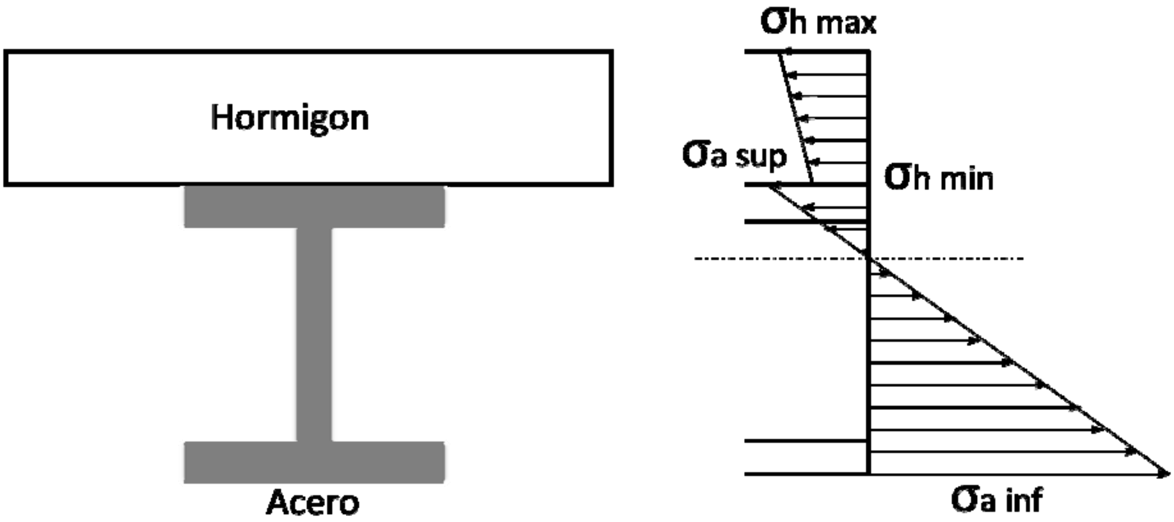
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS
Roberto Guerra Fontana



6

TENSIONES I DEFORMACIONES

EUPB

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

RESISTENCIA DE MATERIALES

TEMAS: 6

Roberto Guerra Fontana

Catedrático

6.1. CONCEPTO DE TENSIÓN.-

En el tema dedicado a la "INTRODUCCIÓN A LA RESISTENCIA DE MATERIALES Y TEORÍA DE LA ELASTICIDAD", se han definido las SOLICITACIONES que pueden actuar sobre las diversas secciones de una barra, y en el siguiente correspondiente a la "INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL", se ha estudiado como en ciertas ESTRUCTURAS se determinaban dichas SOLICITACIONES, pero ahora vamos a abordar que tipo de efectos producen estas en cada punto del sólido.

Las SOLICITACIONES se han definido como VECTORES MOMENTO O FUERZAS PUNTUALES, pero debemos indicar el carácter SIMBÓLICO y meramente ABSTRACTO de tales acciones, cuyo verdadero cometido es la de cuantificar la acción global que experimenta o sufre una cierta sección, como consecuencia de las acciones distribuidas que se ejercen en todos los puntos de la misma.

El sistema de vectores momento y fuerzas puntuales que constituyen las SOLICITACIONES, no es más que un SISTEMA EQUIVALENTE según la ESTÁTICA, al conjunto de ACCIONES DISTRIBUIDAS que son las que REALMENTE sufre la sección.

En el presente tema, vamos a estudiar exclusivamente las características de las mencionas ACCIONES DISTRIBUIDAS existentes en cada sección, y en consecuencia en el INTERIOR DEL SÓLIDO.

Si una cierta fuerza $\vec{F}$ se ejerce sobre una sección S, de forma distribuida y con valor constante en todos los puntos de la misma, es inmediata la obtención de que parte de dicha fuerza es la que se ejerce en UNA UNIDAD DE SUPERFICIE.

$$\vec{\Phi} = \frac{\vec{F}}{S} \qquad (6.1.1.)$$

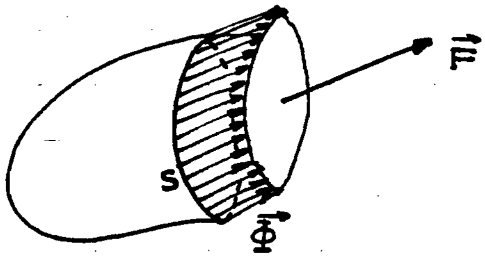


fig. 6.1.1.

El módulo del vector $\vec{\Phi}$, es indicativo de lo que se entiende como PRESIÓN ejercida sobre la superficie S por la fuerza $\vec{F}$

Si lo que realmente se ejerce sobre la citada superficie son las acciones $\vec{\Phi}$, resultará que $\vec{F}$ es simplemente una cuantificación de la acción total ejercida en S, que presenta la ventaja de proporcionarnos un SISTEMA ESTÁTICAMENTE EQUIVALENTE, más sencillo, pero totalmente FICTICIO.

Pero en general, las acciones distribuidas $\vec{\Phi}$ no son constantes ni en módulo, ni en dirección a lo largo de la sección, por lo que el cociente (6.1.1.) solo nos puede proporcionar lo que de forma MEDIA se produce en la sección

Si se desea conocer lo que acontece en un determinado punto deberá adoptarse una superficie S_i que contenga al citado punto y que sea lo más pequeña posible, si bien también lo será la fuerza $\vec{F_i}$ que sobre la misma se ejercerá, pero el cociente nos proporcionará el valor de la tensión existente en el punto considerado

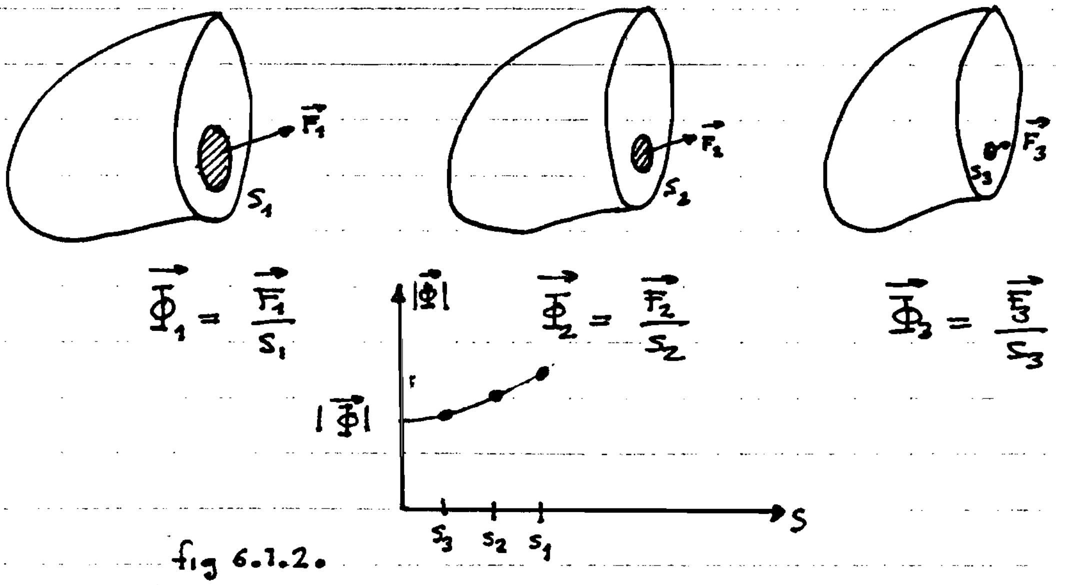


fig 6.1.2.

En consecuencia, definiremos TENSIÓN EXISTENTE EN UN PUNTO, MEDIANTE EL LÍMITE:

$$\boxed{\vec{\Phi} = \lim_{S \to 0} \frac{\vec{F}}{S}} \qquad (6.1.2.)$$

Dado el carácter vectorial de la TENSIÓN, esta tendrá DIRECCIÓN, SENTIDO Y MÓDULO.

6.2. COMPONENTES DE LA TENSIÓN Y SIMBOLOGÍA

Como todo vector, la tensión se puede definir mediante sus componentes respecto a un cierto sistema de referencia X, Y, Z

Supongamos que los ejes Y y Z están contenidos en el plano de la superficie sobre la que actua la tensión, en cuyo caso convendremos en asignar a todas las componentes un primer subíndice que será el símbolo X, el cual se completará con un segundo subíndice indicativo de la dirección según la cual actua la correspondiente componente. Así pues:

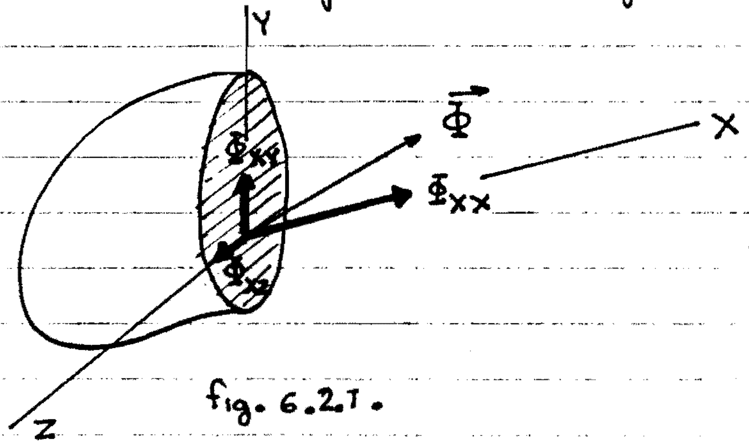


fig. 6.2.1.

Este criterio de subíndices es independiente de que los ejes de referencia XYZ sean o no, ortogonales.

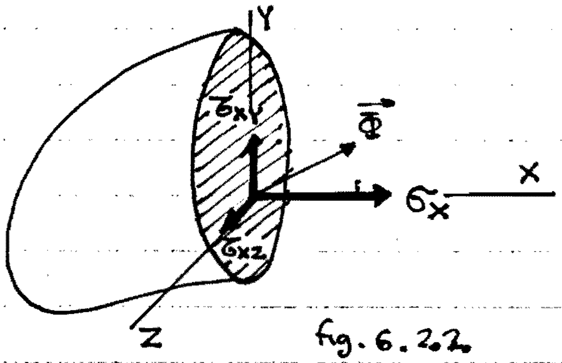


fig. 6.2.2.

Si el sistema de referencia es ortogonal es usual sustituir los símbolos Φ por los de σ y τ de la forma siguiente:

$$\Phi_{xx} \longrightarrow \sigma_x$$

$$\Phi_{xz} \longrightarrow \tau_{xz}$$

$$\Phi_{xy} \longrightarrow \tau_{xy}$$

caso de ejes ortogonales.

En el citado caso de EJES ORTOGONALES, σ_x será normal a la superficie considerada, lo que motiva que se la denomine TENSIÓN NORMAL

$$\sigma_x \longrightarrow \text{TENSIÓN NORMAL}$$

en tanto, que las componentes τ_{ij} actuan tangentemente a la superficie, hecho que justifica que se las denomine TENSIONES TANGENCIALES.

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{xy}\\ \tau_{xz}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{TENSIONES TANGENCIALES.}$$

6.3. CRITERIOS DE SIGNOS PARA LAS TENSIONES

Como todo vector, el signo de las componentes vendrá determinado por su coincidencia o no, del sentido de las mismas con el que se asigna como POSITIVO en cada DIRECCIÓN DE REFERENCIA, por lo tanto, los criterios de signos se reduce a establecer los SENTIDOS POSITIVOS para las direcciones X, Y y Z.

Al eje X se le asigna SENTIDO POSITIVO, huyendo de la superficie S, hacia su parte exterior.

Los sentidos positivos de los ejes Y y Z se establecen en general de forma arbitraria, con la única condición de que formen un triedro directo con el X.

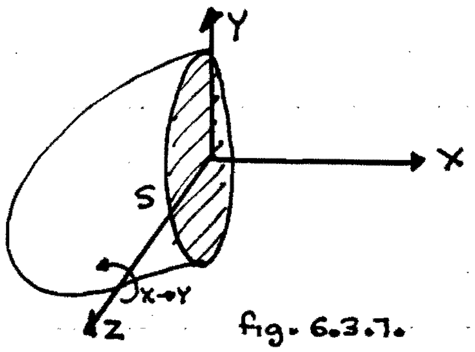


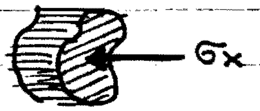
fig. 6.3.1.

El criterio indicado para asignar sentido positivo según la dirección X, implica que cuando la componente de tensión correspondiente huye de la superficie, la misma será positiva, lo que puede permitir afirmar, que si la tensión σ_x produce TRACCIONES, ello implica que es POSITIVA.

⇒ TRACCIÓN (+)

fig. 6.3.2.

y en contraposición:



⇒ COMPRESIÓN (−)

6.4. EQUILIBRIO: TEOREMA DE CAUCHY

La Resistencia de Materiales estudia los sólidos en equilibrio estático, lo que exige que cada elemento diferencial de los mismos, se encuentre también en la citada situación de EQUILIBRIO ESTÁTICO.

El elemento diferencial al que se impone la condición de equilibrio estático, debe tener sus aristas orientadas según las direcciones de referencia X, Y, Z.

Analicemos el equilibrio en el plano XY

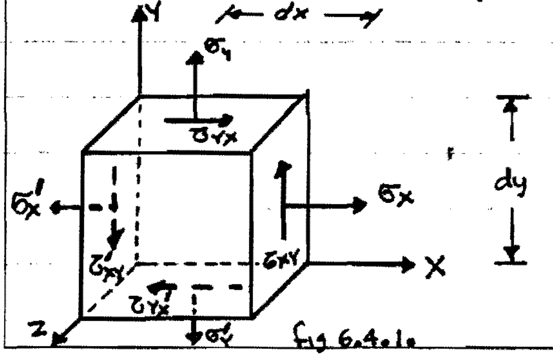
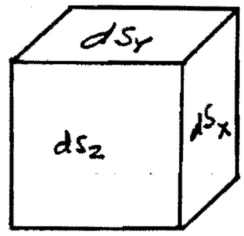


fig 6.4.1.



$$dS_x = dy\,dz$$
$$dS_y = dz\,dx$$
$$dS_z = dx\,dy$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow (\sigma_x - \sigma_{x'})\, ds_x + (\tau_{yx} - \tau_{y'x})\, ds_y = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow (\sigma_y - \sigma_{y'})\, ds_y + (\tau_{xy} - \tau_{x'y})\, ds_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma_x - \sigma_{x'})\, dy + (\tau_{yx} - \tau_{y'x})\, dx = 0 \\ (\sigma_y - \sigma_{y'})\, dx + (\tau_{xy} - \tau_{xy'})\, dy = 0\end{array}\right\} (6.4.1.)$$

Si las condiciones anteriores deben verificarse para TODO dy y para TODO dx, es preciso que:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sigma_x = \sigma_{x'} & \tau_{xy} = \tau_{xy'} \\ \sigma_y = \sigma_{y'} & \tau_{yx} = \tau_{yx'}\end{array}} \quad (6.4.2.)$$

No obstante σ_i y σ_i' así como τ_{ij} y τ_{ij}' podrán diferir en valores diferenciales con tal de que estos verifiquen (6.4.1.), tal como se estudiará más adelante.

Impongamos la nulidad de la suma de momentos. Es evidente que $\tau_{ij}\, ds_i$ y $\tau_{ij}'\, ds_i$ constituyen pares que para que estén equilibrados es preciso que:

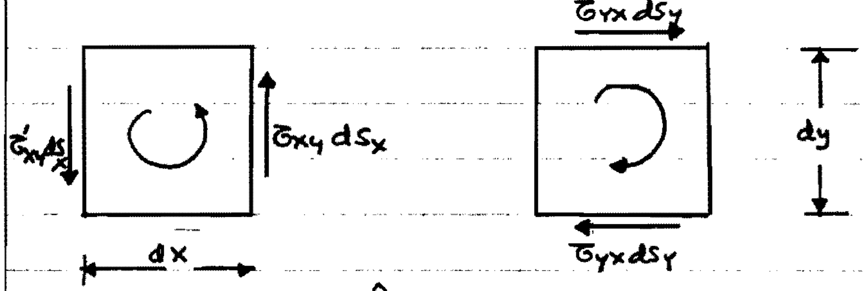


fig 6.4.2.

$$\tau_{xy}\, ds_x\, dx = \tau_{yx}\, ds_y\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{xy}\, dy\, dz\, dx = \tau_{yx}\, dx\, dz\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$ y generalizando: $\boxed{\tau_{ij} = \tau_{ji}}$

Lo que se conoce como TEOREMA DE CAUCHY, y que puede enunciarse de la forma siguiente:

LAS TENSIONES TANGENCIALES QUE SE PRODUCEN EN DOS PLANOS ORTOGONALES SON IGUALES EN MÓDULO, Y TIENEN SENTIDOS TALES QUE SI UNA CONCURRE A LA ARISTA, LA OTRA TAMBIÉN LO HACE, Y SI UNA HUYE, LA OTRA TAMBIÉN SE ALEJA.

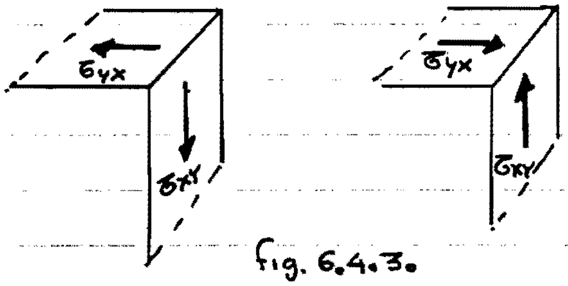


fig. 6.4.3.

NOTA.-

Si la base no fuese ortogonal, se verifica:

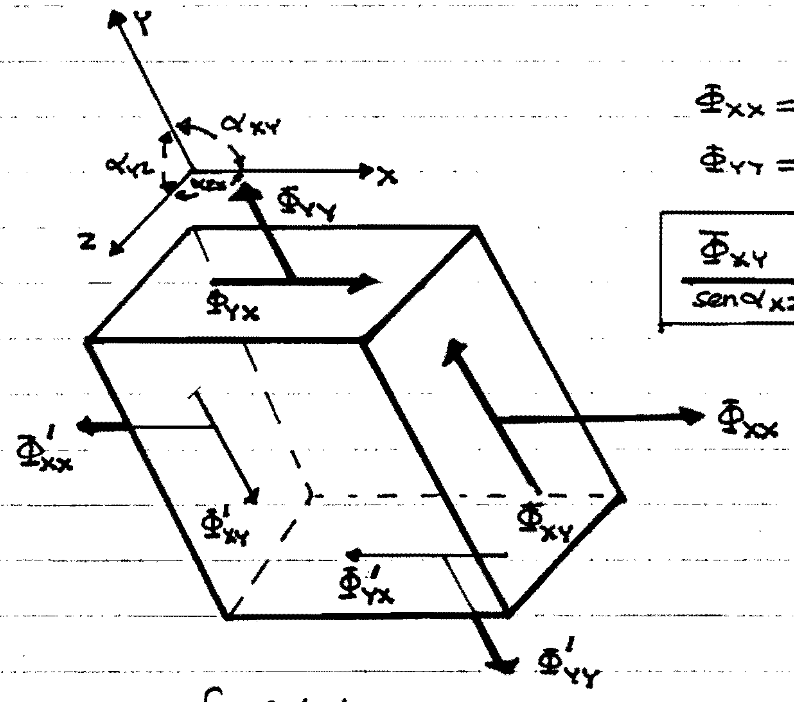


fig 6.4.4.

$$\Phi_{XX} = \Phi_{XX}'$$

$$\Phi_{YY} = \Phi_{YY}'$$

$$\boxed{\frac{\Phi_{XY}}{\operatorname{sen}\alpha_{XZ}} = \frac{\Phi_{YX}}{\operatorname{sen}\alpha_{YZ}}}$$

TEOREMA DE CAUCHY GENERALIZADO

(Lo que se deduce mediante un proceso deductivo análogo al expuesto.)

6.5. PARÁMETROS DE UN ESTADO TENSIONAL

En un elemento diferencial de un sólido, las tensiones que se pueden producir son :

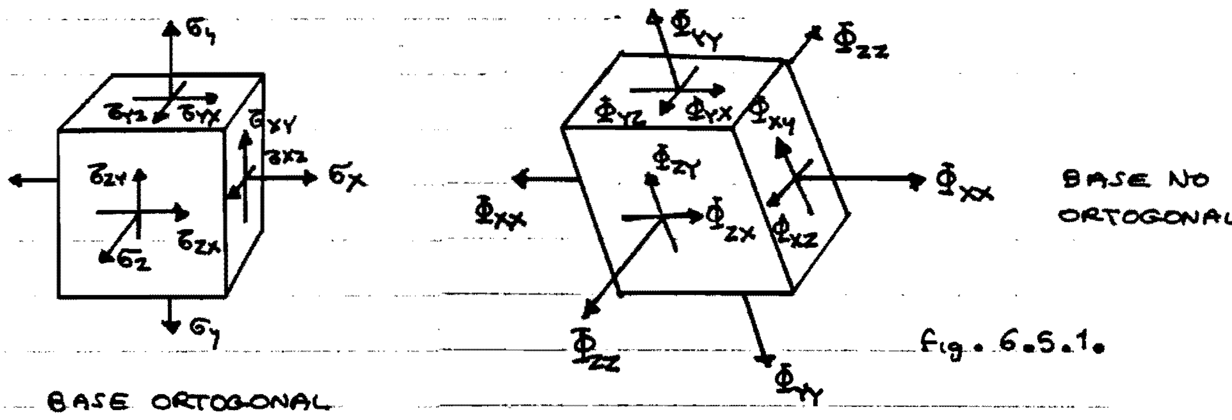


fig. 6.5.1.

Puesto que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ $\left(\text{o} \quad \Phi_{ij} = \Phi_{ji} \dfrac{\text{sen}\, \alpha_{il}}{\text{sen}\, \alpha_{jl}} \right)$, sólo existen 6 parámetros tensionales independientes, y suelen adoptarse como tales, en BASE ORTOGONAL

$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z$
$\tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$

En sistemas de referencia ortogonales, solo es preciso determinar las funciones que en cada punto determinan el valor de las tensiones:

σ_x	σ_y	σ_z
τ_{xy}		
	τ_{yz}	
		τ_{zx}

PARÁMETROS TENSIONALES INDEPENDIENTES de un estado tensional, con referencia de base ortogonal.

(6.5.1.)

6.6. ECUACIONES GENERALES DE EQUILIBRIO. (RELACIÓN ENTRE TENSIONES Y SOLICITACIONES)

Sabemos que un estado tensional queda plenamente definido si para cada punto del sólido, somos capaces de conocer los SEIS PARÁMETROS TENSIONALES INDEPENDIENTES.

Tanto la RESISTENCIA DE MATERIALES como la TEORÍA DE LA ELASTICIDAD tienen como OBJETIVO la determinación del estado tensional en cada punto de un sólido, por lo que ahora nos vamos a plantear la existencia de ecuaciones que faciliten la obtención de las tensiones existentes.

Hemos indicado que las tensiones actuantes en una sección, deben constituir un sistema estáticamente equivalente al que constituyen las SOLICITACIONES, lo que debe proporcionarnos 6 ECUACIONES que denominaremos GENERALES DE EQUILIBRIO

En un punto genérico de una sección, y considerando en el entorno del mismo una área diferencial ds, se producirá una fuerza diferencial $\vec{dF}$, cuyas componentes podrán facilmente calcularse si conocemos las tensiones existentes en el mencionado punto.

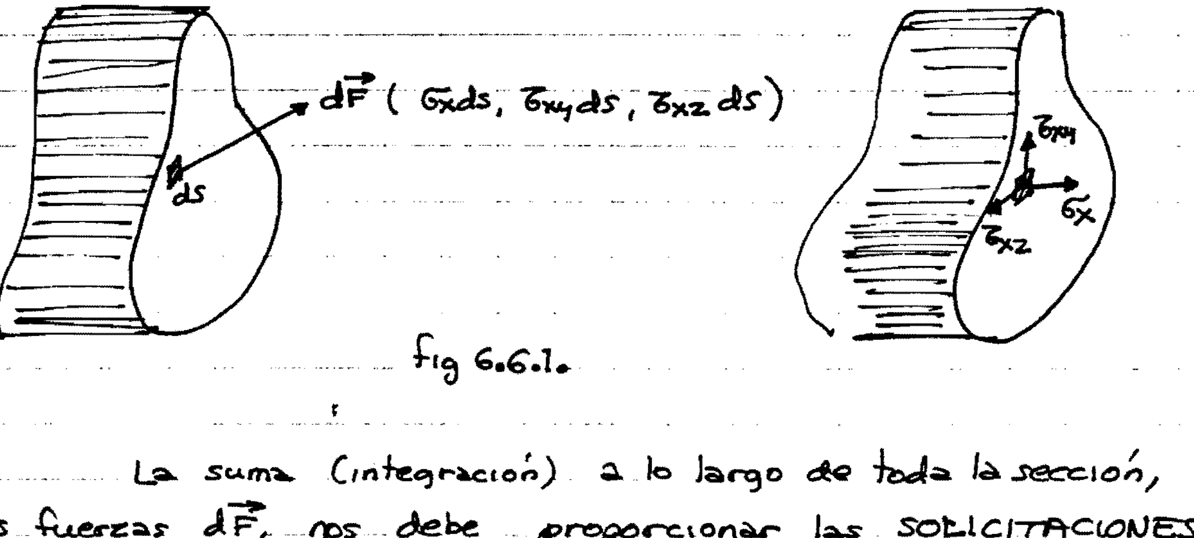
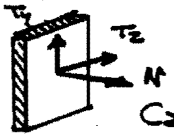


fig 6.6.1.

