y d_z + \frac{d_y d_z dx}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = d_y d_z \left(\frac{\partial W^*}{\partial dF_x} + dx E_x \right)$$

$$dF_x = \sigma_x d_y d_z$$



Por Castigliano: $\frac{\partial W^*}{\partial dF_x}$ proporciona el movimiento relativo entre las dos caras del cubo diferencial extraído, y el término $dx E_x$ la variación diferencial de longitud del cubo según el eje X, lo que evidentemente deben ser valores coincidentes, pero dado que al igual que aconteció con las solicitaciones se obtienen con criterios de signos opuesta, resulta que: $\frac{\partial W^*}{\partial dF_x} + dx E_x = 0$, y ello implica que:

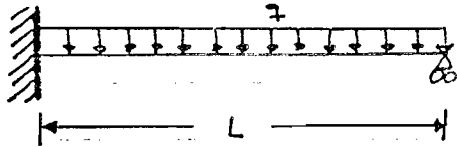
$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = 0$$

Repetiendo el proceso para cada tensión, se deduce que:

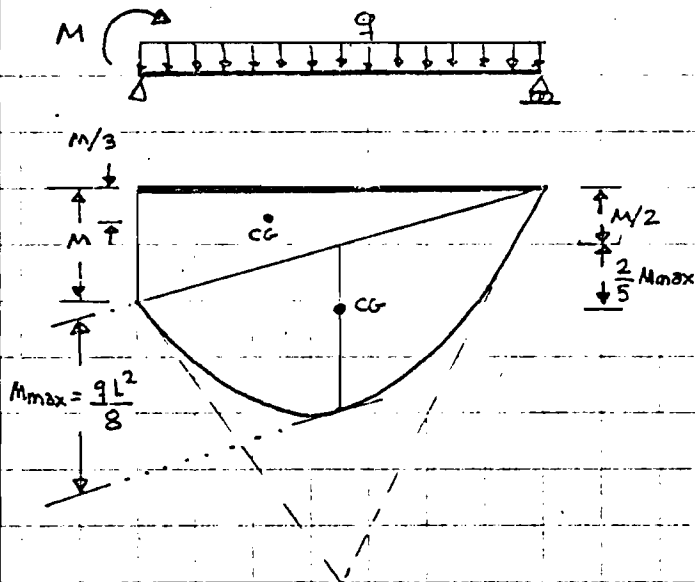
$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_z} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{yz}} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{zx}} = 0}$$

tal como se pretendió demostrar.

EJERCICIO 9.15.1. Obtener el momento de empotramiento perfecto de la siguiente viga sometida a carga uniformemente repartida.



SOLUCIÓN La podremos transformar en una viga simplemente apoyada, aplicando sobre la misma el momento de empotramiento perfecto, el cual lo supondremos positivo y de esta forma se obtendrá con su signo.



El diagrama de momento flectores puede obtenerse por superposición de los correspondientes a las dos acciones exteriores: q y M

La energía interna será el momento estático de dicho diagrama dividido por EI . Por lo que:

$$W = \frac{U_x}{EI_2} =$$

$$= \frac{\frac{ML}{2} \cdot \frac{M}{3} + \left(\frac{2}{3} L \cdot M_{\max}\right) \left(\frac{2}{5} M_{\max} + \frac{M}{2}\right)}{EI_2} = \frac{L}{6EI_2} \left(M^2 + 2 \cdot \frac{qL^2}{8} \left(\frac{4}{5} \frac{qL^2}{8} + M \right) \right)$$

$$W = \frac{L}{6EI} \left(M^2 + \frac{qL^2}{4} \left(\frac{qL^2}{10} + M \right) \right)$$

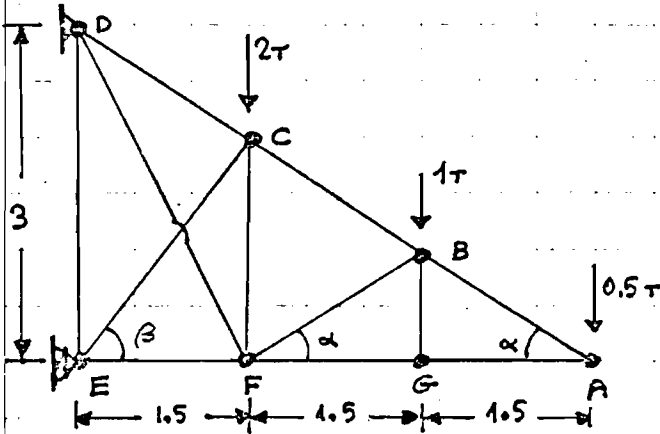
Si M según Menabre debe ser tal que minimice la energía de deformación, deberá verificarse:

$$\frac{\partial W}{\partial M} = 0 \Rightarrow \frac{L}{6EI} \left(2M + \frac{qL^2}{4} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{M = -\frac{qL^2}{8}}$$



9.15.2.

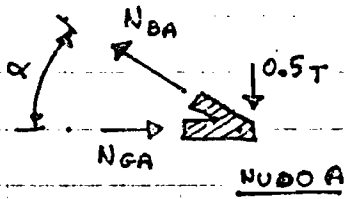
EJERCICIO Calcular los esfuerzos normales, de cada una de las barras de la estructura siguiente :



El área de todas las barras es de 4cm^2 y el módulo de Young es $2,1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$.

$$\begin{cases} (\cos \alpha = 0.8321) \\ (\sin \alpha = 0.5547) \\ (\cos \beta = 0.6) \\ (\sin \beta = 0.8) \end{cases}$$

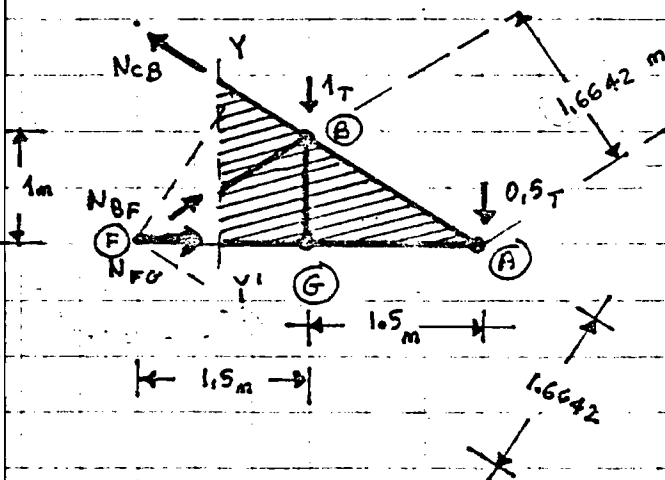
SOLUCIÓN La estructura es hiperestática, por lo que su cálculo podrá realizarse analizando previamente la estructura isostática resultante de eliminar una de las barras, sea esta la DF



$$\begin{aligned} N_{BA} \sin \alpha &= 0.5T \Rightarrow N_{BA} = 0.9014T \\ |N_{GA}| &= N_{BA} \cos \alpha \Rightarrow N_{GA} = -0.75T \end{aligned}$$

(Añadimos el signo menos a N_{GA} , pues trabaja a compresión)

Efectuando un corte YY', se obtendrán los esfuerzos normales en las barras CB, FB y FG



Tomando momentos respecto a A:

$$1 \cdot 1.5 = |N_{BF}| \cdot 1.6642 \Rightarrow N_{BF} = -0.9013$$

Tomando momentos respecto a B:

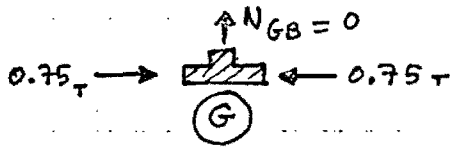
$$|N_{FG}| \cdot 1 = 0.5 \cdot 1.5 \Rightarrow N_{FG} = -0.75$$

Tomando momentos respecto a F:

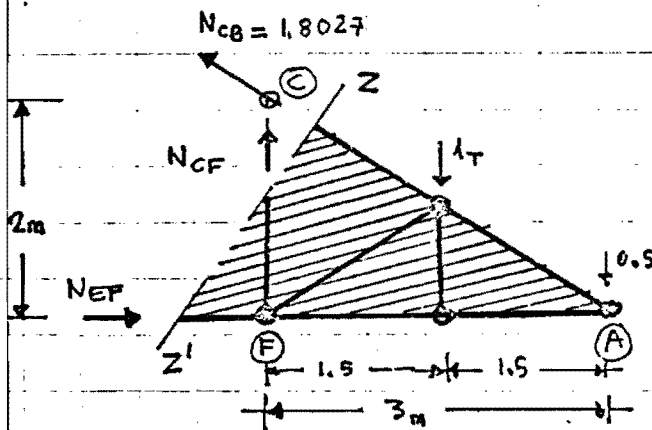
$$N_{CB} \cdot 1.6642 = 0.5 \cdot 3 + 1 \cdot 1.5 \Rightarrow N_{CB} = 1.3027$$



El esfuerzo de la barra BG debe ser nulo, puesto que si no fuese así, sería imposible el equilibrio del nudo G



Efectuemos un corte ZZ', y determinaremos mediante el mismo, los esfuerzos en las barras EF, y FC



Tomando momentos respecto a A:

$$|N_{CF}| \cdot 3 = 1 \cdot 1.5$$



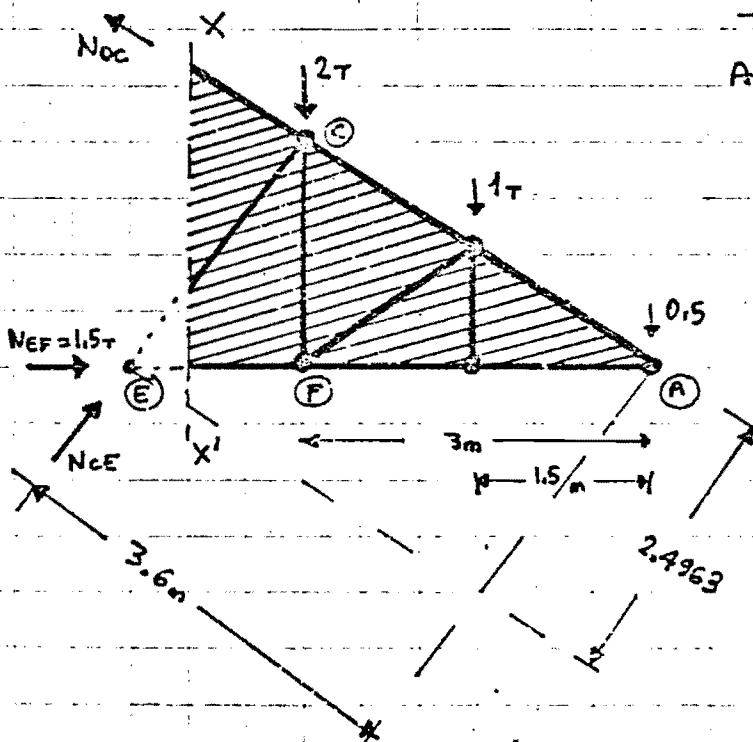
$$N_{CF} = 0.5T$$

Tomando momentos respecto a C:

$$|N_{EF}| \cdot 2 = 1.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 3$$

$$N_{EF} = -1.5T$$

Efectuando un corte XX', determinaremos los esfuerzos de las barras EC y DC



Tomando momentos respecto a A:

$$|N_{CE}| \cdot 3.6 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1.5$$

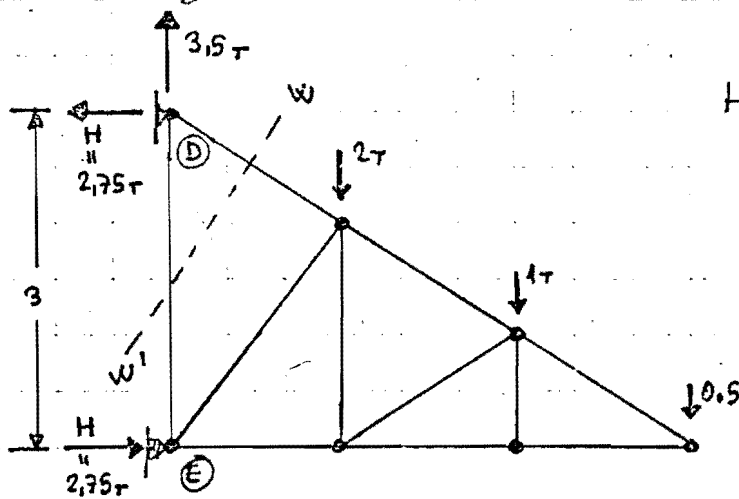
$$N_{CE} = -2.0833T$$

Tomando momentos respecto a E:

$$N_{DC} \cdot 2.4963 = 2 \cdot 1.5 + 1 \cdot 3 + 0.5 \cdot 4.5$$

$$N_{DC} = 3.3049$$

El esfuerzo en la barra ED puede obtenerse mediante un corte WW', una vez calculadas las reacciones.



$$H \cdot 3 = 2 \cdot 1.5 + 1 \cdot 3 + 0.5 \cdot 4.5$$



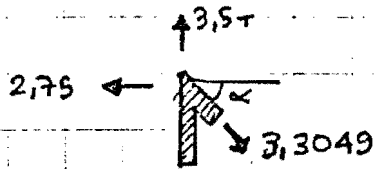
$$H = 2.75$$

Imponiendo el equilibrio del nudo D, también puede obtenerse el esfuerzo de la barra DE

$$N_{DE} = 3.5 - 3.3049 \cdot \text{sen } \alpha$$

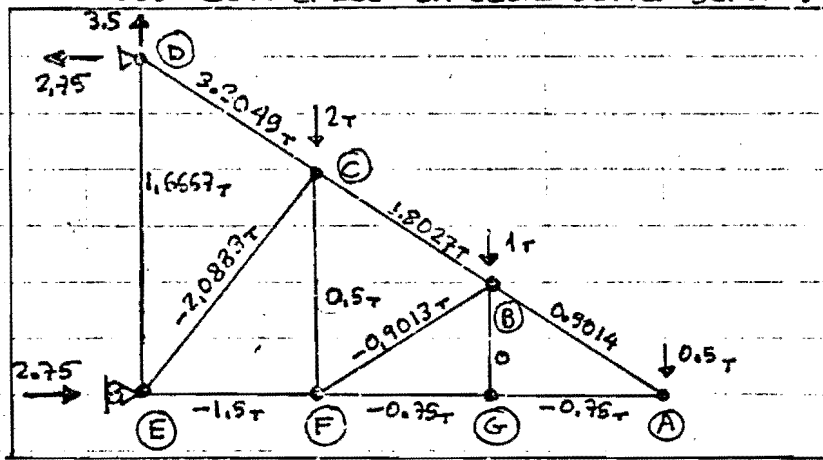


$$N_{DE} = 1.6667T$$



$$N_{DE} = 1.6667$$

Los esfuerzos en cada barra serán:

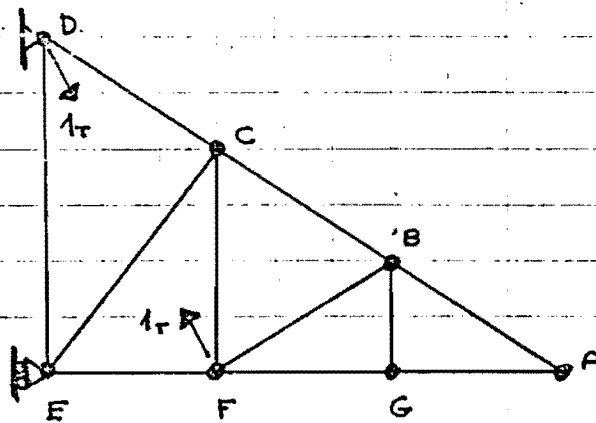


{N}

La barra eliminada (DF), introducirá unas acciones en D y F que corregirán los esfuerzos normales indicados en la figura.

Dado que no conocemos el citado esfuerzo N_{DF} , supondremos que la misma es unitaria, y determinemos los esfuerzos que se generarían en todas las barras.

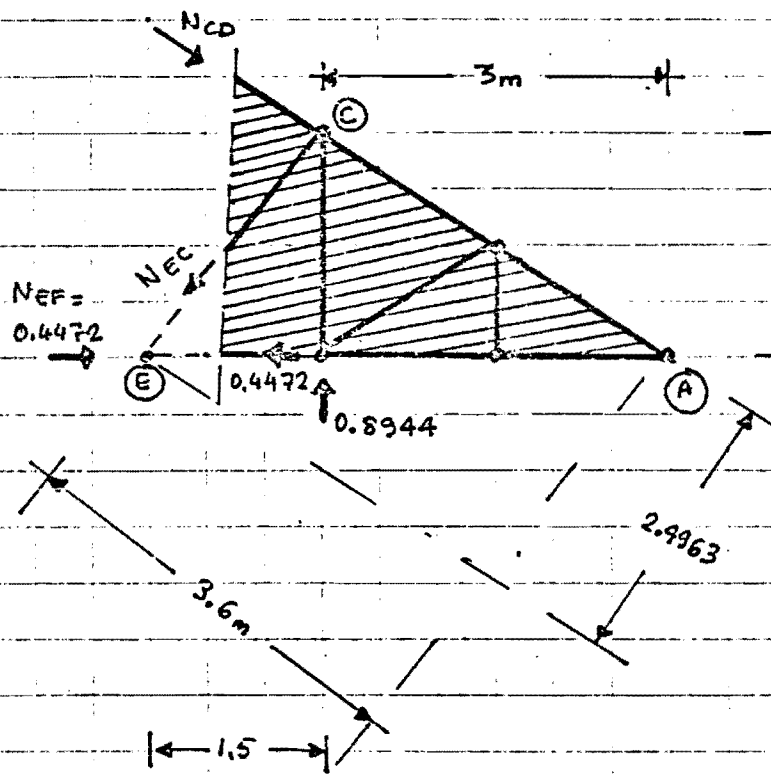
Si la barra DF estuviese traccionada, las acciones que induciría en los citados nudos tendrán los sentidos que se indican en la figura.



La acción unitaria aplicada en D, únicamente genera reacciones que la anulan

Mediante un proceso análogo al anteriormente desarrollado se obtienen los esfuerzos normales, que

genera la acción unitaria existente en F.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_{EC} \cdot 3,6 = 0,8944 \cdot 3$$

$$N_{EC} = 0,7453$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow N_{EF} = -0,4472$$

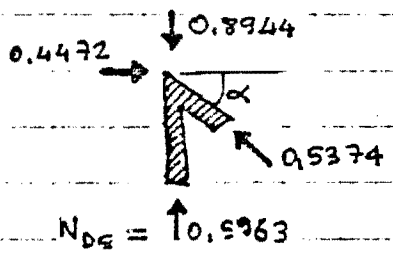
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow N_{CD} \cdot 2,4963 = 0,8944 \cdot 1,5$$

$$N_{CD} = -0,5374$$

Para que exista equilibrio en el nudo F, no trabajando las barras FB y FG, es preciso que:

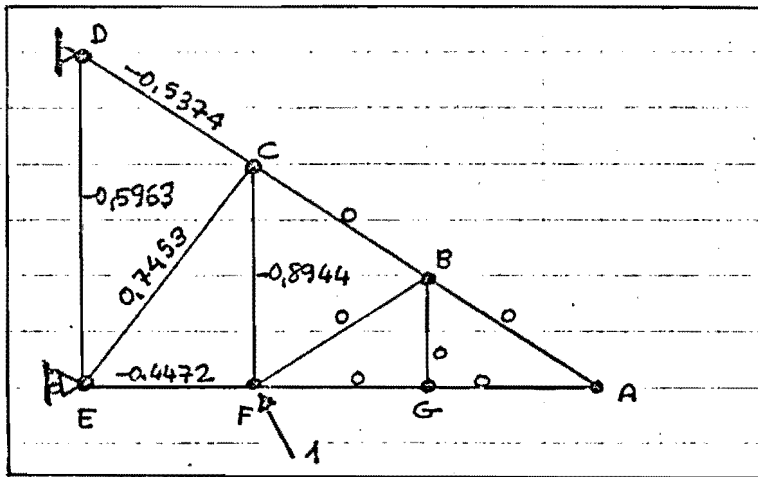
$$N_{FC} = -0,8944 \tau$$

Analizando el equilibrio del nudo D, obtendremos el esfuerzo de la barra ED



$$|N_{DE}| = 0,8944 - 0,5374 \cdot \text{sen} \alpha$$

$$N_{DE} = -0,5963$$



{n}

RESOLUCION POR MENABREA.—

Simolicemos los esfuerzos normales reales en cada barra, por N^* , verificandose que:

$$N_i^* = N_i + N_{FD} \cdot n_i$$

La energia de deformación del sistema, vendra' dado por:

$$W = \sum (N_i + N_{FD} n_i)^2 \frac{L_i}{2EA_i} + \frac{N_{FD}^2}{2EA_{FD}}$$

Simbolizando por $k_{N_i} = EA_i/L_i$, y derivando respecto al esfuerzo normal de la barra suprimida, debera' verificarse:

$$\frac{\partial W}{\partial N_{FD}} = 0 = \sum n_i (N_i + N_{FD} n_i) \frac{1}{k_{N_i}} + \frac{N_{FD}}{k_{N_{FD}}}$$

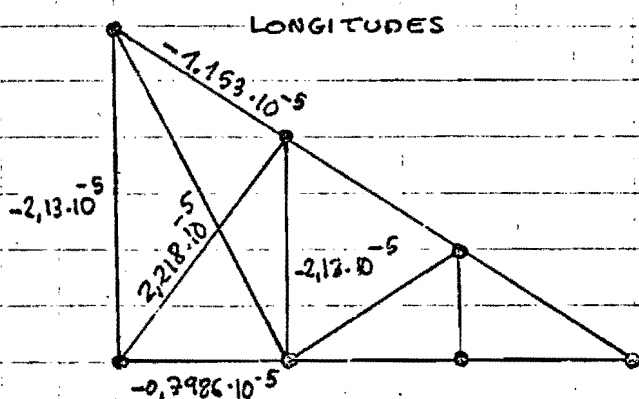
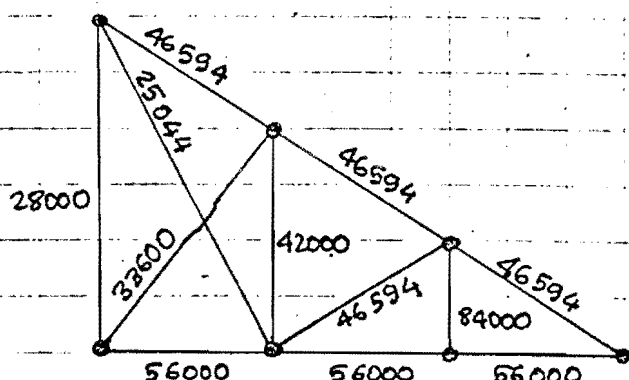
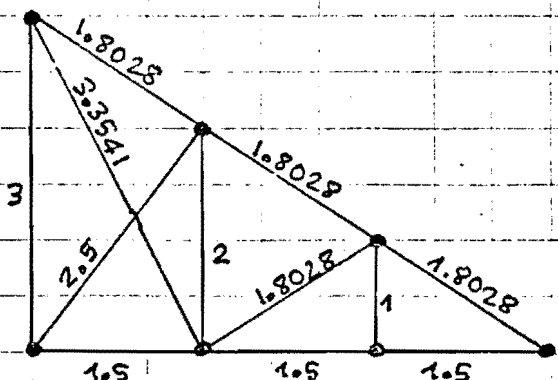


$$\sum n_i N_i \frac{1}{k_{N_i}} = -N_{FD} \left(\frac{1}{k_{N_{FD}}} + \sum n_i^2 \frac{1}{k_{N_i}} \right)$$



$$N_{FD} = - \frac{\sum n_i N_i \frac{1}{k_{N_i}}}{\frac{1}{k_{N_{FD}}} + \sum n_i^2 \frac{1}{k_{N_i}}}$$

Calculemos pues, la rigidez al esfuerzo normal de todas las barras.



$$\Delta l_i = n_i / K_{N_i}$$

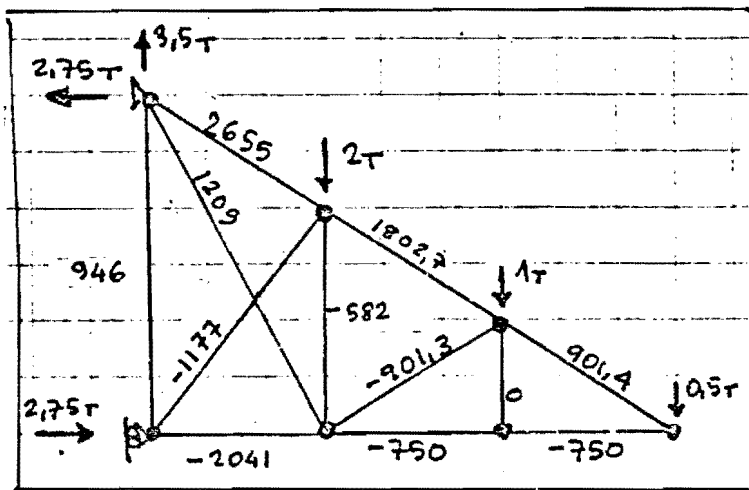
$$\sum N_i n_i / K_{N_i} = \sum N_i \Delta l_i = 3304,9 (-1,153 \cdot 10^{-5}) + (500) (-2,13 \cdot 10^{-5}) + (4500) (-0,7986 \cdot 10^{-5}) + 1666,7 (-2,13 \cdot 10^{-5}) + (-2083,3) 2,218 \cdot 10^{-5} = \underline{-0.1195}$$

$$\sum n_i^2 / K_{N_i} = \sum n_i \Delta l_i = 0,537 \cdot 1,153 \cdot 10^{-5} + 0,8944 \cdot 2,13 \cdot 10^{-5} + 0,4472 \cdot 0,7986 \cdot 10^{-5} + 0,5963 \cdot 2,13 \cdot 10^{-5} + 0,7453 \cdot 2,218 \cdot 10^{-5} = 5,305 \cdot 10^{-5}$$

$$N_{FD} = \frac{-0.1185}{\frac{1}{25044} + 5.305 \cdot 10^{-5}} = 1209 \text{ Kg}$$

Por lo que los axiles en cada barra seran:

$$N^* = N_i + N_{FD} n_i \rightarrow$$



(expresados en Kg)



A continuación exponemos una pequeña biografía de los investigadores que han efectuado las más importantes aportaciones en la teoría que acabamos de presentar.

Sin duda, Otto MOHR merece un apartado específico en cualquiera de los capítulos de la RESISTENCIA DE MATERIALES, pues es uno de sus grandes impulsores, y el tema de los teoremas energéticos no es una excepción.