La suma (integración) a lo largo de toda la sección, de las fuerzas $\vec{dF}$, nos debe proporcionar las SOLICITACIONES FUERZA que actuan sobre la sección considerada, para que en efecto se produzca un sistema equivalente, y en consecuencia:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ T_y \\ -T_z \end{bmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} \sigma_x \, ds \\ \tau_{xy} \, ds \\ \tau_{xz} \, ds \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ -\tau_{xz} \end{bmatrix} ds} \quad (6.6.1.)$$



Cada $d\vec{F}$ actuante en un ds, al tener un punto de aplicación no coincidente con el c. de G. de la sección, producirá un $d\vec{M}$ (diferencial de momento), con respecto a dicho punto.

Si integramos todos los $d\vec{M}$ que producen todos los $d\vec{F}$ existentes en la sección, debemos obtener un vector momento, que debe coincidir con las SOLICITACIONES MOMENTO, Así pues:

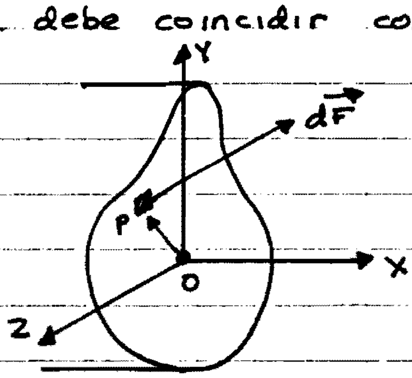
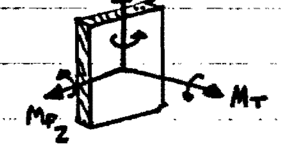


Fig. 6.6.2.

$$d\vec{M} = \vec{OP} \wedge d\vec{F}$$



$$\begin{bmatrix} dM_x \\ dM_y \\ dM_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -OP_z & OP_y \\ OP_z & 0 & -OP_x \\ -OP_y & OP_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{bmatrix}$$

Integrando:

$$(\vec{OP}) \equiv (0, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} M_x \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} M_T \\ M_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} ds} \quad (6.6.2.)$$

(6.6.1.) y (6.6.2.) constituyen las ECUACIONES GENERALES DE EQUILIBRIO, caso de que el SISTEMA DE REFERENCIA SEA ORTOGONAL, las cuales no son suficientes para la determinación de las seis funciones tensionales desconocidas ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$), lo que exige el plantear nuevas condiciones que deban verificar dichas tensiones.

6.7. TENSIONES EN UNA SUPERFICIE OBLICUA.

Para completar las ecuaciones generales de equilibrio, la Teoría de la Elasticidad impone que las leyes de tensiones deben ser tales, que en la superficie que constituye el contorno deben ser coincidentes con las presiones que ejercen las acciones exteriores, cuyos valores son datos. Esta igualdad entre tensiones y acciones exteriores en puntos concretos presenta la dificultad de que las leyes de tensiones corresponden a superficies orientadas según los ejes de referencia, entanto que la superficie del contorno no forzosamente debe estar orientada de dicha forma.

En el presente apartado vamos a resolver el problema expuesto, determinando la relación que deben guardar las tensiones existentes en una superficie orientada de forma genérica, con las que experimentan en el mismo punto superficies cuya orientación la determinan los ejes de referencia, y de esta forma nos será posible establecer la relación entre acciones exteriores y tensiones existentes según las direcciones del sistema de referencia adoptado.

La *Resistencia de Materiales*, también se ve obligada a resolver el mismo problema, aunque con finalidad distinta. Es lógico pensar que la resistencia última de un elemento estructural, esté relacionado con las máximas tensiones que se produzcan en su interior, pero para determinar estas, se deberá no sólo conocer el punto del sólido en que las mismas se producirán, sino la dirección que puede resultar más desfavorable, es decir, la orientación que debe dársele a una superficie en un punto dado, para que las tensiones alcancen valores extremos. Así pues, para que en su momento pueda abordarse el estudio de la resistencia última de un sólido, es preciso que estudiemos como varían las tensiones al cambiar de orientación la superficie.

Nos vamos a plantear el problema siguiente, supongamos un estado tensional tal que un cubo diferencial sufre las tensiones croquizadas en la figura 6.7.1., y pretendamos obtener la TENSIÓN $\vec{\Psi}$ que se producirá en una superficie oblicua, definida mediante su versor $\vec{n}\,(n_x\ n_y\ n_z)$, que se representa en fig(6.7.2).

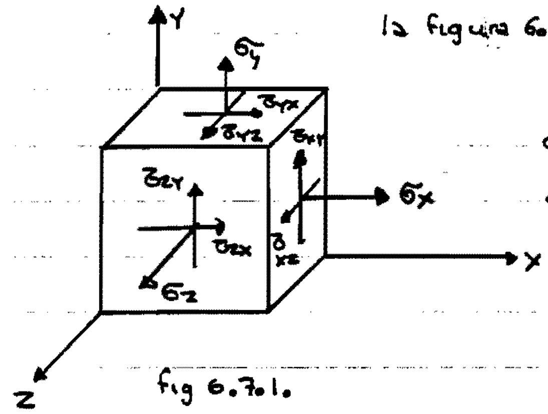


fig 6.7.1.

Para obtener la tensión $\vec{\Psi}$, consideremos un tetraedro, tres de cuyas caras esten orientadas según el sistema de referencia, y la cuarta será la cara en la que se pretende obtener la tensión citada.

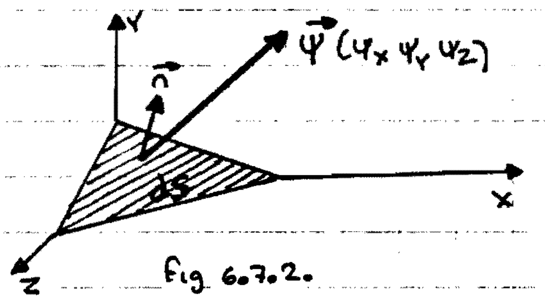


fig 6.7.2.

A fín de establecer las ecuaciones de equilibrio estático, se deberá transformar las tensiones en fuerzas, multiplicandolas por el área de la cara sobre la que actuan, las cuales podrán ser relacionadas con la superficie oblicua, mediante la expresión :

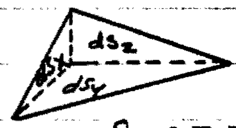


fig 6.7.3.

$$\begin{bmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{bmatrix} = dS \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

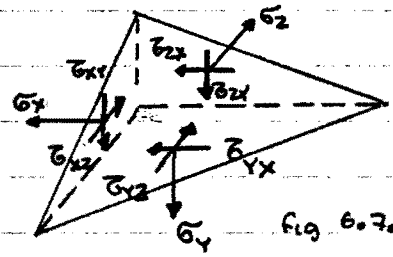


fig 6.7.4.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Psi_x\, dS - \sigma_x\, dS_x - \tau_{yx}\, dS_y - \tau_{zx}\, dS_z = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Psi_y\, dS - \tau_{xy}\, dS_x - \sigma_y\, dS_y - \tau_{zy}\, dS_z = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow \Psi_z\, dS - \tau_{xz}\, dS_x - \tau_{yz}\, dS_y - \sigma_z\, dS_z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{bmatrix}$$

Sustituyendo :

$$\begin{bmatrix}\Psi_x\\ \Psi_Y\\ \Psi_z\end{bmatrix}\cancel{ds}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{Yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zY}\\ \tau_{xz} & \tau_{Yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}\cancel{ds}$$

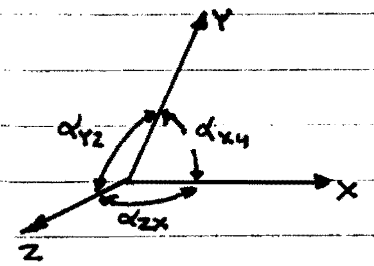
$$\boxed{\begin{bmatrix}\Psi_x\\ \Psi_y\\ \Psi_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{Yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zY}\\ \tau_{xz} & \tau_{Yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}} \qquad (6.7.1.)$$

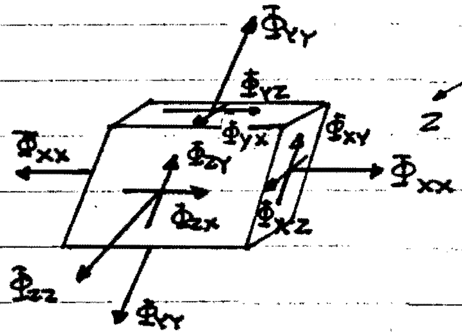
Lo que simbolizaremos mediante $\boxed{[\Psi]=[T_T][n]}$ (6.7.2.)

OPCIONAL

Para algunas aplicaciones, es conveniente disponer las expresiones (6.7.1.), y (6.7.2.) transformadas para SISTEMAS DE REFERENCIA NO ORTOGONALES.

Mediante un proceso deductivo análogo al expuesto, se deduce que:





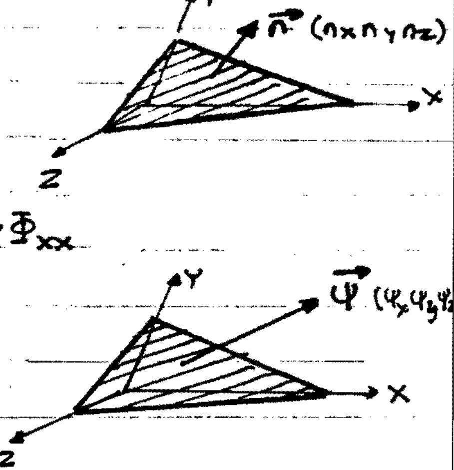


fig 6.7.5.

Definamos las matrices siguientes:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx}\\ \Phi_{xy} & \Phi_{YY} & \Phi_{zY}\\ \Phi_{xz} & \Phi_{Yz} & \Phi_{zz}\end{bmatrix} \qquad [S\alpha]=\begin{bmatrix}\operatorname{sen}\alpha_{Yz} & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_{xz} & 0\\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha_{xY}\end{bmatrix} \qquad [n]=\begin{bmatrix}n_x\\ n_Y\\ n_z\end{bmatrix}$$

MATRIZ DE LAS TENSIONES

$$[R]=\begin{bmatrix}1 & \cos\alpha_{xY} & \cos\alpha_{zx}\\ \cos\alpha_{xY} & 1 & \cos\alpha_{Yz}\\ \cos\alpha_{zx} & \cos\alpha_{Yz} & 1\end{bmatrix} \qquad [\Psi]=\begin{bmatrix}\Psi_x\\ \Psi_Y\\ \Psi_z\end{bmatrix}$$

MATRIZ MÉTRICA EUCLIDEA

(6.7.3.)

$$[\Psi] = [T_T][n] \qquad [T_T] = [\sigma]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{|R|}}[S_\alpha][R]\right) \quad (6.7.4.)$$

Es evidente, que si el sistema de referencia es ortogonal se verifica:

$$[S_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sqrt{|R|} = 1$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

por lo que (6.7.4.) se transforma en (6.7.2.)

FIN OPCIONAL

6.8. TENSION NORMAL Y TANGENCIAL EN UNA SUPERFICIE OBLICUA. COMPONENTES INTRINSECAS

La tensión $\vec{\Psi}$ es oblicua en general con respecto a la superficie sobre la que actua (ds), por lo que aceptará su descomposición en una componente normal a la citada superficie, la cual simbolizaremos por σ_n, y en otra componente contenida en la propia superficie y que representaremos por τ_{nm}

Evidentemente σ_n será LA TENSION NORMAL y τ_{nm} LA TENSION TANGENCIAL que se producen en una SUPERFICIE ORIENTADA según determina el VERSOR $\vec{n}$.

Es frecuente denominar a σ_n y τ_{nm} COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA TENSIÓN EXISTENTE EN UNA SUPERFICIE ORIENTADA según $\vec{n}$.

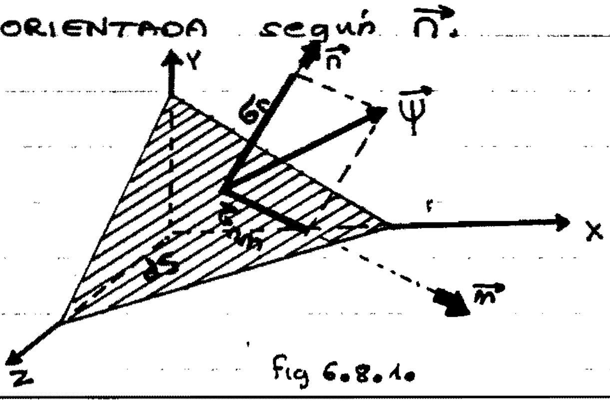


fig 6.8.1.

Para obtener σ_n nos bastará proyectar $\vec{\Psi}$ sobre la normal a la citada superficie oblicua dS, que hemos definido mediante el versor $\vec{n}$, lo cual puede efectuarse simplemente, mediante el producto escalar:

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\Psi} = [n]^T [\Psi] = \boxed{[n]^T [T_T][n] = \sigma_n} \quad (6.8.1.)$$

La tensión tangencial según una cierta dirección definida por un versor $\vec{m}$, es así mismo la proyección de $\vec{\Psi}$ sobre la dirección definida por el citado versor $\vec{m}$, y por lo tanto la TENSIÓN TANGENCIAL puede calcularse de forma análoga a la tensión normal, en efecto:

$$\tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\Psi} \Rightarrow \tau_{nm} = [m]^T [\Psi] = \boxed{[m]^T [T_T][n] = \tau_{nm}} \quad (6.8.2.)$$

La dirección según la cual se producirá en el plano del dS, la máxima tensión tangencial, será aquella que además de pertenecer a la superficie oblicua que estamos analizando, pertenezca también al plano que definirán $\vec{\Psi}$ y $\vec{n}$, si ambos vectores se les atribuye un mismo punto de aplicación, o lo que es lo mismo, la máxima tensión tangencial en una cierta superficie oblicua se produce según la intersección de la misma, con el plano definido por $\vec{\Psi}$ y $\vec{n}$

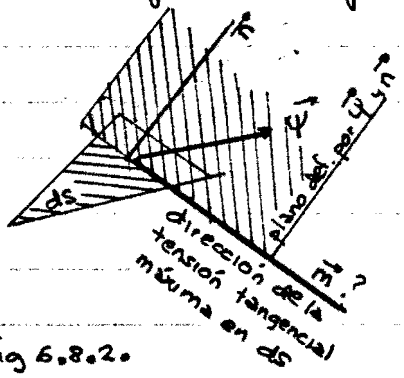


fig 6.8.2.

Analizando en el plano $\vec{\Psi}$-$\vec{n}$, las proyecciones σ_n y τ_{nm}, veremos que ambas deben ser ORTOGONALES y en consecuencia verificarán el TEOREMA DE PITÁGORAS, por lo cual:

$$|\vec{\Psi}|^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nm}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tau_{nm} = \sqrt{|\Psi|^2 - \sigma_n^2}} \quad (6.8.3.)$$

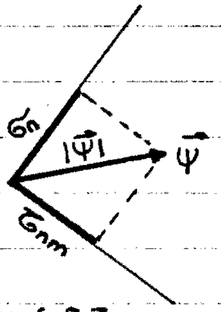
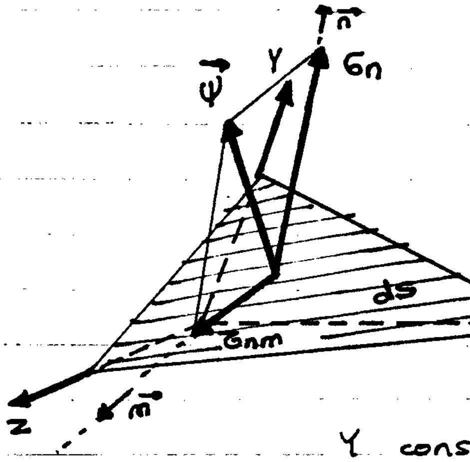
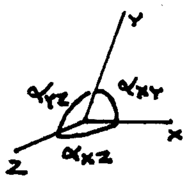


Fig 6.8.3

Si la base es no ORTOGONAL, es preciso utilizar la matriz métrica euclidea, que está integrada por los siguientes elementos:





$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha_{xy} & \cos\alpha_{xz} \\ \cos\alpha_{xy} & 1 & \cos\alpha_{yz} \\ \cos\alpha_{xz} & \cos\alpha_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

Y considerando que la matriz $[T_T]$ no es la definida en (6.7.1.) y (6.7.2.), sino la que resulta de la expresión (6.7.4.) utilizando las matrices definidas en (6.7.3.), resultará que:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= [n]^T [R] [T_T] [n] \\ \tau_{nm} &= [m]^T [R] [T_T] [n] \end{aligned}}$$

Y para calcular la máxima tensión tangencial τ_{nm}, puede aplicarse, teniendo presente que en base no ortogonal:

$$|\vec{\Psi}|^2 = [\Psi]^T [R] [\Psi]$$

6.9. CARACTER TENSORIAL DE LAS TENSIONES

Según lo expuesto, si conocemos un estado tensional, quedará definida la matriz $[T_T]$, que permite ASOCIAR a cada dirección, un VECTOR TENSIÓN $\vec{\Psi}$, mediante el producto:

$$[\Psi] = [T_T][n] \qquad (6.9.1.)$$

$\vec{n}$ versor indicativo de la dirección

y a la vez, nos será factible asignar a la citada dirección n, un escalar, (que es la tensión normal), que simbolizamos por σ_n y que viene determinado por:

$$\sigma_n = [n]^T [T_T][n] \qquad (6.9.2.)$$

y si adoptamos una segunda dirección, a ambas nos será también factible asociar otro escalar, que simbolizamos por τ_{nm} (y que es la tensión tangencial en la superficie ortogonal a n y según la dirección m), mediante el producto matricial:

$$\tau_{nm} = [m]^T [T_T][n] \qquad (6.9.3.)$$

($\vec{m}$ debe ser ortogonal a $\vec{n}$ en nuestro caso).

Comparando las expresiones (6.9.1.), (6.9.2.) y (6.9.3.), con las correspondientes a la TEORÍA TENSORIAL, en BASE ORTOGONAL, se deduce que $[T_T]$ ES LA MATRIZ ASOCIADA A UN TENSOR, que denominaremos:

TENSOR DE TENSIONES.

$\sigma_n \longrightarrow$ FORMA CUADRÁTICA ASOCIADA AL TENSOR DE TENSIONES

$\tau_{nm} \longrightarrow$ FORMA BILINEAL " " " " "

(Igualmente, las expresiones de σ_n y τ_{nm} para base no ortogonal, coinciden con las formas cuadráticas y bilineales en dicho tipo de sistemas de referencia).

Dado el caracter TENSORIAL de las TENSIONES, no será preciso desarrollar para las mismas los siguientes procesos, que ya han sido estudiados para los TENSORES EN GENERAL, y que fundamentalmente son:

* CAMBIO DE BASE — Obtención de la matriz $[T_T]$ para un cierto sistema de referencia, conocida la que posee respecto a una base dada.

* DIRECCIONES PRINCIPALES — Como en todo tensor, serán aquellas direcciones, para las cuales las FORMAS CUADRÁTICAS (σ_n) alcanzan VALORES EXTREMOS, en tanto que las FORMAS BILINEALES (τ_{nm}) SON NULAS.

* VALORES PRINCIPALES — Son las formas cuadráticas asociadas a las direcciones principales, es decir, en nuestro caso serán LAS TENSIONES NORMALES PRINCIPALES.

Y dispondremos de:

* INVARIANTES
* CÍRCULO DE MOHR
* ELIPSOIDE DE LAMÉ
* CUADRICA ASOCIADA

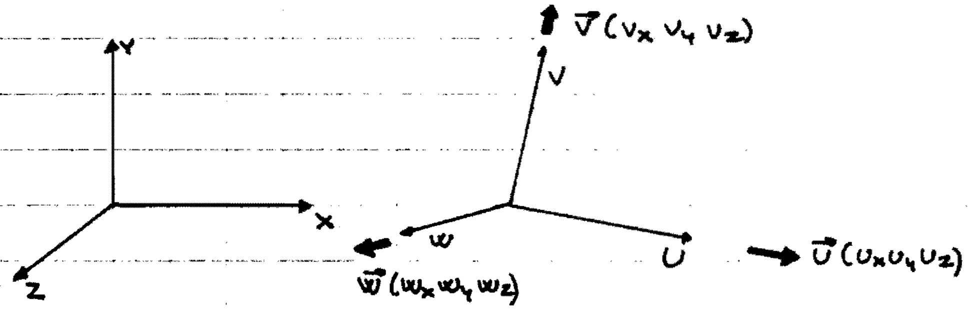
AGUSTÍN CAUCHY

No obstante, a efectos de simple recordatorio, expondremos las conclusiones de cada uno de los citados apartados.

6.10. LAS TENSIONES ANTE UN CAMBIO DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Supongamos que conocemos el estado tensional en un punto, referido al sistema X, Y, Z, y se desea conocerlo según otras orientaciones que denominaremos U, V, W, en cuyo caso, se deberá:

1º OBTENER LAS COMPONENTES DE VECTORES UNITARIOS, SEGÚN LAS NUEVAS DIRECCIONES DE REFERENCIA, REFERIDOS A LAS ORIGINALES O INICIALES.



2º DEFINIR UNA MATRIZ, QUE DENOMINAREMOS DE CAMBIO DE BASE, CUYAS COLUMNAS LAS CONSTITUYEN LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES UNITARIOS ANTERIORES.

$$\boxed{[C] = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}}$$

3º SE VERIFICARÁ SI AMBOS SISTEMAS DE REFERENCIA SON ORTOGONALES:

$$[T_T^{U,V,W}] = [C]^T \cdot [T_T^{XYZ}] \cdot [C]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}}$$

(6.10.1.)

BASES NO ORTOGONALES Teniendo en cuenta, el concepto de cambio de base, y la expresión (6.7.4.), deduciríamos las conclusiones siguientes. La mecánica del método a seguir es:

1º OBTENER:

$$|R^{XYZ}| = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{XY} & \cos\alpha_{XZ} \\ \cos\alpha_{XY} & 1 & \cos\alpha_{YZ} \\ \cos\alpha_{XZ} & \cos\alpha_{YZ} & 1 \end{vmatrix}$$

$$|R^{UVW}| = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{UV} & \cos\alpha_{UW} \\ \cos\alpha_{UV} & 1 & \cos\alpha_{VW} \\ \cos\alpha_{UW} & \cos\alpha_{VW} & 1 \end{vmatrix}$$

$$K = \sqrt{\frac{|R^{UVW}|}{|R^{XYZ}|}}$$

2º CALCULAR LA MATRIZ [C] DE CAMBIO DE BASE, DESCRITA ANTERIORMENTE

3º INVERTIR LA MATRIZ [C], QUE SIMBOLIZAREMOS POR $[C^*] = [C]^{-1}$

(La matriz $[C^*]$ tendrá como columnas las componentes de los vectores unitarios que pueden definirse sobre los ejes X, Y, Z, referidos a los nuevos ejes U, V, W)

4º REALIZAR EL PRODUCTO:

$$K\left[C^*\right]\cdot\begin{bmatrix} \Phi_{XX} & \Phi_{YX} & \Phi_{ZX} \\ \Phi_{XY} & \Phi_{YY} & \Phi_{ZY} \\ \Phi_{XZ} & \Phi_{YZ} & \Phi_{ZZ} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\alpha_{YZ}) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha_{XZ}) & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(\alpha_{XY}) \end{bmatrix}\cdot\left[C^*\right]^T\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_{VW}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_{UW}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_{UV}} \end{bmatrix}$$

lo que proporciona:

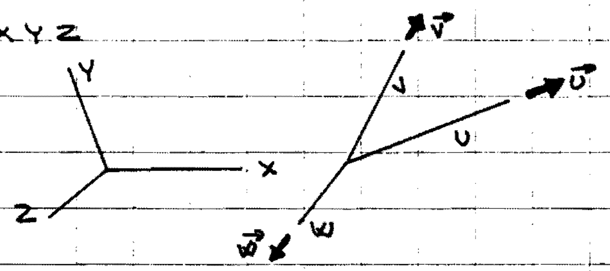
$$= \begin{bmatrix} \Phi_{UU} & \Phi_{VU} & \Phi_{WU} \\ \Phi_{UV} & \Phi_{VV} & \Phi_{WV} \\ \Phi_{UW} & \Phi_{VW} & \Phi_{WW} \end{bmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA EXPRESIÓN QUE RELACIONA LAS MATRICES DE TENSIONES REFERIDAS A BASES NO ORTOGONALES.