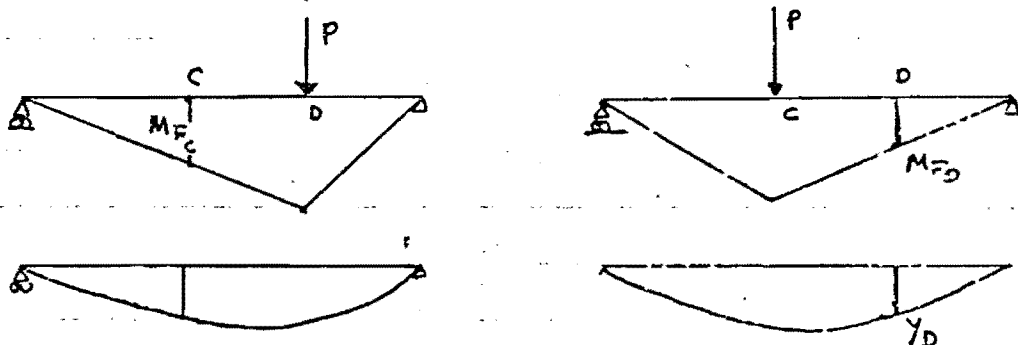
OTTO MOHR (1836-1918)

Mohr nació en Wesselburen Holstein, en la costa del Mar del Norte, ingresando a los dieciséis años en el Instituto Politécnico de Hannover.

Nada más que se tituló como Ingeniero, intervino de inmediato en la construcción del ferrocarril que debía unir Hannover con Oldenburg, en donde se efectuaron las primeras estructuras de acero de Alemania.

Simultaneó su actividad como Ingeniero con la pedagógica publicando trabajos de gran interés en el Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins de Hannover

Mohr dedujo la reciprocidad de los coeficientes de influencia, que implica las igualdades siguientes.



$$M_{FC} = M_{FD}$$

$$y_C = y_D$$

Lo que según el teorema de reciprocidad de Betti es de inmediata deducción

Mohr fue pues el que introdujo el concepto de coeficiente de influencia, y propuso utilizar la elástica de una viga sometida a una carga puntual, para la obtención del corrimiento que puede producir cualquier estado de cargas en una cierta sección, lo que permite considerar también a Mohr como introductor del concepto de LINEA DE INFLUENCIA, juntamente con Winkler que de forma independiente llegó a los mismos conceptos.

Mohr perfeccionó el círculo propuesto por Culmann, creando de esta forma uno de los instrumentos más eficaces para el análisis de las tensiones que pueden producirse en un punto dado, pero sobre todo nos legó un método que permite una fácil visualización e interpretación de los posibles valores máximos y mínimos previsibles de un estado tensional, tanto plano como tripe.

Fue el primero en percatarse que la ecuación diferencial de un polígono funicular y la elástica son análogas, lo que le condujo a enunciar la TEORÍA DE LA VIGA CONJUGADA, y a la creación del MÉTODO GRÁFICO para la determinación de las deformadas de vigas, que es sumamente didáctico y práctico.

También creó un ingenioso método para la resolución gráfica de VIGAS CONTINUAS, que si bien, hoy ya ha perdido su vigencia ante la aparición de las calculadoras programables, fue durante muchos años el método más práctico para el análisis de dichos elementos estructurales.

Enunció los teoremas que conocemos con su nombre, para el análisis de deformación en elementos solicitados a flexión que son una pieza fundamental en el actual cuerpo doctrinal de la



RESISTENCIA DE MATERIALES.

Fue el primero en proponer que puede determinarse si una estructura en celosía es crítica o no, mediante la aplicación del PRINCIPIO de los TRABAJOS VIRTUALES, ideando una ingeniosa construcción gráfica para la determinación de los corrimientos virtuales que se producen en una estructura, que al eliminarse una barra, resulta deformable.

El método propuesto por Mohr para la determinación gráfica de los corrimientos virtuales, puede considerarse como antecesor del método de Williot para el cálculo de los corrimientos que se producen en una estructura en celosía, método que también Mohr perfeccionó.

Tal como se acaba de exponer en la teoría desarrollada MOHR, dedujo el MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA que ya había ideado MAXWELL, pero que él, al igual que todos los técnicos de la época desconocían dicho trabajo, por lo que se debe a Mohr su difusión.

Mohr en virtud de sus múltiples aportaciones científicas, fue invitado a que ocupase la plaza de PROFESOR DE INGENIERIA MECÁNICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO DE STUTTGART, en donde demostró que sus portentosas cualidades como investigador había que adiciónar una extraordinaria capacidad pedagógica, que originó un gran interés por la RESISTENCIA DE MATERIALES en sus alumnos, algunos de los cuales se transformarían en brillantes investigadores como C. Bach y August Föppl.

En la biografía de Föppl se señala que Mohr era considerado el mejor de los profesores del Instituto Politécnico de Stuttgart, a pesar de su lentitud en la expresión oral y a la deficiencia de sus dibujos en la pizarra, lo que quedaba ampliamente compensado con la perfecta estructuración de cuanto exponía, en donde siempre había un sello personal, que originaba que el alumno



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.90.

fuese consciente de que asistiría a la presentación de novedades científicas, que a partir de entonces la Ciencia Oficial incorporaría.

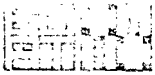
En 1873 se trasladó al Politécnico de Dresden donde ejerció la docencia hasta su jubilación a los 69 años.

A Mohr se debe una visión GRÁFICA de la Resistencia de Materiales, que abrió un camino en donde la interpretación del fenómeno físico es tanto o más importante que la elaboración de ecuaciones que lo permitan cuantificar.

Si a Mohr hemos dedicado un pequeño apartado en el Capítulo de los TEOREMAS ENERGÉTICOS, en el mismo no podemos ignorar a ALBERTO CASTIGLIANO, pues tal como ya hemos visto su aportación en este campo específico fue fundamental.

ALBERTO CASTIGLIANO nació en Asti, Italia en 1847, dedicándose en su primera época a maestro de enseñanza primaria, pero a los veintitres años ingresó en el Instituto Politécnico de Turín, en donde efectuó en 1873 para su graduación un trascendental trabajo, que contenía la primera versión de sus teoremas, que se presentaban inicialmente con un campo de aplicación restringido, que él mismo ampliaría a toda tipología estructural, en el trabajo que presentó a la Academia de Ciencias de Turín en 1875 para su publicación, o de una forma ya definitiva en la obra que publicó en francés en 1879 con el título: "Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques"

La causa que publicase sus teorías en francés, fue la escasa repercusión que su trabajo de graduación y su comunicado a la Academia de Ciencias había tenido, y se decidió a intentar difundir su aportación en una lengua, que permitiese impactar en medios que por su mayor nivel técnico estuviesen



propensos para su asimilación y justa valoración.

Castigliano fue el primero en demostrar el PRINCIPIO DEL TRABAJO MÍNIMO que ya había enunciado Menabrea.

La comparación del estado técnico actual de los MÉTODOS ENERGÉTICOS, y el grado de desarrollo que protagonizó Alberto Castigliano en un tiempo relativamente muy corto, (puesto que murió tempranamente), nos permite valorar la capacidad de este ingeniero italiano que sus compatriotas se resistieron a reconocer, pero que al poco tiempo de su muerte, sus teoremas eran el fundamento de la mayor parte de los trabajos estructurales que se desarrollaron en el mundo entero.

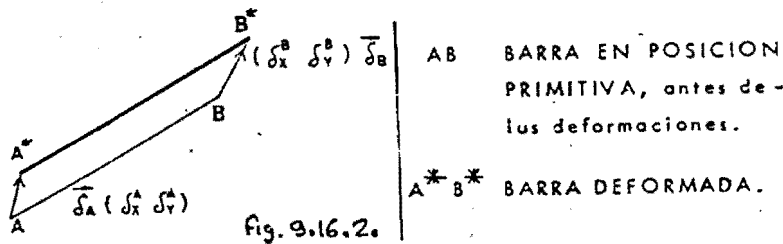
Veamos a continuación, como el MÉTODO MAS MODERNO para el análisis de estructuras en celosía se fundamenta en los TEOREMAS DE CASTIGLIANO.

9.16 METODO MATRICIAL DE LAS DEFORMACIONES

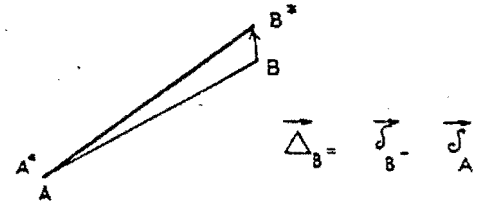
El método matricial de las deformaciones tiene la ventaja de que puede aplicarse indistintamente a celosías isostáticas y a las hiperestáticas, presentando el inconveniente de que no nos proporciona directamente los valores de los esfuerzos normales, sino los corrimientos de los nudos, a partir de los cuales se determinan dichos esfuerzos.

El método se fundamenta en el concepto de rigidez a esfuerzos normales, que nos determina el alargamiento o acortamiento de una barra en función de su esfuerzo normal.

Definida la rigidez a esfuerzos normales K_N podemos determinar el esfuerzo normal que se produce en una barra cuando sus dos extremos sufren un corrimiento. En efecto:



Si trasladamos la barra deformada paralelamente a sí mismo, de forma que el nudo A^* coincida con el A , el vector corrimiento de B se habrá transformado en otro: $\bar{\Delta}_B$

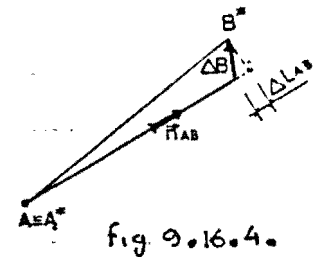


Si proyectamos $\bar{\Delta}_B$ sobre la barra obtendremos el alargamiento o acortamiento que se produce en la misma, y para ello nos bastará con efectuar el producto escalar del vector $\bar{\Delta}_B$ por un versor \bar{n} definido sobre la barra de A hacia B.

$$\Delta L_{AB} = \bar{n}_{AB} \cdot \bar{\Delta}_B$$

$$\Delta L_{AB} = \bar{n}_{AB} (\bar{\delta}_B - \bar{\delta}_A)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_{AB} &= \bar{n}_{AB} \bar{\delta}_B - \bar{n}_{AB} \bar{\delta}_A \\ N_{AB} &= K_N \Delta L_{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{AB} = K_N \bar{n}_{AB} \bar{\delta}_B - K_N \bar{n}_{AB} \bar{\delta}_A \quad (9.16.2)$$



La expresión (9.16.2) nos resuelve la última etapa del método, cuando una vez que ya han sido obtenidos los corrimientos $\bar{\delta}_i$ de todos los nudos, debemos calcular el esfuerzo normal que se produce en cada barra.

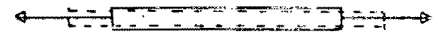


Fig. 9.16.1.

$$N = \frac{AE}{L} \Delta L$$



$$N = K_N \cdot \Delta L$$

$$K_N = \frac{AE}{L}$$

(9.16.1.)



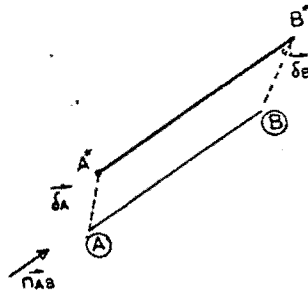
$$(K_N^{AB} = \frac{AE}{L})$$

$$N_{AB} = K_N^{AB} \cdot \Delta L_{AB}$$

$$N_{AB} = K_N^{AB} \cdot \vec{n}_{AB} \cdot (\vec{\delta}_B - \vec{\delta}_A)$$

Lo que equivale a:

$$N_{AB} = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} \cdot n_x^{AB} & -K_N^{AB} \cdot n_y^{AB} \\ K_N^{AB} \cdot n_x^{AB} & K_N^{AB} \cdot n_y^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \delta_x \\ B \\ \delta_x \\ B \\ \delta_y \end{bmatrix}$$



Expresión que nos permite construir una matriz de transformación de los corrimientos en esfuerzos normales, siguiendo el siguiente proceso:

* Vamos a definir una matriz cuyo número de filas vendrá determinado por el número de barras y el de columnas por el número total de componentes de corrimientos no nulos (δ_x ó δ_y).

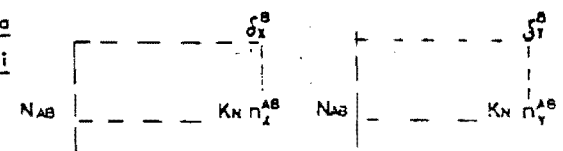
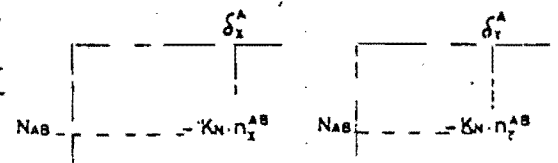
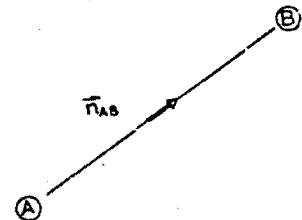
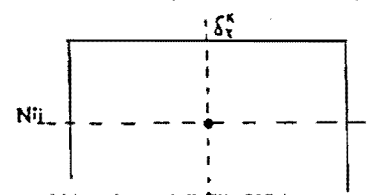
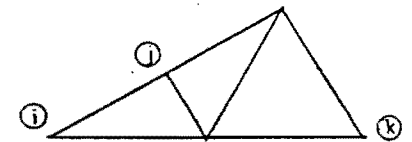
* Se efectúa una asignación concreta de cada barra a una fila y cada componente de corrimiento no nulo a una columna.

* Cada elemento de dicha matriz vendrá definido según los siguientes criterios:

a) si la columna está asignada a una componente de corrimiento de un nudo que no es ninguno de los nudos extremos de la barra correspondiente a la fila del mencionado elemento, éste será nulo

b) Si la componente del corrimiento pertenece a un nudo de los que definen la barra, el elemento valdrá la RIGIDEZ A ESFUERZO NORMAL DE LA BARRA por la CORRESPONDIENTE COMPONENTE DEL VECTOR UNITARIO ASOCIADO A LA BARRA.

Si la componente del corrimiento pertenece al nudo del que parte el vector unitario el signo será negativo, y en caso de que sea el nudo hacia el que se dirige el vector unitario el signo es positivo.



Calculada la matriz de TRANSFORMACION, podemos multiplicar la misma por la matriz columna de los corrimientos manteniendo el criterio de ordenación utilizado anteriormente, y el resultado lo constituirá una matriz columna integrada por los esfuerzos normales de cada una de las barras.



En el caso de una estructura plana, el esfuerzo normal en una barra vendrá determinado por:

$$N_{AB} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{NABx} & -k_{NABY} & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{NABx} & k_{NABY} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \delta_x^A \\ \delta_y^A \\ \vdots \\ \delta_x^B \\ \delta_y^B \\ \vdots \\ \delta_x^T \\ \delta_y^T \end{array}$$

Fig. 9.16.5.

$k_N = \frac{EA_{AB}}{L_{AB}}$

Si con idéntico criterio efectuamos las matrices filas que determinen el esfuerzo normal en cada una de las barras, podremos establecer la siguiente relación matricial

$[N] = [T][\delta] \quad (9.16.3.)$

$[T]$ MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

En donde $[\delta]$ es una MATRIZ COLUMNA cuyos elementos son los corrimientos en los nudos.

$[N]$ matriz COLUMNA cuyos elementos son los esfuerzos normales en las barras

$[T]$ matriz RECTANGULAR compuesta por elementos $\pm k_N^i n_{ijx}$ o $\pm k_N^i n_{ijy}$ o 0

0 \Rightarrow si la columna corresponde a corrimientos de un nudo que no pertenecen a la barra a que está asociada la fila.

$+k_N^i n_{ij}$ signo más si el corrimiento a que está asociada la columna, corresponde a un nudo hacia el que se DIRIGE EL VERSOR

Pásemos a como determinar los corrimientos δ_x^i δ_y^i de cada nudo i , mediante la aplicación del TEOREMA DE CASTIGLIANO, para lo cual debemos calcular previamente la expresión que determina la ENERGÍA O TRABAJO DE DEFORMACIÓN DE LA ESTRUCTURA.

La energía de deformación de una barra, vendrá determinado según Clapeyron por:

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \Delta L_{AB} \cdot N_{AB}$$

Como:

$$N_{AB} = K_N^{AB} \Delta L_{AB}$$

ello implica que:



$$W_{AB} = \frac{1}{2} K_N^{AB} \Delta L_{AB}^2$$



$$W_{AB} = \frac{1}{2} K_N^{AB} (\vec{n}_{AB} \cdot (\vec{\delta}^B - \vec{\delta}^A))^2$$

$$(\Delta L_{AB} = \vec{n}_{AB} \cdot (\vec{\delta}^B - \vec{\delta}^A))$$

Por lo tanto:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n K_N^{ij} (\vec{n}_{ij} \cdot (\vec{\delta}^i - \vec{\delta}^j))^2$$

Aplicando Castigliano, estableceremos que:

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_{Ax}} = P_{Ax}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_{Ay}} = P_{Ay}$$

Por lo tanto:

$$P_{Ax} = \sum_{Bi=1}^{n'} K_N^{Bi} (n_{Bi_x} (\delta_x^B - \delta_x^i) + n_{Bi_y} (\delta_y^B - \delta_y^i)) n_{Bi_x}$$

$$P_{Ay} = \sum_{Bi=1}^{n'} K_N^{Bi} (n_{Bi_x} (\delta_x^B - \delta_x^i) + n_{Bi_y} (\delta_y^B - \delta_y^i)) n_{Bi_y}$$

(9.16.4)

La expresión (9.16.4) puede estructurarse en forma matricial.



Concretemos la expresión (9.16.4.) a un nudo en el que concurren 4 barras, según indica la fig. 9.16.6.

Definamos las siguientes matrices asociadas a cada una de las barras concurrentes al nudo B, de la fig. 9.16.6.

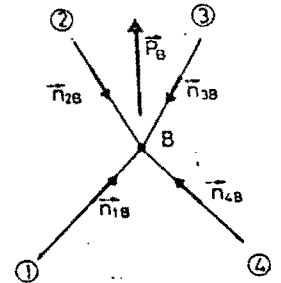


Fig 9.16.6.

$$\left. \begin{aligned}
 [k^{1B}] &= \begin{bmatrix} K_{N_x}^{1B} & K_{N_y}^{1B} \\ K_{N_x}^{1B} & K_{N_y}^{1B} \end{bmatrix} \\
 [k^{2B}] &= \begin{bmatrix} K_{N_x}^{2B} & K_{N_y}^{2B} \\ K_{N_x}^{2B} & K_{N_y}^{2B} \end{bmatrix} \\
 [k^{3B}] &= \begin{bmatrix} K_{N_x}^{3B} & K_{N_y}^{3B} \\ K_{N_x}^{3B} & K_{N_y}^{3B} \end{bmatrix} \\
 [k^{4B}] &= \begin{bmatrix} K_{N_x}^{4B} & K_{N_y}^{4B} \\ K_{N_x}^{4B} & K_{N_y}^{4B} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\}$$

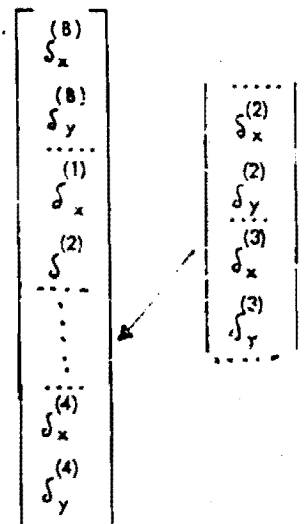
matrices que se denominarán de BARRA.

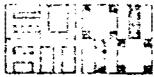
y como matriz de un NUDO (B) a la suma de todas las matrices de rigidez de las barras que concurren dicho nudo, es decir:

$$[K_B] = [k^{1B}] + [k^{2B}] + [k^{3B}] + [k^{4B}]$$

Puede demostrarse que (9.16.4.) equivale a:

$$\begin{bmatrix} P_x^B \\ P_y^B \end{bmatrix} = [K_B] \begin{bmatrix} \delta_x^{(B)} \\ \delta_y^{(B)} \end{bmatrix} - [k^{1B}] \begin{bmatrix} \delta_x^{(1)} \\ \delta_y^{(1)} \end{bmatrix} - [k^{2B}] \begin{bmatrix} \delta_x^{(2)} \\ \delta_y^{(2)} \end{bmatrix} - [k^{3B}] \begin{bmatrix} \delta_x^{(3)} \\ \delta_y^{(3)} \end{bmatrix} - [k^{4B}] \begin{bmatrix} \delta_x^{(4)} \\ \delta_y^{(4)} \end{bmatrix}$$





Una posibilidad de construir con la máxima facilidad el mencionado sistema de ecuaciones lineales, es aplicar la conclusión anterior a todos y a cada uno de los nudos de la estructura incluyendo los apoyos, y posteriormente excluir las ecuaciones correspondientes a las componentes nulas o que pudieran ser nulas de las reacciones. Estas ecuaciones eliminadas, una vez obtenidos los corrimientos nos proporciona el valor de dichas componentes de las reacciones.

Aplicándolo a toda una estructura, obtendremos un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas serán los corrimientos \bar{d} de los nudos libres, y por lo tanto habrá tantas incógnitas como el doble de los nudos libres, más los grados de libertad de desplazamientos que posean los apoyos.

Así por ejemplo :

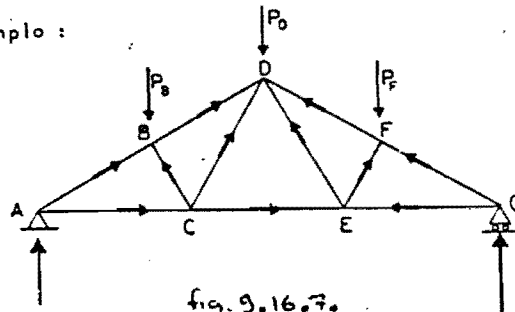


fig. 9.16.7.

Se calculan:

* Rigidez a esfuerzo normal de cada barra $\bar{K}_N = \frac{AE}{L}$

* El versor de cada barra atribuyendole un sentido arbitrario.

* Se calculan matrices de BARRA:

$$[k^{ij}] = \begin{bmatrix} K_N^{ii} & n_x^{ii^2} & K_N^{ii} & n_x^{ii} & n_y^{ii} \\ K_N^{ii} & n_x^{ii} & n_y^{ii} & K_N^{ii} & n_y^{ii^2} \end{bmatrix}$$

Se calculan las matrices de NUDO.

(9.16.5a)

$$[K_i] = [k^{ii}] + [k^{il}] + [k^{mi}] + \dots$$

- * Se determinan las componentes de las fuerzas exteriores aplicadas a la estructura, salvo el valor de las reacciones que de momento nos son desconocidas.
- * Se construye el siguiente sistema de ecuaciones, mediante una matriz de coeficientes que estará integrada por las submatrices de NUDO y de BARRA tal como se simbolizo a continuación.
- * Las submatrices correspondientes a la conexión de dos nudos no unidos son idénticamente nulas: $[0]$.





→	R_{ax}								
→	R_{ay}								
	0								
	P_{By}								
	0								
	0								
	P_{By}								
	0								
	0								
	P_{Fy}								
	0								
→	R_{Gy}								

	K_A	$-k_{AB}$	$-k_{AC}$	0	0	0	0	0	0
	$-k_{AB}$	K_B	$-k_{BC}$	$-k_{BD}$	0	0	0	0	0
	$-k_{AC}$	$-k_{BC}$	K_C	$-k_{CD}$	$-k_{DE}$	0	0	0	0
	0	$-k_{BD}$	$-k_{CD}$	K_D	$-k_{DE}$	$-k_{FD}$	0	0	0
	0	0	$-k_{CE}$	$-k_{DE}$	K_E	$-k_{EF}$	$-k_{EG}$	0	0
	0	0	0	$-k_{FD}$	$-k_{EF}$	K_F	$-k_{FG}$	0	0
	0	0	0	0	$-k_{EG}$	$-k_{FG}$	K_G	0	0

(9.16.60)

Suprimiendo las tres filas y columnas correspondientes a los grados de libertad impedidos en los apoyos, en cuyo caso la fuerza exterior es la reacción de valor aún desconocido, y el corrimiento nulo, obtenemos un sistema de 11 ecuaciones con once incógnitas.

Conocidos los corrimientos de cada uno de los nudos, es fácil determinar el esfuerzo normal de cada barra, puesto que tal como se ha indicado se verifica:

$$[N] = [T] [s]$$

Donde la matriz $[T]$ se compone de submatrices barra

Es factible establecer una MATRIZ DE INCIDENCIA $[I_N]$ tal que permita relacionar directamente las acciones aplicadas en los nudos, con los esfuerzos que como consecuencia se producen en cada una de las barras.

En efecto, según lo expuesto hasta ahora, se verifica:

$[s] = [K]^{-1} [P]$ $[N] = [T] \cdot [s]$ <p style="text-align: center;">(9.16.70)</p>	$[s]$ Matriz columna integrada por las componentes de los corrimientos de los nudos $[K]$ Matriz de rigidez de la celosía	$[P]$ Matriz columna constituida por las componentes de las fuerzas aplicadas a los nudos. $[N]$ Matriz columna de los esfuerzos normales en las barras.	$[T]$ Matriz de transformación de corrimientos en esfuerzos normales.
---	--	---	---



En el caso de que solo interesen los esfuerzos normales y deban utilizarse varias hipótesis de cargas puede ser útil el cálculo de la MATRIZ DE INCIDENCIA definiéndola mediante la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}^{-1}$$

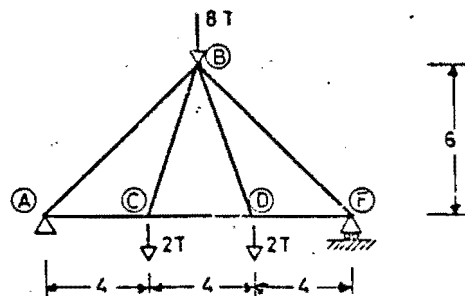
$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$$

(9.16.80)

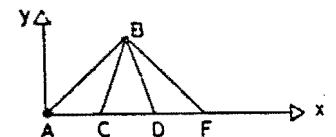
La matriz de INCIDENCIA establece el nexo entre las fuerzas aplicadas en los nudos y los esfuerzos normales que se producen en cada barra.

La matriz de INCIDENCIA se obtiene en el método matricial de los nudos como la inversa de la matriz que relaciona esfuerzos normales y cargas aplicadas en los nudos, lo cual es el camino más directo siempre y cuando la estructura sea isostática.

EJERCICIO 9.16.1.



Sabiendo que el área transversal de cada barra son 2 cm^2 y el módulo de Young el correspondiente al acero, determinar los esfuerzos normales de cada barra así como los corrimientos de los nudos.

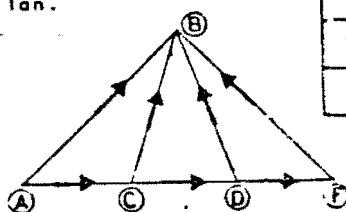


SOLUCION

Determinemos las coordenadas de cada nudo adoptando como ejes un sistema con origen en el nudo A, tal como se croquiza. Las coordenadas de los nudos son:

NUDO	x	y
A	0	0
B	6	6
C	4	0
D	8	0
F	12	0

Obtenidas las coordenadas de los nudos, calculemos los vectores unitarios según la dirección de cada barra, adoptando para los mismos los sentidos que se señalan.



	n_x	n_y
AC	1	0
CD	1	0
DF	1	0
AB	0,7071	0,7071
CB	0,3162	0,9487
DB	-0,3162	0,9478
FB	-0,7071	0,7071

	L	K_N
AC	4	10500
CD	4	10500
DF	4	10500
AB	8,4853	4979,74
CB	6,3246	6640,74
DB	6,3246	6640,74
FB	8,4853	4979,74

$$\left. \begin{matrix} K_N \\ A \cdot E \\ L \end{matrix} \right\}$$

Calculados los vectores unitarios de cada barra, la longitud de las mismas y su rigidez a esfuerzos normales, se está en condiciones de calcular la matriz de rigidez asociada a cada barra, la cual puede efectuarse según el esquema siguiente:



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

BARRA	$K_N n_x^2$	$K_N n_x n_y$	$K_N n_y^2$
AC	10500	0	0
CD	10500	0	0
DF	10500	0	0
AB	2989,88	2489,88	2489,88
CB	664,07	1992,08	5976,67
DB	664,07	-1992,08	5976,67
FB	2489,88	-2489,88	2489,88

Sumamos las submatrices de las barras que concurren a nudos no fijos, (en el ejemplo efectuaremos el cálculo para todos los nudos excepta el del A, puesto que éste está fijo).

- Ⓒ → AC + CB + CD
- Ⓓ → CD + DB + DF
- Ⓑ → AB + CB + DB + BF
- Ⓔ → DF + BF

NUDO	$\sum K_N n_x^2$	$\sum K_N n_x n_y$	$\sum K_N n_y^2$
C	21664,07	1992,08	5976,67
D	21664,07	-1992,08	5976,67
B	6307,90	0	16933,10
F	12989,88	-2489,88	2489,88

Las fuerzas exteriores actuantes en cada nudo son datos salvo las reacciones.

Según lo expuesto el sistema de ecuaciones que definen los carrimientos es:

	C	B	D	F
C	0	21664,07 1992,08	-664,07 -1992,08	-10500 0
-2.000	1992,08 5976,67	-1998,08 -7976,67	0 0	0 0
B	0	-664,07 -1992,08	6307,90 0	-664,07 1992,08
-8.000	-1992,08 -5976,67	0 16933,10	1992,08 5976,67	-2489,88 2489,88
D	0	-10500 0	-664,07 1992,08	21664,07 -1992,08
-2.000	0 0	1992,08 -5976,67	-1992,08 5976,67	-10500 0
F	0	0 0	-2489,88 2489,88	-10500 0
R _F	0 0	2489,88 2489,88	0 0	12989,88 -2489,88

δ_x^C
δ_y^C
δ_x^B
δ_y^B
δ_x^D
δ_y^D
δ_x^F
0

Suprimiendo la última fila y columna de la matriz de rigidez de la estructura por corresponder a un carrimienta impedido, el sistema anterior se transforma en uno de 7 ecuaciones con 7 incógnitas.

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes valores para los carrimientos:

Para transformar los carrimientos en esfuerzos normales de barras, hemos de calcular la MATRIZ DE TRANSFORMACION, cuyos elementos son rigidez de la barra por una componente del vector unitario. Calculemos dichos elementos mediante la siguiente tabla.

δ_x^C	=	0,5714
δ_y^C		-3,4851
δ_x^B	=	0,8254
δ_y^B		-3,2351
δ_x^D	=	1,0794
δ_y^D		-3,4851
δ_x^F	=	1,6508
δ_y^F		-3,4851



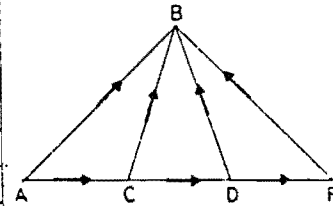
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

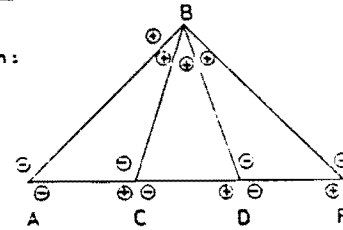
9.101.

	n_x	n_y	K_N	$n_x K_N$	$n_y K_N$
AC	1	0	10500	10500	0
CD	1	0	10500	10500	0
DF	1	0	10500	10500	0
AB	0,7071	0,7071	4979,74	3521,17	3521,17
CB	0,3162	0,9487	6640,74	2099,80	6300
DB	-0,3162	0,9487	6640,74	-2099,80	6300
FB	-0,7071	0,7071	4979,74	-3521,17	3521,17



Luego los esfuerzos normales vendrán dados por la siguiente expresión:

	δ_x^A	δ_y^C	δ_x^B	δ_y^B	δ_x^D	δ_y^D	δ_x^F	
N_{AC}	10500	0	0		0	0	0	0,5714
N_{CD}	-10500	0	0		10500	0	0	-3,4851
N_{DF}	0	0	0		-10500	0	10500	0,8254
N_{AB}	0	0	3521,17	3521,17	0	0	0	-3,2351
N_{CB}	-2099,80	-6300	2099,80	6300	0	0	0	1,0794
N_{DB}	0	0	-2099,80	6300	2099,80	-6300	0	-3,4851
N_{FB}	0	0	-3521,17	3521,17	0	0	3521,17	1,6508



N_{AC}	6.000
N_{CD}	5.333
N_{DF}	6.000
N_{AB}	-8.485
N_{CB}	2.108
N_{DB}	2.108
N_{FB}	-8.485

Si se desean efectuar varias hipótesis nos bastará con calcular la MATRIZ DE INCIDENCIA de la estructura propuesta, la cual vendrá definida por la siguiente operación matricial:

$$[N] = \begin{bmatrix} 10500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10500 & 0 & 0 & 0 & 10500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10500 & 0 & 10500 \\ 0 & 0 & 3521,17 & 3521,17 & 0 & 0 & 0 \\ -2099,80 & -6300 & 2099,80 & 6300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2099,80 & 6300 & 2099,8 & -6300 & 0 \\ 0 & 0 & -3521,17 & 3521,17 & 0 & 0 & 3521,17 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 21664,07 & 1992,08 & -664,07 & -1992,08 & -10500 & 0 & 0 \\ 1992,08 & 5976,67 & -1992,08 & -5976,67 & 0 & 0 & 0 \\ -664,07 & -1992,08 & 6307,90 & 0 & -664,07 & 1992,08 & -2489,88 \\ -1992,08 & -5976,67 & 0 & 16933,1 & 1992,08 & -5976,67 & 2489,88 \\ -10500 & 0 & -664,07 & 1992,08 & 21664,07 & -1992,08 & -10500 \\ 0 & 0 & 1992,08 & -5976,67 & -1992,08 & 5976,67 & 0 \\ 0 & 0 & -2489,88 & 2489,88 & -10500 & 0 & 12989,88 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.000 & -0,6666 & 0,5 & -0,5 & 1 & -0,3333 & 1 \\ 0 & -0,3333 & 0,5 & -0,5 & 1 & -0,3333 & 1 \\ 0 & -0,3333 & 0,5 & -0,5 & 0 & -0,6666 & 1 \\ 0 & 0,9428 & 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0,4714 & 0 \\ 0 & -1,0541 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0541 & 0 \\ 0 & 0,4714 & -0,7071 & 0,7071 & 0 & 0,9428 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA



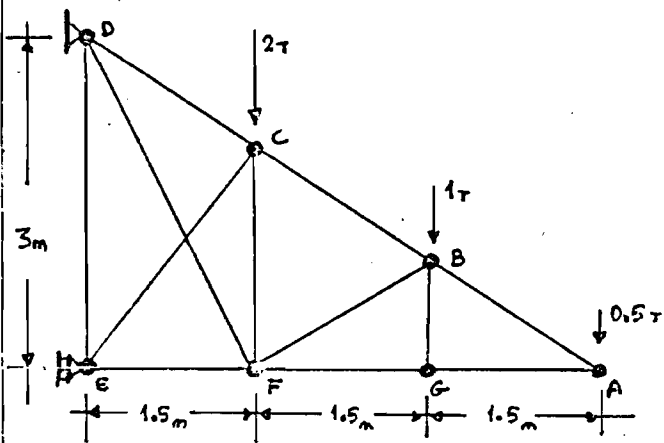
Esto nos permite obtener los axiles en cada barra, para un cierto conjunto de acciones exteriores, mediante un simple producto matricial, tal como se efectua a continuación:

$$\begin{bmatrix} N_{AC} \\ N_{CD} \\ N_{DF} \\ N_{AB} \\ N_{CB} \\ N_{DB} \\ N_{FB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.000 \\ 0 \\ -8.000 \\ 0 \\ -2.000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.000 \\ 5.333 \\ 6.000 \\ -8.485 \\ 2.108 \\ 2.108 \\ -8.485 \end{bmatrix}$$

La ventaja, es que conocida la matriz de incidencia, ante un nuevo estado de cargos sólo hay que repetir la última operación matricial para obtener los esfuerzos normales en las barras.

EJERCICIO 9.16.2.

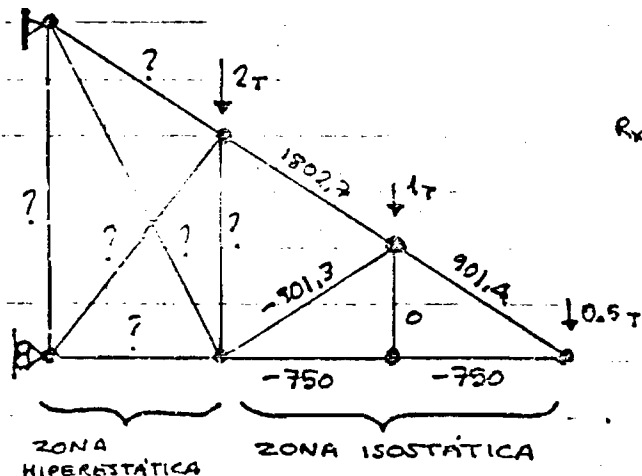
En el tema 9.15. se propuso como ejercicio el cálculo de la siguiente celosia hiperestática:



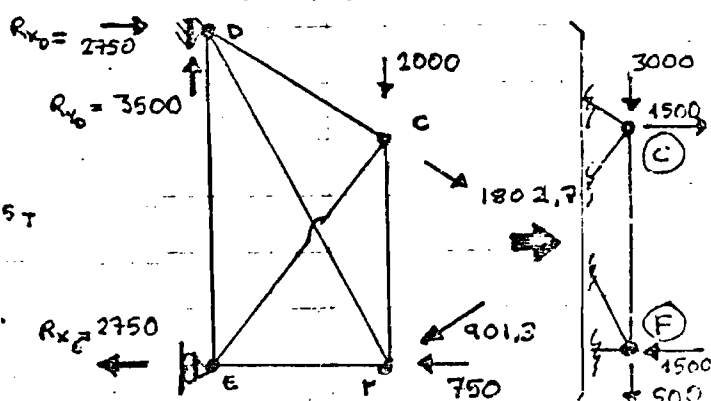
Sabiendo que el área de todas las barras es de 4cm^2 , y el módulo de Young es $2,1 \cdot 10^6 \text{Kg/cm}^2$

2ª SOLUCION

La celosia tiene una parte isostática y una zona que es hiperestática interna, siendo calculable la primera independientemente de la segunda, lo que nos permite su supresión, si afectamos a la zona hiperestática de las acciones que induce la isostática, tal como se efectua a continuación.

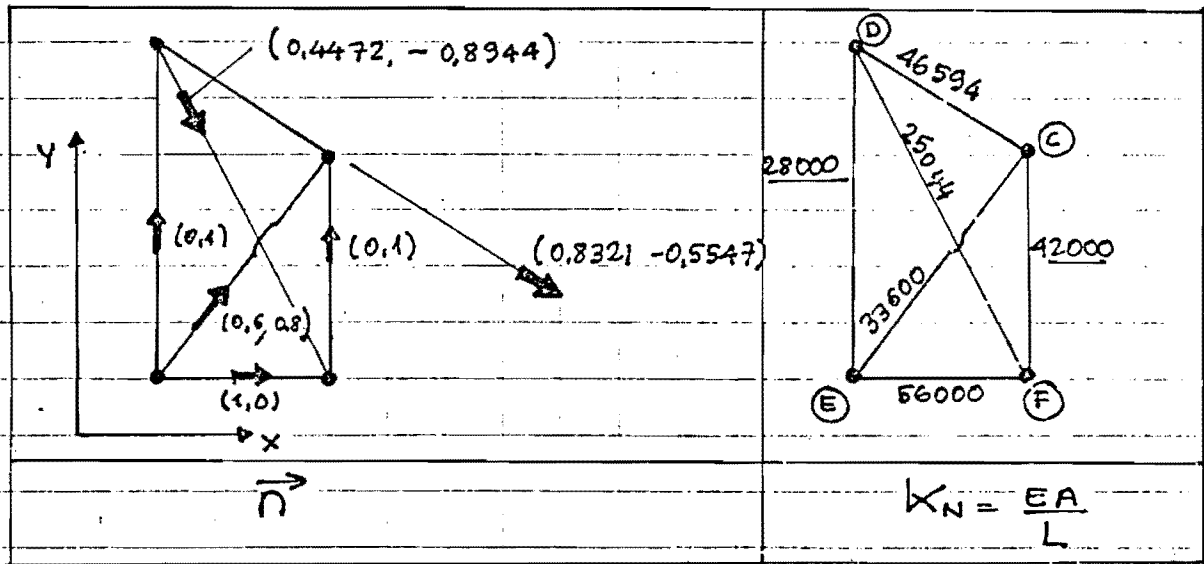


La zona isostática sufre los esfuerzos normales que se indican en la figura, y en consecuencia:





Definamos versores en cada una de las barras, para aplicar el MÉTODO MATRICIAL de las DEFORMACIONES a la estructura articulada simplificada que hemos croquizado



Las matrices de rigidez asociadas a cada barra serán:

$$[K]_{EF} = \begin{bmatrix} 56000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{ED} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 28000 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{CF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 42000 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{EC} = \begin{bmatrix} 12096 & 16128 \\ 16128 & 21504 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{DF} = \begin{bmatrix} 5008 & -10017 \\ -10017 & 20034 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{CD} = \begin{bmatrix} 32261 & -21506 \\ -21506 & 14337 \end{bmatrix}$$

Las asociadas a los nudos serán:

$$[S]_E = [K]_{ED} + [K]_{EC} + [K]_{EF} = \begin{bmatrix} 58096 & 16128 \\ 16128 & 49504 \end{bmatrix}$$

$$[S]_F = [K]_{EF} + [K]_{DF} + [K]_{FC} = \begin{bmatrix} 61208 & -10017 \\ -10017 & 62034 \end{bmatrix}$$

$$[S]_C = [K]_{CE} + [K]_{CF} + [K]_{CD} = \begin{bmatrix} 44357 & -5378 \\ -5378 & 77841 \end{bmatrix}$$

$$[S]_D = [K]_{DE} + [K]_{DF} + [K]_{CD} = \begin{bmatrix} 37269 & -31523 \\ -31523 & 62371 \end{bmatrix}$$



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9 de 104

F_x	61208	-10017	0	0	-56000	0	-5008	10017	δF_x
	-10017	62034	0	-42000	0	0	10017	-20034	
F_y	0	0	44357	-5378	-2096	-16128	-32261	21506	δc_x
	0	-42000	-5378	77841	-16128	-21504	21506	-43337	
F_{e_x}	-56000	0	-2096	-16128	68096	16128	0	0	δE_x
	0	0	-16128	-21504	16128	49504	0	-28000	
F_{e_y}	-5008	10017	-32261	21506	0	0	37269	-31523	δD_x
	10017	-20034	21506	14337	0	-28000	-31523	62371	

Suprimiendo las columnas que se indican, puesto que los corrimientos por los que se tienen que multiplicar son nulos, así como las filas correspondientes a las reacciones, con lo que el sistema se transforma a un sistema de cinco por cinco:

-1500	61208	-10017	0	0	0	δF_x
-500	-10017	62034	0	-42000	0	
1500	0	0	44357	-5378	-16128	δc_x
-3000	0	-42000	-5378	77841	-21504	
0	0	0	-16128	-21504	49504	δE_y

$\delta F_x = -0.03632$
 $\delta F_y = -0.07218$
 $\delta c_x = 0.01111$
 $\delta c_y = -0.08604$
 $\delta E_y = -0.03376$

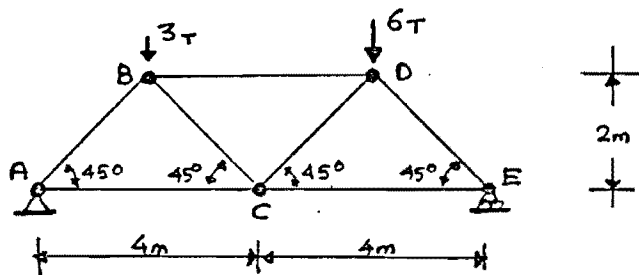
Los esfuerzos normales serán:

N_{EF}	56000	0	0	0	0	δF_x	δF_y	δc_x	δc_y	δE_y	N_{EF}	-2034
N_{FC}	0	-42000	0	42000	0						N_{FC}	-582
N_{CD}	0	0	38771	-25346	0						N_{CD}	2654
N_{ED}	0	0	0	0	-28000						N_{ED}	945
N_{EC}	0	0	20160	26880	-26880						N_{EC}	-1181
N_{FD}	11200	-22399	0	0	0						N_{FD}	1210

Lo que coincide con los resultados anteriormente obtenidos.

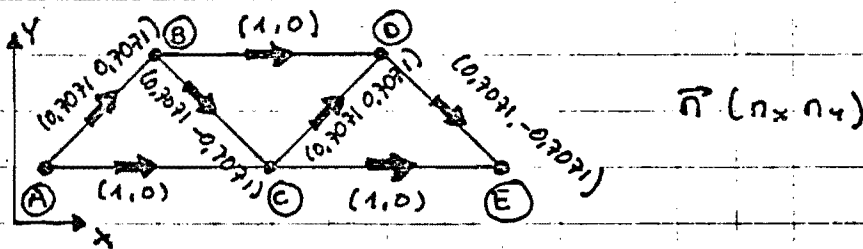
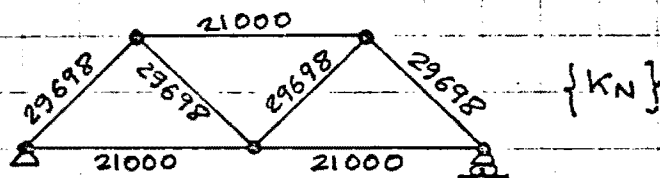


EJERCICIO 9.16.3. Resuélvase nuevamente por el MÉTODO MATRICIAL DE LAS DEFORMACIONES el ejercicio 9.13.10, en el que se solicitaban los esfuerzos normales de cada barra y el corrimiento vertical del nudo C, sabiendo que el módulo de Young es de $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y que el área de todas las barras es de 4 cm^2



SOLUCIÓN

Habría que calcular las rigideces de cada barra, un vector asociado a las mismas, y una matriz de rigidez indicativa de cada una de las barras que constituyen la celosía. Así pues:



MATRIZ DE RIGIDECES de las barras $\begin{bmatrix} k_N n_x^2 & k_N n_x n_y \\ k_N n_x n_y & k_N n_y^2 \end{bmatrix}$

$$[k]_{AB} = [k]_{BC} = \begin{bmatrix} 14849 & 14849 \\ 14849 & 14849 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{BC} = [k]_{DE} = \begin{bmatrix} 14849 & -14849 \\ -14849 & 14849 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{AC} = [k]_{CE} = [k]_{BD} = \begin{bmatrix} 21000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.106.

La matriz de rigidez asociada a cada nudo, se obtendrá como suma de las matrices de rigidez asociadas a las barras concurrentes al mismo.

$$[S]_A = [K]_{AB} + [K]_{AC} = \begin{bmatrix} 35849 & 14849 \\ 14849 & 14849 \end{bmatrix}$$

$$[S]_B = [K]_{AB} + [K]_{BC} + [K]_{BD} = \begin{bmatrix} 50698 & 0 \\ 0 & 29698 \end{bmatrix} = [S]_0$$

$$[S]_C = [K]_{AC} + [K]_{CE} + [K]_{BC} + [K]_{CD} = \begin{bmatrix} 71698 & 0 \\ 0 & 29698 \end{bmatrix}$$

$$[S]_E = [K]_{CE} + [K]_{DE} = \begin{bmatrix} 35849 & -14849 \\ -14849 & 14849 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez la construiremos teniendo en cuenta que en ella intervendrán las matrices de rigidez de las barras cambiadas de signo para definir la submatriz $[K]_{ij}$, en tanto que la $[K]_{ii} = [S]_i$, en consecuencia:

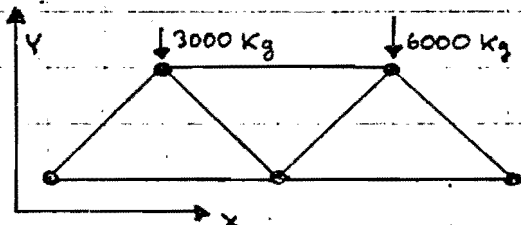
A	F _{Ax}	35849	14849	-14849	-14849	-21000	0	0	0	0	δ _{Ax}
	F _{Ay}	14849	14849	-14849	-14849	0	0	0	0	0	
B	F _{Bx}	-14849	-14849	50698	0	-14849	14849	-21000	0	0	δ _{Bx}
	F _{By}	-14849	-14849	0	29698	14849	-14849	0	0	0	δ _{By}
C	F _{Cx}	-21000	0	-14849	14849	71698	0	-14849	-14849	-21000	δ _{Cx}
	F _{Cy}	0	0	14849	-14849	0	29698	-14849	-14849	0	δ _{Cy}
D	F _{Dx}	0	0	-21000	0	-14849	-14849	50698	0	-14849	δ _{Dx}
	F _{Dy}	0	0	0	0	-14849	-14849	0	29698	14849	δ _{Dy}
E	F _{Ex}	0	0	0	0	-21000	0	-14849	14849	35849	δ _{Ex}
	F _{Ey}	0	0	0	0	0	0	14849	-14849	-14849	δ _{Ey}
		A	B	C	D	E					
		↑	↑							↑	
		δ _{Ax}	δ _{Ay}							δ _{Ey}	

Al ser nulos los corrimientos δ_{Ax} , δ_{Ay} y δ_{Ey} nulos, pueden eliminarse las columnas correspondientes.



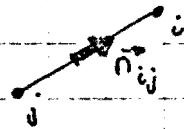
Las filas correspondientes a F_{Ax} , F_{Ay} y F_{Ex} definen las reacciones, por lo que estas pueden aislarse del sistema, quedando el mismo reducido a:

F_{Ax}	0	.50698	0	-14849	14849	-21000	0	0	δ_{Bx}
F_{Ay}	-3000	0	29698	14849	-14849	0	0	0	δ_{By}
F_{Cx}	0	-14849	14849	71698	0	-14849	-14849	-21000	δ_{Cx}
F_{Cy}	0	14849	-14849	0	29698	-14849	-14849	0	δ_{Cy}
F_{Dx}	0	-21000	0	-14849	-14849	50698	0	-14849	δ_{Dx}
F_{Dy}	-6000	0	0	-14849	-14849	0	29698	14849	δ_{Dy}
F_{Ex}	0	0	0	-21000	0	-14849	14849	35849	δ_{Ex}



El axial de cada barra, lo obtendremos mediante el producto:

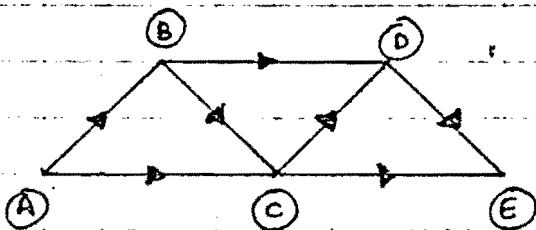
$$N_{ij} = k_{N_{ij}} \Delta L_{ij} = k_{N_{ij}} \vec{n}_{ij} \cdot (\vec{\delta}_i - \vec{\delta}_j)$$



$$N_{ij} = \begin{bmatrix} k_{N_{ij}} n_{x_{ij}} & k_{N_{ij}} n_{y_{ij}} & -k_{N_{ij}} n_{x_{ij}} & -k_{N_{ij}} n_{y_{ij}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \end{bmatrix}$$

Lo que permite establecer:

		B	C	D	E		
N_{AB}	21000	21000	0	0	0	0	δ_{Bx}
N_{BD}	-21000	0	0	0	21000	0	δ_{By}
N_{DE}	0	0	0	0	-21000	21000	δ_{Dx}
N_{AC}	0	0	21000	0	0	0	δ_{Cy}
N_{CE}	0	0	-21000	0	0	0	δ_{Dy}
N_{BC}	-21000	21000	21000	-21000	0	0	δ_{Cx}
N_{CD}	0	0	-21000	-21000	21000	21000	δ_{Dy}





Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que:

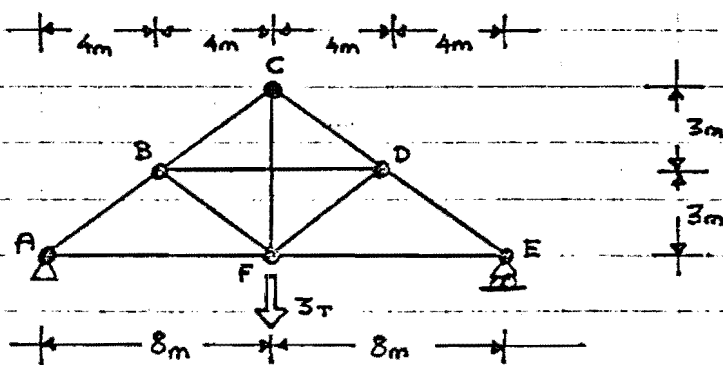
$$\begin{bmatrix} \delta_{Bx} \\ \delta_{By} \\ \delta_{Cx} \\ \delta_{Cy} \\ \delta_{Dx} \\ \delta_{Dy} \\ \delta_{Ex} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3036 \\ -0,5561 \\ 0,1786 \\ -0,7316 \\ 0,0893 \\ -0,6928 \\ 0,4286 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} N_{AB} \\ N_{BO} \\ N_{OE} \\ N_{AC} \\ N_{CE} \\ N_{BC} \\ N_{CO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5303 \\ -4500 \\ -7425 \\ 3750 \\ 5250 \\ 1060 \\ -1061 \end{bmatrix}$$

Las reacciones podrían calcularse mediante las filas suprimidas.

$$\begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14849 & -14849 & -21000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14849 & -14849 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14849 & -14849 & -14849 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{Bx} \\ \delta_{By} \\ \delta_{Cx} \\ \delta_{Cy} \\ \delta_{Dx} \\ \delta_{Dy} \\ \delta_{Ex} \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 9.13.4.

Calcúlese el esfuerzo normal que se produce en cada una de las barras de la celosía croquizada, sabiendo que el producto $E \cdot A$ es constante para todas las barras.