Sabemos que:

$$[T_{T_{uvw}}] = [C]^{-1} [T_{T_{xyz}}][C] \qquad (6.10.2.)$$

siendo $[C]$ la matriz del CAMBIO DE BASE del sistema U,V,W al XYZ



$$[C] = \begin{bmatrix} U_x & V_x & W_x \\ U_y & V_y & W_y \\ U_z & V_z & W_z \end{bmatrix} \qquad (6.10.3.)$$

Sabemos que: $[T_T] = [\sigma][P]$

así como: $[P] = \frac{1}{\sqrt{|R|}} [S_\alpha][R] \qquad (6.7.4.)$

Para relacionar las matrices $[\sigma_{xyz}]$ y $[\sigma_{uvw}]$ tendremos que tener en cuenta previamente que según se estableció:

$$[T_{T_{xyz}}] = [\sigma_{xyz}][P_{xyz}]$$

$$[T_{T_{u,v,w}}] = [\sigma_{u,v,w}][P_{uvw}]$$

Donde $[P_{ijk}]$ es la matriz proyección asociada al sistema ijk

Sustituyendo en (6.10.2):

$$[\sigma_{uvw}][P_{uvw}] = [C]^{-1}[\sigma_{xyz}][P_{xyz}][C]$$

$$\boxed{[\sigma_{uvw}] = [C]^{-1}[\sigma_{xyz}][P_{xyz}][C][P_{uvw}]^{-1}} \qquad (6.10.4)$$

Recordando que según (6.7.4.):

$$[P_{uvw}] = \frac{1}{\sqrt{|R_{uvw}|}} [S_{\alpha_{u,v,w}}][R_{uvw}]$$

OPCIONAL

Así como el hecho de que: $[R_{UVW}] = [C]^T [R_{XYZ}][C]$

podrá establecerse el que:

$$[P_{UVW}] = \frac{1}{\sqrt{|R_{UVW}|}} [S\alpha_{UVW}][C]^T[R_{XYZ}][C]$$

lo que implica: $[P_{UVW}]^{-1} = \sqrt{|R_{UVW}|}\ [C]^{-1}[R_{XYZ}]^{-1}[C]^{-1,T}[S_{\alpha_{UVW}}]^{-1}$

Sustituyendo en (6.10.4.) se obtiene:

$$[\sigma_{UVW}] = \sqrt{|R_{UVW}|}\ [C]^{-1}[\sigma_{XYZ}][P_{XYZ}][R_{XYZ}]^{-1}[C]^{-1,T}[S\alpha_{UVW}]^{-1}$$

Remplazando la matriz PROYECCIÓN del sistema XYZ, por la expresión que la determina se llega a que:

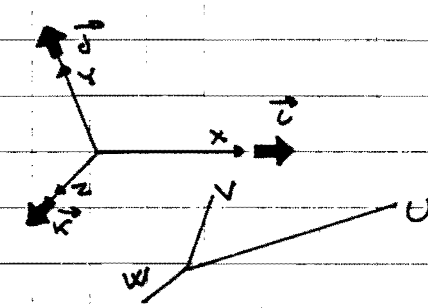
$$[\sigma_{UVW}] = \sqrt{\frac{|R_{UVW}|}{|R_{XYZ}|}}\ [C]^{-1}[\sigma_{XYZ}][S\alpha_{XYZ}][C]^{-1,T}[S\alpha_{UVW}]^{-1} \quad (6.10.5.)$$

La matriz $[C]$ establece la relación entre las componentes de un vector referido a la base U, V, W, con las que presenta respecto al sistema XYZ

La matriz $[C^*] = [C]^{-1}$ efectuará la transformación de componentes de un vector referido al sistema XYZ, al U,V,W.

Según lo que se expuso en CAMBIO DE BASE, la matriz $[C^*]$ puede configurarse directamente, si como columnas de la misma se utilizan las componentes de los versores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ que tienen como direcciones los ejes X, Y, Z, referidos al sistema U, V, W, es decir:

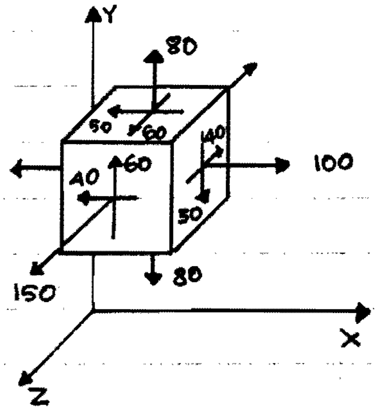
$$[C^*] = \begin{bmatrix} i_U & j_U & k_U \\ i_V & j_V & k_V \\ i_W & j_W & k_W \end{bmatrix} = [C]^{-1}$$



Sustituyendo en (6.10.5.):

$$\boxed{[\sigma_{UVW}] = \sqrt{\frac{|R_{UVW}|}{|R_{XYZ}|}}\ [C^*][\sigma_{XYZ}][S\alpha_{XYZ}][C^*]^T[S\alpha_{UVW}]^{-1}} \quad (6.10.6.)$$

EJERCICIO 6.10.1. Dado el estado tensional croquizado en la figura



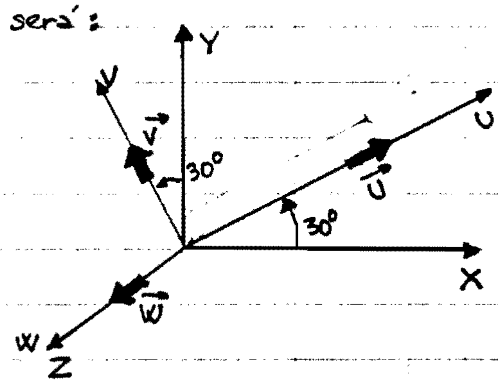
Obtener las tensiones que se producirán en un cubo girado 30° según sentido anti-horario con eje Z

SOLUCIÓN

La matriz asociada al tensor de tensiones será:

$$[T_T] = [\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & -50 & -40 \\ -50 & 80 & 60 \\ -40 & 60 & 150 \end{bmatrix}$$

El nuevo sistema de referencia, que simbolizaremos por U, V, W será:



Si situamos sobre los nuevos ejes vectores unitarios, sus componentes serán:

$\vec{U}$ (0,866 0,5 0)
$\vec{V}$ (−0.5 0,866 0)
$\vec{W}$ (0 0 1)

Por lo que la matriz del cambio de base será:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

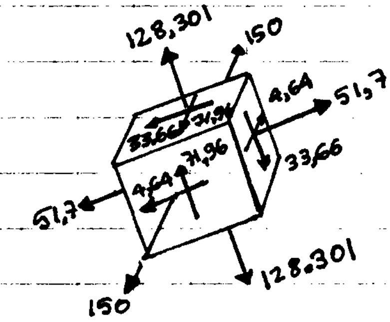
Aplicando la teoria expuesta: $[T_T^{u,v,w}] = [C]^T [T_T^{xyz}] [C]$

Operando, resultará aplicando el esquema de FÄLK para la realización del producto de matrices los siguientes valores:

			$[T_T]$			$[C]$		
			100	-50	-40	0.866	-0.5	0
			-50	80	60	0.5	0,866	0
$[C]^T$			-40	60	150	0	0	1
0.866	0.5	0	61,603	-3,301	-4.641	51,7	-33,660	-4,641
-0.5	0.866	0	-93,301	94,282	71,962	-33,660	128.301	71,962
0	0	1	-40	60	150	-4,641	71,962	150
			$[C]^T \cdot [T_T]$			$([C]^T \cdot [T_T]) \cdot [C]$		

Por lo tanto:

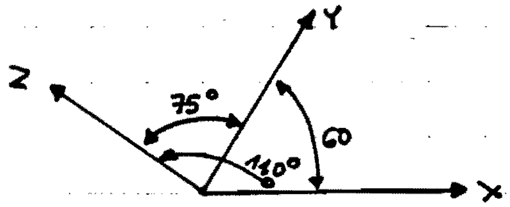
$$\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,7 & -33,660 & -4,641 \\ -33,660 & 128,301 & 71,962 \\ -4,641 & 71,962 & 150 \end{bmatrix}$$



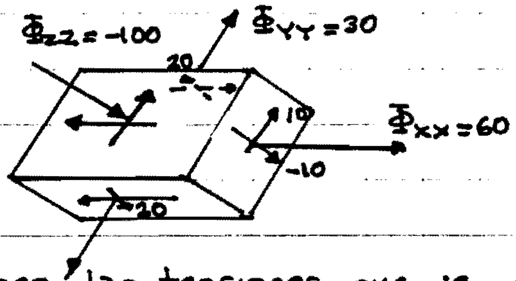
OPCIONAL

EJERCICIO 6.10.2.

Sabiendo que el eje X y el Y forman 60°, el X y el Z 110° y el Y y el Z un ángulo de 75°, y que



$$\Phi_{xx} = 60$$
$$\Phi_{YY} = 30$$
$$\Phi_{zz} = -100$$



$$\Phi_{xy} = 10$$
$$\Phi_{zx} = -10$$
$$\Phi_{yz} = 20$$

Obtener las tensiones que se producirán según direcciones X^* Y^* y Z^*, sabiendo que

- X^* y X son coincidentes
- Y^* es normal a X y contenido en el plano XY
- Z^* es ortogonal al plano XY

SOLUCIÓN Obtengamos previamente los términos: Φ_{YX}, Φ_{XZ} y Φ_{zy} mediante la aplicación del teorema de Cauchy Generalizado, imponiendo que:

$$\Phi_{xy} \operatorname{sen}\alpha_{YZ} = \Phi_{yx} \operatorname{sen}\alpha_{xz} \qquad \operatorname{sen}\alpha_{xy} = 0.8660$$
$$\Phi_{xz} \operatorname{sen}\alpha_{zY} = \Phi_{zx} \operatorname{sen}\alpha_{xY} \qquad \operatorname{sen}\alpha_{xz} = 0.93969$$
$$\Phi_{Yz} \operatorname{sen}\alpha_{zx} = \Phi_{zY} \operatorname{sen}\alpha_{Yx} \qquad \operatorname{sen}\alpha_{Yz} = 0.9659$$

$$\Downarrow$$

$$10 \cdot 0{,}9659 = \Phi_{Yx}\, 0{,}93969 \Rightarrow \Phi_{yx} = 10.2792$$
$$\Phi_{xz} \cdot 0{,}9659 = (-10) \cdot 0{,}8660 \Rightarrow \Phi_{xz} = -8.9658$$
$$20 \cdot 0{,}93969 = \Phi_{zY} \cdot 0{,}8660 \Rightarrow \Phi_{zY} = 21.7013$$

Luego la matriz de las TENSIONES es:

$$[\sigma_{XYZ}] = \begin{bmatrix} 60 & 10.2792 & -10 \\ 10 & 30 & 21.7013 \\ -8.9658 & 20 & -100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix}$$

Calculemos la matriz métrica Euclídea:

$$[R_{XYZ}] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3420 \\ 0.5 & 1 & 0.2588 \\ -0.3420 & 0.2588 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha_{xy} & \cos\alpha_{zx} \\ \cos\alpha_{xy} & 1 & \cos\alpha_{yz} \\ \cos\alpha_{zx} & \cos\alpha_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

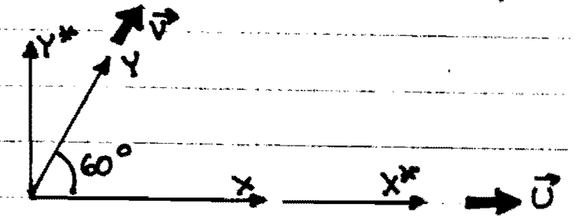
$$[S_{\alpha\,XYZ}] = \begin{bmatrix} 0.9659 & 0 & 0 \\ 0 & 0.93969 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8660 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{|R_{XYZ}|} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0.5 & 1 & 0.2588 \\ -0.342 & 0.2588 & 1 \end{vmatrix}} = 0.69105$$

Abordemos ahora el problema del Cambio de Base

Calcularemos previamente la matriz del cambio de base de XYZ a $X^*Y^*Z^*$, que en la exposición teórica hemos simbolizado por $[C^*]$.

Calculemos las componentes de unos versores $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ cuyas direcciones son X, Y y Z, respecto a los nuevos ejes X^*, Y^* y Z^*.



$$\vec{U}\ (U_{X^*}\ U_{Y^*}\ U_{Z^*}) \equiv (1, 0, 0)$$

$$\vec{V}\ (V_{X^*}\ V_{Y^*}\ V_{Z^*}) \equiv (0.5,\ 0.866025,\ 0) \equiv (\cos 60,\ \operatorname{sen} 60,\ 0)$$

El vector $\vec{W}$ lo obtendremos de imponer que:

$\vec{w} \cdot \vec{U} = \cos 110^\circ = -0.342$

$\vec{w} \cdot \vec{V} = \cos 75^\circ = 0.2588$

y que: $w_{x^*}^2 + w_{y^*}^2 + w_{z^*}^2 = 1$ (condición de versor)

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x^*} \\ w_{y^*} \\ w_{z^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.342 \\ 0.2588 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_{x^*} \\ w_{y^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.342 \\ 0.4963 \end{bmatrix}$$

$$w_{z^*} = \sqrt{1 - w_{x^*}^2 - w_{y^*}^2} = 0.7980$$

Por lo tanto:

$$[C^*] = [C_{x,y,z \to x^*y^*z^*}] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0 & 0.86603 & 0.4963 \\ 0 & 0 & 0.7980 \end{bmatrix}$$

El sistema $x^*y^*z^*$ al ser ortogonal, verificará:

$$[R_{x^*y^*z^*}] = [S_{\alpha_{x^*y^*z^*}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{|R_{x^*y^*z^*}|} = 1 \\ [S_{\alpha_{x^*y^*z^*}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$[\sigma_{x^*y^*z^*}] = \sqrt{\frac{|R_{x^*y^*z^*}|}{|R_{xyz}|}} [C^*][\sigma_{xyz}][S_{\alpha_{xyz}}][C^*]^T[S_{\alpha_{x^*y^*z^*}}]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{0.69105} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0 & 0.86603 & 0.4963 \\ 0 & 0 & 0.7980 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 10.2792 & -10 \\ 10 & 30 & 21.7013 \\ -8.9658 & 20 & -100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9659 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9397 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8660 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ -0.342 & 0.4963 & 0.7980 \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} 92.65 & 43.51 & 35.05 \\ 43.51 & 23.11 & -30.83 \\ 35.05 & -30.83 & -79.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x^*} & \tau_{x^*y^*} & \tau_{z^*x^*} \\ \tau_{x^*y^*} & \sigma_{y^*} & \tau_{y^*z^*} \\ \tau_{z^*x^*} & \tau_{y^*z^*} & \sigma_{z^*} \end{bmatrix}}$$

(Al ser el sistema $x^*y^*z^*$ ortogonal, se verifica:

$[T_{T_{x^*y^*z^*}}] = [\sigma_{x^*y^*z^*}]$)

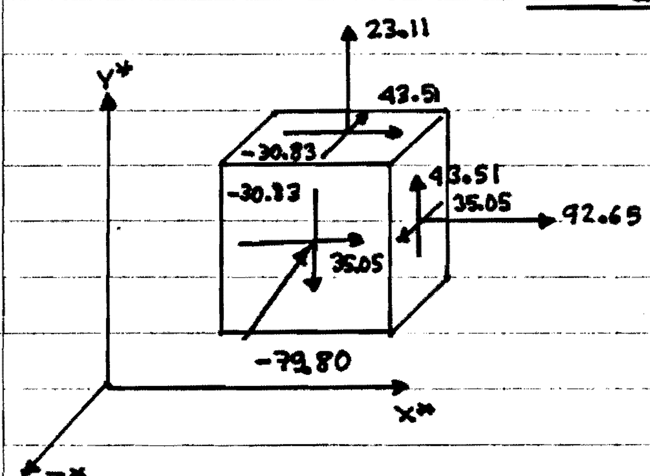
lo que implica que:

$\sigma_{x^*} = 92.65 \qquad \tau_{x^*y^*} = \tau_{y^*x^*} = 43.51$

$\sigma_{y^*} = 23.11 \qquad \tau_{x^*z^*} = \tau_{z^*x^*} = 35.05$

$\sigma_{z^*} = -79.80 \qquad \tau_{y^*z^*} = \tau_{z^*y^*} = -30.83$

2ª SOLUCION



Si deseamos calcular la matriz asociada al TENSOR en la base XYZ, tendremos que calcular la matriz proyección, será:

$$[P_{XYZ}] = \frac{1}{\sqrt{|R_{XYZ}|}} [S\alpha_{XYZ}][R_{XYZ}] = \begin{bmatrix} 1.3977 & 0.69885 & -0.47801 \\ 0.6799 & 1.3598 & 0.35192 \\ -0.42858 & 0.32432 & 1.25317 \end{bmatrix}$$

En consecuencia la matriz asociada al TENSOR en la base XYZ, será:

$$[T_T]_{XYZ} = [\sigma_{XYZ}] \cdot [P_{XYZ}] = \begin{bmatrix} 95.14 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82 & 32.97 \\ 43.92 & -11.50 & -113.99 \end{bmatrix} = [T_{T_{XYZ}}]$$

También podía haberse obtenido $[\sigma_{x^*y^*z^*}]$, sabiendo que es igual a $[T_{T_{x^*y^*z^*}}]$, y por medio de la aplicación de la TEORÍA DEL CAMBIO DE BASE.

$$[C] = [C^*]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0 & 0.86603 & 0.4963 \\ 0 & 0 & 0.7980 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.57735 & 0.7877 \\ 0 & 1.1547 & -0.7181 \\ 0 & 0 & 1.2532 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[T_{T_{x^*y^*z^*}}] = [C]^{-1}[T_{T_{XYZ}}][C] = [C^*][T_{T_{XYZ}}][C] =$$

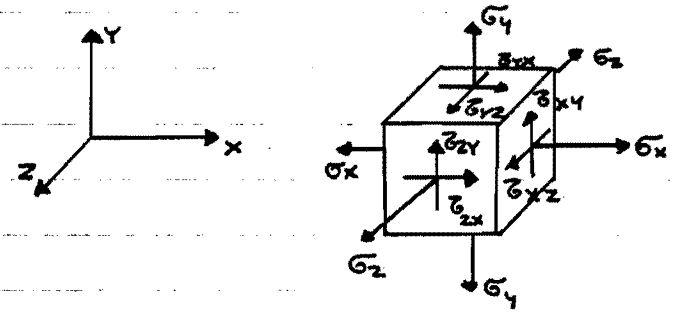
$$[T_{T_{x^*y^*z^*}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0 & 0.86603 & 0.4963 \\ 0 & 0 & 0.7980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 95.14 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82 & 32.97 \\ 43.92 & -11.50 & -113.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5774 & 0.7877 \\ 0 & 1.1547 & -0.7181 \\ 0 & 0 & 1.2532 \end{bmatrix} =$$

$$= [\sigma_{x^*y^*z^*}] = \begin{bmatrix} 92.65 & 43.51 & 35.05 \\ 43.51 & 23.11 & -30.83 \\ 35.05 & -30.83 & -79.80 \end{bmatrix}$$ tal como ya habíamos obtenido

6.11. INVARIANTES

Si la matriz asociada al tensor de tensiones en una base ortogonal es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



y respecto a otra:

$$\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}$$

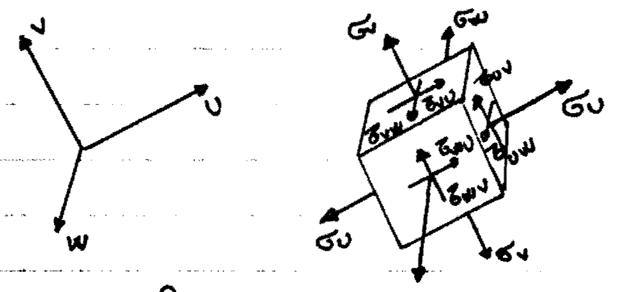


fig 6.11.1.

Dado que las dos matrices representan un mismo estado tensional, es lógico que existan valores que no sufran alteraciones ante el cambio de sistema de referencia, y estos son:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_u + \sigma_v + \sigma_w = J_1$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_u & \tau_{wu} \\ \tau_{uw} & \sigma_w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{vw} & \sigma_w \end{vmatrix} = J_2$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{vmatrix} = J_3 \qquad (6.11.1.)$$

J_1 PRIMER INVARIANTE : Suma de los elementos de la diagonal principal

J_2 SEGUNDO INVARIANTE : Suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal principal

J_3 TERCER INVARIANTE : El determinante de la matriz asociada al tensor.

EJERCICIO 6.11.1. Verificar los INVARIANTES con la matriz derivada de los datos del EJERCICIO 6.10.1 y con la matriz resultado obtenida en el mismo.

SOLUCIÓN Las matrices citadas en el enunciado, y obtenidas en el citado ejercicio, son:

$$\begin{bmatrix} 100 & -50 & -40 \\ -50 & 80 & 60 \\ -40 & 60 & 150 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 51{,}7 & -33{,}660 & -4{,}641 \\ -33{,}660 & 128{,}301 & 71{,}962 \\ -4{,}641 & 71{,}962 & 150 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = 100 + 80 + 150 = 330 \qquad J_1^* = 51{,}7 + 128{,}301 + 150 = 330{,}001$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 80 & 60 \\ 60 & 150 \end{vmatrix} = 5500 + 13400 + 8400 = 27300$$

$$J_2^* = \begin{vmatrix} 51{,}7 & -33{,}66 \\ -33{,}66 & 128{,}3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 51{,}7 & -4{,}64 \\ -4{,}64 & 150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 128{,}3 & 71{,}962 \\ 71{,}962 & 150 \end{vmatrix} = 5500{,}11 + 7733 + 14066{,}5 = 27300$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 100 & -50 & -40 \\ -50 & 80 & 60 \\ -40 & 60 & 150 \end{vmatrix} = 100 \cdot 80 \cdot 150 + (-50) \cdot 60 \cdot (-40) \cdot 2 - (-40) \cdot 80 \cdot (-40) - (-50) \cdot (-50) \cdot 150 - 60 \cdot 60 \cdot 100 = 577000 = J_3$$

$$J_3^* = \begin{vmatrix} 51{,}7 & -33{,}66 & -4{,}641 \\ -33{,}66 & 128{,}301 & 71{,}962 \\ -4{,}641 & 71{,}962 & 150 \end{vmatrix} = 51{,}7 \cdot 128{,}301 \cdot 150 + (-33{,}66) \cdot 71{,}962 \cdot (-4{,}641) \cdot 2 - (-4{,}641)^2 \cdot 128{,}301 - (-33{,}66)^2 \cdot 150 - 71{,}962^2 \cdot 51{,}7 = 577015 = J_3^*$$

6.12. VALORES PRINCIPALES (TENSIONES PRINCIPALES)

Dado que las direcciones principales se definen como aquellas para las que la tensión tangencial es nula, la matriz asociada al estado tensional referido a las direcciones principales será de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_0} \end{bmatrix}$$

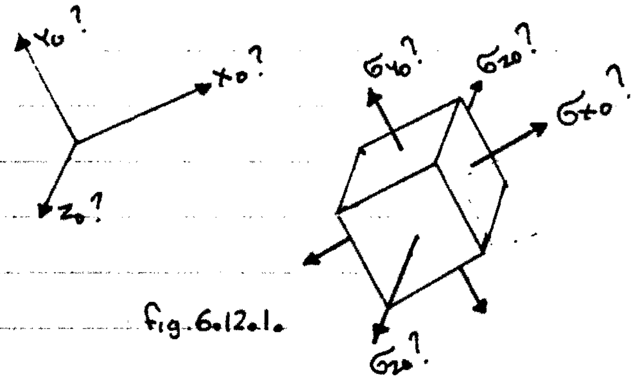


fig. 6.12.1.