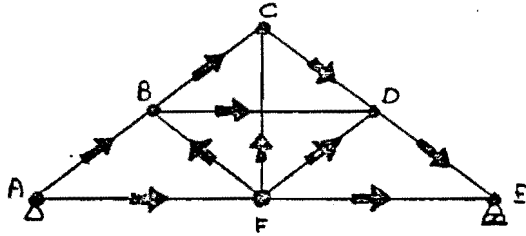
SOLUCIÓN

Las coordenadas de cada uno de los nudos, serán:

- A (0, 0) E (16, 0)
- B (4, 3) D (12, 3)
- C (8, 6) F (8, 0)



Obtenemos un versor indicativo o director de cada barra, según un sentido arbitrario que se indica en el croquis adjunto.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_{AB} \\ \vec{n}_{BC} \\ \vec{n}_{FD} \end{array} \right\} (0,8 \quad 0,6) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{n}_{CD} \\ \vec{n}_{DE} \end{array} \right\} (0,8 \quad -0,6)$$

$$\vec{n}_{FB} (-0,8 \quad 0,6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_{BD} \\ \vec{n}_{AF} \\ \vec{n}_{FE} \end{array} \right\} (1, 0) \quad \vec{n}_{FC} (0, 1)$$

La rigidez k_N a esfuerzos normales de cada barra valdrá:

BARRA	AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv FB \equiv FD	AF \equiv FE \equiv BD	FC
EA	1	1	1
L	5	8	6
k_N	0,2	0,125	0,16

Las matrices de rigidez asociadas a cada barra, serán:

BARRAS: AB, BC, FD

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 \\ 0,096 & 0,072 \end{bmatrix}$$

BARRAS: CD, DE, FB

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0,128 & -0,096 \\ -0,096 & 0,072 \end{bmatrix}$$

BARRAS: BD, AF, FE

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0,125 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

BARRA: FC

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{bmatrix}$$

Las matrices de nudo serán:

$$[k_{N_B}] = \begin{bmatrix} 0,509 & 0,096 \\ 0,096 & 0,216 \end{bmatrix}$$

$$[k_{N_C}] = \begin{bmatrix} 0,256 & 0 \\ 0 & 0,31067 \end{bmatrix}$$

$$[k_{N_D}] = \begin{bmatrix} 0,509 & -0,096 \\ -0,096 & 0,216 \end{bmatrix}$$

$$[k_{N_F}] = \begin{bmatrix} 0,509 & 0 \\ 0 & 0,31067 \end{bmatrix}$$



$$[K_{N_E}] = \begin{bmatrix} 0,253 & -0,096 \\ -0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \quad [K_{N_A}] = \begin{bmatrix} 0,253 & -0,096 \\ 0,096 & -0,072 \end{bmatrix}$$

Conocidas las submatrices anteriores se puede construir fácilmente la matriz de rigidez de la estructura, y en consecuencia establecer el sistema de ecuaciones que permitirá el cálculo de los movimientos en función de las acciones exteriores actuantes.

B	0	0,509	0,096	-0,128	-0,096	-0,125	0	0	-0,128	0,096	δ _{Bx}
	0	0,096	0,216	-0,096	-0,072	0	0	0	0,096	-0,072	
C	0	-0,128	-0,096	0,256	0	-0,128	0,096	0	0	0	δ _{Cx}
	0	-0,096	-0,072	0	0,3107	0,096	-0,072	0	0	-0,1667	δ _{Cy}
D	0	-0,125	0	-0,128	0,096	0,509	-0,096	-0,128	-0,128	-0,096	δ _{Dx}
	0	0	0	0,096	-0,072	-0,096	0,216	0,096	-0,096	-0,072	δ _{Dy}
E	0	0	0	0	0	-0,128	0,096	0,253	-0,125	0	δ _{Ex}
	0	-0,128	0,096	0	0	-0,128	-0,096	-0,125	0,506	0	δ _{Fx}
F	-3	0,096	-0,072	0	-0,1667	-0,096	-0,072	0	0	0,3107	δ _{Fy}
		B	C	D	E	F					

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta_{Bx} &= 22,072 & \delta_{Cx} &= 16 & \delta_{Dx} &= 9,9283 & \delta_{Ex} &= 32 & \delta_{Fx} &= 16 \\ \delta_{By} &= -50,262 & \delta_{Cy} &= -55,094 & \delta_{Dy} &= -50,262 & \delta_{Ey} &= -32 & \delta_{Fy} &= -66,264 \end{aligned}$$

La matriz de transformación que nos permitirá obtener los esfuerzos normales en cada barra, en función de los movimientos de los nudos, es:

BARRAS: AB, BC, CD

BARRAS: CD, DE

$$[K_{N_x} \quad K_{N_y}] = [0,16 \quad 0,12]$$

$$[0,16 \quad -0,12]$$

BARRAS AF, FE, BD

BARRA FB

$$[0,125 \quad 0]$$

$$[-0,16 \quad 0,12]$$

BARRA FC

$$[0 \quad 0,16]$$



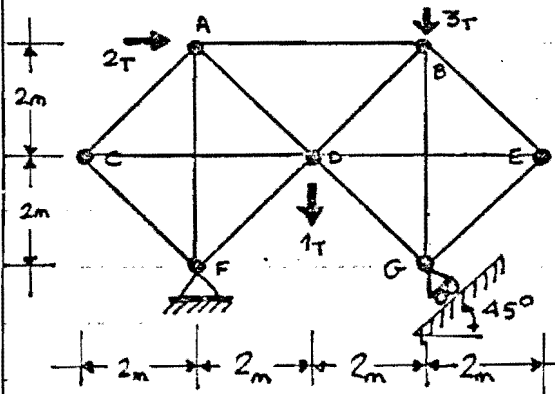
	B	C	D	E	F		
N _{AB}	0,16	0,12	0	0	0	0	22,072
N _{BC}	-0,16	-0,12	0,16	0,12	0	0	-50,262
N _{CD}	0	0	-0,16	0,12	0,16	-0,12	16
N _{DE}	0	0	0	0	-0,16	0,12	-55,094
N _{AF}	0	0	0	0	0	0	9,4203
N _{FE}	0	0	0	0	0	0	-50,262
N _{BD}	-0,125	0	0	0	0,125	0	32
N _{FB}	-0,16	0,12	0	0	0	0	16
N _{FD}	0	0	0	0	0,16	0,12	-66,264
N _{FC}	0	0	0	0,16	0	0	-9,16



$$\begin{aligned}
 N_{AB} &= -2,5 & N_{BC} &= -1,55 & N_{CD} &= -1,55 & N_{DE} &= -2,5 & N_{AF} &= 2 & N_{FE} &= 2 \\
 N_{BD} &= -1,52 & N_{FB} &= 0,95 & N_{FD} &= 0,95 & N_{FC} &= 1,86
 \end{aligned}$$

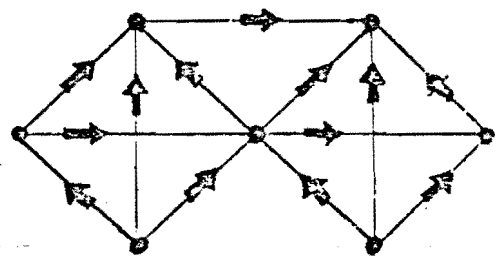
EJERCICIO 9.16.5.

Calcular los esfuerzos normales que se producen en las barras de la estructura articulada cruzada, sabiendo que el área de todas las barras es la misma, así como el módulo de Young.



SOLUCIÓN

Establezcamos versores directores de cada una de las barras, con los sentidos que se indican en el esquema adjunto.



- AC } $\vec{n} (0,7071 \ 0,7071)$
- FD }
- DB }
- GE }
- ED } $\vec{n} (-0,7071 \ 0,7071)$
- GO }
- DA }
- FC }
- CD } $\vec{n} (1,0)$
- DE }
- AB }
- AF } $\vec{n} (0,1)$
- GB }



Obtenemos la RIGIDEZ A ESFUERZOS NORMALES asociada a cada barra:

BARRAS: AC, FD, DB, GE, EB, GD, GA, FC

$$\left. \begin{array}{l} L = 2,8284 \\ EA = 1 \end{array} \right\} k_N = 0,3535$$

BARRAS CD, DE, AB, AF, GB

$$\left. \begin{array}{l} L = 4 \\ EA = 1 \end{array} \right\} k_N = 0,25$$

Las submatrices de rigidez asociadas a cada una de las barras, serán:

BARRAS AC, FD, DB, GE

BARRAS EB, GD, DA, FC

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0,1768 & 0,1768 \\ 0,1768 & 0,1768 \end{bmatrix}$$

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0,1768 & -0,1768 \\ -0,1768 & 0,1768 \end{bmatrix}$$

BARRAS CD, DE, AB

BARRAS AF, GB

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Obtenemos a continuación las submatrices de nudos.

$$[k_{N_G}] = [k_{N_F}] = \begin{bmatrix} 0,3536 & 0 \\ 0 & 0,6036 \end{bmatrix}$$

$$[k_{N_C}] = [k_{N_E}] = \begin{bmatrix} 0,6036 & 0 \\ 0 & 0,3536 \end{bmatrix}$$

$$[k_{N_A}] = [k_{N_B}] = \begin{bmatrix} 0,6036 & 0 \\ 0 & 0,6036 \end{bmatrix}$$

$$[k_{N_D}] = \begin{bmatrix} 1,2072 & 0 \\ 0 & 0,7072 \end{bmatrix}$$

Conocidas las submatrices anteriores, puede construirse la MATRIZ DE RIGIDEZ de la CELOSIA.



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana

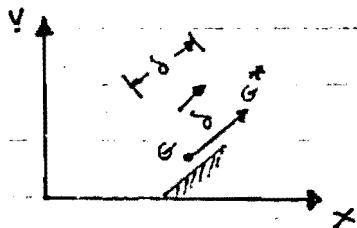
TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.113.

		C	A	B	E	D	G	F					
C	F_{Cx}	0,6036	0	-0,1768	-0,1768	0	0	-0,25	0	0	0	-0,1768	0,1768
	F_{Cy}	0	0,3536	-0,1768	-0,1768	0	0	0	0	0	0	0,1768	-0,1768
A	F_{Ax}	-0,1768	-0,1768	0,6036	0	-0,25	0	-0,1768	0,1768	0	0	0	0
	F_{Ay}	-0,1768	-0,1768	0	0,6036	0	0	0,1768	-0,1768	0	0	0	-0,25
B	F_{Bx}	-0,25	0	-0,25	0	0,6036	0	-0,1768	0,1768	-0,1768	-0,1768	0	0
	F_{By}	0	0	0	0	0,6036	0,1768	-0,1768	-0,1768	-0,1768	-0,1768	0	-0,25
E	F_{Ex}	0	0	0	0	-0,1768	0,1768	0,6036	0	-0,25	0	-0,1768	-0,1768
	F_{Ey}	0	0	0	0	0,1768	-0,1768	0	0,3536	0	0	-0,1768	-0,1768
D	F_{Dx}	-0,25	0	-0,1768	0,1768	-0,1768	-0,1768	-0,25	0	1,2072	0	-0,1768	0,1768
	F_{Dy}	0	0	0,1768	-0,1768	-0,1768	-0,1768	0	0	0	0,7072	0,1768	-0,1768
G	F_{Gx}	0	0	0	0	0	0	-0,1768	-0,1768	-0,1768	0,1768	0,3536	0
	F_{Gy}	0	0	0	0	0	-0,25	-0,1768	-0,1768	0,1768	-0,1768	0	0,6036
F	F_{Fx}	-0,1768	0,1768	0	0	0	0	0	0	-0,1768	-0,1768	0	0
	F_{Fy}	0,1768	-0,1768	0	-0,25	0	0	0	0	0,1768	-0,1768	0	0

Dado que el nudo F es fijo: $\delta_{Fx} = \delta_{Fy} = 0$, lo que permite suprimir las dos últimas columnas, y en contrapartida pueden eliminarse las dos últimas filas en las cuales los términos independientes son desconocidos, puesto que las acciones exteriores en F, son REACCIONES que hay que determinar.

En el nudo G, se produce un deslizamiento según un plano inclinado a 45° , lo que implica una relación entre el corrimiento X e Y, que indicamos a continuación:



$$\delta_{Gx} = \delta_{Gy} = \delta \cdot 0,7071$$

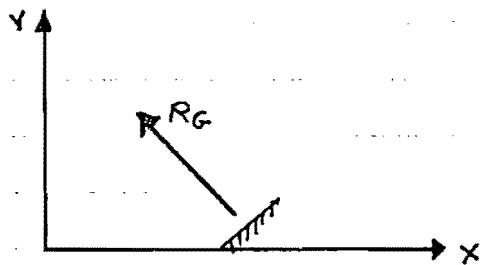
En cada fila, las columnas correspondientes a los corrimientos del nudo G aportan dos términos, que podríamos reducir a uno solo, lo que implica una fusión en una única columna.

$$a \cdot \delta_{Gx} + b \delta_{Gy} = 0,7071 \cdot (a + b) \cdot \delta = c^* \delta \Rightarrow c^* = 0,7071 (a + b)$$



Así pues, podremos sustituir las incógnitas $\delta G_x, \delta G_y$ por una única δG , si sumamos las columnas 11 y 12 y las multiplicamos por 0,7071. (δG representará el corrimiento sobre la superficie de deslizamiento).

En cuanto a las filas 11 y 12, se puede aplicar un proceso análogo para su fusión. En efecto las componentes de la reacción G , al tener que ser la misma normal a la superficie de deslizamiento deben guardar la siguiente relación.



$$R_{Gx} = -0,7071 \cdot R_G$$

$$R_{Gy} = 0,7071 \cdot R_G$$



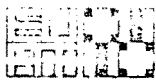
$$R_{Gx} + R_{Gy} = 0$$

Por lo tanto, si sumamos las filas 11 y 12, pueden sustituirse los términos independientes correspondientes por un cero.

Para la obtención de la reacción R_G , puede utilizarse la fila 12 dividida por 0,7071, ya que:

$$R_G = \frac{1}{0,7071} R_{Gy}$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones que determinará los corrimientos de los nudos en función de las acciones exteriores será:



DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

Roberto Guerra Fontana		TEOREMAS ENERGÉTICOS										9.115.			
		C		A		B		E		D		G			
C	0	0.6036	0	-0.1768	-0.1768	0	0	0	0	-0.25	0	0	δ_{Cx}		
	0	0	0.3536	-0.1768	-0.1768	0	0	0	0	0	0	0	δ_{Cy}		
A	2000	-0.1768	-0.1768	0.6036	0	-0.25	0	0	0	-0.1768	0.1768	0	δ_{Ax}		
	0	-0.1768	-0.1768	0	0.6036	0	0	0	0	0.1768	-0.1768	0	δ_{Ay}		
B	0	-0.25	0	-0.25	0	0.6036	0	-0.1768	0.1768	-0.1768	-0.1768	0	δ_{Bx}		
	-3000	0	0	0	0	0	0.6036	0.1768	-0.1768	-0.1768	-0.1768	-0.1768	δ_{By}		
E	0	0	0	0	-0.1768	0.1768	0.6036	0	-0.25	0	-0.25	δ_{Ex}			
	0	0	0	0	0.1768	-0.1768	0	0.3536	0	0	-0.25	δ_{Ey}			
D	0	-0.25	0	-0.1768	0.1768	-0.1768	-0.1768	-0.25	0	1.2072	0	0	δ_{Dx}		
	-1000	0	0	0.1768	-0.1768	-0.1768	-0.1768	0	0	0	0.7072	0	δ_{Dy}		
G	0	0	0	0	0	-0.25	-0.3636	-0.3536	0	0	0.6768	δ_G			

Resolviendo el sistema, obtenemos los siguientes corrimientos de cada nodo:

$$\begin{aligned} \delta_{Cx} &= 69637 & \delta_{Ax} &= 109443 & \delta_{Bx} &= 130565 & \delta_{Ex} &= 70480 & \delta_{Dx} &= 54037 \\ \delta_{Cy} &= 69110 & \delta_{Ay} &= 20776 & \delta_{By} &= -33645 & \delta_{Ey} &= -82105 & \delta_{Dy} &= 649 \end{aligned}$$

$$\delta_G = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \delta_{Gx} &= 0 \\ \delta_{Gy} &= 0 \end{aligned}$$

Los axiles de cada una de las barras, los podremos calcular en función de los corrimientos, mediante la MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN, cuyos elementos son nulos, o valen $\pm kN \cdot n_x$ o $\pm kN \cdot n_y$ según se expuso en la teoría.

	C		A		B		E		D		G		
NCA	-0.25	-0.25	0.25	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	δ_x^c
NAB	0	0	-0.25	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	δ_y^c
NEB	0	0	0	0	-0.25	0.25	0.25	-0.25	0	0	0	0	δ_x^b
NEE	0	0	0	0	0	0	0.25	0.25	0	0	-0.25	-0.25	δ_y^b
NGD	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	0.25	0.25	-0.25	δ_x^d
NFD	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0.25	0	0	δ_y^d
NFC	-0.25	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ_x^f
NDA	0	0	-0.25	0.25	0	0	0	0	0.25	-0.25	0	0	δ_y^f
NDB	0	0	0	0	0.25	0.25	0	0	-0.25	-0.25	0	0	δ_x^g
													δ_y^g



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.116.

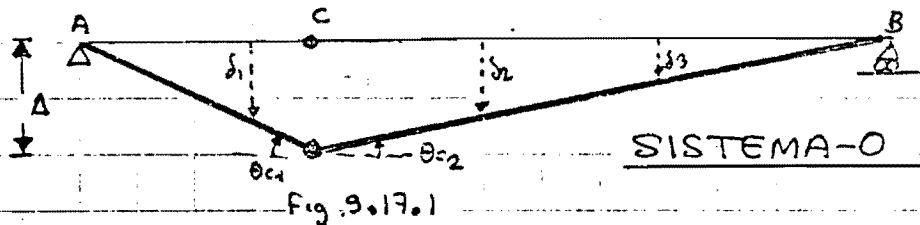
$$\begin{bmatrix} N_{FA} \\ N_{GB} \\ N_{CD} \\ N_{DE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix}$$

Operando:

$N_{CA} = -1131$	$N_{AB} = 5280$	$N_{EB} = -2906$	$N_{GE} = -2906$	$N_{GD} = -13347$
$N_{FD} = 13671$	$N_{FC} = -1131$	$N_{DA} = -8819$	$N_{DB} = 10558$	$N_{FA} = 5194$
$N_{GB} = -8411$	$N_{CD} = -3899$	$N_{DE} = 4110$		

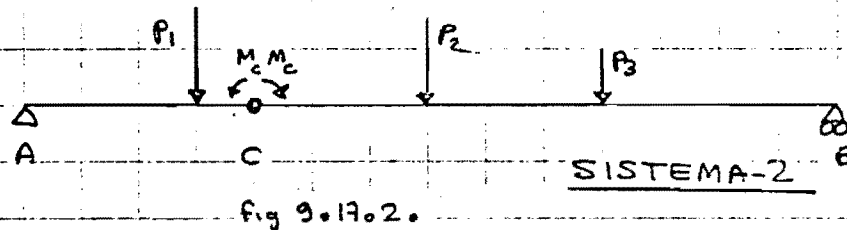
9.17. EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Si en una estructura, se elimina algún elemento, o ligadura y se sustituye por las acciones que este efectuaba, el SISTEMA ESTÁTICAMENTE NO SE ALTERA, pero el conjunto puede transformarse en uno HIPOSTÁTICO o DEFORMABLE, lo cual significa la posibilidad de movimientos sin presencia de fuerzas exteriores, tal como acontece en:



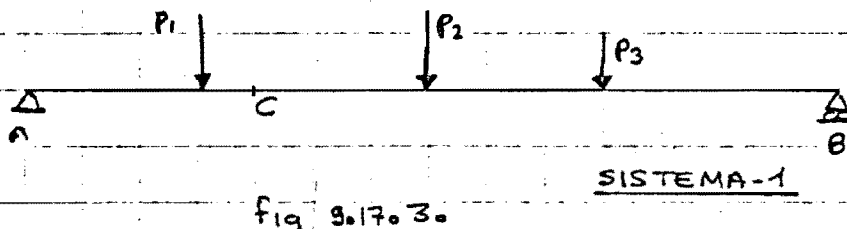
En donde se ha eliminado en la sección C, la capacidad de absorción de

momentos flectores mediante la introducción de una rótula.



En la viga real si se supone la existencia de la rótula, es pre-

ciso introducir dos momentos M_c , que es la sollicitación que primitivamente se producía en C, cuando no se había eliminado la posibilidad de dicha sollicitación.



Aplicando el principio de reciprocidad entre el SISTEMA-0 y el SISTEMA-2, se obtendrá la SOLICITACIÓN MOMENTO FLECTOR M_c en la sección C, ya que:

$$\text{ACCIONES}_{S-0} \times \text{MOVIMIENTOS}_{S-2} = \text{ACCIONES}_{S-2} \times \text{MOVIMIENTOS}_{S-0}$$

$$0 = P_1 \cdot \delta_1 - M_c \theta_{c1} - M_c \theta_{c2} + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 = 0$$

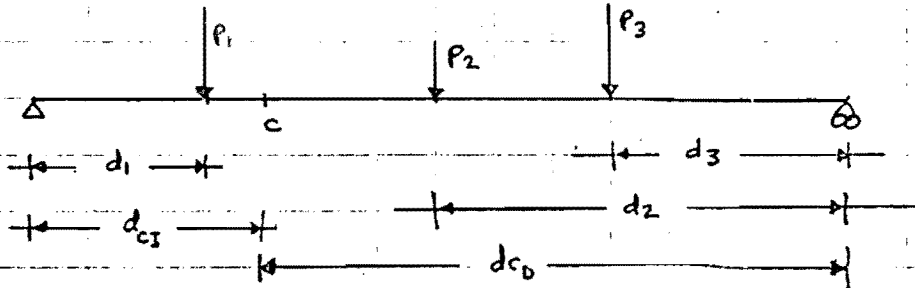
$$M_c = \frac{1}{\alpha_{c1} + \alpha_{c2}} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3)$$



Dado que:

$$\theta_{c1} = \frac{\Delta}{d_{c1}} \quad \theta_{c2} = \frac{\Delta}{d_{c0}} \quad \delta_1 = \Delta \frac{d_1}{d_{c1}}$$

$$\delta_2 = \Delta \frac{d_2}{d_{c0}} \quad \delta_3 = \Delta \frac{d_3}{d_{c0}}$$



Resultará sustituyendo:

$$M_c = \frac{1}{\frac{\Delta}{d_{c1}} + \frac{\Delta}{d_{c0}}} \left(P_1 \Delta \frac{d_1}{d_{c1}} + P_2 \Delta \frac{d_2}{d_{c0}} + P_3 \Delta \frac{d_3}{d_{c0}} \right)$$



$$M_c = \frac{1}{L} \left(P_1 d_1 d_{c0} + P_2 d_{c1} d_2 + P_3 d_{c1} d_3 \right)$$

lo que en efecto, es el momento flector en la sección C.

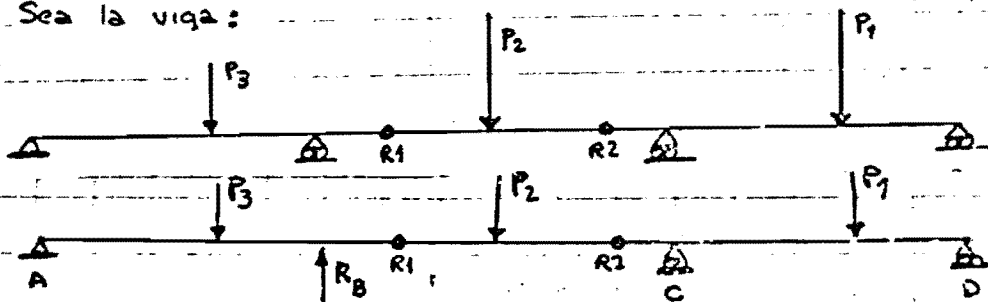
Dado que el producto: ACCIONES_{S-0} x MOVIMIENTOS_{S-2} será siempre nulo, se puede establecer simplemente:

$$\text{ACCIONES} \times \text{MOVIMIENTOS VIRTUALES} = 0$$

denominando los corrimientos y giros del sistema-0, por MOVIMIENTOS VIRTUALES, lo cual permite enunciar:

EN TODO CUERPO ELÁSTICO SOLICITADO POR ACCIONES EN EQUILIBRIO ESTÁTICO, CUALQUIER DESPLAZAMIENTO VIRTUAL COMPATIBLE CON LAS LGADURAS DEL SISTEMA, PRODUCE TRABAJO NULO.

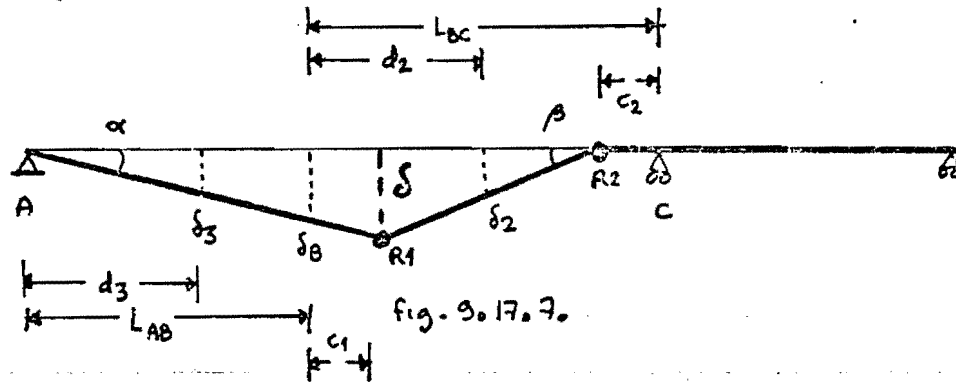
Sea la viga:



en la que se precisa determinar la reacción en B, en cuyo caso según lo expuesto eliminaremos dicho apoyo B, y lo sustituiremos por la acción que este efectuaba que es la reacción a calcular.



La viga una vez eliminado el apoyo B, es una ESTRUCTURA HIPOSTÁTICA o DEFORMABLE, y en consecuencia puede obligarse, por ejemplo a la rótula R1 a sufrir un corrimiento VIRTUAL arbitrario δ , que sea compatible con las ligaduras, tal como se indica en la fig. 9.17.7.



Para aplicar el principio de los trabajos virtuales se necesita obtener los corrimientos virtuales δ_3 , δ_B y δ_2 que sufrirán las acciones P_3 , R_B y P_2 respectivamente, en función del valor arbitrario δ , lo cual se efectúa por simples proporcionalidades:

$$\tan \alpha = \frac{\delta}{L_{AB} + c_1} \quad \tan \beta = \frac{\delta}{L_{BC} - c_1 - c_2}$$

$$\delta_3 = \tan \alpha \cdot d_3 \quad \delta_2 = \tan \beta \cdot (L_{BC} - d_2 - c_2)$$

$$\delta_B = L_{AB} \cdot \tan \alpha$$

Lo que permite establecer:

$$P_3 \delta_3 - R_B \delta_B + P_2 \delta_2 = 0$$

$$P_3 d_3 \frac{\delta}{L_{AB} + c_1} - R_B L_{AB} \frac{\delta}{L_{AB} + c_1} + P_2 (L_{BC} - d_2 - c_2) \frac{\delta}{L_{BC} - c_1 - c_2}$$



$$R_B = \frac{1}{L_{AB}} \left(P_3 d_3 + P_2 (L_{BC} - d_2 - c_2) \frac{L_{AB} + c_1}{L_{BC} - c_1 - c_2} \right)$$



Es muy frecuente la aplicación del principio de los TRABAJOS VIRTUALES, para la obtención del esfuerzo en una cierta barra, sin la necesidad de obtener lo que acontece en las restantes. Veamos un ejemplo, sea la estructura en celosía de la figura 9.17.8.