Pero si se conoce el estado tensional, respecto a un sistema de referencia x, y, z, pueden ser calculados los INVARIANTES, que nos permitirán establecer:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} + \sigma_{z_0} = J_1 \\ &\sigma_{x_0}\sigma_{y_0} + \sigma_{x_0}\sigma_{z_0} + \sigma_{y_0}\sigma_{z_0} = J_2 \\ &\sigma_{x_0}\sigma_{y_0}\sigma_{z_0} = J_3 \end{aligned}\right\}$$

Lo que constituye un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya resolución conduce a la ecuación de tercer grado siguiente:

$$\boxed{\sigma_0^3 - J_1\sigma_0^2 + J_2\sigma_0 - J_3 = 0}$$ (ecuación canónica o secular)

Las tres raices de esta ecuación, nos proporciona los tres valores principales

$$\sigma_0 \begin{cases} \to \sigma_{x_0} \\ \to \sigma_{y_0} \\ \to \sigma_{z_0} \end{cases}$$

(Para resolver la ecuación de tercer grado, vease los procedimientos expuestos en la teoría del CÁLCULO TENSORIAL)

6.13. DIRECCIONES PRINCIPALES

Sabemos que una dirección principal tiene la particularidad que no se producen tensiones tangenciales en una superficie orientada según la misma, por lo que el vector tensión $\vec{\Psi}$ que asocia el tensor a una dirección principal, debe ser colineal con la misma, y perpendicular a la superficie asociada.

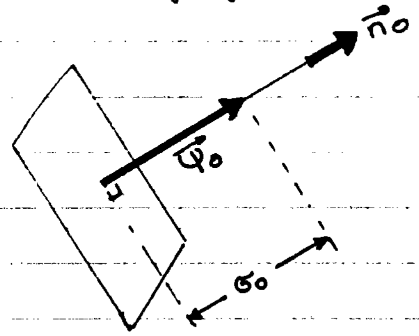


fig. 6.13.1.

La proyección del vector $\vec{\Psi}_o$ sobre la dirección principal $\vec{n}_o$, es su propio módulo, y a la vez por definición de tensión normal expresa el valor de esta, por lo que:

$$|\vec{\Psi}_o| = \sigma_o$$

Al ser colineal $\vec{\Psi}_o$ y $\vec{n}_o$ se verificará:

$$\vec{\Psi}_o = |\vec{\Psi}_o| \cdot \vec{n}_o$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\Psi}_o = \sigma_o \, \vec{n}_o$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^o \\ n_y^o \\ n_z^o \end{bmatrix}}_{\vec{\Psi}_o} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x^o \\ n_y^o \\ n_z^o \end{bmatrix}}_{\sigma_o \vec{n}_o}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_o & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_o & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^o \\ n_y^o \\ n_z^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (6.13.1.)$$

lo que representa un sistema de ecuaciones lineales homogeneo, que exige para que exista una terna de valores:

$$(n_x^o, m_y^o, n_z^o) \neq (0, 0, 0)$$

es preciso que una ecuación al menos, sea combinación lineal de las restantes, y en consecuencia, para que exista $\vec{n}_o$, es necesario que:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando esta condición, se obtiene la ecuación secular o canónica, y considerando que las tensiones principales son intrínsecas y propias del estado tensional, y por lo tanto no dependientes del sistema de referencia se puede enunciar que los coeficientes de dicha ecuación deben ser invariantes con respecto al sistema de referencia elegido, lo que permite justificar la existencia de los tres invariantes expuestos anteriormente.

En la expresión (6.13.1.) podremos consecuentemente eliminar una fila al menos, supongamos que esta pueda ser la tercera e imponer un valor arbitrario a una de las componentes, por ejemplo el valor uno a la tercera componente, en cuyo caso:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_0 & \tau_{zy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x^0 \\ n_y^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^0 \\ n_y^0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$\vec{n}_0\,(n_x^0,\, n_y^0,\, 1) \Longrightarrow$ vector colineal con la dirección según la cual actua la tensión σ_0

Pero es preciso advertir que no siempre puede eliminarse la tercera fila, pues en ocasiones la 1 y la 2 son proporcionales, en tanto que la tercera es independiente de las dos primeras, en cuyo caso, se deberá eliminar la primera o segunda fila, e imponer la primera o segunda componente en vez de fijar la tercera.

EJERCICIO 6.13.1. Obtener las TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES correspondientes al estado tensional analizado en los ejercicios 6.10.1 y 6.11.1.

SOLUCIÓN Sabemos que la matriz asociada a dicho estado tensional respecto al sistema X, Y, Z, es:

$$\begin{bmatrix} 100 & -50 & -40 \\ -50 & 80 & 60 \\ -40 & 60 & 150 \end{bmatrix}$$

y sabemos por el ejercicio 6.11.1., que los invariantes son:

$$\begin{cases} J_1 = 330 \\ J_2 = 27300 \\ J_3 = 577000 \end{cases}$$

La matriz asociada al estado tensional, utilizando como sistema de referencia las direcciones principales será del tipo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_0} \end{bmatrix}$$

Imponiendo que dicha matriz también debe satisfacer los invariantes, dispondremos de las tres ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} + \sigma_{z_0} = 330 \\ \sigma_{x_0}\sigma_{y_0} + \sigma_{x_0}\sigma_{z_0} + \sigma_{y_0}\sigma_{z_0} = 27300 \\ \sigma_{x_0}\sigma_{y}\sigma_{z_0} = 577000 \end{array}\right\}$$

Operando, deduciremos que las tensiones principales σ_{x_0}, σ_{y_0}, σ_{z_0}, serán las tres raices de la siguiente ecuación de tercer grado:

$$\boxed{\sigma_0^3 - 330\,\sigma_0^2 + 27300\,\sigma_0 - 577000 = 0}$$

Para resolver esta ecuación puede aplicarse la Regla de Newton lo que nos exige proponer un valor aproximado para las raices de la ecuación. Sabemos que una de las tensiones principales debe representar el valor máximo de la tensión normal, por lo que una raiz debe superar a la máxima tensión normal que exista respecto al sistema de referencia, en consecuencia puede establecers que:

$\sigma_{x_0} > 150$, lo que nos permite adoptar que:

$\sigma'_{x_0} \simeq 180$ a efectos de iniciar el proceso de tanteo que en definitiva es la regla de Newton.

Así pues:

$$\sigma''_{x_0} = \sigma'_{x_0} - \frac{\sigma'^3_{x_0} - 330\,\sigma'^2_{x_0} + 27300\,\sigma'_{x_0} - 577\,000}{3\,\sigma'^2_{x_0} - 660\,\sigma'_{x_0} + 27300}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma''_{x_0} = \frac{2\sigma'^3_{x_0} - 330\,\sigma'^2_{x_0} + 577\,000}{3\sigma'^2_{x_0} - 660\,\sigma'_{x_0} + 27300}}$$

Adoptando como $\sigma'_{x_0} \simeq 180$ se obtiene $\sigma''_{x_0} = 271,75$

Utilizando en un segundo ciclo como $\sigma'_{x_0} = 272$, se obtendrá para $\sigma''_{x_0} = 235,32$

Dado que σ'_{x_0} y σ''_{x_0} difieren en más de un 1% que podría aceptarse como error admisible, se sigue el proceso cíclico adoptando como $\sigma'_{x_0} = 235,32$, en cuyo caso se obtendrá como $\sigma''_{x_0} =$ 219,47

Si $\sigma'_{x_0} = 219,47$ resultará $\sigma''_{x_0} = 216,107$
Si $\sigma'_{x_0} = 216,107$ " $\sigma''_{x_0} = 215,959$
Si $\sigma'_{x_0} = 215,959$ " $\sigma''_{x_0} = 215,959$

Por lo que $\boxed{\sigma_{x_0} = 215,959}$

Para obtener el resto de las tensiones principales, deduciremos la ecuación de segundo grado que nos las proporcionará, y que será

	1	-330	27300	-577000
+215,959		+215.959	-24628.18	+ 577003.5
	1	-114.041	2671.8197	(3.5 ≃ 0)

Luego $\sigma_0^2 - 114.041\,\sigma_0 + 2671.82 = 0$

$$\sigma_0 = 57.02 \pm \sqrt{57.02^2 - 2671.82} \quad \begin{array}{|l|} \hline \sigma_{y_0} = 81.09 \\ \sigma_{z_0} = 32.95 \\ \hline \end{array}$$

La dirección principal correspondiente a la tensión principal $\sigma_{x_0} = 215{,}959$ se obtendrá mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 100-215{,}959 & -50 & -40 \\ -50 & 80-215{,}959 & 60 \\ -40 & 60 & 150-215{,}959 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x^{x_0} \\ n_y^{x_0} \\ n_z^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suprimiendo la tercera fila, e imponiendo que $n_z^{x_0} = 1$, el sistema a resolver será:

$$\begin{bmatrix} 115{,}959 & 50 \\ 50 & 135{,}959 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x^{x_0} \\ n_y^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_x^{x_0} \\ n_y^{x_0} \end{bmatrix} = \frac{1}{115{,}959 \times 135{,}959 - 50^2} \begin{bmatrix} 135{,}959 & -50 \\ -50 & 115{,}959 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_x^{x_0} \\ n_y^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6361 \\ 0{,}6752 \end{bmatrix}$$

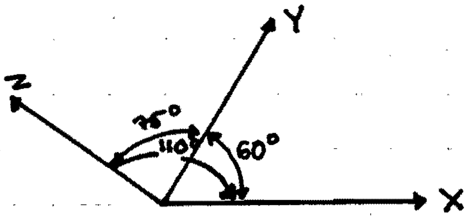
luego el vector:

$$\boxed{\vec{n}^{x_0} \left(-0{,}6361 \quad 0{,}6752 \quad 1 \right)}$$

será indicativo de la dirección según la cual se produce la tensión $\sigma_{x_0} = 215{,}959$

Análogamente se calcularán las direcciones principales correspondientes a $\sigma_{y_0} = 81{,}09$ y $\sigma_{z_0} = 32.95$

EJERCICIO 6.13.2. Sabiendo que un estado tensional es tal, que respecto al sistema de referencia siguiente:



la matriz asociada es:

$$\begin{bmatrix} 95.14 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82 & 32.97 \\ 43.92 & -11.50 & -113.99 \end{bmatrix}$$

La matriz del CAMBIO DE BASE entre el sistema XYZ y el $X^*Y^*Z^*$, siendo este tal que:

$$\begin{cases} X^* = X \\ Y^* \in \{X, Y\} \\ Z^* \perp X^* \quad y \quad Z^* \perp Y^* \end{cases}$$

es:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0 & 0.86603 & 0.4963 \\ 0 & 0 & 0.7980 \end{bmatrix}$$

Obtengase las DIRECCIONES PRINCIPALES así como las TENSIONES PRINCIPALES.

SOLUCIÓN Los invariantes son:

$$J_1 = 95.14 + 52.82 - 113.99 = 35.97$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 54.82 & 32.97 \\ -11.50 & -113.99 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 95.14 & -37.60 \\ 43.92 & -113.99 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 95.14 & 52.67 \\ 25.07 & 54.82 \end{vmatrix} = -11168.2555$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 95.14 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82 & 32.97 \\ 43.92 & -11.60 & -113.99 \end{vmatrix} = -230296$$

Luego la ecuación secular o canónica (2.9.) es:

$$\sigma_0^3 - 35.97\,\sigma_0^2 - 11168.26\,\sigma_0 + 230296 = 0$$

Aplicando la regla de Newton, el proceso será:

$$\sigma_0' = \sigma_0 - \frac{\sigma_0^3 - 35.97\sigma_0^2 - 11168.26\sigma_0 + 230296}{3\sigma_0^2 - 71.94\sigma_0 - 11168.26}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_0' = \frac{2\sigma_0^3 - 35.97\sigma_0^2 - 230296}{3\sigma_0^2 - 71.94\sigma_0 - 11168.26}}$$

Adoptemos $\sigma_0 = 0$, lo que nos proporcionará: $\sigma_0' = 20.62$

Si: $\sigma_0 = 20.62$ " " : $\sigma_0' = 20.05$

$\sigma_0 = 20.05$ " " : $\sigma_0' = 20.05$

Ello implica que $\boxed{\sigma_{x_0} = 20.05}$

Conocida una raiz, puede deducirse la ecuación de segundo grado que proporcionará las otras dos raices, y resolver la misma tal como a continuación efectuamos.

	1	−35.97	−11168.26	230296
20.05		20.05	−319.16	−230296
	1	−15.92	−11487.42	0

$$\Downarrow$$

$$\sigma_0^2 - 15.92\sigma_0 - 11487.42 = 0$$

$$\sigma_0 = +7.96 \pm \sqrt{7.96^2 + 11487.42} = \begin{cases} \boxed{115.43 = \sigma_{y_0}} \\ \boxed{-99.51 = \sigma_{z_0}} \end{cases}$$

Calculemos vectores colineales con las direcciones principales

$\vec{V}$ colineal con x_0

$$\begin{bmatrix} 95.14-20.05 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82-20.05 & 32.97 \\ 43.92 & -11.50 & -113.99-20.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Imponiendo $v_z = 1$, resultará:

$$\begin{bmatrix} 75.09 & 52.67 \\ 25.07 & 34.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.60 \\ -32.97 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3588 \\ -2.6490 \end{bmatrix}$$

$\vec{V}$ (2.3588, -2.6490, 1) referido al sistema X, Y, Z.

$\vec{W}$ COLINEAL con Y_0

$$\begin{bmatrix} 95.14-115.43 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82-115.43 & 32.97 \\ 43.92 & -11.50 & -113.99-115.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_Y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ imponiendo $w_z = 1$

$$\begin{bmatrix} -20.29 & 52.67 \\ 25.07 & -60.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.60 \\ -32.97 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_x \\ w_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.9829 \\ 3.0186 \end{bmatrix}$$

$\vec{W}$ (5.9829 3.0186 1)

$\vec{U}$ colineal con Z_0

$$\begin{bmatrix} 95.14+99.51 & 52.67 & -37.60 \\ 25.07 & 54.82+99.51 & 32.97 \\ 43.92 & -11.50 & -113.99+99.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_Y \\ U_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ imponiendo $U_z = 1$

$$\begin{bmatrix} 194.65 & 52.67 \\ 25.07 & 154.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.60 \\ -32.97 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_x \\ U_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2625 \\ -0.2563 \end{bmatrix}$$

$\vec{U}$ (0.2625 -0.2563 1)

Si queremos los vector $\vec{V}$, $\vec{W}$ y $\vec{U}$ referirlos a los ejes $X^* Y^* Z^*$, utilizaremos la MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

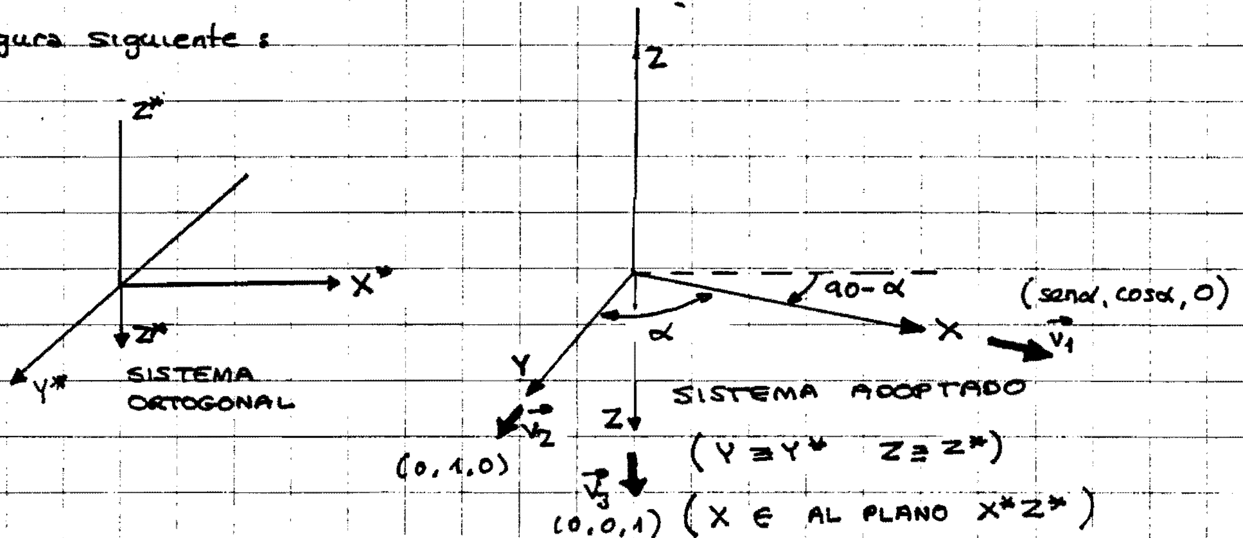
$$\begin{bmatrix} V_{x^*} & W_{x^*} & U_{x^*} \\ V_{y^*} & W_{Y^*} & U_{Y^*} \\ V_{z^*} & W_{z^*} & U_{z^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.342 \\ 0 & 0.86603 & 0.4963 \\ 0 & 0 & 0.7980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.3588 & 5.9829 & 0.2625 \\ -2.6490 & 3.0186 & -0.2563 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6923 & 7.1502 & -0.2077 \\ -1.7978 & 3.1105 & 0.2743 \\ 0.798 & 0.798 & 0.798 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{V} = (0.6923 & -1.7978 & 0.798) \\ \vec{W} = (7.1502 & 3.1105 & 0.798) \\ \vec{U} = (-0.2077 & 0.2743 & 0.798) \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{módulo 1}]{\text{con}} \left\{\begin{matrix} (0.332 & -0.8622 & 0.3828) \\ (0.9125 & 0.3363 & 0.1011) \\ (-0.239 & 0.3156 & 0.9183) \end{matrix}\right.$$

6.11. ECUACIONES GENERALES DE EQUILIBRIO ENTRE TENSIONES Y SOLICITACIONES CON EJE X OBLICUO.

En el análisis de láminas, es ventajosa la utilización de un sistema de referencia NO ORTOGONAL, tal como se indica en la figura siguiente:



Relacionemos las matrices de tensiones correspondientes a ambos sistemas, mediante la expresión (6.10.4.)

$$\boxed{|R_{x^*y^*z^*}| = 1}$$

$$|R_{XYZ}| = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\alpha = \boxed{\operatorname{sen}^2\alpha = |R_{XYZ}|}$$

$$\left[S_{\alpha_{XYZ}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \qquad \left[S_{\alpha_{x^*y^*z^*}}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C^*] = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (6.10.6.) resulta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x^*} & \tau_{y^*x^*} & \tau_{z^*x^*} \\ \tau_{x^*y^*} & \sigma_{y^*} & \tau_{z^*y^*} \\ \tau_{x^*z^*} & \tau_{y^*z^*} & \sigma_{z^*} \end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{XX} & \Phi_{YX} & \Phi_{ZX} \\ \Phi_{XY} & \Phi_{YY} & \Phi_{ZY} \\ \Phi_{XZ} & \Phi_{YZ} & \Phi_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operando, se deduce que:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x^*}\\ \tau_{x^*y^*}\\ \tau_{x^*z^*}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0\\ \cos\alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{xx}\\ \Phi_{xy}\\ \Phi_{xz}\end{bmatrix}$$

Los dos vectores tensiones en una y otra base estan relacionados por la matriz del CAMBIO DE BASE, ya que la superficie sobre la que actuan es la misma, así como la orientación de la misma, por lo que únicamente el problema se reduce a un cambio del sistema de referencia.

Las solicitaciones son vectores, y en consecuencia las componentes de las mismas en una y otra base estarán también relacionadas por la mencionada matriz del CAMBIO DE BASE. En consecuencia:

$$\begin{bmatrix}N_*\\ T_{y*}\\ T_{z*}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0\\ \cos\alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\ T_y\\ T_z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}N\\ T_y\\ T_z\end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0\\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_*\\ T_{y*}\\ T_{z*}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}M_{T*}\\ M_{y*}\\ M_{Fz*}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0\\ \cos\alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_T\\ M_{Fy}\\ M_{Fz}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}M_T\\ M_{Fy}\\ M_{Fz}\end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0\\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{T*}\\ M_{y*}\\ M_{z*}\end{bmatrix}$$

Sustituyendo las igualdades deducidas, en las expresiones que se obtuvieron en (6.6.1.) y (6.6.2.), que con la actual nomenclatura son:

$$\begin{bmatrix}N_*\\ T_{y*}\\ T_{z*}\end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix}\sigma_{x*}\\ \tau_{x*y*}\\ -\tau_{x*z*}\end{bmatrix} ds \qquad \begin{bmatrix}M_{T*}\\ M_{Fy*}\\ M_{Fz*}\end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & 0\\ -y & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{x*}\\ \tau_{x*y*}\\ \tau_{x*z*}\end{bmatrix} ds$$

$$\Downarrow$$

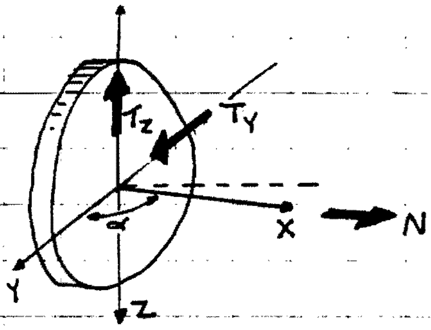
resultará:

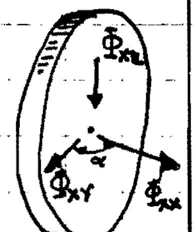
$$\begin{bmatrix}N_{x*}\\ T_{y*}\\ T_{z*}\end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix}\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0\\ \cos\alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{xx}\\ \Phi_{xy}\\ -\Phi_{xz}\end{bmatrix} ds$$

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{xy} \\ -\Phi_{xz} \end{bmatrix} ds$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{xy} \\ -\Phi_{xz} \end{bmatrix} ds}$$

(6.14.1.)



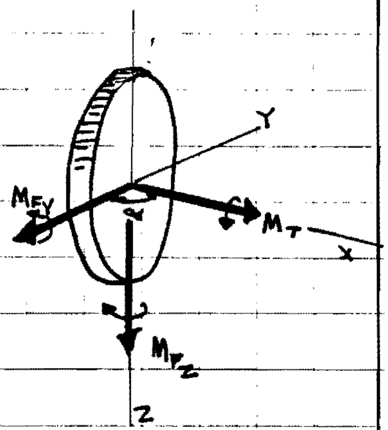


$$\begin{bmatrix} M_{T*} \\ M_{F_{y*}} \\ M_{F_{z*}} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{xy} \\ \Phi_{xz} \end{bmatrix} ds$$

$$\begin{bmatrix} M_T \\ M_{F_y} \\ M_{F_z} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{xy} \\ \Phi_{xz} \end{bmatrix} ds$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} M_T \\ M_{F_y} \\ M_{F_z} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \begin{bmatrix} -z\cos\alpha & -z & y \\ z & z\cos\alpha & -y\cos\alpha \\ -y\operatorname{sen}^2\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{xy} \\ \Phi_{xz} \end{bmatrix} ds}$$

(6.14.2.)



6.15. CRITERIO DE SIGNOS PARA LAS TENSIONES TANGENCIALES, QUE USUALMENTE UTILIZA LA RESISTENCIA DE MATERIALES.

Hasta ahora, hemos utilizado como criterio de signos para las tensiones tangenciales, el mismo que utilizaríamos con las fuerzas que las mismas producen, y en consecuencia, las tensiones tangenciales rasantes y cortantes poseen según el teorema de Cauchy el mismo signo.

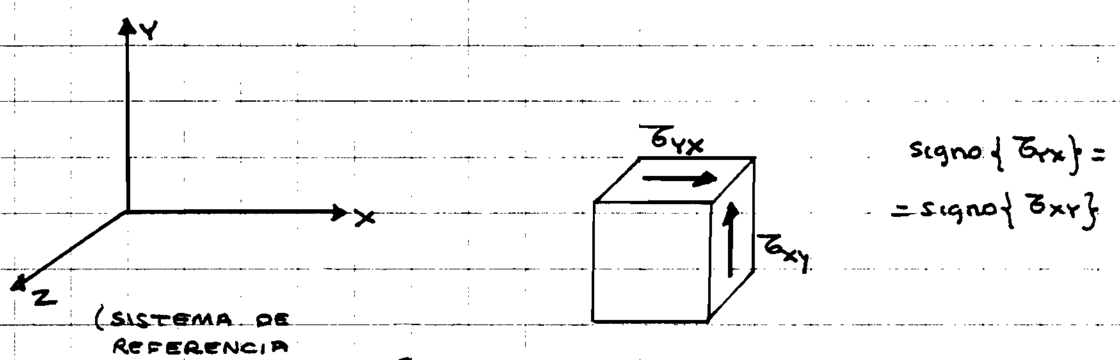


fig. 6.15.1.

Pero para la utilización el Círculo de Mohr correspondiente a estados planos es conveniente la utilización del criterio de signos, que resulta de considerar el sentido de avance que produce la rotación que generan las tensiones tangenciales existentes en las caras contrapuestas de un elemento diferencial.