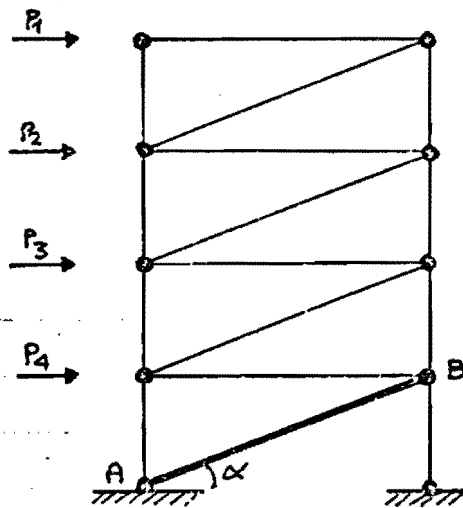


Fig 9.17.8.

Aplicando la metodología expuesta, si se desea obtener el ESFUERZO NORMAL que experimentará la barra AB, eliminaremos dicha barra, y someteremos a un movimiento arbitrario de tipo VIRTUAL a la estructura deformable que se genera, tal como indica la Fig 9.17.9, en donde δ es el corrimiento virtual impuesto, y las fuerzas N representan la acción de la barra eliminada.

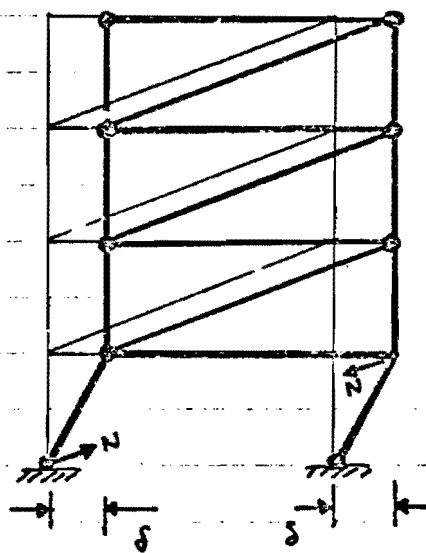


Fig 9.17.9.

$$\delta \cdot \sum P_i - \delta \cdot \cos \alpha \cdot N = 0$$

$$N = \frac{\sum P_i}{\cos \alpha}$$

En estructuras más irregulares, puede resultar complejo la obtención de los corrimientos que experimenta cada nudo, ante un corrimiento virtual impuesto en uno de ellos, y a fin de resolver esta dificultad, Mohr, Idoukowsky y Muller-Breslau idearon métodos específicos que a continuación exponemos.

9.18. OBTENCIÓN GRÁFICA DE LOS CORRIMIENTOS VIRTUALES.
MÉTODOS DE MOHR, JOUKOWSKY Y MULLER-BRESLAU

Sea la estructura en celosía siguiente:

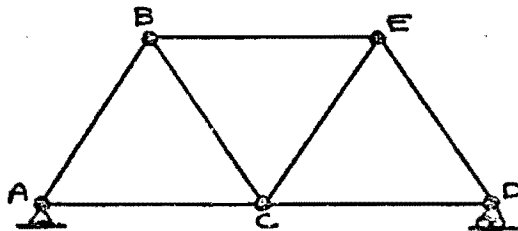


Fig. 9.18.1.

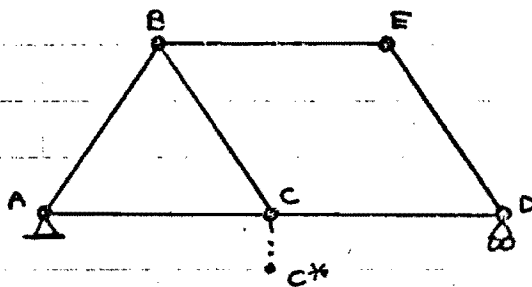


Fig. 9.18.2.

Si eliminamos la barra CE, la estructura cruzada pasará a ser deformable, y podremos imponer al nudo C, por ejemplo, un corrimiento arbitrario.

Los nudos desplazados los simbolizaremos mediante un asterisco y la letra correspondiente.

Debido al hecho, de que los corrimientos virtuales deben ser siempre muy pequeños, se precisa la utilización de dos escalas distintas, una para representar el esquema de la estructura, y la otra, para los DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.

El nudo A está fijo, y ello implica que el nudo C podrá estar situado tras el desplazamiento, en un arco de circunferencia de centro A y radio AC

Si las citadas escalas no son coincidentes, el centro del arco CC^* no será el nudo A, sino otro punto mucho más distante de C que el citado apoyo, tal como se indica en la fig. 9.18.3.

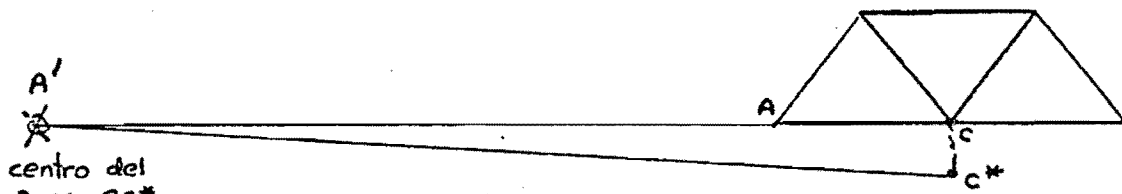


fig 9.18.3.

Si las barras se representaran a la misma escala que los corrimientos virtuales, la barra AC , se tendría que dibujar como $A'C$ y no como AC de la fig. 9.18.3.

Por lo expuesto, puede entenderse que el corrimiento CC^* pueda considerarse como un segmento rectilíneo normal a la barra AC , en vez, de su verdadera forma de un arco de circunferencia.

Si el nudo A no sufre corrimiento alguno, la barra deformada A^*C^* será la que indicamos en la fig. 9.18.4.

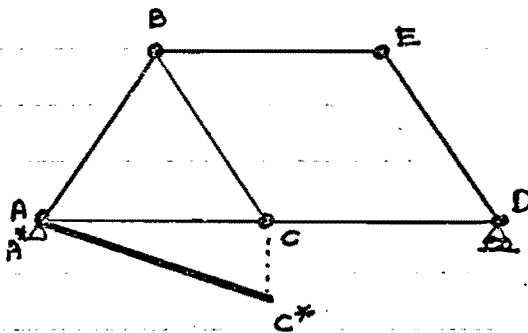


fig. 9.18.4.

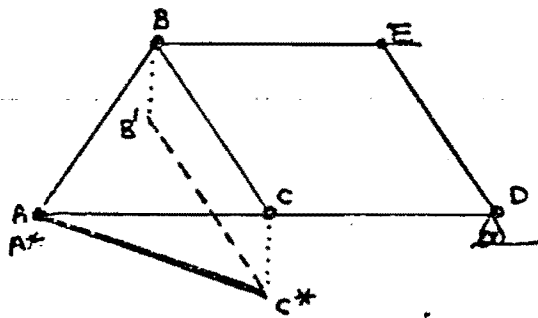
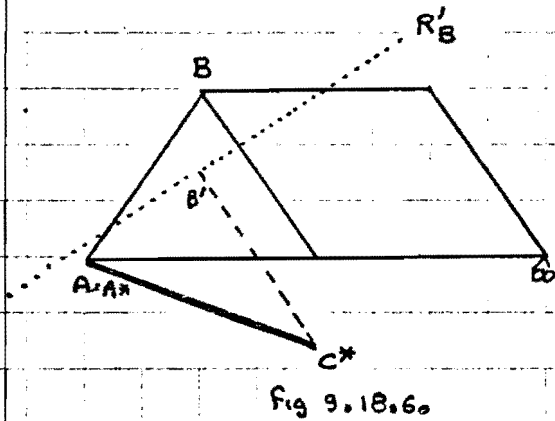


fig 9.18.5.

La barra BC sufrirá dos movimientos distintos, uno será un desplazamiento que la mantendrá paralela a su posición inicial, hasta que C alcance C^* , en cuyo caso B ocupará la posición B' que se indica en la fig. 9.18.5, y a este movimiento deberá adicionarse una segunda traslación que consistirá en una ROTACIÓN con centro C^* , lo que ocasionará un movimiento de B' según un arco de circunferencia, pero según lo expuesto, sabemos que dicho

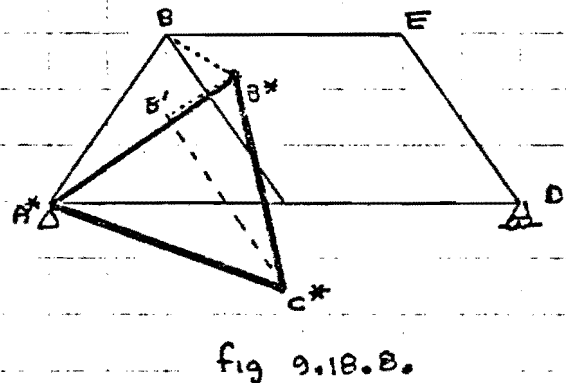
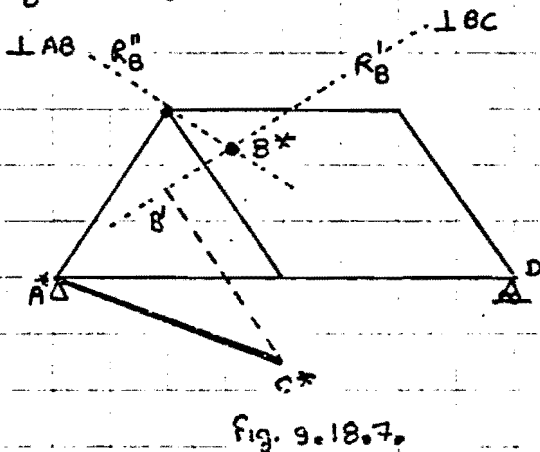


arco puede sustituirse por una recta normal a la barra BC^* que es el radio, por lo tanto, la recta R'_B de la fig. 9.18.6. representa el lugar geométrico de los puntos en que puede estar situada la posición del nudo B^* , una vez completados los movimientos.



La posición del nudo B, se obtendrá mediante su posible ubicación, efectuando un análisis similar al realizado aplicado a otra barra, la cual será lógicamente la AB, puesto que conocemos la posición de A^* al ser coinci-

dente con A, por existir allí apoyo fijo, lo motiva que el movimiento de traslación en paralelo a sí misma sea para la misma inexistente, y que únicamente se produzca la rotación con centro en A^* , lo que origina que la posible situación del nudo B, en función de la barra AB, sea la recta R''_B normal desde B, a la citada barra, tal como se indica en la Fig. 9.18.7.



La posición definitiva del nudo B^* estará en la intersección de R'_B y R''_B , tal como se puede observar en la fig. 9.18.7.

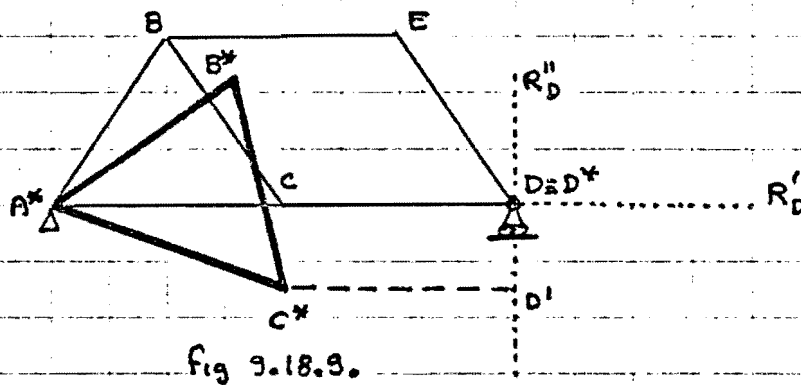
La posición de las barras deformadas \overline{AC} , \overline{AB} y \overline{BC} puede ya ser representada tal como se efectúa en la fig. 9.18.8, puesto que las posiciones definitivas de A^* , B^* y C^* ya son conocidas.



El nudo D , al estar sobre un apoyo deslizante deberá moverse paralelamente a la superficie horizontal de deslizamiento, por lo que el lugar geométrico de las posibles posiciones de D^* será la recta R'_D de la fig. 9.18.9.

Por otro lado, la barra CD sufrirá un movimiento de traslación paralela a sí misma, que la llevará a la posición C^*D' , y posteriormente una rotación con centro C^* , en cuyo caso D describirá un arco de circunferencia que puede sustituirse por la normal a CD desde D , que simbolizamos por R''_D en la fig. 9.18.9.

La posición D^* la determina la intersección de R'_D y R''_D tal como se indica en la fig. 9.18.9., y en consecuencia D^* coincidirá con su posición inicial D .



Conocida la posición D^* , puede determinarse la posición de E^* .

El movimiento de traslación de BE , paralela a sí misma, conduce al nudo E , a la posición E_1 , y haciendo centro en B^* , la posible situación de E será R'_E , pero atendiendo a la barra ED , y al hecho de que $D \equiv D^*$, la normal a la recta ED , desde E , R''_E , será también el lugar geométrico del punto E , y por lo tanto, la intersección de R'_E y R''_E nos proporciona E^* , tal como indica la fig. 9.18.10.

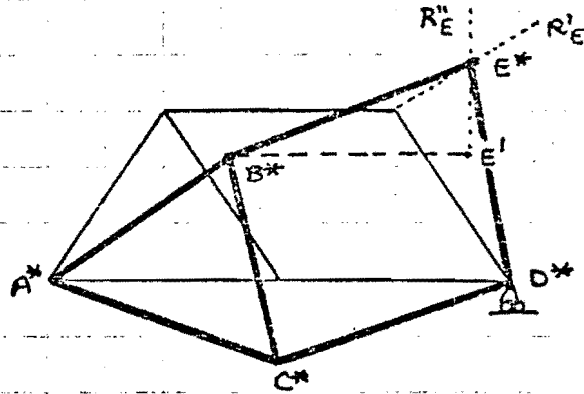


fig. 9.18.10.

Conocidos los corrimientos virtuales que se producen en un estructura isostática, al retirar una cierta ligadura, puede fácilmente determinarse el esfuerzo que efectúa la citada ligadura en la estructura original, ante cualquier estado de cargas, mediante la aplicación del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

Supongamos que la estructura analizada está sometida a la acción de una fuerzas P_1, P_2, P_3 , tal como croquizamos en la fig. 9.18.11. Si deseamos obtener el esfuerzo normal en la barra CE, la sustituiremos por dos fuerzas N_{CE} , que representarán las acciones que introduce dicha barra sobre el resto de la estructura en celosía, caso de que la misma esté traccionada (fig. 9.18.12.)

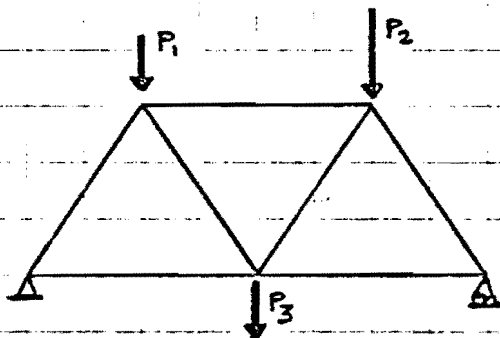


fig 9.18.11

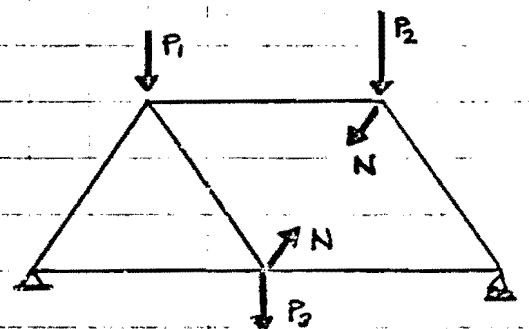


fig 9.18.12.

Los corrimientos virtuales, que se producen en la estructura, en cada nudo, y en la dirección de las acciones actuales en la estructura, serán: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \Delta_{CE}^{CE}, \Delta_{CE}^{CE}$, y consecuentemente estableceremos la nulidad del trabajo total, lo que representa la siguiente ecuación:

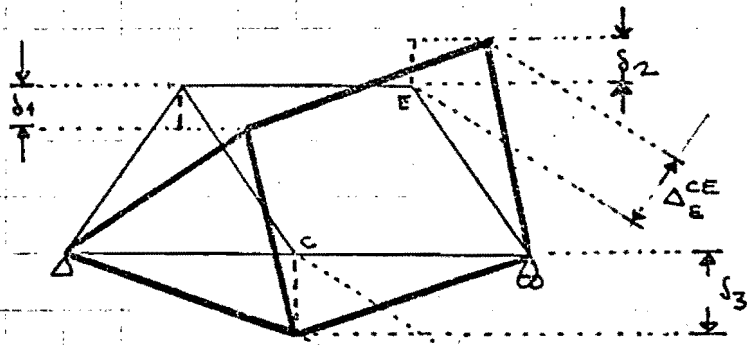


Fig. 9.18.13.

$$P_1 \delta_1 - P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 - N_{CE} \Delta_C^{CE} - N_{CE} \Delta_E^{CE} = 0$$



$$N_{CE} = \frac{P_1 \delta_1 - P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3}{\Delta_C^{CE} + \Delta_E^{CE}} \quad (9.18.1.)$$

Si utilizáramos una escala para medir los corrimientos, tal que el movimiento relativo entre los nudo C y E fuese unitario, es decir:

$$\Delta_C^{CE} + \Delta_E^{CE} = 1$$

resultaría que:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 \rightarrow \delta_1^* \\ \delta_2 \rightarrow \delta_2^* \\ \delta_3 \rightarrow \delta_3^* \end{array} \right\} \Rightarrow N_{CE} = P_1 \delta_1^* - P_2 \delta_2^* + P_3 \delta_3^* \quad (9.18.2.)$$

La expresión (9.18.2.), nos indica que:

LA DEFORMADA CORRESPONDIENTE A LOS CORRIMIENTOS VIRTUALES QUE SE PRODUCEN EN UNA ESTRUCTURA, CUANDO ELIMINAMOS UNA LIGADURA, Y SE ASIGNA VALOR UNITARIO AL MOVIMIENTO QUE SE PRODUCE SEGÚN LA CITADA LIGADURA, REPRESENTA LA LINEA DE INFLUENCIA DEL ESFUERZO EXISTENTE EN EL ELEMENTO ELIMINADO

Puede observarse, que es sumamente fácil la deducción del esfuerzo, una vez trazados los corrimientos virtuales, razón por



la cual Mohr, considero de sumo interes en perfeccionar el método expuesto para la obtención de dichos corrimientos, creando un procedimiento que recibe en su honor su nombre.

MÉTODO DE MOHR. Si la escala para representar el esquema estructural es cero, el dibujo de la estructura se reduce a un sólo punto que denominaremos POLO, y que se le suele simbolizar mediante la letra O, en donde pues, se situarán todos los nudos de la estructura antes de los corrimientos virtuales.

Si en la circunstancia de ESCALA=0, aplicamos el método desarrollado anteriormente para obtener la posición de cada nudo, después de un CORRIMIENTO VIRTUAL IMPUESTO, podremos observar que la metodología puede simplificarse, pues NO SERÁ PRECISO DIBUJAR LA BARRA DESPLAZADA PARALELAMENTE ASÍ MISMA, desapareciendo $B'C^*$ de la figura 9.18.7, la C^*D' de la fig. 9.18.9, y la B^*E' de la fig 9.18.10., puesto que respectivamente $B' \equiv C^*$, $D' \equiv C^*$, y $E' \equiv B^*$.

Así pues la fig. 9.18.13. se transformará en la fig. 9.18.15. al aplicar la metodología propuesta por MOHR.

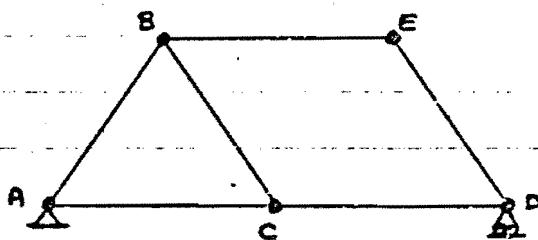


fig 9.18.14

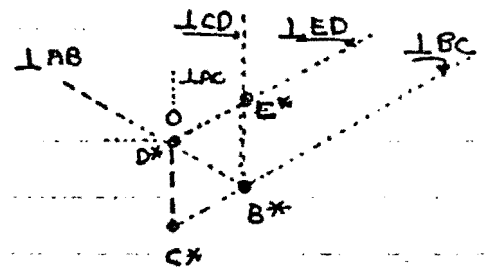


fig. 9.18.15.

Conocidos los corrimientos de todos los nudos, que son:

$$\vec{OB}^* \equiv \vec{BB}^*, \quad \vec{OC}^* \equiv \vec{CC}^*, \quad \vec{OD}^* = \vec{DD}^* = \vec{O}, \quad \vec{OE}^* = \vec{EE}^*$$

es inmediata la construcción de la fig 9.18.16.

La figura 9.18.15. se conoce como DIAGRAMA POLAR DE MOHR.

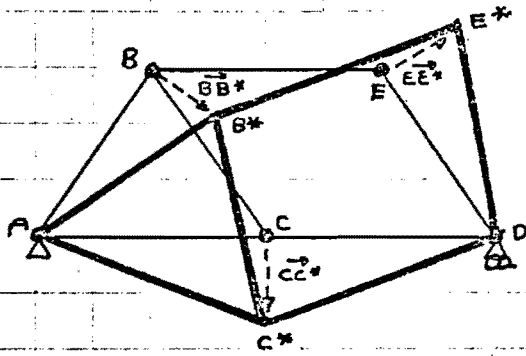


fig 9.18.16.

MÉTODO DE JOUKOWSKI

Joukowski propuso una interesante alternativa al método de Mohr, que completa al mismo.

Joukowski propuso aplicar directamente el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES una vez obtenido el DIAGRAMA POLAR DE MOHR, dibujando en el mismo las fuerzas que actúan en cada nudo, aplicadas en el desplazado que hemos simbolizado mediante un asterisco, pero GIRADAS 90° con un sentido de rotación arbitrario, (pero común para todas ellas), y señalo que el imponer la condición de

TRABAJO NULO sobre la fig 9.18.16.

EQUIVALE a imponer la

NULIDAD DE LA SUMA DE LOS MOMENTO de TODAS LAS FUERZAS aplicadas en los nudos desplazados, RESPECTO AL POLO, tal como puede observarse en la fig. 9.18.17.

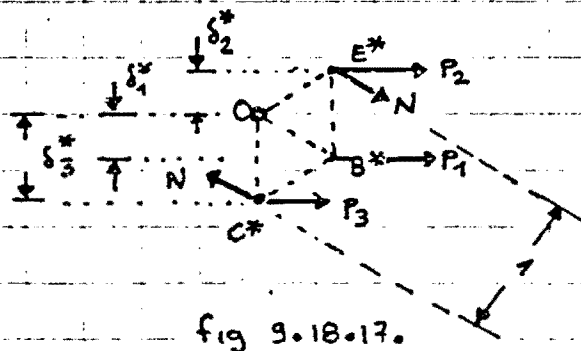
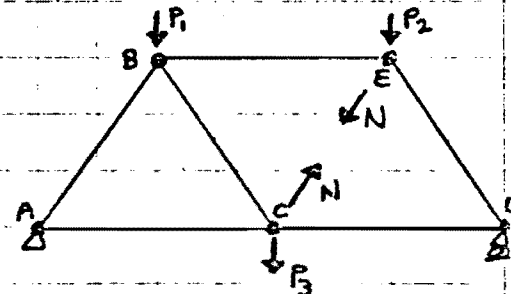


fig 9.18.17.



$$\sum M = 0 \Rightarrow P_1 \delta_1^* - P_2 \delta_2^* + P_3 \delta_3^* - N \cdot 1 = 0$$



$$N = P_1 \delta_1^* - P_2 \delta_2^* + P_3 \delta_3^*$$

sentido de giro, para la representación de fuerzas.

lo que en efecto, es coincidente con (9.18.20)



MÉTODO DE MULLER-BRESLAU

Este método se fundamenta en el método de Joukowski, de sustituir la condición de trabajo nulo, por la de momento nulo, tras un giro de 90° , pero en vez de aplicarlo a las fuerzas, lo efectúa con los corrimientos, pues ello representa una sensible ventaja, al simplificar la metodología para la obtención de los corrimientos, puesto que para obtener los nudos desplazados 90° , Muller-Breslau traza en vez de ortogonales a las barras, paralelas a las mismas, lo que transforma a una sola línea, el dibujo de la barra desplazada paralelamente así misma, y la recta que representa el lugar geométrico de las posibles posiciones del nudo desplazado.

Así pues, el método de Muller-Breslau determina la posición del nudo desplazado, trazando paralelas a las barras, desde otros dos nudos cuyas posiciones desplazadas ya se han calculado.

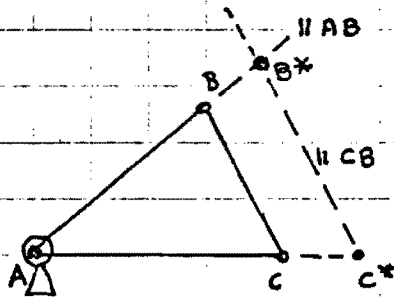
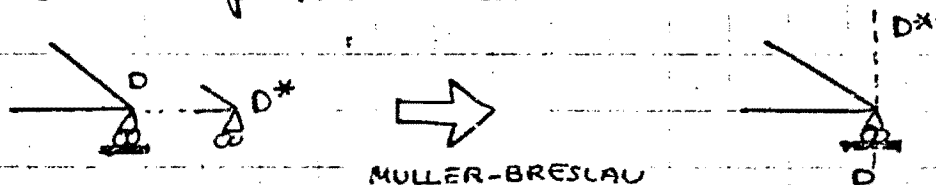


Fig. 9.18.8.

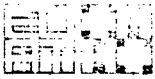
En consecuencia, el corrimiento virtual impuesto, que en el ejemplo anterior era CC^* , ahora se deberá dibujar girado 90° , y por lo tanto, en dirección radial del punto o nudo fijo. tal como se ha efectuado en la fig. 9.18.8., en la que A, al ser nudo fijo, es el centro de la rotación de C^*-C .

Si existe un apoyo deslizante, el corrimiento del nudo correspondiente en el método de Muller-Breslau será ortogonal a la correspondiente superficie de deslizamiento.