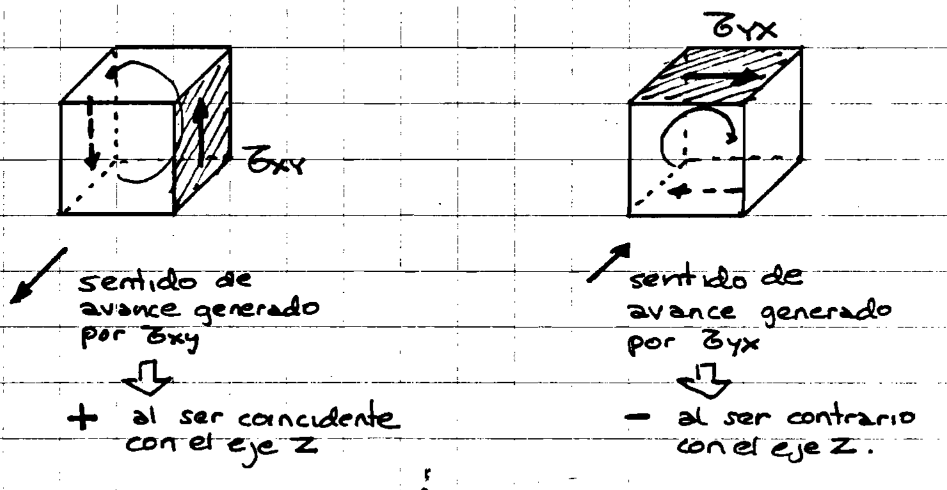


fig. 6.15.2.

En cuyo caso: $\boxed{\text{signo } \{\tau_{yx}\} \text{ CONTRARIO AL signo } \{\tau_{xy}\}}$

O de forma más general:

$$\boxed{\Phi_{ij}\ \text{sen}\,\alpha_{jk} = -\Phi_{ji}\ \text{sen}\,\alpha_{ik}}$$

TEOREMA DE CAUCHY GENERALIZADO

Los parámetros tensionales utilizados en general para definir un ESTADO TENSIONAL son:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \qquad\qquad \tau_{xy} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{yz}$$

que son los que son positivos de acuerdo con los DOS CRITERIOS DE SIGNOS EXPUESTOS.

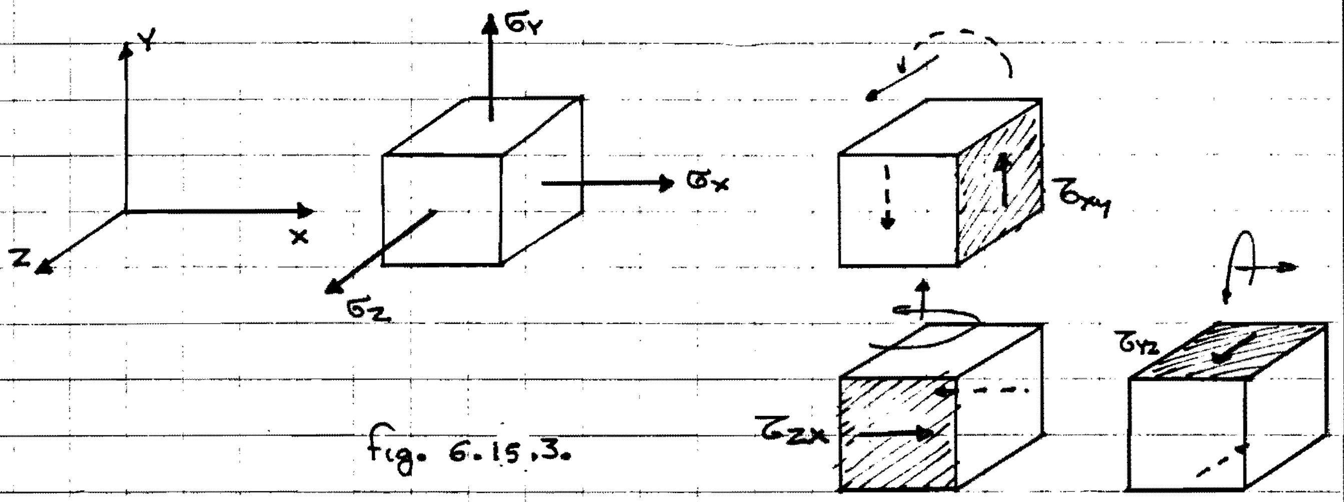


fig. 6.15.3.

Utilizando este criterio es usual sustituir los términos τ_{xz} por τ_{zx}, τ_{yx} por τ_{xy} y τ_{zy} por τ_{yz}, siendo la matriz asociada al tensor:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOCIADA AL TENSOR DE TENSIONES EN BASE ORTOGONAL.

6.16. APLICACIÓN DEL CÍRCULO DE MOHR A ESTADOS TENSIONALES DEFINIDOS EN UN PLANO

Sea un estado tensional tal como el siguiente: (fig. 6.16.1.)

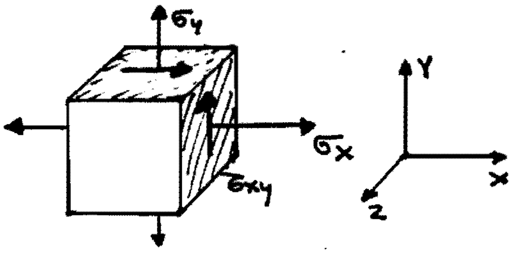


fig. 6.16.1.

Para construir el círculo de Mohr, se asociará el eje de ABSCISAS a las TENSIONES NORMALES σ, y el de ORDENADAS a las TENSIONES TANGENCIALES, POSITIVO HACIA ABAJO

Con origen, el del sistema de referencia, se colocará sobre el eje de abscisas un segmento representativo de σ_y, que simbolizaremos por $\overline{OP}$.

Con punto de partida el punto P, se dispondrá un segmento $\overline{PP_o}$, que a la escala elegida representará τ_{XY}, y que se orientará según la dirección del eje de ORDENADAS, y el signo de la citada TENSIÓN TANGENCIAL (POSITIVO hacia abajo, y negativo hacia arriba). El punto P_o se denomina POLO del CÍRCULO DE MOHR

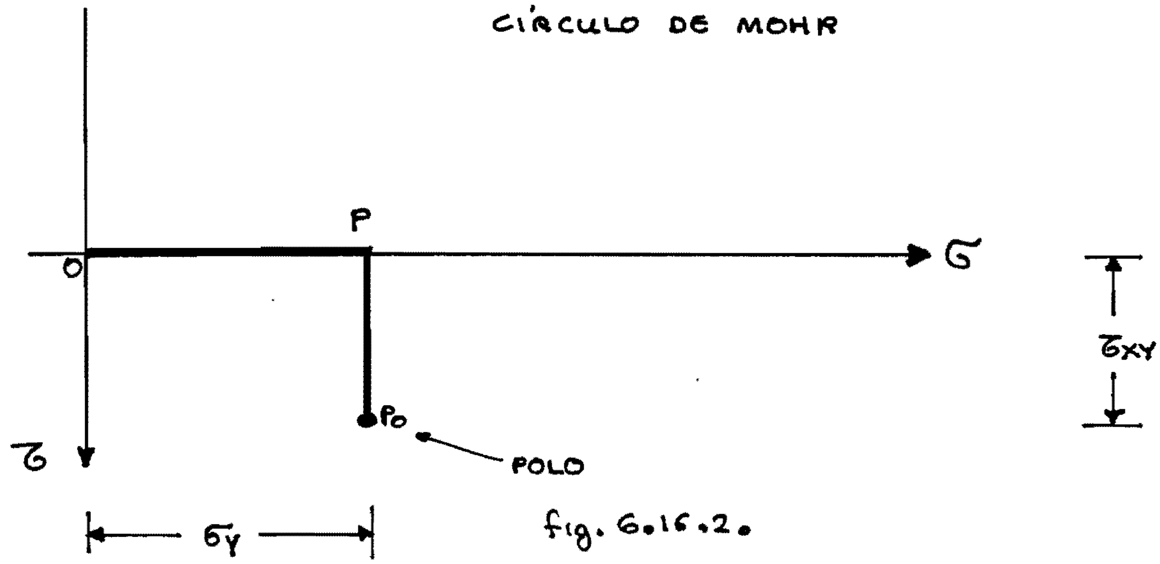


fig. 6.16.2.

En la fig. 6.16.2. se ha supuesto $\tau_{XY} > 0$.

Con origen en O, se situará sobre el eje de abscisas otro segmento $\overline{OP'}$, que representará a la escala adoptada σ_x.

El círculo de Mohr tendrá como centro un punto SITUADO SOBRE EL EJE DE ABSCISAS C, tal que será el punto intermedio entre P y P'. (fig 6.16.3.)

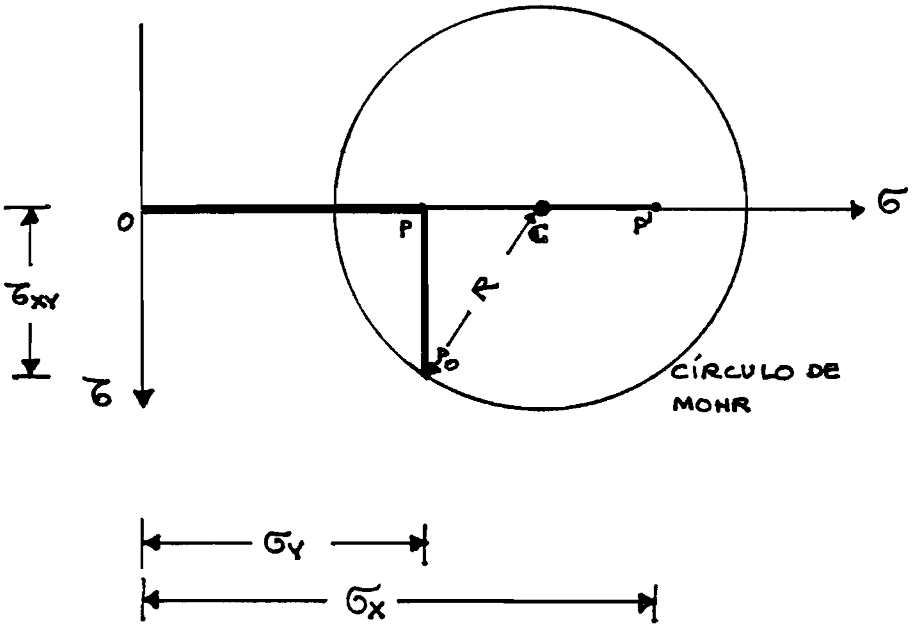


Fig. 6.16.3.

El círculo de Mohr, tendrá como radio el segmento $\overline{CP_0}$, por lo que conocido radio y centro esta podrá trazarse.

Si deseamos calcular las TENSIONES que produce el ESTADO TENSIONAL sobre una superficie definida por su normal $\vec{n}$, nos bastará con:

* TRAZAR DESDE P_0, UNA PARALELA A LA NORMAL DE LA SUPERFICIE (π), que simbolizaremos por $\overline{P_0N}$

* $\overline{P_0N}$ cortará al círculo de MOHR en un punto Q, cuya abscisa será:

  → $\overline{OQ_x}$ = TENSIÓN NORMAL σ_n

  → $\overline{OQ_y}$ = TENSIÓN TANGENCIAL τ_{nm} (fig. 6.16.4.)

La construcción ú proceso descrito, permite obtener las tensiones y direcciones principales, puesto que estas deben ser tales que no deben producir tensiones tangenciales, lo que exige que $\overline{OQ_Y} = 0$, o lo que es lo mismo, que Q esté situado sobre el eje de abscisas, y como debe pertenecer al círculo, deberá ser forzosamente P_1 ó P_2 (fig. 6.16.4.), lo que permite establecer que las direcciones principales son $\overline{P_0P_1}$ y $\overline{P_0P_2}$, y las tensiones principales asociadas $\sigma_1 = \overline{OP_1}$ y $\sigma_2 = \overline{OP_2}$.

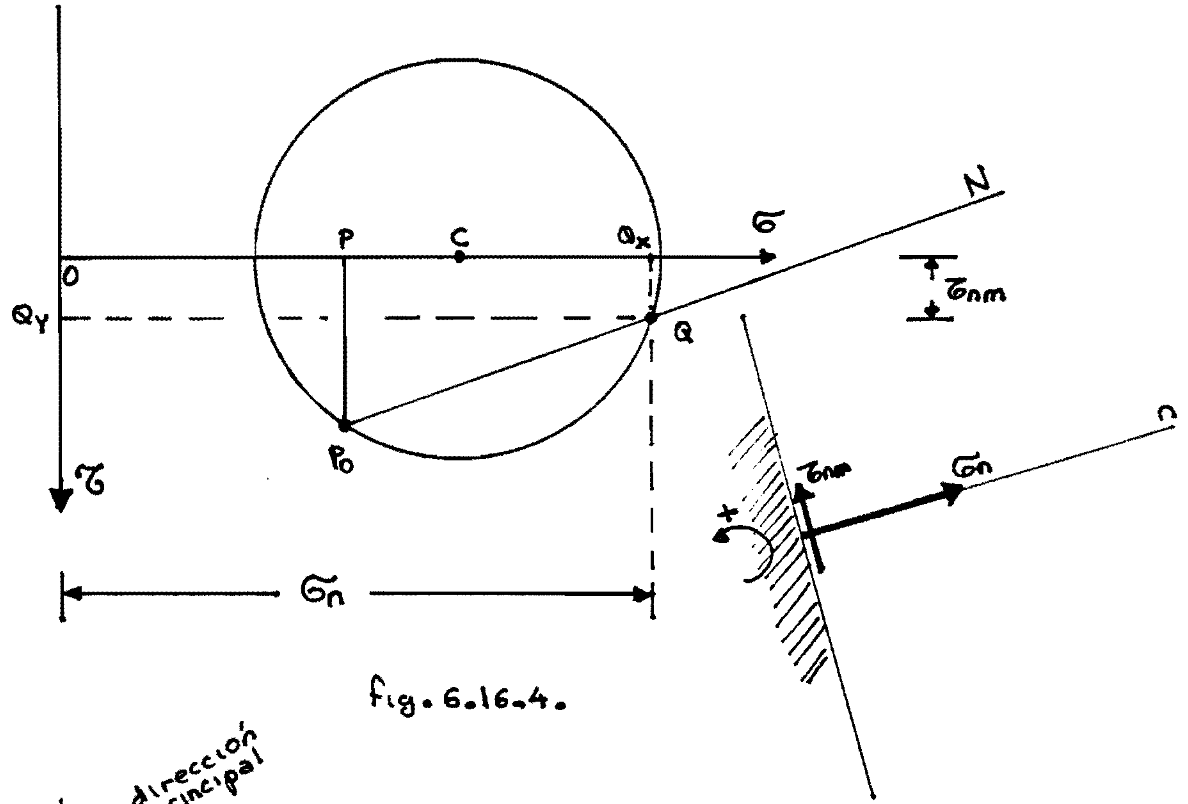


fig. 6.16.4.

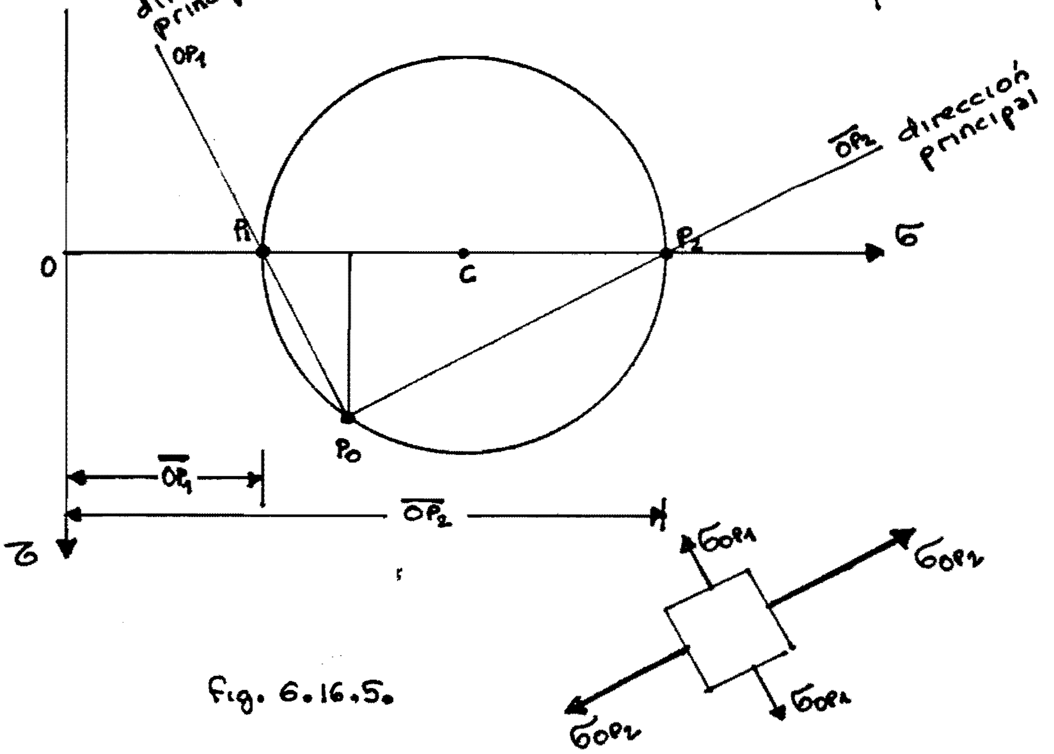


fig. 6.16.5.

6.17. UTILIZACIÓN DEL CÍRCULO DE MOHR PARA CASOS SINGULARES

El círculo de Mohr nos permite deducir cual es la matriz asociada a un tensor definido en forma plana y respecto a ejes ortogonales, aún en el caso de que las tensiones conocidas se produzcan en superficies no ortogonales entre sí, como pueden ser los casos siguientes.

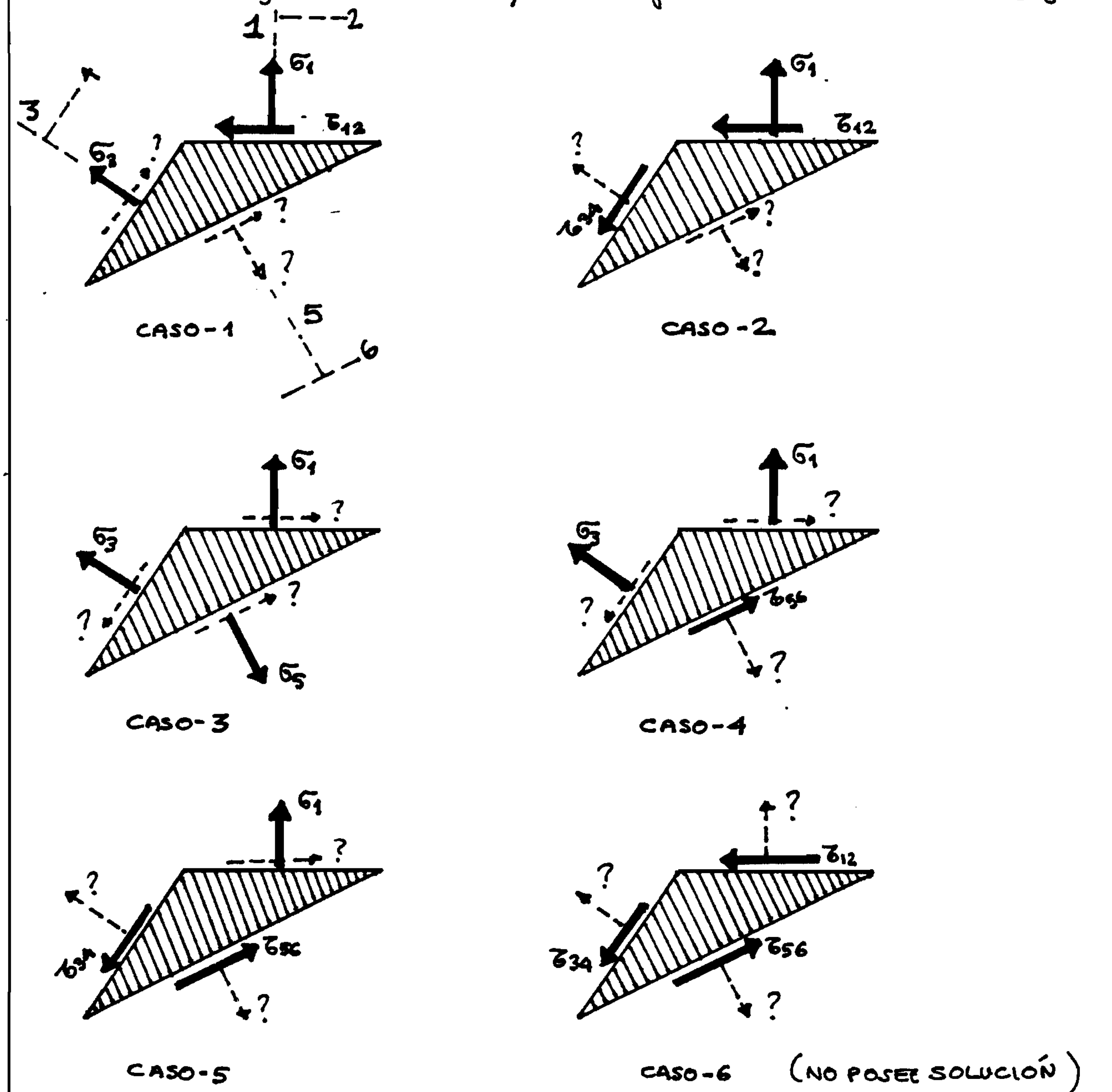


fig. 6.17.1.

La metodología de resolución consiste en elegir los ejes X-Y a los que se asimilan los σ y τ respectivamente de forma que sea factible situar el POLO. (punto de coordenadas σ_y, τ_{xy})

Cuando en una misma superficie se conocen simultaneamente σ_i y τ_{ij}, se adopta la dirección i como Y, y en consecuencia $\tau_{ji} = \tau_{xy}$, $\tau_{ij} = \tau_{YX}$, verificandose según CAUCHY: $\tau_{xy} = -\tau_{YX}$

lo que implica $\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = -\tau_{ij} \\ \sigma_y = \sigma_i \end{array} \right.$, por lo que se conocerá el POLO P_0.

Según lo expuesto, en los CASOS-1 y 2, se adoptará como eje Y la dirección 1

Cuando falten datos para poder situar el POLO, es preferible fijar el citado PUNTO, y suponer desconocido el EJE DE ABSCISAS σ o el eje de ORDENADAS τ, como se efectuará en los CASOS-3-4 y 5.

Veamos a continuación la solución de cada uno de los casos indicados.

<u>CASO-1</u> Se adopta como eje Y la dirección 1, y en consecuencia:

$$\sigma_Y = \sigma_1$$
$$\tau_{YX} = \tau_{12}$$

Según Cauchy: $\tau_{xy} = -\tau_{YX} \Longrightarrow \tau_{xy} = -\tau_{12}$

Esto nos permite determinal el POLO DEL CIRCULO DE MOHR, en el plano σ, τ, tal como se indica en la fig. 6.17.2.

Determinado el POLO, se traza desde el mismo una paralela a la dirección 3, determinandose el punto Q, perteneciente a la misma, que tiene como abscisa σ_3.

El punto Q, debe pertenecer al CÍRCULO DE MOHR, por lo que se conocerán dos puntos del mismos (P_0 y Q)

El centro del CÍRCULO DE MOHR deberá estar contenido en la mediatriz del segmento $\overline{P_0Q}$, y a la vez sabemos que debe pertenecer al eje de abscisas σ, por lo que el CENTRO **C** será el punto de corte de la citada mediatriz y el eje de σ.

Conocido el centro y dos puntos de paso, el trazado del círculo es inmediato

Dibujado el círculo, pueden calcularse las tensiones en cualquier superficie, como la que determina la dirección 5

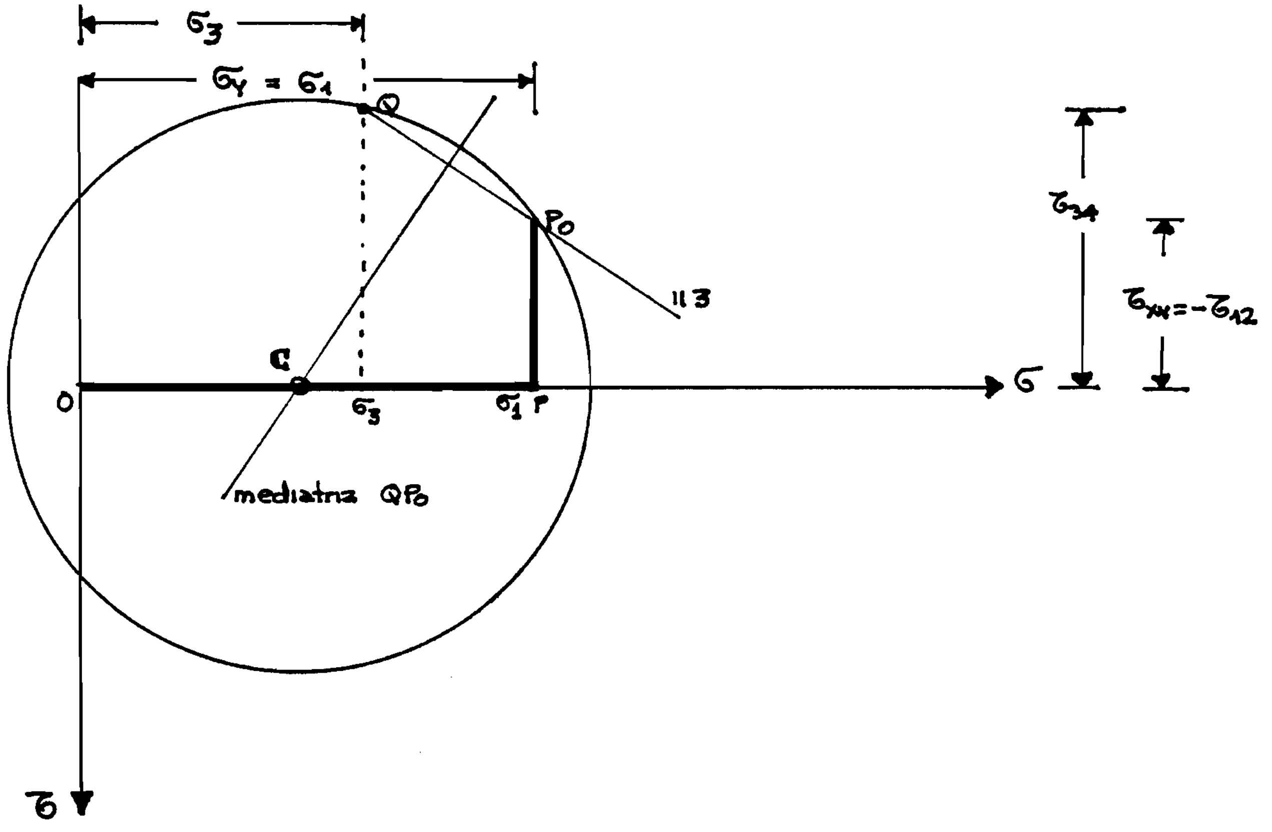


fig. 6.17.2.

CASO-2 Se diferencia del CASO-1, en que una vez trazada una paralela desde el POLO a la dirección 3, se busca el punto Q, cuya ORDENADA es τ_{34}, en vez de imponer la abscisa de valor σ_3 como se efectuó en el caso anterior.

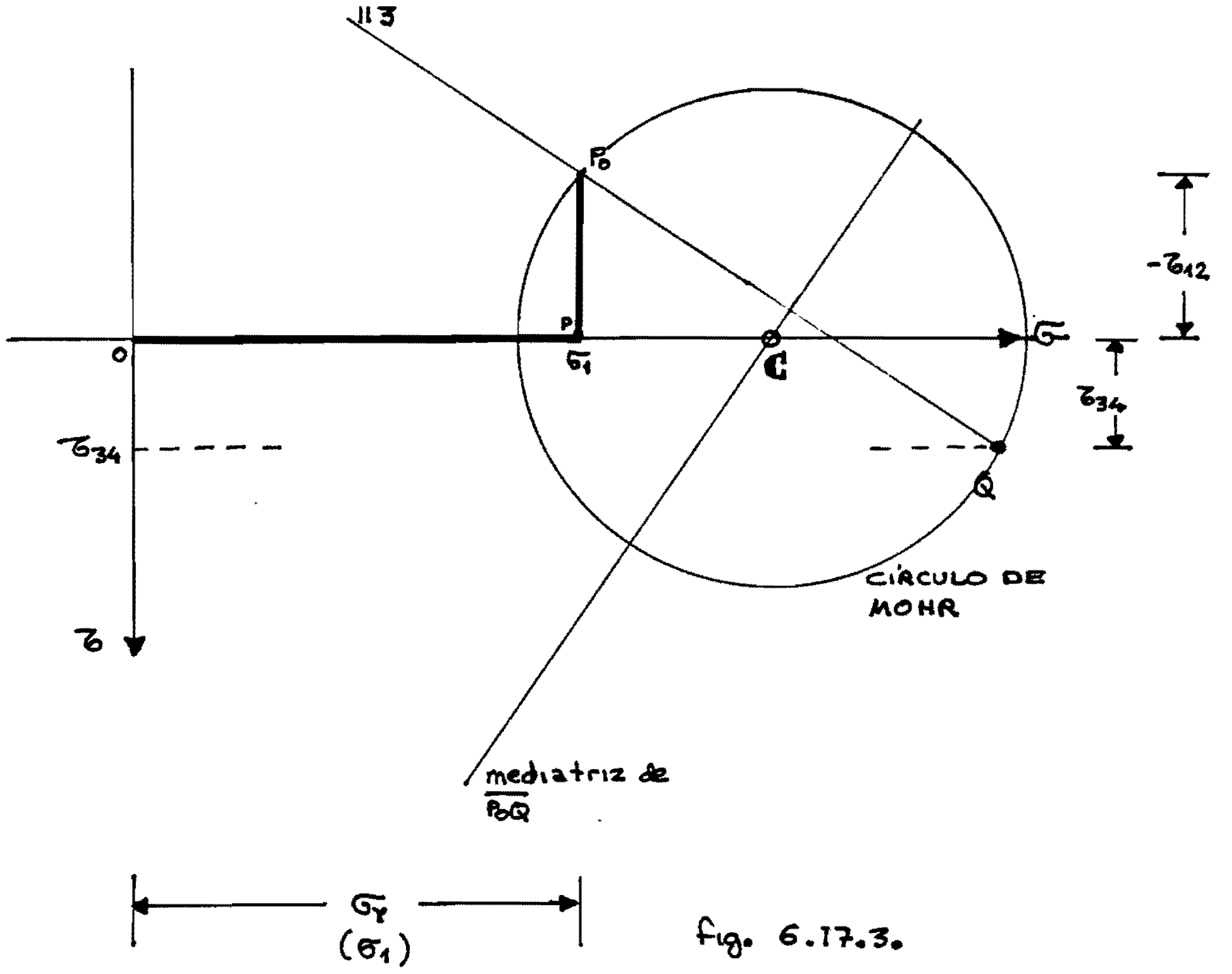


fig. 6.17.3.

CASO-3 El POLO no puede conocerse directamente en el plano $\sigma.\tau$, puesto que en ninguna de las superficies indicadas se conocen simultaneamente σ y τ.

Para poder utilizar el POLO, prescindiremos de conocer previamente la posición del eje de ABSCISAS σ, trazando únicamente el eje de ORDENADAS τ, y fijando de forma arbitraria el POLO Po, entre uno de los infinitos puntos que integran una paralela al eje τ, distante del mismo σ_1 (caso de adoptar la dirección 1 como eje Y)

Fijado el punto P_0 (de abscisa σ_1), se trazan desde el mismo, paralelas a 3 y 5, localizando en las citadas rectas los puntos Q_3 y Q_5 que tengan como abscisas respectivas σ_3 y σ_5

Los puntos Q_3, Q_5 y P_0 pertenecerán al círculo de Mohr; por lo que este, estará implícitamente determinado, pues bastará trazar las mediatrices de los segmentos $\overline{Q_3P_0}$ y $\overline{Q_5P_0}$, las cuales se cortarán en un punto, que será el CENTRO C DEL CÍRCULO DE MOHR, y el trazado gráfico del mismo será ya posible.

Dado que el centro C del círculo está situado siempre sobre el eje de abscisas σ, dicho eje se podrá trazar dibujando una normal al eje de ordenadas τ, desde C

Dibujado el CÍRCULO DE MOHR, y los ejes σ y τ, el estado tensional queda plenamente determinado, siendo factible determinar las tensiones existentes en cualquier superficie oblicua.

Las tensiones tangenciales τ_{12}, τ_{34} y τ_{56} serán las ordenadas de los puntos P_0, Q_3 y Q_5 respectivamente, las cuales se conocerán, una vez que se trace el eje de abscisas σ.

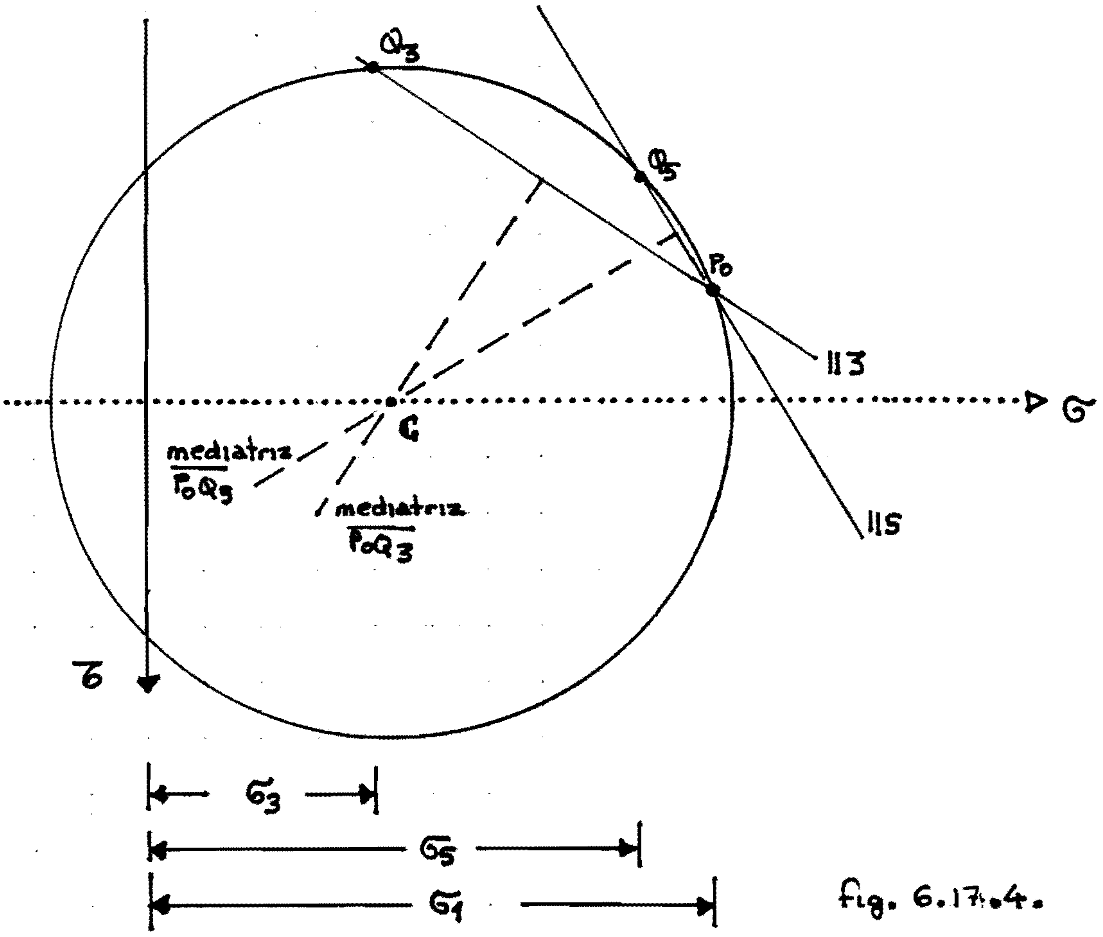


fig. 6.17.4.

CASO-4 Podemos adoptar la dirección 1 como eje Y, en cuyo caso si deseamos fijar el POLO, lo debemos efectuar al precio de desconocer el eje de abscisas σ.

Trazamos el eje de ordenadas τ, y una recta paralela al mismo, distante σ_1, de la cual elegiremos arbitrariamente un punto que simbolizaremos por P_0, y que será el POLO, y que pertenecerá al círculo de Mohr.

Desde P_0 trazaremos una paralela a la dirección 3, eligiendo un punto que simbolizaremos por Q_3, tal que diste σ_3 del eje de ORDENADAS. Q_3 pertenece al círculo de Mohr que pretendemos determinar.

Se trazará a continuación la mediatriz del segmento $\overline{P_0Q_3}$, la cual deberá contener el centro C del círculo de Mohr.

Desde P_0 trazamos una paralela a la dirección 5 sobre la cual debe encontrarse un punto Q_5 perteneciente al círculo de Mohr, y que deberá tener ordenada τ_{56}. Puesto que no se conoce el eje de abscisas la condición anterior no determina de momento el punto Q_5.

Si conocido el punto Q_5 trazacemos la mediatriz del segmento $\overline{P_0Q_5}$ esta se cortaría con la mediatriz ya trazada de $\overline{P_0Q_3}$ en el punto C, centro del círculo de Mohr, el cual determinaría la posición del eje de abscisas σ, y según lo expuesto Q_5 debería distar del mismo τ_{56}, siendo esta circunstancia la que potencialmente nos puede permitir determinar Q_5 y C.

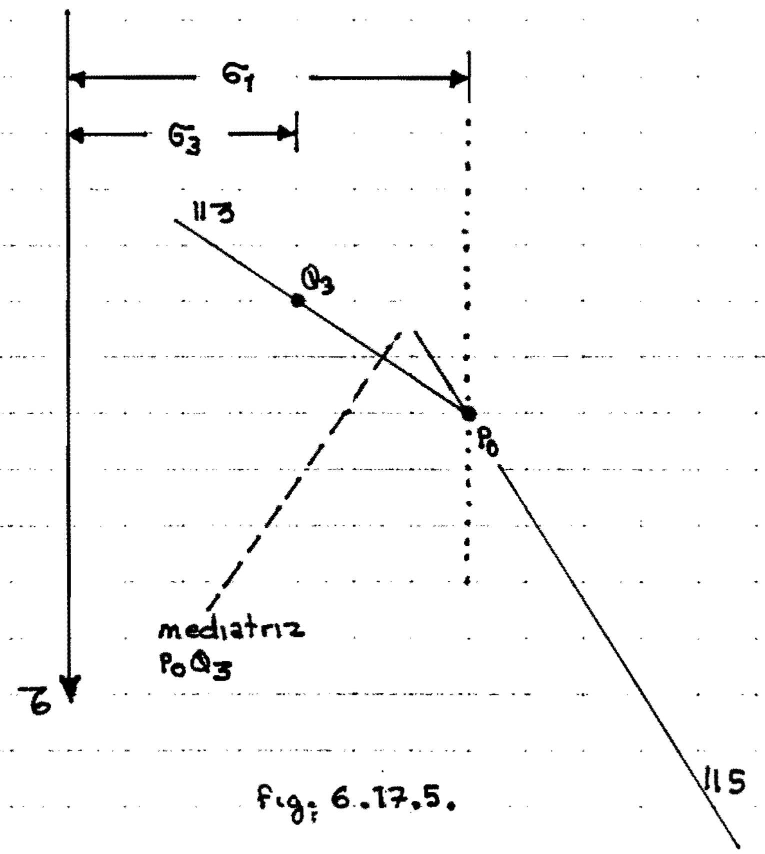


fig. 6.17.5.

Para determinar el punto Q_5 solución, se efectuará mediante interpolación, eligiendo dos puntos Q_5' y Q_5'' arbitrarios, situados sobre la paralela a la dirección 5 trazada desde P_0, y determinando para cada uno de ellos la tensión tangencial τ_{56}' y τ_{56}'' que les corresponde. Puede adoptarse como Q_5' el polo P_0 (fig. 6.17.6).

La interpolación se efectua en fig. 6.14.7, en la cual se busca el punto Q_5 que tendrá como tensión tangencial τ_{56}.

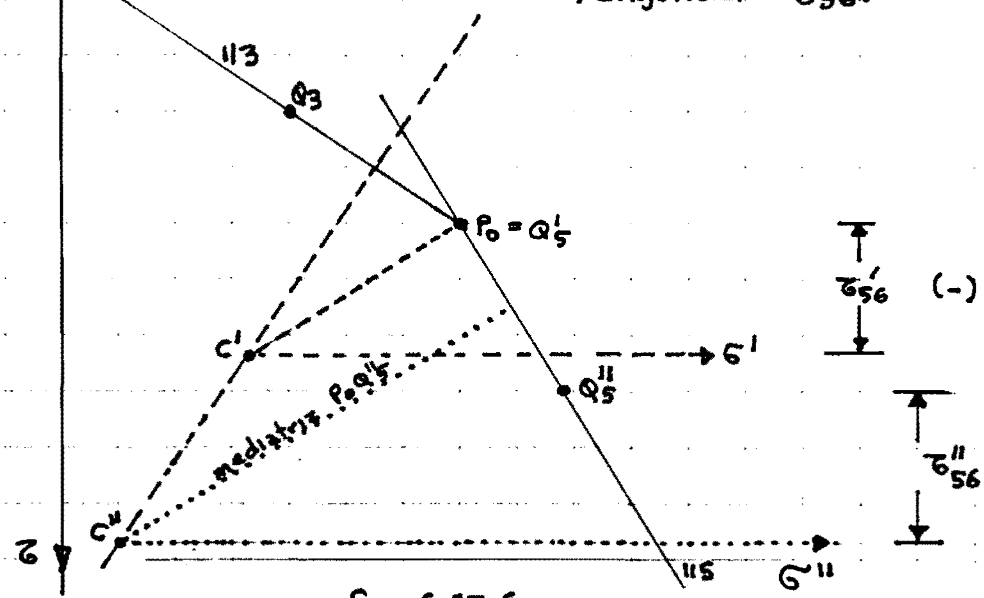


fig. 6.17.6.

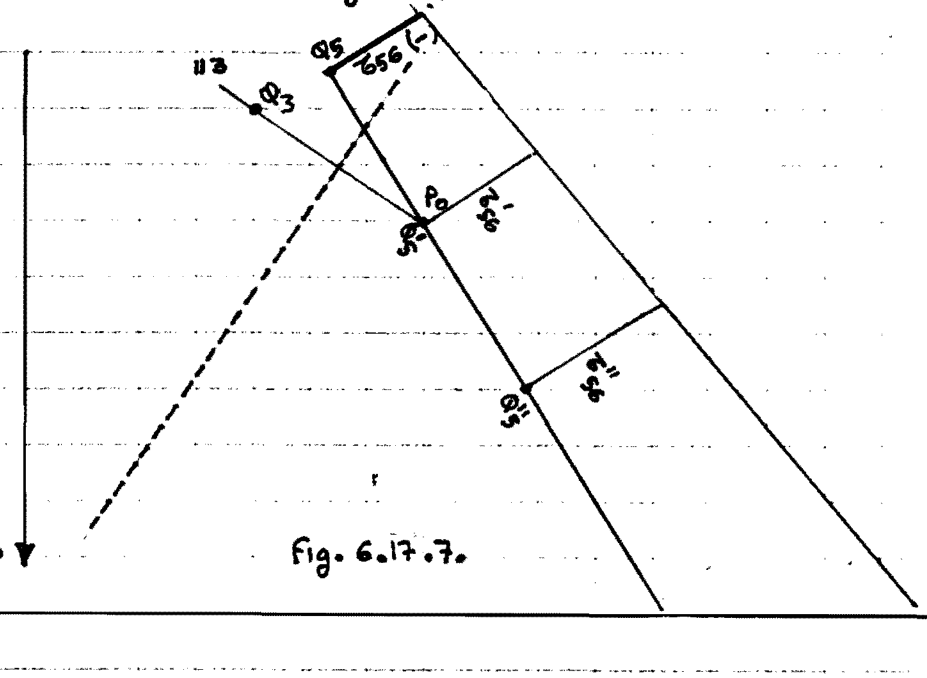


fig. 6.17.7.

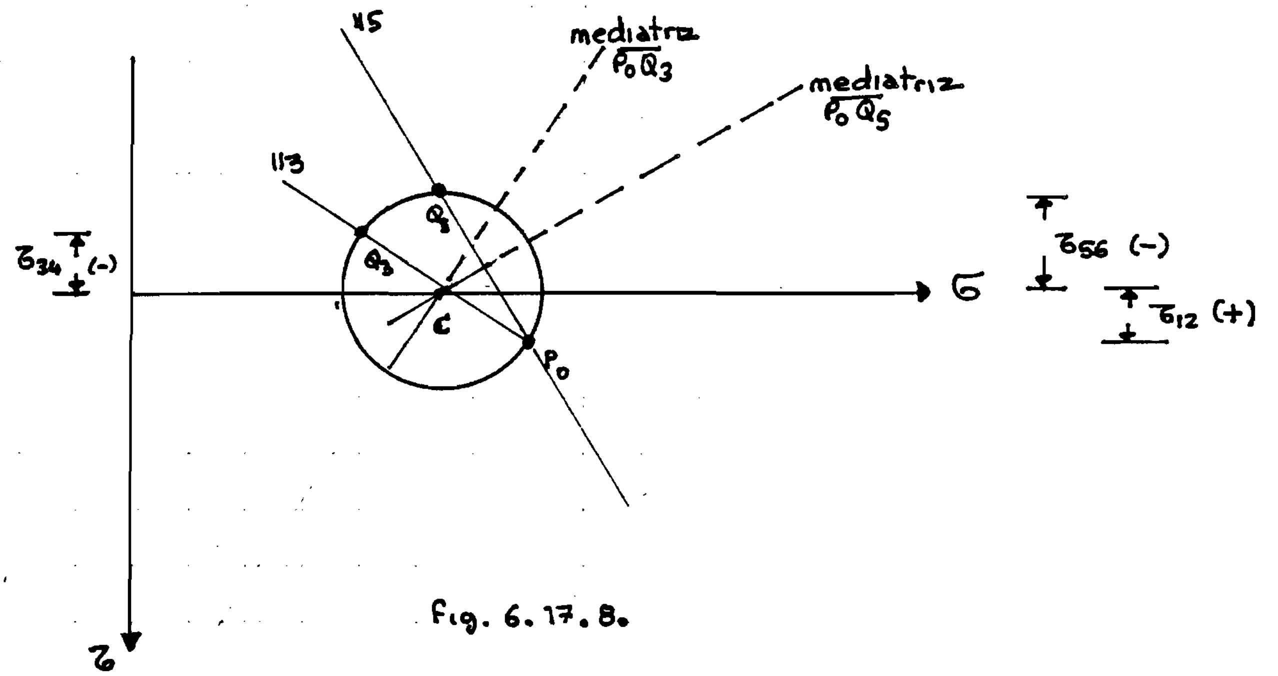


fig. 6.17.8.

Conocido el punto Q_5, se traza la mediatriz $\overline{P_0Q_5}$, y en el punto de corte con la mediatriz de $\overline{P_0Q_3}$ tendremos el centro C del círculo, y punto de paso del eje de abscisas σ. (Debemos verificar que la distancia de Q_5 a σ, es τ_{56}.)

Conocido C y tres puntos de paso P_0, Q_3 y Q_5 es inmediato el trazado gráfico del círculo, y la obtención de las tensiones en cualquier superficie.

Las ordenadas de Q_3 y P_0, nos proporcionarán las tensiones tangenciales τ_{34} y τ_{12} respectivamente.

<u>CASO-5</u> Adoptaremos como Y, una de las direcciones según las cuales actua una de las tensiones tangenciales conocidas, por ejemplo la dirección 4, en cuyo caso la 3 será el eje X.

Para el trazado del círculo de Mohr, adoptaremos como eje de abscisas σ la dirección 3 y como eje de ordenadas τ, la dirección 4.

Para poder situar el punto P_0, prescindiremos de trazar en esta ocasión el eje de ordenadas τ

Trazaremos el eje de abscisas σ, paralelo a 3, y otra recta paralela distante de la misma en τ_{34}, de la que elegiremos arbitrariamente un punto que simbolizaremos por P_0.

Desde P_0, trazaremos una paralela a la dirección 5, y simbolizaremos por Q_5 el punto que situado sobre dicha recta tenga como ordenada τ_{56}

Los puntos P_0 y Q_5 son puntos de paso del círculo de Mohr, por lo que su centro se encontrará en la intersección de la mediatriz del segmento $\overline{P_0 Q_5}$ y el eje de abscisas σ.

Conocido el centro C puede trazarse el círculo de Mohr.

Si desde P_0 se traza una paralela a la dirección 1, esta cortará al círculo en un punto Q_1.
El eje de ordenadas τ será tal, que Q_1 tenga como abscisa el valor σ_1, con lo cual, tanto los ejes como el círculo habrán quedado plenamente determinados.