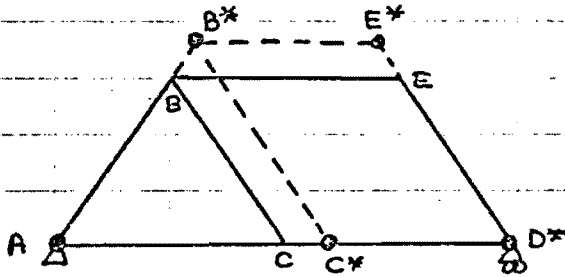


MULLER-BRESLAU

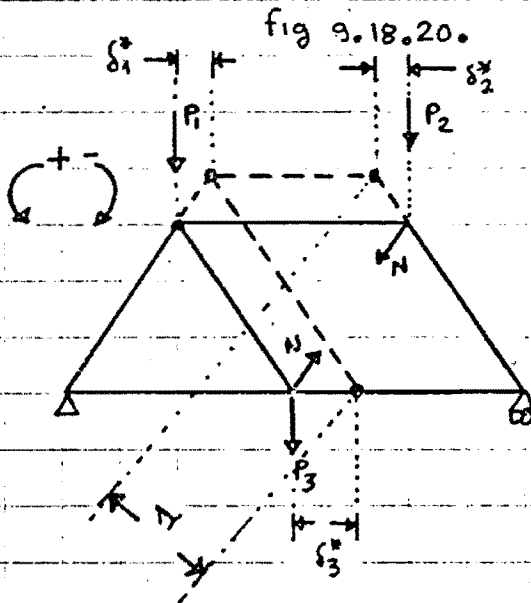
Fig. 9.18.13.



Aplicando el MÉTODO MULLER-BRESLAU a la estructura que hasta ahora hemos utilizado como ejemplo, obtendremos el siguiente diagrama de corrimientos virtuales (fig 9.18.20.)



Y el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES, para obtener el ESFUERZO en la LIGADURA SUPRIMIDA, se aplica tal como se indica a continuación en concordancia con la fig. 9.18.21.



$$P_1 \delta_1^* - P_2 \delta_2^* + P_3 \delta_3^* - N \cdot 1 = 0$$



$$N = P_1 \delta_1^* - P_2 \delta_2^* + P_3 \delta_3^*$$

fig 9.18.21.

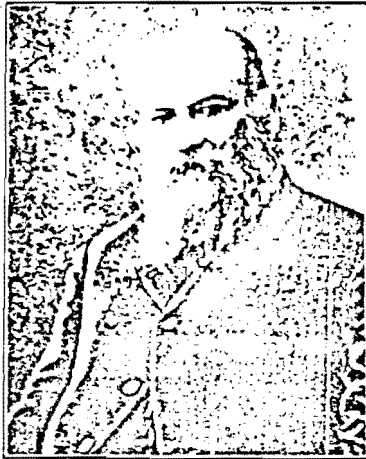
Por lo que podremos considerar como verdadera LINEA DE INFLUENCIA del ESFUERZO

en la LIGADURA SUPRIMIDA, cuando el CORRIMIENTO VIRTUAL correspondiente a la citada LIGADURA sea UNITARIO.



N.E. JOUKOWSKI (1847-1921)

Joukowski fue un pionero de la Teoría AERODINÁMICA debiéndose a él, la aplicación del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES sobre el propio DIAGRAMA POLAR DE MOHR.



Joukowski

MULLER - BRESLAU - Fue profesor del Politécnico de Berlín, efectuando un gran número de aportaciones que influyeron sensiblemente en el desarrollo de la TEORÍA DE ESTRUCTURAS a finales del siglo pasado.

Muller-Breslau publicó diversos libros, en los que desarrolló aplicaciones sobre el concepto de LINEA DE INFLUENCIA, que habían introducido anteriormente Mohr y Winkler.

Sus trabajos fueron recogidos en "Vorträge über Brückenbau" vol-1 Viena -1872 que disponía de una gran difusión en aquella época.

AUGUST FÖPPL (1854-1924) Nació en la pequeña ciudad de Grass-Umstadt (Alemania), recibiendo su primera enseñanza en centros públicos.



AUGUST FÖPPL

Su vocación hacia las estructuras se debió a la impresión que le causaron las obras que se efectuaban para el ferrocarril en las cercanías de su pueblo natal, lo que motivó que efectuara el ingreso para el Instituto Politécnico de Darmstadt, en el que sólo permaneció un año, al considerar las enseñanzas que se impartían de BAJO NIVEL científico, por lo que se trasladó a Stuttgart donde Mohr era



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.132.

profesor,

Las exposiciones de Mohr le atrajeron definitivamente hacia las estructuras.

En 1873 Mohr accedió a la cátedra de Dresden, y Föppl consideró la posibilidad de trasladarse de Universidad, decidiéndose por la Karlsruhe debido a la presencia en la misma del Prof. Grashof que ostentaba un alto prestigio.

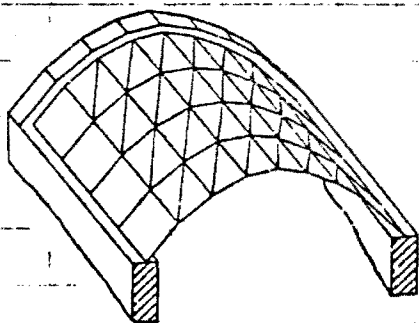
FÖPPL se sintió enormemente decepcionado por las enseñanzas de GRASHOF que consideró CARENTES DE LA MÁS MÍNIMA ORIGINALIDAD.

En 1874 se graduó, ingresando como profesor ayudante en Holzminden en 1876, y un año más tarde en Leipzig.

Para acceder a una cátedra abordó el estudio de las estructuras en celosía espaciales, deduciendo la relación que deben guardar nudos y barras para que las mismas sean isostáticas y dispongan de RIGIDEZ DE FORMA (como todos los ingenieros de su época desconocía los trabajos de Möbius)

En sus estudios ya menciona la existencia de FORMAS CRÍTICAS.

Föppl para estudiar las celosías espaciales como elementos de cubrición, efectuó una de grandes dimensiones en el LABORATORIO

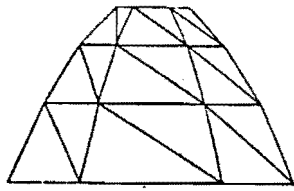


de la Universidad, para verificar la exactitud de sus métodos de cálculo por comparación con los resultados obtenidos experimentalmente. De esta forma alcanzó una importante conclusión, en tanto que en estructuras planas, el supuesto de que los nudos sean articulados, no siendo perfectamente en la realidad, apenas produce desviaciones apreciables, lo

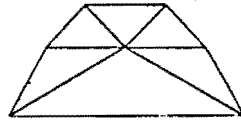


mismo no acontece en las espaciales. Analizó celosía cúpula

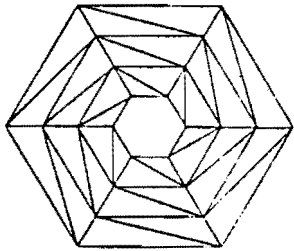
tipo Schwedler, y realizó una para el mercado de Leipzig de forma similar, publicando el método de cálculo seguido en su libro: "Das Fachwerk im Raume - Leipzig - 1892"



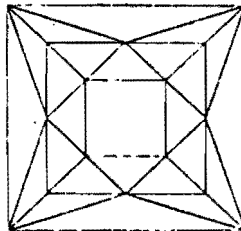
(a)



(a)



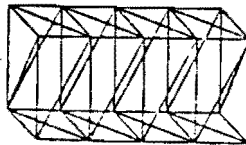
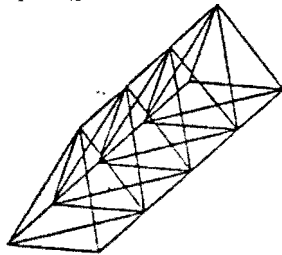
(b)



(b)

Posteriormente a este trabajo durante un tiempo se dedicó al estudio de la Electricidad, y de las teorías de Maxwell en este campo, publicando un libro que significó un hecho importante para toda la comunidad científica alemana.

En 1893 tras el fallecimiento del prof. D. Bauschinger ocupó la cátedra de Mecánica en Munich, publicando a raíz de ello en 1898 un volumen sobre RESISTENCIA DE MATERIALES que se hizo famoso en todo el mundo, donde aborda la Teoría de la Elasticidad después de una introducción a la Resistencia de Materiales propiamente dicha, en vez de como lo hacían Grashof y Winkler que exponían esta última como una simplificación de la primera.





EJERCICIO

Dibujar el diagrama de los corrimientos virtuales de la celosía croquizada, si se elimina la barra CD, y utilizando dicho diagrama, obtengase el esfuerzo normal de dicha barra.

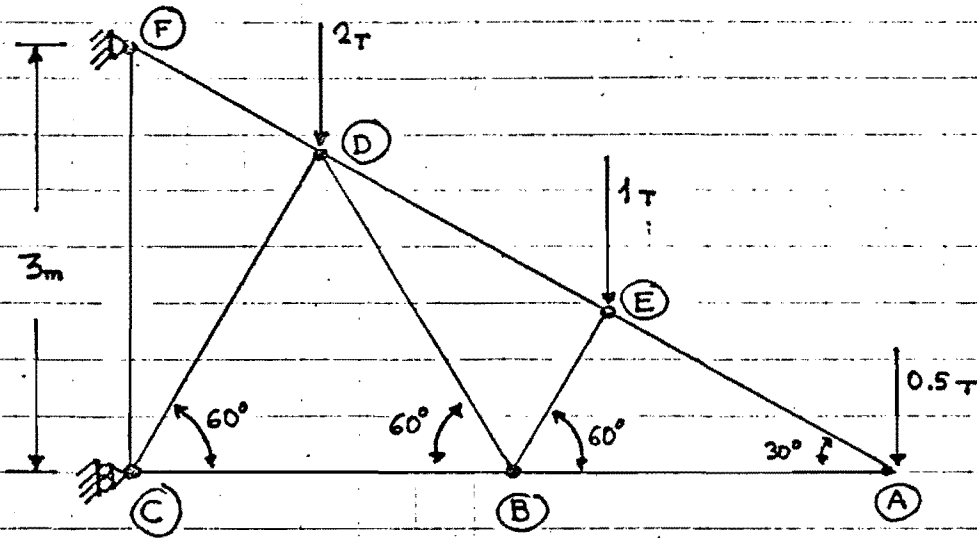


Fig 9.18.22.

SOLUCIÓN

El nudo D se moverá según un arco de circunferencia de centro F y radio FD, en el mecanismo que se produce al eliminarse la barra CD, por lo que el corrimiento del nudo D, será ortogonal a \overline{FD} . Si aplicamos el método de Müller-Breslau, en el que los corrimientos virtuales están girados 90° , el corrimiento de D se representará radialmente, es decir según \overline{FD} . Los demás corrimientos se obtendrán mediante el trazado de paralelas a las barras.

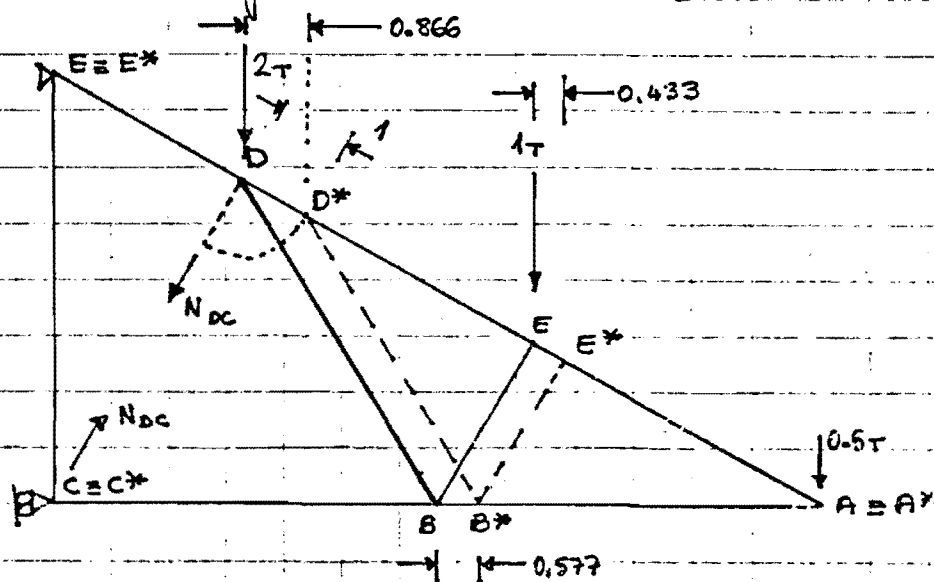


Fig 9.18.23.

La condición de trabajo nulo para todo corrimiento virtual compatible con las ligaduras, queda sustituido en el método de Müller-Breslau, por momento nulo de las acciones exteriores (constitutivas de un sistema en equilibrio estático), con respecto al nudo sobre el que actúan en su posición desplazada, en consecuencia:

$$N_{oc} \cdot 1 + 2 \cdot 0,866 + 1 \cdot 0,433 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{oc} = -2,165 T$$

El diagrama de Müller-Breslau representa los corrimientos virtuales (girados 90°), pero puede trazarse el siguiente diagrama situando en verdadera posición los citados corrimientos

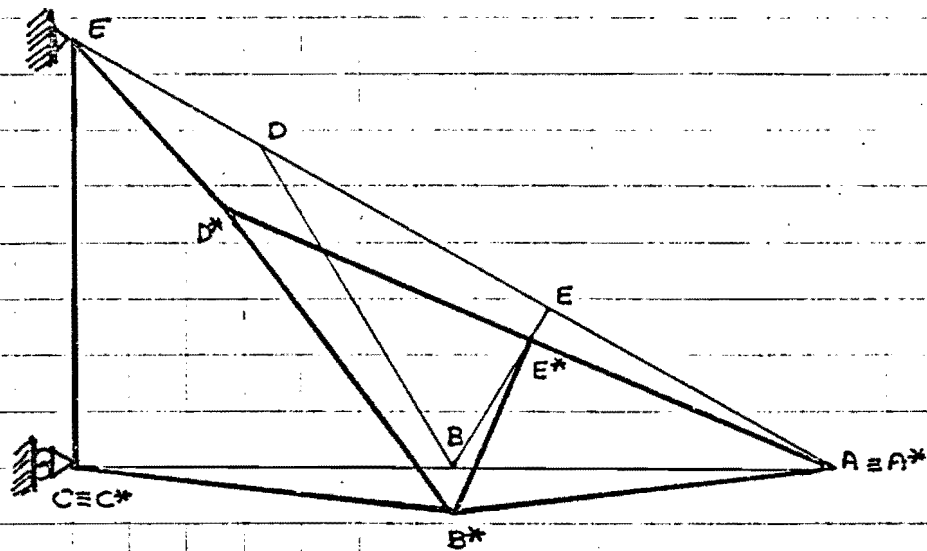


Fig 9.18.24.

DIAGRAMA DE CORRIMIENTOS VIRTUALES, eliminada la barra CD.

Mediante este diagrama es fácil calcular el esfuerzo normal de la barra CD, ante diversas hipótesis de cargas.

**9.19. ESTRUCTURAS CRÍTICAS**

Existen estructuras en celosía, que pese a ser ISOSTÁTICAS, su forma geométrica es tal, que ante la acción de pequeñas fuerzas, los desplazamientos de los nudos pueden resultar en la práctica muy grandes, y en el campo teórico, en el MARCO DE LOS EFECTOS DE PRIMER ORDEN, INDEFINIDAMENTE GRANDES. Es pues evidente que es preciso saber detectar cuando se diseña un estructura en celosía, si esta va a ser crítica o no.

Mediante la aplicación del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES, se ha obtenido el ESFUERZO EN LA LIGADURA ELIMINADA, mediante una expresión del tipo:

$$P_1 \delta_1 - P_2 \delta_2 + P_3 \delta_2 - N (\Delta E + \Delta c) = 0$$



$$N = \frac{P_1 \delta_1 - P_2 \delta_2 + P_3 \delta_2}{\Delta E + \Delta c}$$

lo que es en concreto la expresión (9.18.1.) anteriormente obtenida.

En general, se eligió una escala para los corrimientos virtuales, tal que asignara UNO a la suma: $\Delta E + \Delta c$, pero podría resultar que en algunas celosías, resultase que $\Delta E + \Delta c = 0$, en cuyo caso, evidentemente el ESFUERZO de la LIGADURA ELIMINADA se haría INDEFINIDAMENTE GRANDE, cediendo, y produciéndose las predichas deformaciones y desplazamientos incontroladamente grandes, lo que nos indica que tales celosías serían CRÍTICAS.

Así pues, las ESTRUCTURAS CRÍTICAS podrán ser detectadas mediante la obtención de los CORRIMIENTOS VIRTUALES, por cualquiera de los métodos anteriormente propuestos, de los cuales sin duda el más eficaz a este fin.



es el método de MULLER BRESLAU

Para que $\Delta E + \Delta C = 0$, es preciso que $\Delta E = -\Delta C$, lo que implica que el módulo de ambos corrimientos nodales, sea el mismo, (en su proyección sobre la dirección EC), y que uno de ellos sea coincidente con el esfuerzo atribuible a la ligadura, y el otro opuesto, tal como se indica en la fig. 9.19.1.

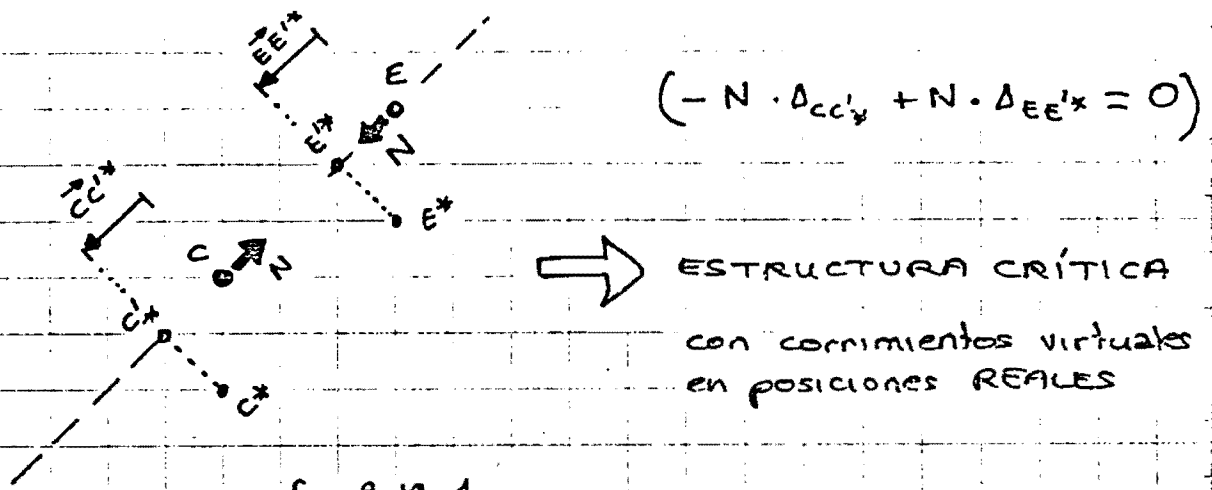
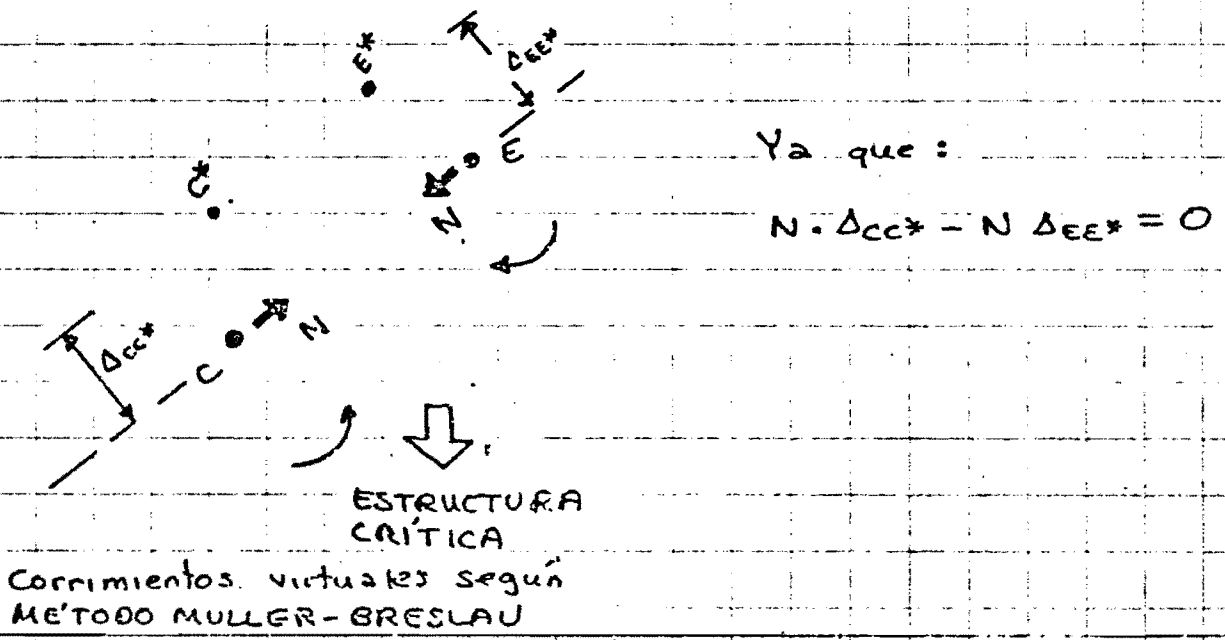


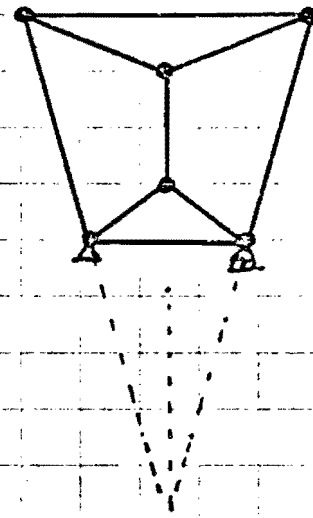
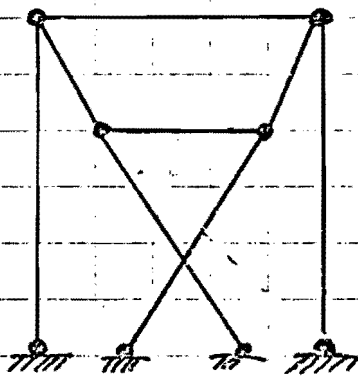
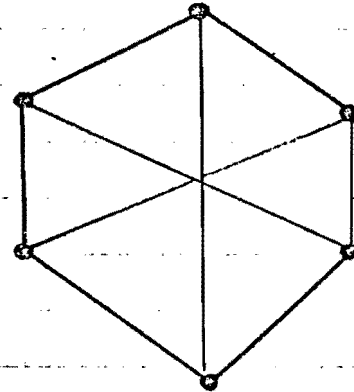
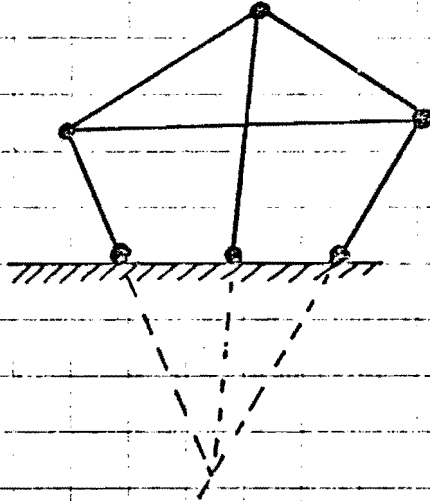
fig 9.19.1.

Al aparecer girados los corrimientos en el MÉTODO DE MULLER BRESLAU, la condición anterior se transforma que las posiciones C^* y E^* deben distar lo mismo de la recta CE, y quedar situados a un mismo lado, tal como se indica en la fig. 9.19.2.





Pueden ponerse los siguientes ejemplos de estructuras críticas.



Las estructuras críticas se detectan en los métodos analíticos en los cuales se pretenden obtener los corrimientos o los esfuerzos mediante la formulación de un sistema de ecuaciones, en que la MATRIZ del citado sistema es SINGULAR (determinante nulo), y en concreto, si se aplica el MÉTODO MATRICIAL de las DEFORMACIONES, resultará que la MATRIZ DE RIGIDEZ de la ESTRUCTURA será SINGULAR.



9.20. OBTENCIÓN GRÁFICA DE LOS CORRIMIENTOS REALES EN UNA ESTRUCTURA EN CELDAS (MÉTODO DE WILLIOT)

El método de Williot se basa en el método POLAR DE MOHR para la obtención de los corrimientos virtuales, razón por la cual ahora se expone, casi inmediatamente del citado método.

La diferenciación entre el método de Williot y el método del DIAGRAMA POLAR DE MOHR, además de que en el primero se considera la estructura real, y en el segundo la estructura hipostática resultante de eliminar una ligadura, estriba en que WILLIOT considera los alargamientos o acortamientos que sufren las barras como consecuencia de los esfuerzos que experimentan, y en el de MOHR los movimientos se producen en los nudos como consecuencia de uno impuesto de carácter arbitrario, lo cual es factible dado el carácter de deformable de la estructura una vez eliminada la ligadura.

En el método polar de MOHR, si se han obtenido las posiciones desplazadas de dos nudos A y B , las cuales las representaremos mediante A^* y B^* , puede calcularse la posición de otro nudo C , unido a los nudos A y B mediante las barras \overline{AC} y \overline{BC} , trazando desde A^* y B^* las ortogonales a las barras \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente, tal como indicamos en la fig. 9.20.10, y el punto C^* de intersección, es la posición desplazada del nudo C .

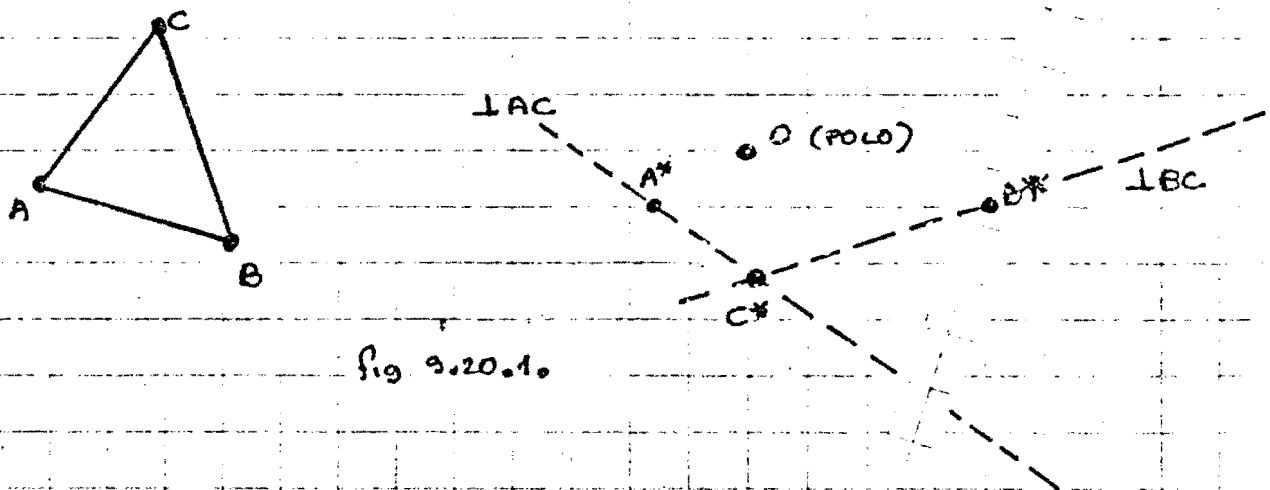


Fig. 9.20.10



Williot propuso efectuar la corrección que a continuación describimos a fin de tener presente los alargamientos o acortamientos de las barras \overline{AC} y \overline{BC} que lógicamente influyen en la posición definitiva del nudo C^* .