Las abscisas de los puntos P_0 y Q_5 serán respectivamente σ_3 y σ_5, en tanto que la ordenada de Q_1 proporciona el valor de τ_{12}

En la fig. 6.17.9. se desarrolla la solución expuesta.

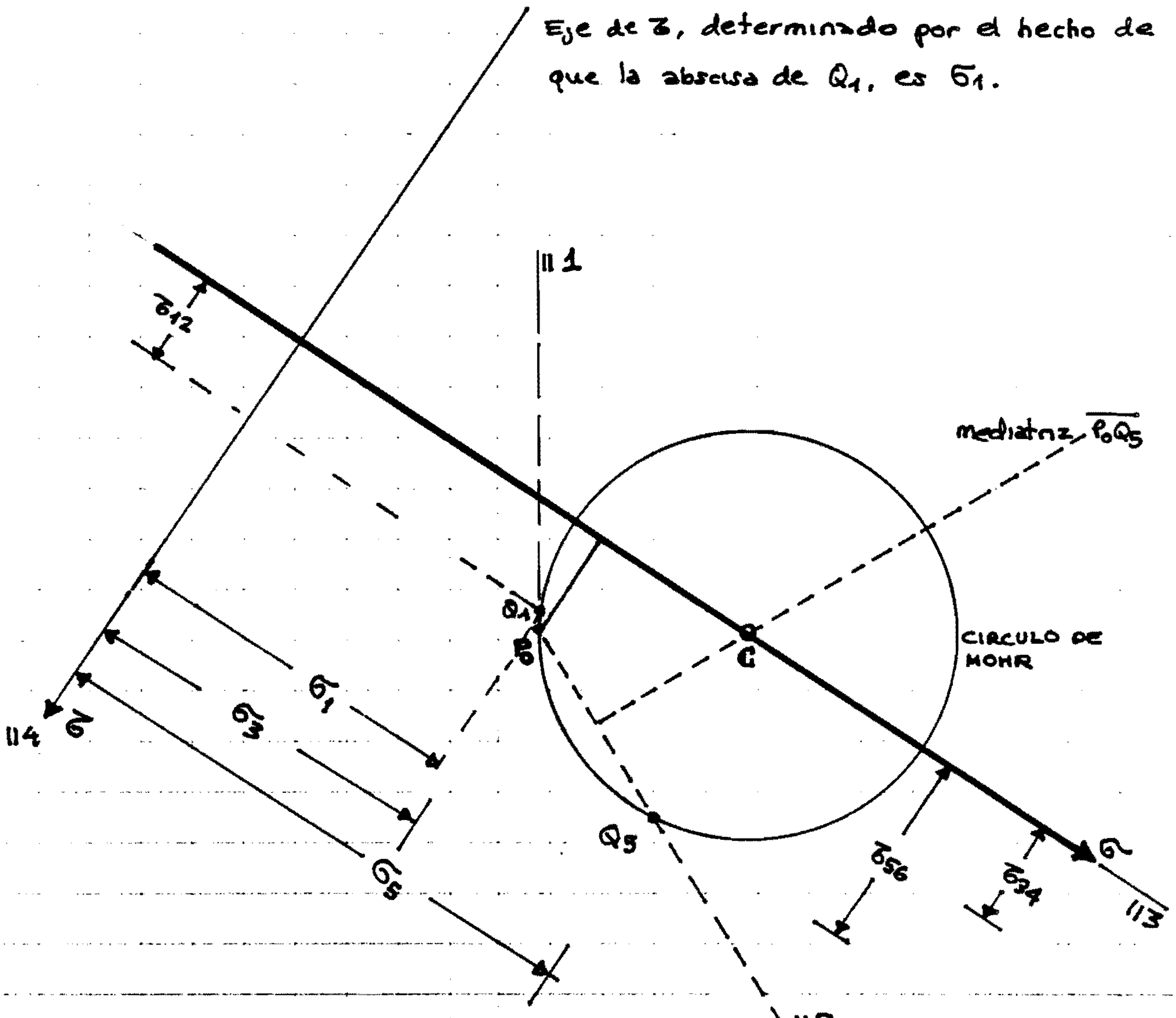

Eje de τ, determinado por el hecho de que la abscisa de Q_1, es σ_1.
II 1
σ_{12}
mediatriz $\overline{P_0Q_5}$
Q_{12}
P_0
C
CIRCULO DE MOHR
σ_1
σ_3
σ_5
II4
τ
Q_5
σ_{56}
σ_{34}
σ
II3
II5

fig. 6.17.9.

6.18. MOVIMIENTOS QUE SE PRODUCEN A CAUSA DE LAS DEFORMACIONES.

Sea una viga ménsula, y apliquemosla en una sección intermedia B, una carga concentrada P, tal como se indica en la fig. 6.18.1.

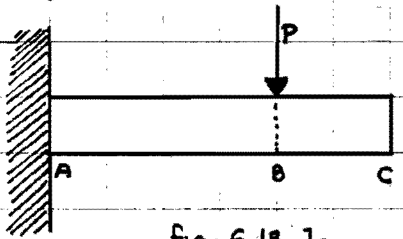


fig. 6.18.1.

Caso de que consideremos despreciable el peso propio de la viga, NO SE PRODUCIRÁN SOLICITACIONES EN LAS SECCIONES SITUADAS ENTRE LA B Y LA EXTREMA (C), puesto que en las mismas, la RESULTANTE o el MOMENTO RESULTANTE de las acciones que actuan a un lado de ellas es evidentemente nulo, al no existir tales acciones.

Si no existen SOLICITACIONES, las tensiones deben ser nulas hecho que en efecto nos confirma la práctica, (o al menos, una vez que nos alejemos suficientemente de la sección B), y de esta situación puede intuirse que tampoco deberán producirse DEFORMACIONES, si pensamos que estas siempre deben estar íntimamente ligadas con las TENSIONES, y no obstante la DEFORMACIÓN GENERAL DEL SÓLIDO, PRODUCIRÁ MOVIMIENTOS EN LA ZONA DE DEFORMACIONES Y TENSIONES NULAS, lo que nos sugiere la independencia entre DEFORMACIÓN Y CORRIMIENTOS O MOVIMIENTOS PRODUCIDOS POR EL PROCESO DE DEFORMACIÓN DE UN SÓLIDO.

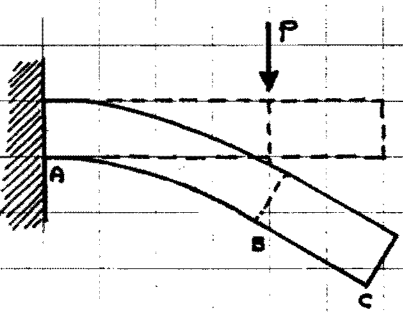


fig. 6.18.2.

La inexistencia de DEFORMACIONES en la zona BC, puede evidenciarse dibujando un círculo en un punto cualquiera de la misma, y trazando dos diámetros ortogonales entre sí.

El círculo no pederá su condición, una vez completado el proceso de la deformacioó, manteniendo el mismo radio que originalmente, lo que implica la AUSENCIA DE DEFORMACIONES, pero podrá observarse que además de haber sufrido una TRASLACIÓN experimenta una ROTACIÓN, pues los dos diámetros ortogonales habrán cambiado de orientación tal como se indica en la fig. 6.18.3. Así pues, la zona BC experimenta como consecuencia del proceso general de la DEFORMACIÓN DE LA VIGA dos TIPOS DE MOVIMIENTOS, que son:

- * DESPLAZAMIENTO MECÁNICO
- * ROTACIÓN

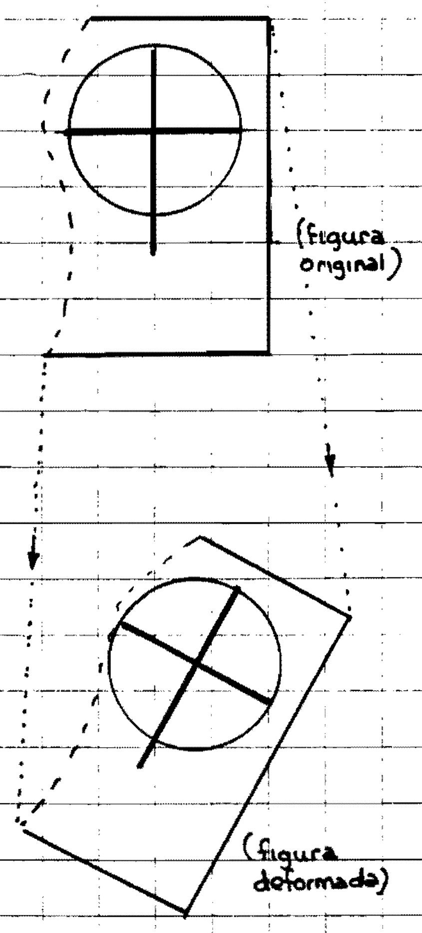
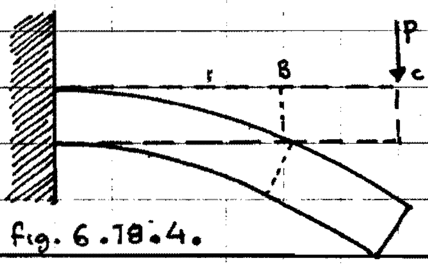


fig. 6.18.3.

Si en vez de aplicar la fuerza puntual P en la sección B, lo efectuasemos en la sección extrema C, será evidente tal como ya se estudió, que todas las secciones de la viga estarán en tal caso solicitadas, y en consecuencia, deberán existir tensiones, y estas generarán deformaciones en todos los puntos de la viga, por lo que previsiblemente el círculo dejará de serlo en la pieza deformada, y en efecto así es, puesto que tal como se observa en la figura 6.18.5. se transforma en una ELIPSE.

En cuanto a los DIAMETROS ORTOGONALES, estos habrán dejado de serlo, (salvo una cierta pareja que seguirán siendo perpendiculares, en cuyo caso se dice que son DIÁMETROS PRINCIPALES, por indicar lo que conoceremos como las DIRECCIONES PRINCIPALES).



(La zona BC ahora estará curvada a diferencia de lo que acontecia en 6.18.2.)

fig. 6.18.4.

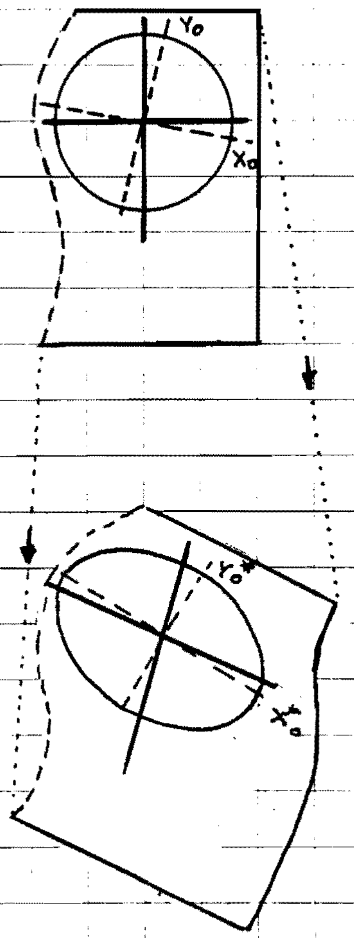


fig. 6.18.5.

Si la elipse se traslada sobre el circulo, haciendo coincidir los DIAMETROS PRINCIPALES X_o, Y_o con los deformados $X_o^* Y_o^*$, que siguen siendo ortogonales, podremos observar los movimientos que sufren los puntos del círculo no atribuibles a giros y traslaciones mecánicas, sino exclusivamente al PROCESO DE LA DEFORMACION.

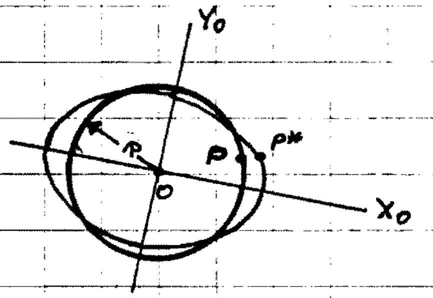


fig. 6.18.6.

El movimiento de un punto P a otro P* lógicamente aumentará con el radio R del círculo utilizado, por lo que si deseamos determinar el grado de deformación existente, utilizaremos el cociente:

$$\varepsilon = \frac{PP^*}{R} = \frac{PP^*}{OP}$$

El cual sería evidentemente nulo, en el caso de la fig. 6.18.3., puesto que P y P* serían coincidentes, con lo que verificamos que en efecto el cociente propuesto es indicativo de la deformación existente en O, según la dirección OP.

Al cociente $\frac{\Delta L}{L}$ que hemos propuesto simbolizarlo por ε se le denomina DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL

6.19. LA MATRIZ DE DEFORMACION

Conceptualmente se acaba de analizar lo que entendemos por:

- * TRASLACIÓN MECÁNICA
- * ROTACIÓN
- * DEFORMACIÓN PROPIAMENTE DICHA

y a continuación vamos a pretender el ser capaces de determinar la DEFORMACIÓN EXISTENTE en el entorno de un cierto punto, en el supuesto de que se conociesen los movimientos que experimentan cada uno de los puntos del sólido, es decir, dado un punto P, conociesemos el vector traslación $\vec{t}$ que le corresponde, indicativo del movimiento $\overrightarrow{PP^*}$ que genera el proceso general de la deformación (en el cual se incluyen los tres factores indicados al principio, traslación, rotación y deformación propiamente dicha).

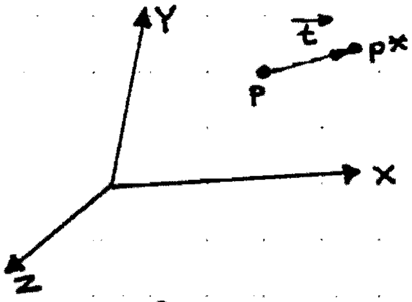


Fig. 6.19.1.

$$P(x, y, z) \longrightarrow \vec{t}(t_x, t_y\, t_z) \equiv \overrightarrow{PP^*}$$

Para que sea posible esta asociación de que a cada P, un vector traslación $\vec{t}$, es necesario que conozcamos las funciones siguientes:

$$\begin{cases} t_x = f_1(x, y, z) \\ t_y = f_2(x, y, z) \\ t_z = f_3(x, y, z) \end{cases} \qquad \text{(for. 6.19.1.)}$$

Por convenio establecido de forma casi unánime, se simbolizan las componentes del vector traslación $\vec{t}$ por (u, v, w), así pues:

$$\begin{aligned} t_x &= \boxed{u = f_1(x, y, z)} \\ t_y &= \boxed{v = f_2(x, y, z)} \\ t_z &= \boxed{w = f_3(x, y, z)} \end{aligned} \qquad (6.19.2.)$$

Supondremos que las funciones f_1, f_2 y f_3 son conocidas, y por lo tanto, nos será factible conocer las componentes del VECTOR CORRIMIENTO $\overrightarrow{PP^*}$, (u, v, w), para todo punto P de coordenadas (x, y, z).

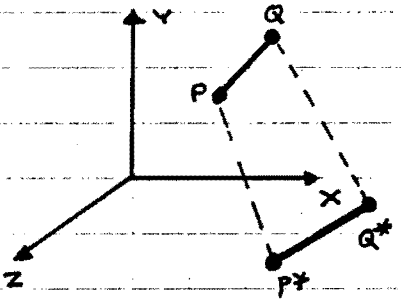


fig 6.19.3.

Vamos a plantearnos el problema de determinar la deformación que experimenta un cierto segmento $\overline{PQ}$ como consecuencia de las deformaciones, al transformarse en otro $\overline{P^*Q^*}$

Si las coordenadas de P son (x, y, z) las de P^* se obtendrán adicionando las componentes del VECTOR CORRIMIENTO, y en consecuencia serán $(x+u,\ y+v,\ z+w)$

$$P \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad P^* \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad (6.19.3.)$$

Simbolicemos las proyecciones del segmento $\overline{PQ}$ por (dl_x, dl_y, dl_z), en cuyo caso las coordenadas del punto Q, serán:

$$Q \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} \qquad Q^* \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{bmatrix} \qquad (6.19.4.)$$

El vector corrimiento $\overrightarrow{QQ^*}$ (u_Q, v_Q, w_Q) permite calcular las coordenadas del punto deformado Q^* tal como se ha indicado en (6.19.4.), pero lógicamente:

$$u_Q = u + du \qquad v_Q = v + dv \qquad w_Q = w + dw \qquad (6.19.5.)$$

Y recordando como se diferencia una función de varias variables independientes, podremos establecer que:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dl_x + \frac{\partial u}{\partial y} dl_y + \frac{\partial u}{\partial z} dl_z$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dl_x + \frac{\partial v}{\partial y} dl_y + \frac{\partial v}{\partial z} dl_z$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dl_x + \frac{\partial w}{\partial y} dl_y + \frac{\partial w}{\partial z} dl_z$$

$$\begin{bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{bmatrix} \quad (6.19.6.)$$

Y ello permite establecer de acuerdo con (6.19.4):

$$Q^* \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} \quad (6.19.7.)$$

Y consecuentemente, las proyecciones del segmento P^*Q^* serán de acuerdo con (6.19.4) y (6.19.7):

$$\overline{P^*Q^*} \quad \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dl_x^* \\ dl_y^* \\ dl_z^* \end{bmatrix} \quad (6.19.8.)$$

Lo que simbolizaremos por: $[dl^*] = [dl] + [\Omega][dl]$ (6.19.9.)

Si definimos un versor $\vec{n}$, según la dirección que definen los puntos P y Q, se verificará:

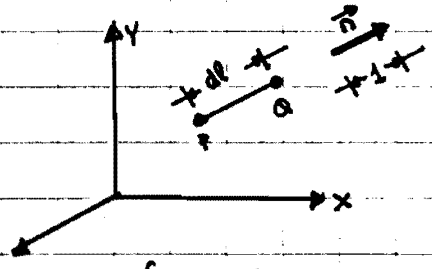


fig. 6.19.4.

$$[dl] = dl\,[n]$$

Sustituyendo en (6.19.9):

$$[dl^*] = dl\left([n] + [\Omega][n]\right) \quad (6.19.10.)$$

Si efectuamos el producto escalar:

$\vec{dl^*} \cdot \vec{dl^*}$ obtendremos el módulo del segmento deformado $\overline{P^*Q^*}$ elevado al cuadrado, por definición de producto escalar,

$\vec{dl^*} \cdot \vec{dl^*} = dl^{*2}$ y es lógico que comparando este valor con el dl^2, podremos deducir el acortamiento o alargamiento que experimenta $\overline{PQ}$ al transformarse en P^*Q^*.

Obtengamos a que equivale $\vec{dl^*}\cdot\vec{dl^*}$:

$$dl^{*2} = \vec{dl^*}\cdot\vec{dl^*} = [dl^*]^T[dl^*] = dl^2\left([n]^T + [n]^T[\Omega]^T\right)\left([n] + [\Omega][n]\right)$$

Desarrollando:

$$dl^{*2} = dl^2\,[n]^T\left([I]+[\Omega]^T\right)\left([I]+[\Omega]\right)[n]$$

$$\left(\frac{dl^*}{dl}\right)^2 = [n]^T\left([I] + [\Omega]^T[\Omega] + [\Omega]^T + [\Omega]\right)[n]$$

En el campo de las pequeñas deformaciones: $[\Omega]^T[\Omega] \to [0]$ por lo que:

$$\left(\frac{dl^*}{dl}\right)^2 = [n]^T\left([I] + [\Omega]^T + [\Omega]\right)[n]$$

$$\left(\frac{\Delta dl + dl}{dl}\right)^2 = [n]^T[n] + [n]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n]$$

Puesto que $[n]^T[n] = \vec{n}\cdot\vec{n} = n^2 = 1$, resultará:

$$\left(\frac{\Delta dl}{dl} + 1\right)^2 = 1 + [n]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n]$$

El cociente $\Delta dl/dl$ se simboliza por ε_n, y expresa la deformación unitaria que experimenta un segmento de longitud dl, por lo qué:

$$(\varepsilon_n + 1)^2 = 1 + [n]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n]$$

$$\varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_n + \cancel{1} = \cancel{1} + [n]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n]$$

Por el principio de la pequeñez de las deformaciones, puede eliminarse ε_n^2, y ello nos permite establecer:

$$\varepsilon_n = [n]^T\left(\frac{1}{2}\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)\right)[n]$$

A la matriz: $\frac{1}{2}\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)$

se la denomina MATRIZ DE DEFORMACIÓN, y se la puede simbolizar por $[D]$.

Resumiendo:

$$\varepsilon_n = [n]^T [D] [n]$$

$$[D] = \frac{1}{2}\left([\Omega]^T + [\Omega]\right) \qquad (6.19.11.)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Pero vamos a comprobar que mediante la matriz $[D]$ no sólo podemos calcular las DEFORMACIONES UNITARIAS que se producen en un cierto punto P, según un dirección definida por un versor $\vec{n}$, sino también las variaciones angulares que experimentan los ángulos definidos por dos versores $\vec{n}$ y $\vec{m}$.

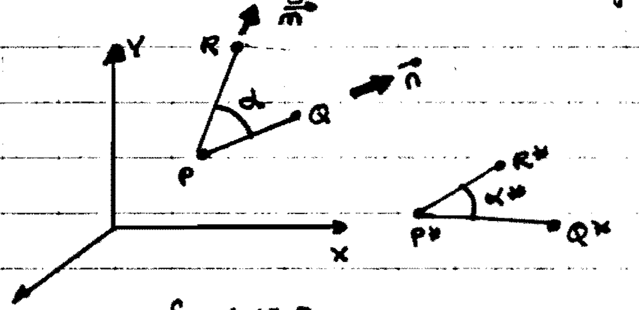


fig 6.19.5.

$$\alpha^* = \alpha - \underbrace{\gamma_{nm}}_{\text{VARIACIÓN ANGULAR}}$$

Sabemos que: $[dl^*_{PQ}] = dl_{PQ}\left([n] + [\Omega][n]\right)$

y análogamente:

$$[dl^*_{PR}] = dl_{PR}\left([m] + [\Omega][m]\right)$$

Si efectuamos el producto escalar: $\vec{dl}^*_{PQ} \cdot \vec{dl}^*_{PR}$, obtendremos $dl^*_{PQ} \cdot dl^*_{PR} \cdot \cos\alpha^*$, y ello a su vez equivaldrá a:

$$\vec{dl}^*_{PQ} \cdot \vec{dl}^*_{PR} = dl^*_{PQ} \cdot dl^*_{PR} \cos\alpha^*$$

$$[dl^*_{PQ}]^T [dl^*_{PR}] = dl^*_{PQ}\, dl^*_{PR} \cos\alpha^*$$

$$dl_{PR} \cdot dl_{PQ}\, [m]^T\left([I] + [\Omega]^T\right)\left([I] + [\Omega]\right)[n] = dl^*_{PQ}\, dl^*_{PR} \cos\alpha^*$$

$$[m]^T \cdot [n] + [m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega] + [\Omega]^T[\Omega]\right)[n] = \frac{dl^*_{PQ}}{dl_{PQ}}\,\frac{dl^*_{PR}}{dl_{PR}} \cos\alpha^*$$

$[\Omega]^T \cdot [\Omega] \rightarrow [0]$ por el principio de la pequeñez de las deformaciones

El producto $[m]^T[n]$ equivale a $\vec{m} \cdot \vec{n}$, y ello a $\cos\alpha$, en consecuencia:

$$\cos\alpha + [m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] = \left(\frac{\Delta dl_{PQ} + dl_{PQ}}{dl_{PQ}}\right)\left(\frac{\Delta dl_{PR} + dl_{PR}}{dl_{PR}}\right) \cdot \cos\alpha^*$$

$$[m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] = (\varepsilon_n + 1)(\varepsilon_m + 1)\cos\alpha^* - \cos\alpha$$

$$[m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] = (\cancel{\varepsilon_n \varepsilon_m} + \varepsilon_n + \varepsilon_m + 1)\cos(\alpha - \gamma_{nm}) - \cos\alpha$$

$$[m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] = (\varepsilon_n + \varepsilon_m + 1)\left(\cos\alpha\cos\gamma_{nm} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma_{nm}\right) - \cos\alpha$$

Aplicando nuevamente el principio de la pequeñez de las deformaciones, se verificará:

$$\cos\gamma_{nm} \longrightarrow 1$$
$$\operatorname{sen}\gamma_{nm} \longrightarrow \gamma_{nm}$$

Sustituyendo:

$$[m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] = (\varepsilon_n + \varepsilon_m + 1)\left(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\,\gamma_{nm}\right) - \cos\alpha$$

$$[m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] = \cos\alpha\,(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + \cancel{\operatorname{sen}\alpha\,\gamma_{nm}(\varepsilon_n + \varepsilon_m)} + \operatorname{sen}\alpha\,\gamma_{nm}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left([m]^T\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)[n] - \cos\alpha\,(\varepsilon_n + \varepsilon_m)\right)$$

$$\boxed{\gamma_{nm} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(2\,[m]^T[D][n] - \cos\alpha\,(\varepsilon_n + \varepsilon_m)\right)} \quad (6.19.12.)$$