Supongamos que la barra AC está traccionada, en tanto que la barra BC este acortada, en cuyo caso WILLIOT propone para trazar las ortogonales a AC y BC , dos puntos A' y B' en vez de los A^* y B^* , los cuales se obtienen colocando desde los últimos puntos citados los segmentos Δ_{AC} y Δ_{BC} representativos de los citados alargamientos o acortamientos de las dos barras, según se indica en la fig. 9.20.2.

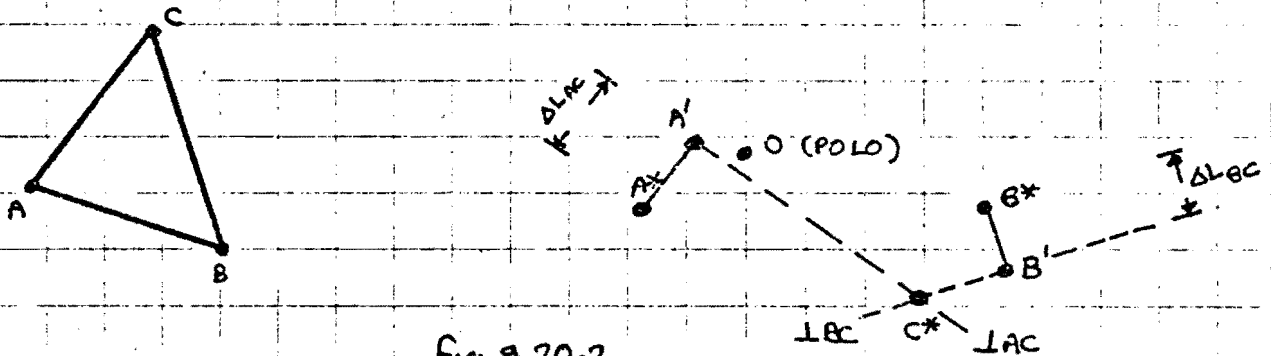


Fig 9.20.2

La orientación del segmento A^*A' es acorde a como se observaría el movimiento del nudo C , por el efecto exclusivo del alargamiento de la barra AC , que lógicamente es de alejamiento con respecto a A , tal como indicamos en la fig. 9.20.3.

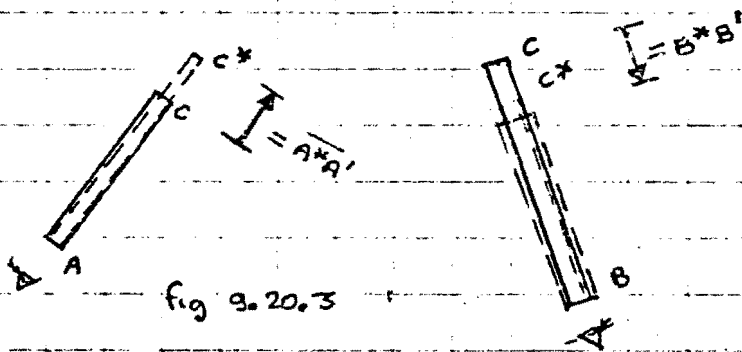
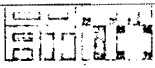


Fig 9.20.3

y análogamente el movimiento de C según se observa en B , por el acortamiento de la barra BC , es lo que representa B^*B' .



Aplicando sistemáticamente el método, se obtendrá el DIAGRAMA POLAR DE LOS CORRIMIENTOS REALES DE TODOS LOS NUDOS DE UNA ESTRUCTURA EN CELOSIA.

Pero existe una dificultad, tal como hemos expuesto es preciso para determinar la posición desplazada de un nudo, triangularlo desde las posiciones desplazadas de otros dos nudos, lo que exige para iniciar el proceso, partir del conocimiento de la posición al menos de dos nudos. Siempre se dispone del dato de que el nudo situado sobre el apoyo fijo no sufre corrimiento alguno, por lo que su posición tras la deformación lo situaremos en el DIAGRAMA POLAR sobre el propio polo, pero necesitamos el conocimiento de la posición de un segundo nudo. En algunos casos, los menos, este segundo nudo es de inmediata deducción, tal como acontece en la celosia de la fig 9.20.4.

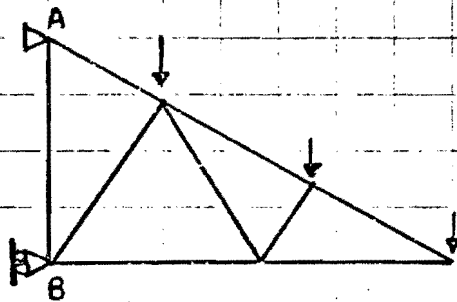


fig 9.20.4

La barra AB se traccionará y en consecuencia sufrirá un alargamiento Δ_{AB} , y dado que el nudo A es fijo, y el B está situado en un apoyo deslizante, el incremento de longitud Δ_{AB} producirá un movimiento $\overline{BB^*}$ del nudo B, según la vertical y en sentido descendente (fig. 3.20.5)

ducirá un movimiento $\overline{BB^*}$ del nudo B, según la vertical y en sentido descendente (fig. 3.20.5)

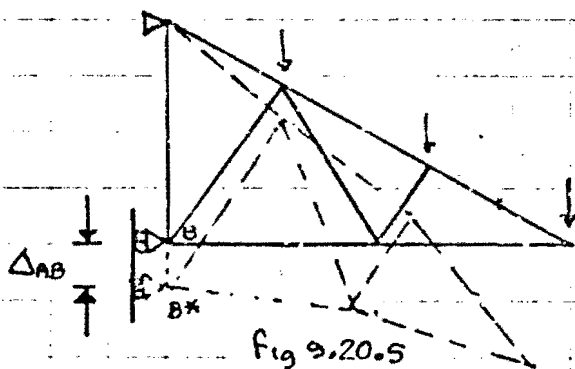
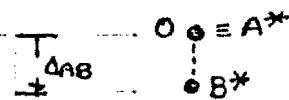


fig 9.20.5

Por lo tanto, podremos situar sobre el diagrama polar A^* y B^* , y desde ellos determinar el resto de los nudos desplazados





Pero es evidente, que en estructuras en celosía como la ya estudiada anteriormente que croquizamos nuevamente en la fig. 9.20.6, sólo conoceremos la posición desplazada de A, ya que $A^* \equiv A$

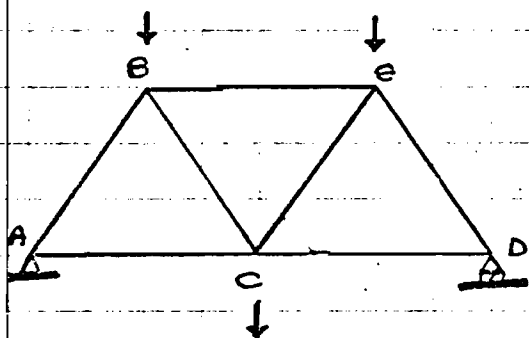


fig 9.20.6.

Para resolver este problema, Williot propuso suponer que UNA BARRA de las concurrentes al nudo FIJO A, NO VARIA DE ORIENTACIÓN con la deformación, con lo cual se transforma este caso en el anterior,

y pueden obtenerse las posiciones desplazadas de todos los nudos, mediante el DIAGRAMA POLAR, bajo el supuesto indicado, el cual al ser falso, provocará que al aplicar los vectores corrimientos deducidos en el citado diagrama, se obtenga una deformada del tipo que se indica en la fig 9.20.7.

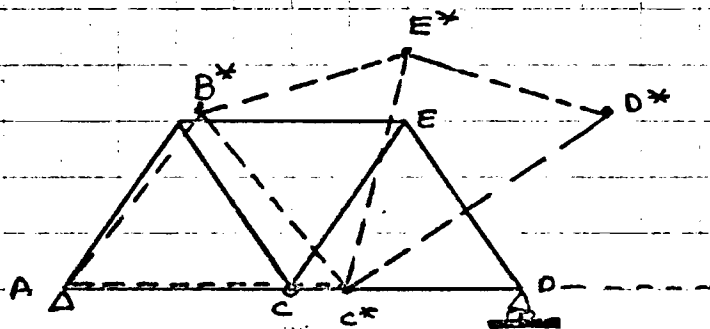


fig 9.20.7.

Es evidente que el nudo D, en vez de moverse según una paralela a la superficie de deslizamiento, se ha hecho erróneamente de forma oblicua, lo que exige girar la deformada obtenida con

centro en A, hasta que D^* pase a situarse sobre la horizontal que contiene D, tal como indicamos en la figura 9.20.8.

Pero debido al hecho de utilizar escalar distintas para representar la celosía, y para dibujar los corrimientos

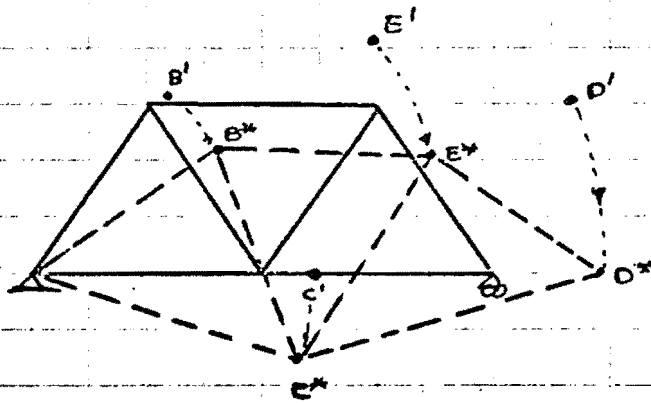


Fig. 9.20.8.

no es cierto el simple giro de la deformada con centro de rotación A.

Mohr resolvió este problema introduciendo la corrección sobre el propio diagrama polar, trazando DESDE EL POLO UNA PERPENDICULAR A LA

SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO, y proyectando sobre la misma, el punto D^* obtenido en dicho diagrama polar representativo de la posición desplazada del nudo situado sobre el apoyo deslizante. La citada proyección equivale a trazar desde D^* una paralela a la superficie de deslizamiento, hasta que corte a la normal de esa superficie que hemos trazada con origen en el polo, lo cual se producirá en un cierto punto que denominaremos D_0 . (fig 9.20.9)

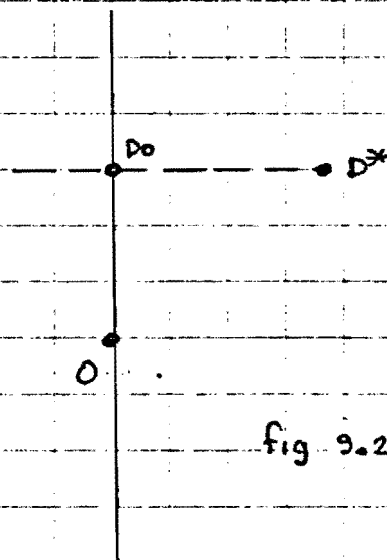
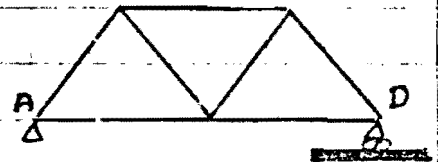


Fig 9.20.9.



Acto seguido, Mohr proponer representar la celosía mediante un giro de 90° , y un cambio de escala, sobre el segmento $O D_0$, siendo O , asimilado al nudo fijo, y D_0 al deslizante. (vease fig. 9.20.10.)

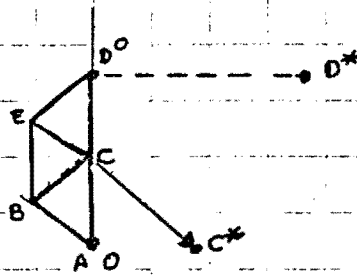
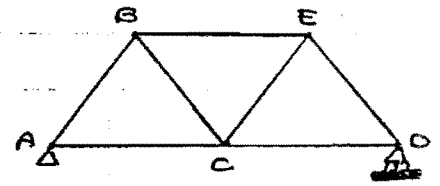


fig 9.20.10.



Si se obtiene en el diagrama polar como posición desplazada de un nudo C, el punto C*, en vez de ser el vector corrimiento $\vec{\delta} = \vec{OC}^*$, tras la corrección de MOHR, deberá adoptarse $\vec{\delta} = \vec{CC}^*$.

Veamos un ejemplo, sea la celosía de la fig 9.20.11, en la que los valores A indican el área de la sección de cada barra.

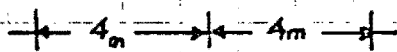
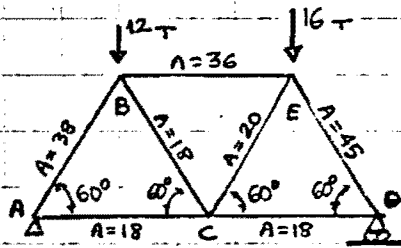
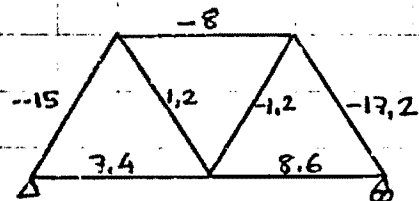


fig 9.20.11.

Resolviendo un Cremona-Maxwell, se obtienen los siguientes resultados:



ESFUERZOS NORMALES en toneladas

fig 9.20.12.

La variación de longitud que se producirá en cada una de las barras se indica en la fig. 9.20.13.

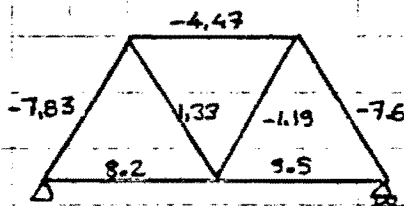
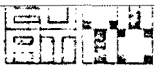


fig 9.20.13

VARIACIÓN DE LONGITUD de las BARRAS

en décimas de milímetro ($\rightarrow \times 10^{-2} = \text{cm}$.)

El diagrama POLAR resultante será el efectuado en fig. 9.20.14.



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.145.

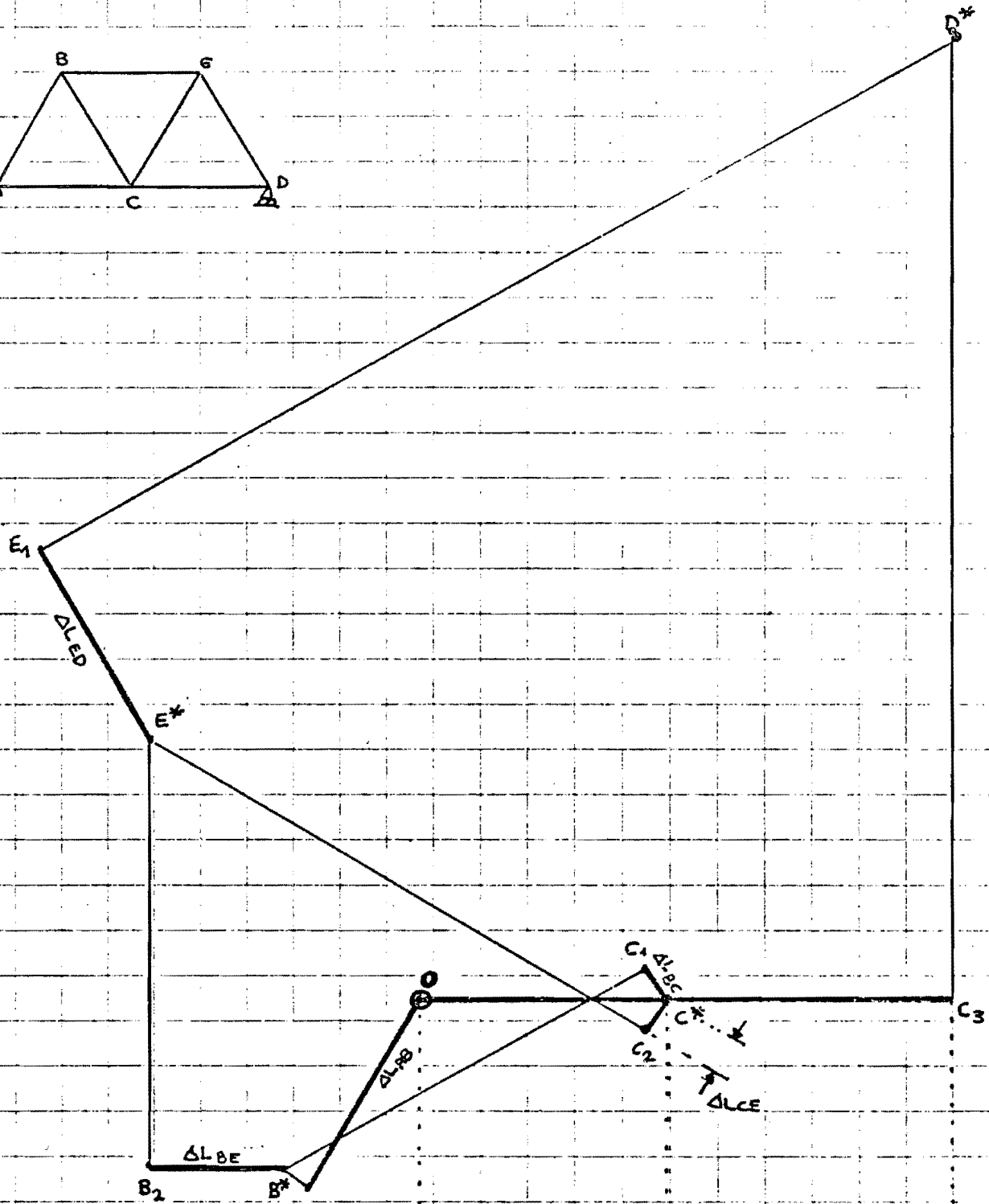
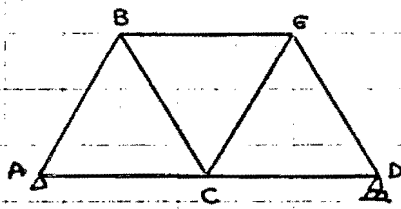


DIAGRAMA POLAR DE WILLIOT

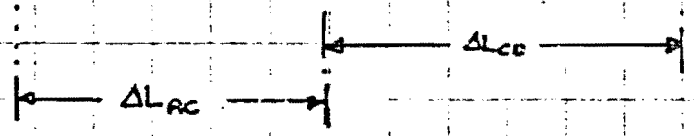


Fig. 9.20.14.

La corrección de Mohr, nos permite obtener los desplazamientos reales

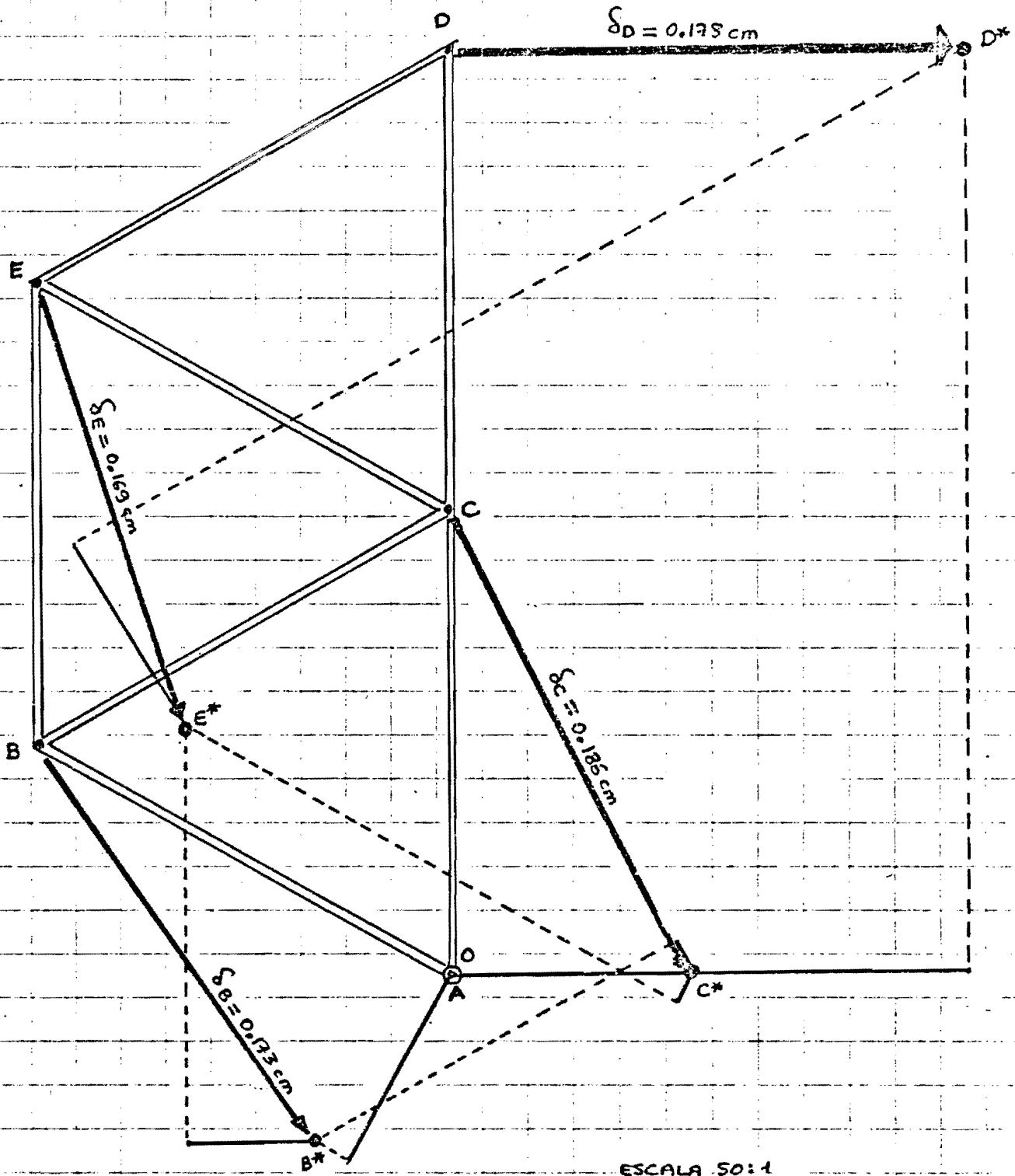


DIAGRAMA DE WILLIOT con la corrección de MOHR.
Fig 9.20.15.

Lo cual permite dibujar a escala la deformada de la celosía,
(Fig 9.20.16.)

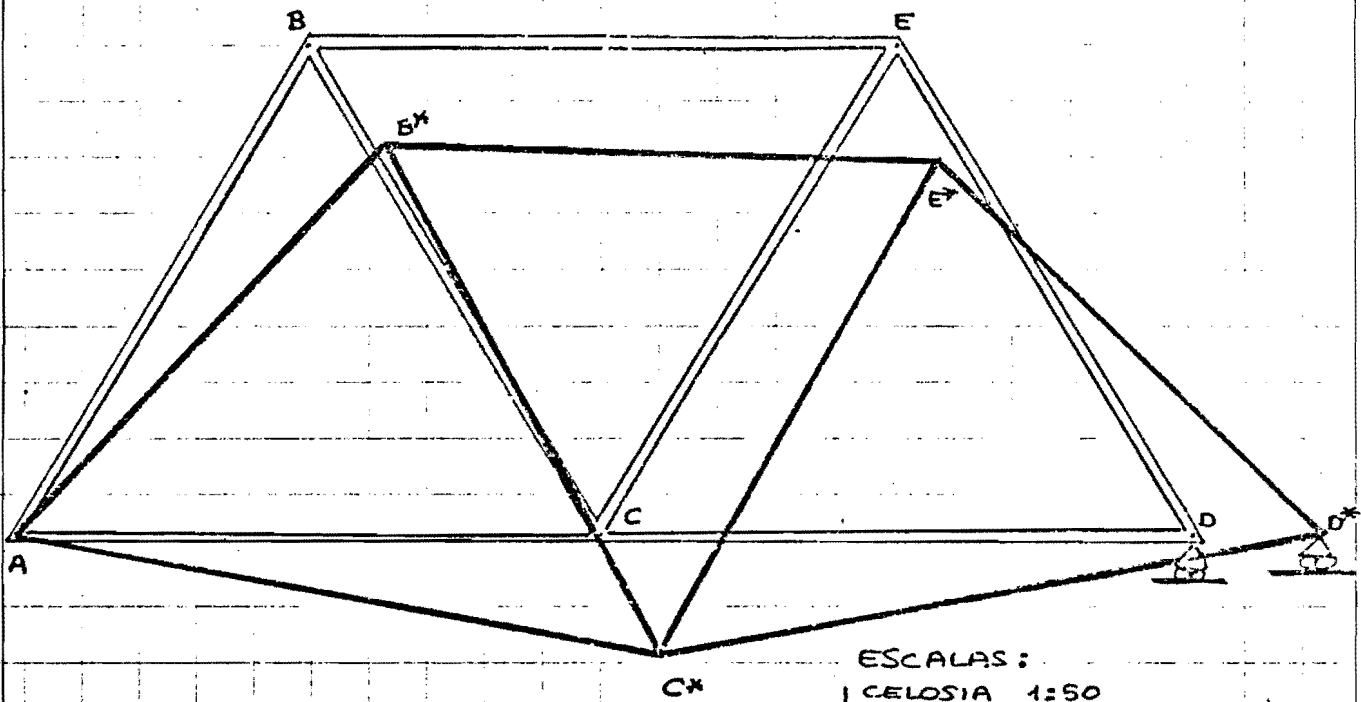


Fig 9.20.16

ESCALAS:
CELOSIA 1:50
CORRIMIENTOS 1:10



9.21. EL MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA SEGÚN EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El método de la carga unitaria fue deducido inicialmente, no por aplicación de los teoremas energéticos, sino por aplicación del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES, vía que proporciona una visión conceptual del problema que nos induce a su exposición, pese a que el método final ya ha sido establecido y deducido anteriormente mediante aplicación de los teoremas de Castigliano.

Sea la estructura ya analizada, de la fig. 9.21.1.

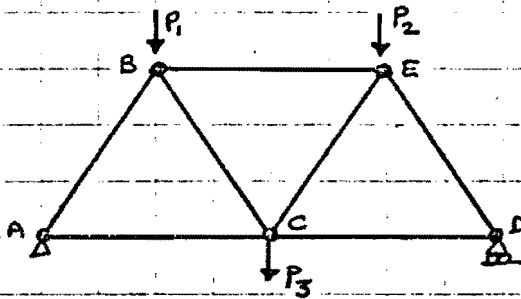


fig. 9.21.1.

Mohr razonó que las variaciones de longitud de cada barra, son lo que determinan la posición final de los nudos en la celosía deformada, y si se conseguía establecer los movimientos que generan en los nudos el alargamiento exclusivo de una sola barra

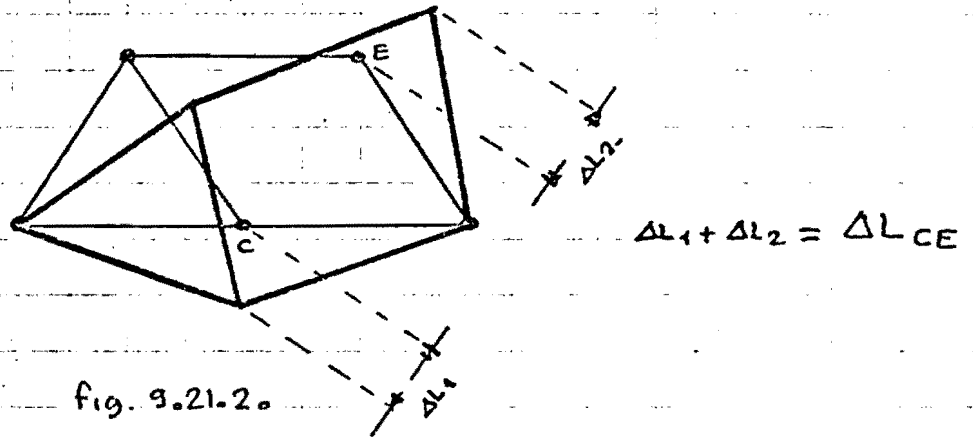
mediante el principio de superposición, se obtendrían los movimientos reales de la celosía.

Mohr relacionó los corrimientos que se producen en la ESTRUCTURA HIPOSTÁTICA resultante de la eliminación de una barra, con la influencia que efectúa el alargamiento a acortamiento de la citada barra, sobre el resto de los nudos, tal como puede comprenderse mediante la observación de la fig. 9.21.2.

Como en una estructura hipostática, es factible SIN ALARGAR NI ACORTAR NINGUNA BARRA, de las existentes, imponer un movimiento, este en efecto puede ser, que el movimiento RELATIVO

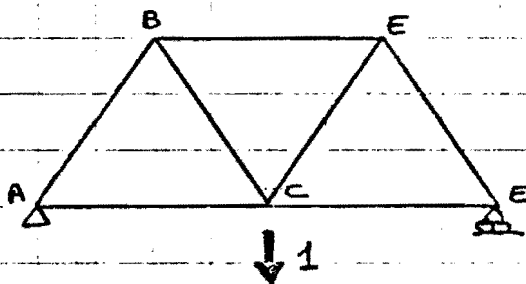


entre los NUDOS EXTREMOS de la BARRA eliminada, sea justamente el ALARGAMIENTO O ACORTAMIENTO de la citada barra, tal como se croquiza en la citada fig. 9.21.2.



El principio de los trabajos virtuales los hemos utilizado hasta ahora para obtener esfuerzos, o fuerzas efectuadas por las ligaduras, pero también puede utilizarse para relacionar corrimientos, como vamos a ver a continuación.

El sistema de fuerzas podría ser uno cualquiera, pero a fin de la mayor simplicidad posible adoptaremos para establecer la relación entre corrimiento, a de una única fuerza unitaria, tal como se croquiza en fig. 9.21.3.



Este estado de cargas generará esfuerzos normales en cada barra que simbolizaremos por N_{ij} .

Si se suprime la barra CE, debemos adicionar las acciones que dicha barra efectuaba sobre los nudos, que será el esfuerzo normal existente en la misma. (Véase fig. 9.21.4.)

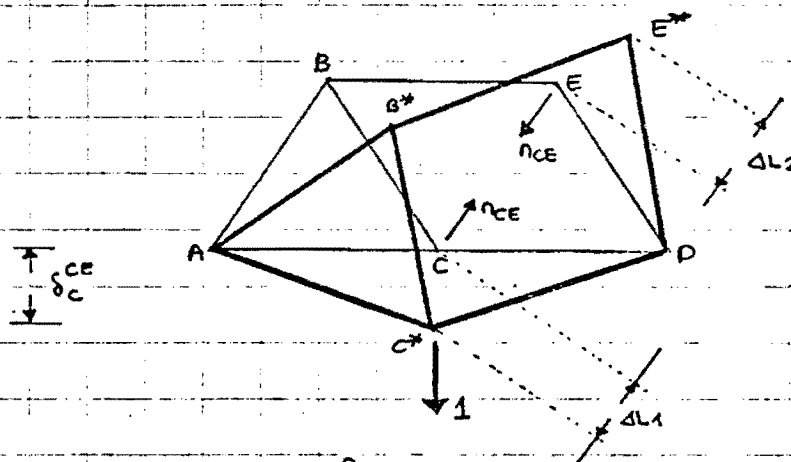


fig 9.21.4.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales:

$$1 \cdot \delta_c^{CE} - \Delta L_1 \cdot n_{CE} - \Delta L_2 n_{CE} = 0$$



$$\delta_c^{CE} = n_{CE} \cdot (\Delta L_1 + \Delta L_2)$$

$$\delta_c^{CE} = n_{CE} \cdot \Delta L_{CE} \quad (9.21.1.)$$

Expresión que permite la siguiente interpretación:

EL ESFUERZO NORMAL EN UNA CIERTA BARRA i_j , CORRESPONDIENTE A LA APLICACIÓN DE UNA FUERZA UNITARIA EN UN CIERTO NUDO l , ES EL COEFICIENTE DE INFLUENCIA DEL ALARGAMIENTO O ACORTAMIENTO DE LA CITADA BARRA i_j , EN RELACION CON EL CORRIMIENTO δ_l^{ij} , QUE SE PRODUCE EN EL NUDO l , SEGÚN LA DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA FUERZA UNITARIA APLICADA.

$$\delta_l^{ij} = n_{ij} \Delta L_{ij}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\delta_l = \sum_{ij=1}^n n_{ij} \Delta L_{ij} \quad (9.21.2.) \quad (\text{Lo que es el método de la carga unitaria anteriormente ya expuesto.})$$



9.22. TEOREMA DE CROTTI-ENGESER Y TEOREMA DEL MÍNIMO DE LA ENERGÍA COMPLEMENTARIA DE DEFORMACIÓN

Engesser observó que en la deducción de los teoremas energéticos se utilizaba el concepto de LINEALIDAD, y en consecuencia cabía esperar que la aplicación de los mismos a casos en que dicha hipótesis no fuese aplicable produciría resultados erróneos.

Los casos en que no es aplicable el PRINCIPIO DE LINEALIDAD no son excesivamente frecuentes, pero existen en número suficiente para que fuese factible fácilmente efectuar tal observación.

Cuando las deformaciones son suficientemente importantes, los efectos de segundo orden también lo serán, y la estructura no tendrá un comportamiento lineal. Un caso lo constituye el esquema estructural croquizado en la Fig. 9.22.1.

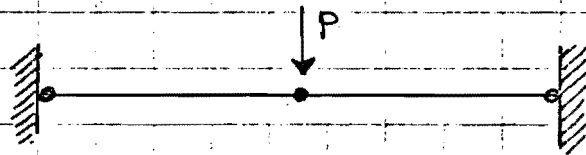


Fig. 9.22.1.

Donde es preciso que los efectos de segundo orden tengan cierta importancia, ya que son imprescindibles para alcanzar la situación de equilibrio estático.

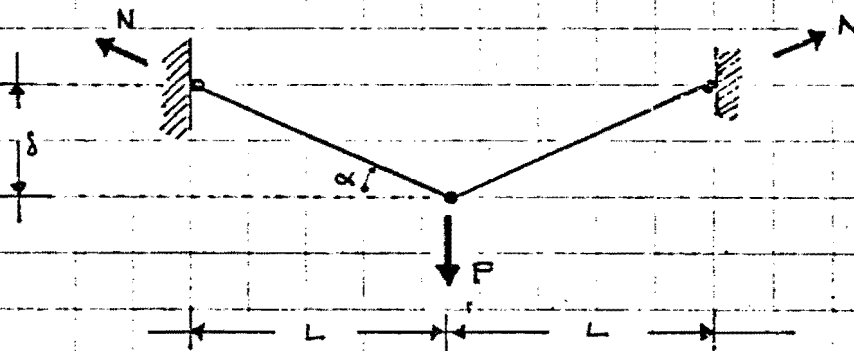


Fig. 9.22.2.

ESCUELA DE INGENIERIA



$$\Delta L = \sqrt{\delta^2 + L^2} \approx \frac{\delta^2}{2L} \quad (\text{desarrollando en serie, y adoptando únicamente el primer término no anulado})$$

En consecuencia el esfuerzo normal en las barras valdrá para un descenso δ , el valor determinado por:

$$N = \frac{EA}{L} \Delta L = \frac{EA}{L} \frac{\delta^2}{2L} = \frac{EA}{2L^2} \delta^2 = N$$

Consecuentemente, la energía de deformación valdrá:

$$W = 2 \left(\frac{1}{2} N \cdot \Delta L \right) = \frac{AE}{2L^2} \delta^2 \cdot \frac{\delta^2}{2L} = \frac{AE}{4L^3} \delta^4 = W$$

(por Clapeyron)

Aplicando Castigliano: $\frac{\partial W}{\partial \delta} = P \Rightarrow \frac{AE \delta^3}{L^3} = P \Rightarrow \delta = L \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}$

La condición de equilibrio estático, será:

$$P = 2N \operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + L^2}} \approx \frac{\delta}{L}$$



$$P = 2 \frac{EA}{2L^2} \delta^2 \frac{\delta}{L} = \frac{EA}{L^3} \delta^3 = P \Rightarrow \delta = L \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \quad \text{lo que coincide con lo obtenido según Castigliano.}$$

Engesser observó que el problema era NO LINEAL, y sin embargo la teoría desarrollada bajo el supuesto de LINEALIDAD produce resultados correctos.

La energía de deformación la habremos definido mediante la integral:

$$W = \sum \int_0^{\delta_i} P_i' d\delta_i = \sum P_i \delta_i \int_0^1 \alpha d\beta \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = P_i' / P_i \\ \beta = \delta_i' / \delta_i \end{array} \right.$$



Representamos por P_i' y δ_i' los valores intermedios de acción y deformación.

Donde α y β finalmente adoptan el valor unidad.

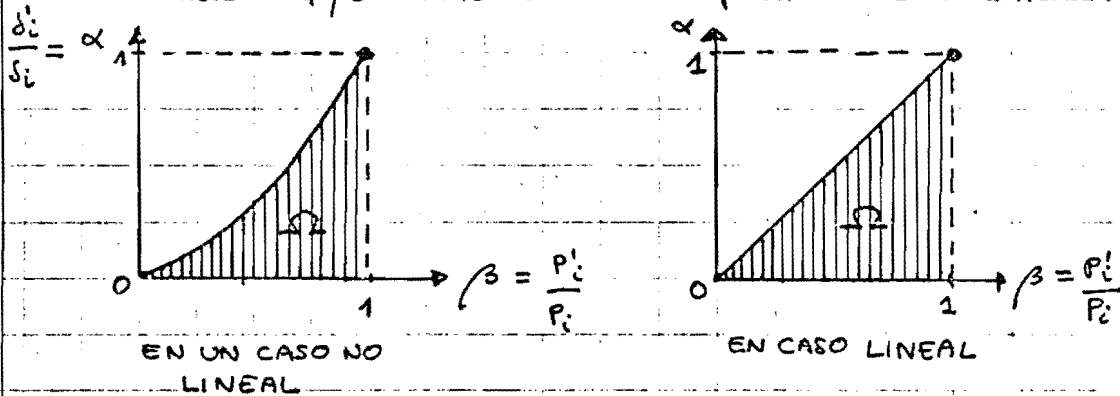


fig 9.22.3.

La integral $\int_0^1 \alpha d\beta$ expresa el área de la zona rayada, la cual valdrá 0.5 si el problema es lineal, pero podrá tomar valores distintos en otros casos, tal como se puede observar fácilmente en la fig. 9.22.3.

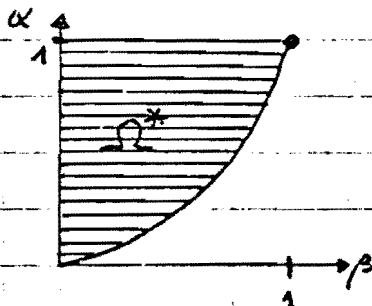
(Si es lineal se deduce la fórmula de Clapeyron $W = \frac{1}{2} \sum P_i \delta_i$)

Engesser definió como energía de deformación el producto:

$$W = \Omega \sum P_i \delta_i \quad (\text{donde } \Omega \text{ es la citada área rayada de la fig 9.22.3.})$$

Y como ENERGÍA COMPLEMENTARIA a:

$$W^* = \Omega^* \sum P_i \delta_i \quad (\text{donde } \Omega^* \text{ es el área rayada de la fig. 9.22.4.})$$



Por lo tanto:

$$W^* = \sum P_i \delta_i \int_0^1 \beta d\alpha$$

O bien:

$$W^* = \sum \int_0^{P_i} \delta_i' dP_i'$$

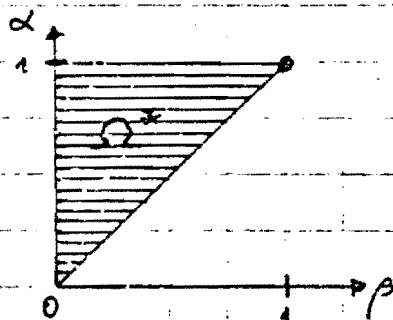


Fig 9.22.4.

Es evidente que en casos lineales $\Omega = \Omega^* = 0.5$ lo que implica que en ellos $W = W^*$



En casos de NO LINEALIDAD:

$$W^* = \sum P_i \delta_i - W = \sum P_i \delta_i (1 - \Omega) = \sum P_i \delta_i \Omega^*$$

Crotti y Engesser entre 1873 y 1889 demostraron que cuanto se había expuesto y desarrollado hasta entonces, para la energía de deformación podía aplicarse a la ENERGÍA COMPLEMENTARIA de DEFORMACIÓN, y que la utilización de esta, en vez de la primera introducía ciertas ventajas adicionales.

Por ejemplo, la demostración del teorema de Castigliano adaptado a la energía complementaria de deformación es inmediata, puesto que:

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad U^* = W^* &= \sum \int_0^{P_i'} \delta_i' dP_i' \\ dW^* &= \sum \delta_i' dP_i' \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Downarrow \quad U^* = W^* \\ dW^* \end{aligned}} \right\} \text{por definición de energía complementaria de deformación.}$$

Es conveniente que reparemos que el diferencial anterior también podía considerarse como correspondiente a la energía de deformación, tal como se razonó en 9.10.

Puesto que es evidente que $W^* = f(P_1', \dots, P_n')$, se verificará:

$$dW^* = \frac{\partial W^*}{\partial P_1'} dP_1' + \frac{\partial W^*}{\partial P_2'} dP_2' + \dots + \frac{\partial W^*}{\partial P_n'} dP_n'$$

$$dW^* = \sum \frac{\partial W^*}{\partial P_i'} dP_i'$$

$$\text{Restando:} \quad 0 = \sum \left(\delta_i' - \frac{\partial W^*}{\partial P_i'} \right) dP_i'$$



y particularmente:

$$\sum \left(\delta_i - \frac{\partial W^*}{\partial P_i} \right) dP_i = 0$$

y puesto que ello debe verificarse para toda variación diferencial dP_i , es preciso que cada sumando sea idénticamente nulo, en consecuencia:

$$\delta_i = \frac{\partial W^*}{\partial P_i}$$

TEOREMA DE CROTTI-ENGESSER.



Y mediante demostraciones análogas a la anterior, puede comprobarse que cuanto se expuso para la ENERGÍA ELÁSTICA o de DEFORMACIÓN, es de aplicación a la ENERGÍA COMPLEMENTARIA, y en concreto puede enunciarse el TEOREMA DE MENAGREA ADECUADO a dicha energía, de la forma siguiente:

LAS TENSIONES, ESFUERZOS O SOLICITACIONES que experimenta una ESTRUCTURA ante la acción de FUERZAS EXTERIORES, son tales que hacen que la ENERGÍA COMPLEMENTARIA DE DEFORMACIÓN alcance un MÍNIMO.

La primordial ventaja de la utilización de la energía complementaria de deformación estriba en la posibilidad de utilizar lo que hoy se conocen como MÉTODOS VARIACIONALES, y que en nuestra Ciencia, se iniciaron con los MÉTODOS DE RAYLEIGH y RITZ que a continuación se desarrollan.

9.23. MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Este método fue expuesto por primera vez por Rayleigh en 1877 en su famosa obra "TEORÍA DEL SONIDO", pero será el Prof. Walter-Ritz quien en 1908 lo completaba mediante la introducción de la técnica variacional.

Se ha expuesto anteriormente, como era factible obtener la flecha de una viga simplemente apoyada cargada uniformemente, igualando EL TRABAJO EXTERNO y la ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN, utilizando para el primer cálculo la hipótesis errónea que la ecuación de la deformada correspondía a una parábola de 2º grado, y pese a ello se alcanzaba un resultado final que se desviaba únicamente en un 4% sobre el valor exacto. Esta constatación de la mínima influencia que posee el grado o tipo de ecuación de la deformada es básico en el MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ.



En el citado ejemplo, se producía una única incógnita, el parámetro f con el que quedaba determinada la parábola de segundo grado que hipotéticamente se considera la deformada, y en consecuencia con la simple igualación del TRABAJO EXTERNO con la ENERGÍA INTERNA podía el mismo determinarse.

Pero con la simple igualación de las energías es imposible determinar un mayor número de parámetros desconocidos, por lo que inicialmente el camino abierto con dicho ejemplo se presentaba con un campo de aplicación sumamente restringido.

Para resolver esta dificultad, el método de RAYLEIGH-RITZ se fundamenta en IMPONER QUE LA ENERGÍA COMPLEMENTARIA DE DEFORMACIÓN DEBE ALCANZAR UN MÍNIMO, y por lo tanto, cada uno de los parámetros debe ser tal que minimice la energía complementaria, y en consecuencia se dispondrá siempre de tantas ecuaciones como parámetros debamos determinar.

Veamos el método mediante un ejemplo, y sea este el mismo que hemos mencionado anteriormente, de una viga simplemente apoyada, sometida a una carga uniformemente repartida.

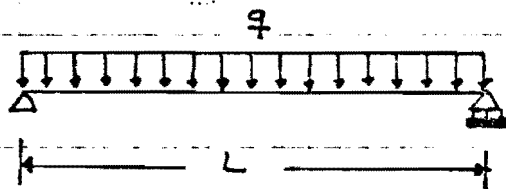


fig. 9.23.1.

Supongamos que la deformada es de cuarto grado, (lo cual es correcto, y en consecuencia en este caso obtendremos el resultado correcto)

Si la ecuación es de cuarto grado, podrá considerarse



como superposición de funciones de segundo, tercer y cuarto grado que verifiquen las condiciones de contorno, que pueden concretarse en:

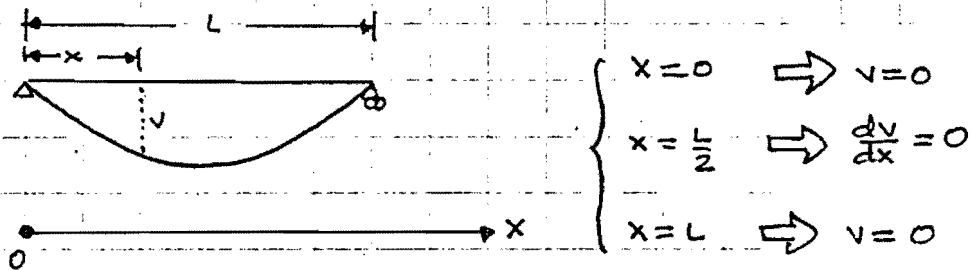
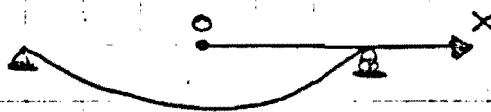


Fig: 9.23.2.

Con estas condiciones, no es factible que una función polinómica de 3er grado las verifique, pero si lo es con funciones de segundo y cuarto grado, las cuales serán del tipo:



$$N_2(x) = \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right)$$

$$N_4(x) = 1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^4$$

Por lo tanto, la deformada de la viga podrá expresarse como combinación lineal de las funciones $N_2(x)$, $N_4(x)$, con lo que las incógnitas serán los coeficientes con que las mismas son combinadas

$$v(x) = a_2 N_2(x) + a_4 N_4(x)$$

INCOGNITAS
a_2
a_4

$$v(x) = a_2 \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right) + a_4 \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^4\right)$$

Calculemos en función de $v(x)$ la ENERGÍA COMPLEMENTARIA DE DEFORMACIÓN.

$$W^* = \int_{-L/2}^{L/2} q(x) dx \cdot v(x) - W$$

$$W^* = \int_{-L/2}^{L/2} q dx \cdot v(x) - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M_s^2}{2EI_z} dx$$

Sabemos que: $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_s}{EI_z}$ (ecuación diferencial aproximada de la línea elástica)



$$M_t = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}$$



$$W^* = q \int_{-L/2}^{L/2} v(x) dx - \frac{EI_z}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$



$$W^* = q \int_{-L/2}^{L/2} (a_2 N_{2(x)} + a_4 N_{4(x)}) dx - \frac{EI_z}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left(a_2 \frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} + a_4 \frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \right)^2 dx$$

Para que a_2 y a_4 sean parámetros que minimicen la energía complementaria de deformación, es preciso que se cumpla el que:

$$\frac{\partial W^*}{\partial a_2} = 0 \quad \frac{\partial W^*}{\partial a_4} = 0$$

Lo que conduce a las siguientes ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 0 &= q \int_{-L/2}^{L/2} N_{2(x)} dx - EI_z \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} \left(a_2 \frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} + a_4 \frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \right) dx \\ 0 &= q \int_{-L/2}^{L/2} N_{4(x)} dx - EI_z \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \left(a_2 \frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} + a_4 \frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \right) dx \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{q}{EI_z} \begin{bmatrix} \int_{-L/2}^{L/2} N_{2(x)} dx \\ \int_{-L/2}^{L/2} N_{4(x)} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} \right)^2 dx & \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \right) dx \\ \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d^2 N_{2(x)}}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \right) dx & \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d^2 N_{4(x)}}{dx^2} \right)^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Así pues, el problema se reduce al cálculo de las integrales

de las funciones $N_2(x)$, $N_4(x)$, las cuales caso de que fuesen a ser utilizadas en otros problemas distintos, no exigirían un nuevo cálculo de las mismas, salvo las que configuran la matriz columna de los términos independientes que sufrirá variaciones al considerarse otros posibles estados de carga.

En el presente caso, operando se deduce que:

$$\frac{q}{EI_2} \begin{bmatrix} \frac{2L}{3} \\ \frac{4L}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{64}{L^3} & \frac{128}{L^3} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{460.8}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_2 &= \frac{qL^4}{64EI} \\ a_4 &= \frac{-qL^4}{384EI} \end{aligned}$$

Lo que permite establecer que la ecuación de la elástica es:

$$v = \frac{qL^4}{64EI_2} \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^4\right) \right)$$

lo que es en efecto la ecuación correcta para la deformada de una viga simplemente apoyada.

Las funciones $N_2(x)$ y $N_4(x)$ se denominan actualmente **FUNCIONES DE FORMA**, y el método expuesto es el antecedente histórico del actual **MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**, que constituye la herramienta más poderosa y actualizada de cálculo estructural.

En el marco de la teoría variacional, se denominaría función objetivo, la que integrada debe minimizarse en función de sus parámetros desconocidos, la cual en el ejemplo resuelto es:

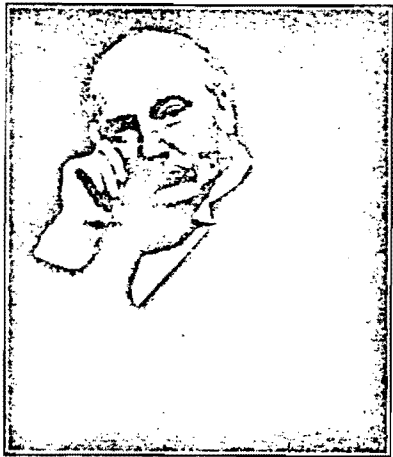
$$\underbrace{Q_{(x)} = qv(x) - \frac{EI_2}{2} \left(\frac{d^2v}{dx}\right)^2}_{\text{FUNCIÓN OBJETIVO.}} \Rightarrow W^* = \int_{-L/2}^{L/2} Q_{(x)} dx$$



Roberto Guerra Fontana

TEOREMAS ENERGÉTICOS

9.160.



Lord Rayleigh (1842-1919)

LORD RAYLEIGH (John William Strutt), nació el 12 de noviembre de 1842 en Langford Grove, cerca de Terling

Ingresó en 1861 en el Trinity College de Cambridge, en donde tuvo como preceptor de matemáticas y mecánica al Prof. Routh, por el que sintió toda su vida una gran admiración.

Rayleigh consideró de gran utilidad la formación matemática que se le proporcionó en Cambridge, pero discrepó de la excesiva utilización de símbolos en los desarrollos matemáticos.

Rayleigh tuvo la suerte de tener como profesor de física a Stokes, pero en su biografía se lamenta de lo lejano que resultaba pues era prácticamente inaccesible, y no quiso proporcionarle información complementaria sobre los experimentos que se realizaban.

Rayleigh se graduó con el número uno de su promoción, con la calificación de Honor, en Diciembre de 1864

Finalizada la carrera mantuvo correspondencia con Maxwell, que en aquel entonces vivía retirado en su caso de campo de Glenair, si bien anualmente, con la ocasión de las pruebas finales se desplazaba a Cambridge.

En 1866 fue nombrado becario, e inició experimentos en electricidad con instrumental comprado por él mismo.

Cuando leyó el libro de Helmholtz. "Lehre von den Tonempfindung", se sintió atraído por la teoría del sonido, centrando toda su actividad investigadora desde ese momento en este tema, lo que le condujo a efectuar aportaciones a la Resistencia de



Materiales, de forma indirecta.

En 1871 contrajo matrimonio, cayendo gravemente enfermo un año más tarde, y al serle recomendado un clima caluroso, se fue a Egipto, embarcándose en un crucero a lo largo del Nilo, pero no quiso descender del barco en ninguna escala, dedicándose a escribir la que es sin duda su obra maestra: "Teoría del sonido", por la que seguramente se le concederá en 1904 el premio Nóbel de Física.

En 1879 al fallecer Maxwell fue nombrado nuevo catedrático de Física Experimental de Cambridge, pero dimitió en 1884 para poder administrar sus bienes, no obstante siguió con idéntica dedicación sus investigaciones, pero no pudo librarse totalmente de ejercer funciones públicas, siendo nombrado Presidente de la Royal Society desde 1908 hasta su muerte.

En su obra de la Teoría del Sonido, efectúa un paso histórico antecedente de la actual Teoría de los Elementos Finitos, al proponer la sustitución de elementos complejos por otros más simples, lo que se denomina hoy en día sustitución analógica, y el uso por otro lado de consideraciones energéticas, mediante funciones de interpolación, son sin duda las ideas fundamentales del método citado.

Murió en Witham, Essex el 30 de junio de 1919.