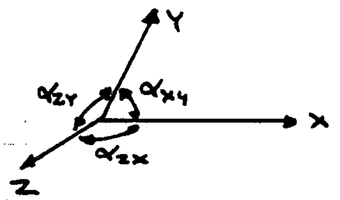
Si $\vec{n}$ y $\vec{m}$ son ortogonales ($\alpha = 90$) $\Rightarrow$ $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{sen}\alpha = 1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\gamma_{nm}}{2} = [m]^T[D][n]} \quad (6.19.13.)$$

En el caso de que el sistema de referencia no sea ortogonal, es preciso determinar la matriz:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha_{xy} & \cos\alpha_{xz} \\ \cos\alpha_{xy} & 1 & \cos\alpha_{yz} \\ \cos\alpha_{xz} & \cos\alpha_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$



Y la matriz [D] quedará definida en cada caso, de acuerdo con el cuadro siguiente:

[D]	GRANDES DEFORMACIONES	PEQUEÑAS DEFORMACIONES
BASE NO ORTOGONAL	$\frac{1}{2}\left([\Omega]^T[R][\Omega]+[\Omega]^T[R]+[R][\Omega]\right)$	$\frac{1}{2}\left([\Omega]^T[R]+[R][\Omega]\right)$
BASE ORTOGONAL	$\frac{1}{2}\left([\Omega]^T[\Omega]+[\Omega]^T+[\Omega]\right)$	$\frac{1}{2}\left([\Omega]^T+[\Omega]\right)$

(en BASE ORTOGONAL $[R]=[I]$, y en pequeñas deformaciones: $[\Omega]^T[\Omega]\rightarrow[0]$)

permite establecer:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta L_n}{L_n} = \sqrt{2[n]^T[D][n]+1}\ -1$$

en GRANDES DEFORMACIONES

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta L_n}{L_n} = [n]^T[D][n]$$

En pequeñas DEFORMACIONES

$$\gamma_{nm} = \alpha - \arccos\left(\frac{2[m]^T[D][n]+\cos\alpha}{(1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_m)}\right)$$

en grandes DEFORMACIONES

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(2[m]^T[D][n]-\cos\alpha(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\right)$$

en pequeñas DEFORMACIONES

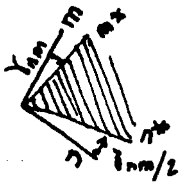
6.20. CARACTER TENSORIAL DE LAS DEFORMACIONES

Se acaba de exponer que siempre que las deformaciones sean suficientemente pequeñas, LA DEFORMACION UNITARIA que se produce en un punto P, según una cierta dirección n, puede obtenerse mediante la expresión:

$$\varepsilon_n = [n]^T [D] [n]$$

y la disminución de un ángulo recto, que definen dos direcciones n y m por el producto matricial:

$$\frac{1}{2} \gamma_{nm} = [m]^T [D] [n]$$



Lo que son la FORMA CUADRÁTICA Y BILINEAL asociadas a un tensor de matriz asociada [D] en BASE ORTOGONAL, por lo tanto:

LA MATRIZ [D] puede considerarse COMO LA MATRIZ ASOCIADA A UN TENSOR, que denominaremos de DEFORMACIÓN, y consecuentemente, al mismo se le aplicarán los métodos propios de los tensores para:

* CAMBIO DEL SISTEMA DE REFENCIA
* VALORES PRINCIPALES
* DIRECCIONES PRINCIPALES
* CÍRCULO DE MOHR
* ELIPSOIDE DE LAMÉ
* CUÁDRICA ASOCIADA

La forma bilineal es pues, UN MEDIO DE LA VARIACIÓN ANGULAR que sufre un ángulo recto, y por lo tanto la variación angular que sufre cada una de las aristas que lo delimitan, en tanto que la forma cuadrática es la VARIACIÓN UNITARIA DE LONGITUD, según una dirección dada.

LA MATRIZ [D] de ahora en adelante la simbolizaremos por $[T_D]$

En el caso de base no ortogonal, hemos indicado que:

$$\varepsilon_n = [n]^T [D] [n] \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{nm} = [m]^T [D] [n]$$

siendo $[D]$ en el campo de las pequeñas deformaciones:

$$[D] = \frac{1}{2}\left([\Omega]^T [R] + [R][\Omega] \right)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha_{xy} & \cos\alpha_{xz} \\ \cos\alpha_{xy} & 1 & \cos\alpha_{yz} \\ \cos\alpha_{xz} & \cos\alpha_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

Y por otro lado, sabemos que la forma bilineal y cuadrática asociadas a un tensor en dichas bases, es:

$$\Psi_{nn} = [n]^T [R] [T_D] [n]$$

$$\Psi_{nm} = [m]^T [R] [T_D] [n]$$

Lo que nos indica que si asociamos: $\varepsilon_n \longleftrightarrow \Psi_{nn}$, $\frac{1}{2}\gamma_{nm} \longleftrightarrow \Psi_{nm}$

la matriz asociada al tensor deberá ser:

$$[D] \longleftrightarrow [R]\cdot[T_D]$$

$$\Downarrow$$

$$[T_D] = [R]^{-1}[D]$$

$$\boxed{[T_D] = \frac{1}{2}\left([R]^{-1}[\Omega]^T[R] + [\Omega] \right)} \quad (6.20.1.)$$

La matriz definida por (6.20.1) coincide evidentemente con la matriz $[D]$ en base ortogonal

La matriz $[T_D]$ asociada al TENSOR DE DEFORMACIÓN, es a la que debe aplicarse la teoría general de los tensores, y no a la matriz $[D]$, cuando el sistema de referencia sea NO ORTOGONAL

6.21. SIGNIFICADO DEL VECTOR ASOCIADO POR EL TENSOR DE DEFORMACION

Supongamos que en el sólido, en un punto P, en el que por derivación de las funciones de corrimiento, se obtiene la matriz [D], (es decir la matriz [T_D]), definimos mediante dos versores $\vec{n}$ y $\vec{m}$, dos direcciones ortogonales n y m

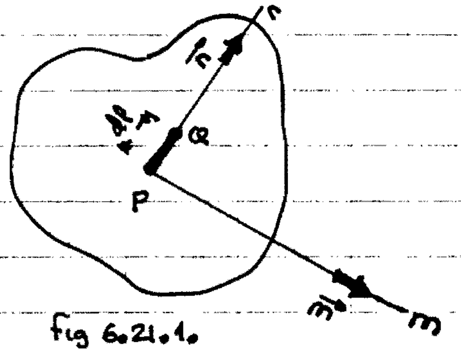


fig 6.21.1.

Si escogemos un punto arbitrario sobre la recta n, y sea este el punto Q, distante un dl de P, resultará:

$[pq] = dl \cdot [n]$ dado el caracter de vector unitario de $\vec{n}$

El punto Q se transformará como consecuencia exclusiva de las DEFORMACIONES PROPIAMENTE DICHAS, en un punto Q^*, si P y P^* los hacemos coincidir eliminando las traslaciones y giros mecánicos.

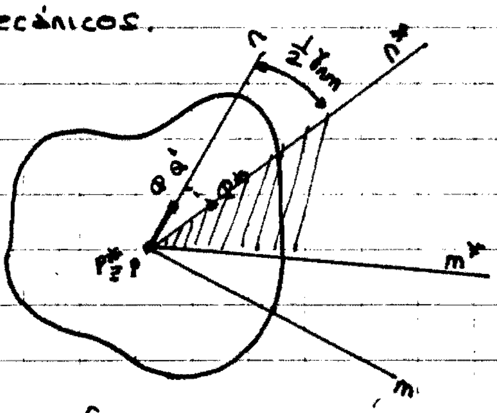


fig 6.21.2

Si se proyecta el punto Q^* sobre n, se obtendrá un punto Q', siendo $\overline{QQ'}$ el alargamiento del segmento $\overline{PQ}$ al transformarse en $\overline{P^*Q^*}$

Dado que hemos definido como deformación unitaria longitudinal al cociente:

$$\varepsilon_n = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{QQ'}}{dl}$$

resultará que: $\overline{QQ'} = dl \cdot \varepsilon_n$

Sustituyendo ε_n por la expresión que lo determina:

$$\overline{QQ'} = dl\ [n]^T [D][n]$$

$$\overline{QQ'} = [n]^T [D][pq] \qquad (6.21.1.)$$

Por otro lado: $\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{Q'Q^*}{\overline{PQ'}} = \frac{\overline{Q'Q^*}}{\overline{PQ}+\overline{QQ'}} = \frac{\overline{Q'Q^*}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{Q'Q^*}}{dl}$

$$\Downarrow$$

$$\overline{Q'Q^*} = dl\,\frac{1}{2}\gamma_{nm}$$

y sustituyendo $\frac{1}{2}\gamma_{nm}$ por la expresión a que equivale:

$$\overline{Q'Q^*} = dl\,[m]^T[D][n] = [m]^T[D][pq] = \overline{Q'Q^*} \qquad (6.21.2.)$$

Es evidente que:

$$\left.\begin{aligned} \overline{QQ'} &= \vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ^*} = [n]^T[PQ^*] \\ \overline{Q'Q^*} &= \vec{m}\cdot\overrightarrow{PQ^*} = [m]^T[PQ^*] \end{aligned}\right\} (6.21.3)$$

Comparando (6.21.1), (6.21.2) con (6.21.3.), se deduce que:

$$[PQ^*] = [D]\cdot[pq] \quad \Rightarrow \quad [\delta_Q] = [D][pq]$$

Por lo tanto, si se multiplica la MATRIZ DEFORMACIÓN POR EL VECTOR POSICIÓN DE UN PUNTO Q, SE OBTIENE EL VECTOR CORRIMIENTO DE DICHO PUNTO, INDICATIVO DEL MOVIMIENTO QUE EL MISMO EXPERIMENTA COMO CONSECUENCIA DE LA DEFORMACIÓN PROPIAMENTE DICHA, EXCLUIDOS LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MECÁNICOS.

6.22. SIGNIFICADO DE LOS ELEMENTOS QUE INTEGRAN LA MATRIZ ASOCIADA AL TENSOR DE DEFORMACIÓN.

Para simplificar el análisis que a continuación vamos a efectuar, nos limitaremos a analizar el significado de los elementos de una matriz $[T_0]$ definida en un plano, la cual simbolizaremos mediante:

$$[T_0] = \begin{bmatrix} T_{0xx} & T_{0xy} \\ T_{0yx} & T_{0yy} \end{bmatrix} \quad (6.22.1.)$$

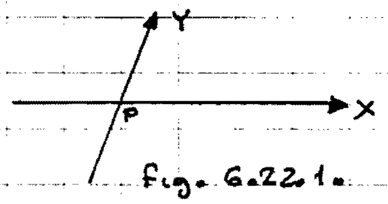


fig. 6.22.1.

El tensor de deformación se supondrá calculado para un punto P, el cual vamos a considerar el centro de un paralelogramo de lados paralelos a los ejes de referencia.

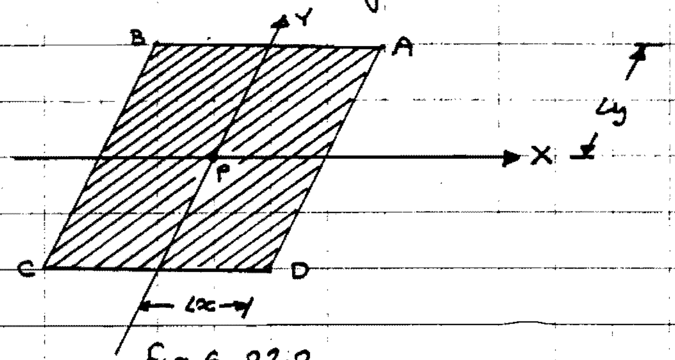


fig. 6.22.2.

Supondremos que sólo es NO NULO UN ELEMENTO de la citada matriz, y sabiendo que aplicando a la misma el vector posición $\overrightarrow{PQ}$, se obtiene el vector corrimiento $\overrightarrow{QQ^*}$, (tal como se ha expuesto en (6.21.)), podremos deducir la forma en que se deformará el PARALELOGRAMO, y ello nos conducirá a determinar el significado del ELEMENTO SUPUESTO NO NULO.

Elijamos el T_{0xx} como elemento no nulo, y anulemos el resto, con lo cual la matriz es:

$$\begin{bmatrix} T_{0xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos el vector posición de A, cuyas componentes serán $\overrightarrow{PQ}\,(L_x, L_y)$, obtendremos el vector corrimiento AA^*

$$\begin{bmatrix} AA^*_x \\ AA^*_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{D_{xx}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{D_{xx}} \cdot l_x \\ 0 \end{bmatrix}$$ lo que nos permite determinar A^*

Si repetimos el proceso, el PARALELOGRAMO DEFORMADO $A^*B^*C^*D^*$ será:

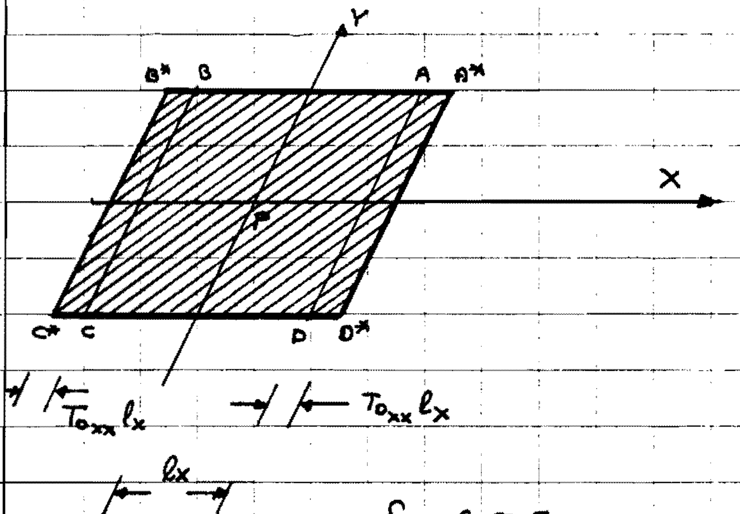


fig. 6.22.3.

Y puede observarse que la dilatación unitaria que experimenta el paralelogramo es:

$$\varepsilon_x = \frac{T_{D_{xx}} l_x}{l_x} = \boxed{T_{D_{xx}} = \varepsilon_x}$$
(6.22.1.)

Por lo que el elemento $T_{D_{xx}}$ INDICA LA DEFORMACIÓN UNITARIA SEGÚN X

Así pues: $\boxed{\text{LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL INDICAN LA DEFORMACIÓN UNITARIA SEGÚN LA DIRECCIÓN ASOCIADA A LA CORRESPONDIENTE FILA Y COLUMNA.}}$

Estudiemos ahora el significado de $T_{D_{xy}}$, suponiendo que es el único elemento no nulo de la matriz del tensor de deformaciones, que será:

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{D_{xy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando la posición final de cada vértice, la figura deformada del PARALELOGRAMO será:

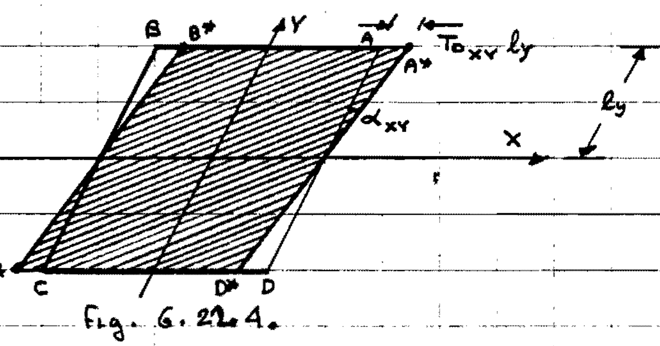


Fig. 6.22.4.

Donde se observa que unas ciertas aristas han sufrido una rotación, de ángulo:

$$\alpha_{xy} = \frac{T_{D_{xy}} l_y}{l_y} = \boxed{T_{D_{xy}} = \alpha_{xy}}$$
(6.22.2.)

Por lo que To_{XY} expresa la variación angular que experimenta las aristas Y

Si generalizamos a tres dimensiones, un término To_{ij} expresará la variación angular que experimenta la superficie jk, medida mediante una intersección con el plano ij

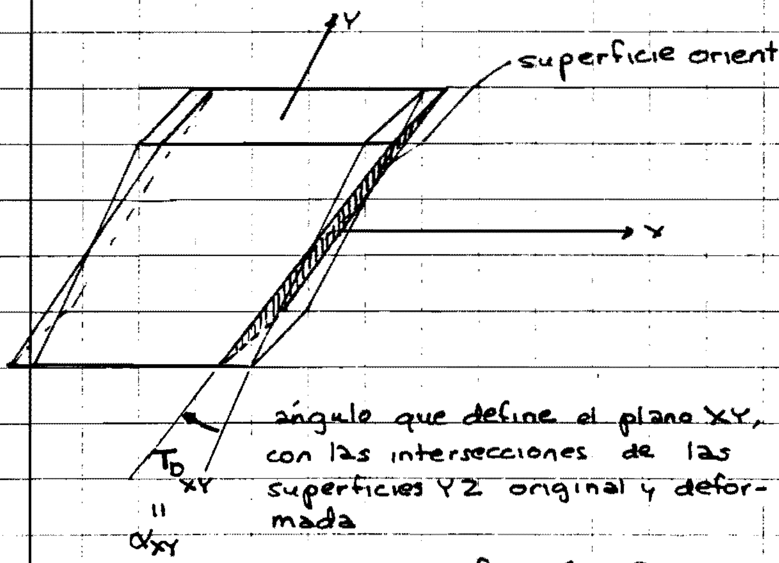


fig: 6.22.5.

Así pues:

> UN TÉRMINO To_{ij} ES UNA VARIACIÓN ANGULAR EN EL PLANO ij, QUE EXPERIMENTA UNA SUPERFICIE ORIENTADA SEGÚN jk.

Según lo expuesto, sobre la variación de ángulos rectos, si la base es ORTOGONAL $To_{ij} = To_{ji}$, pero si la base es NO ORTOGONAL $To_{ij} \neq To_{ji}$

Así pues:

$$[To] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \varepsilon_y & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOCIADA AL TENSOR DE DEFORMACIONES

(6.22.3.)

Si los ejes no son ortogonales $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$

Si los ejes son ortogonales $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, lo que implica que:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$$

siendo α_{ij} la variación angular que sufre una superficie paralela al plano coordenado jk, medida en el plano ij, en tanto que γ_{ij} es la variación angular total que experimentan las superficies orientadas según ik y jk

Recordando que: $[T_o] = \frac{1}{2}\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)$ en base ortogonal y deformaciones pequeñas

y que: $$[\Omega] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

resulta:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \alpha_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \alpha_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

(6.22.4.) $$\alpha_{yx} = \alpha_{xy} \qquad \alpha_{xz} = \alpha_{zx} \qquad \alpha_{zy} = \alpha_{yz}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \alpha_{xy} \qquad \frac{\gamma_{zx}}{2} = \alpha_{zx} \qquad \frac{\gamma_{yz}}{2} = \alpha_{yz}$$

(BASE ORTOGONAL Y DEFORMACIONES PEQUEÑAS)

Lo que también se suele expresar mediante el uso de un operador matricial, tal como a continuación indicamos:

(6.22.5.) $$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Los elementos ε_i son positivos cuando expresan alargamientos unitarios, y negativos si son indicativos de acortamientos unitarios.

Las variaciones angulares α_{ij} serán positivas, si observado el volumen de la figura 6.21.6. desde el 1er octante, los incrementos angulares corresponden a los encuentros de superficies que poseen como aristas las del contorno.

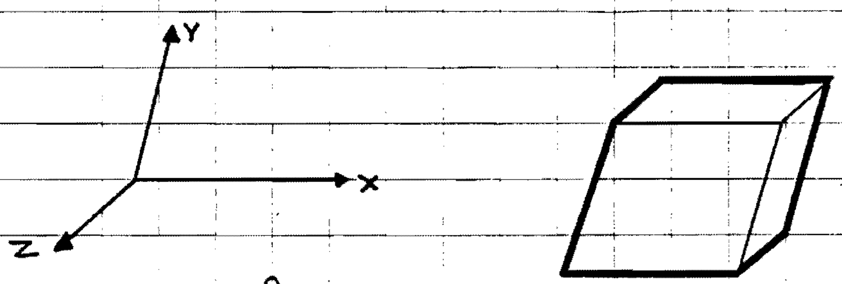


fig. 6.21.6.

Las aristas regruesadas son las que corresponden a ángulos que deben incrementarse, si todos los $\alpha_{ij} > 0$.

Según lo expuesto; el INVARIANTE LINEAL DEL TENSOR DE DEFORMACION, es en función de los corrimientos la expresión:

$$d_1^D = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \boxed{\operatorname{div} \vec{S} = d_1^D} \quad (6.21.6.)$$

Donde $\vec{S}$ es el vector corrimiento de componentes u, v, w

Posteriormente se demostrará, que la variación unitaria de volumen que se produce como consecuencia del proceso de la deformación, es el invariante lineal d_1^D del tensor de deformación, y en consecuencia, dicha variación también lo expresa la divergencia del vector corrimiento.

El operador entre DEFORMACIONES y CORRIMIENTOS en base no ortogonal es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha_{xy} & \cos\alpha_{zx} \\ \cos\alpha_{xy} & 1 & \cos\alpha_{yz} \\ \cos\alpha_{zx} & \cos\alpha_{yz} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x}(1+r_{11}) + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z} & \left(\frac{\partial}{\partial x} r_{11} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cos\alpha_{xy} & \cos\alpha_{zx}\left(r_{11}\frac{\partial}{\partial x} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
\cos\alpha_{xy}\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right) & r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + (1+r_{22})\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha_{yz}\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
\cos\alpha_{zx}\left(r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) & \cos\alpha_{yz}\left(r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) & r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + (1+r_{33})\frac{\partial}{\partial z} \\
\cos\alpha_{xy}\left(\frac{\partial}{\partial x} r_{11} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y} & r_{11}\frac{\partial}{\partial x} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha_{yz}\left(r_{11}\frac{\partial}{\partial x} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha_{xy}\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x} & \cos\alpha_{zx}\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
\cos\alpha_{zx}\left(\frac{\partial}{\partial x} r_{11} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha_{yz}\left(r_{11}\frac{\partial}{\partial x} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z}\right) & r_{11}\frac{\partial}{\partial x} + r_{12}\frac{\partial}{\partial y} + r_{13}\frac{\partial}{\partial z} \\
r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha_{xy}\left(r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) & \cos\alpha_{zx}\left(r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \\
\cos\alpha_{zx}\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right) & \cos\alpha_{yz}\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial x} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} r_{12} + r_{22}\frac{\partial}{\partial y} + r_{23}\frac{\partial}{\partial z} \\
\cos\alpha_{xy}\left(r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) & r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha_{yz}\left(r_{13}\frac{\partial}{\partial x} + r_{23}\frac{\partial}{\partial y} + r_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

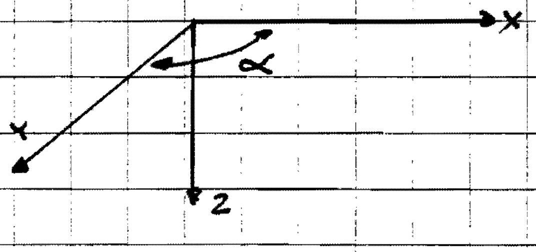
(6.22.7.)

En el caso, (ya abordado para relacionar solicitaciones con tensiones) de que únicamente no sean ortogonales los ejes X Y, la expresión anterior se transforma en la siguiente:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \begin{bmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zy}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\alpha}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x}(1+\mathrm{sen}^2\alpha) - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha - \cos^2\alpha\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
\cos\alpha\left(-\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) & -\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(1+\mathrm{sen}^2\alpha) & 0 \\
0 & 0 & 2\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{sen}^2\alpha \\
\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + (\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
-\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & (\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{sen}^2\alpha & 0 & \frac{\partial}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{sen}^2\alpha & \cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{sen}^2\alpha \\
0 & \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{sen}^2\alpha & \frac{\partial}{\partial y} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} \\
\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha\frac{\partial}{\partial z} & \mathrm{sen}^2\alpha\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{sen}^2\alpha
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}
$$

(6.22.8.)



Según (6.22.7.), resulta que el INVARIANTE LINEAL DEL TENSOR DE DEFORMACIÓN, es al igual que en BASE ORTOGONAL $d_1^0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, puesto que los restantes términos se anulan, si tenemos presente el que $[r_{ij}]$ es la inversa de la matriz $[R]$.

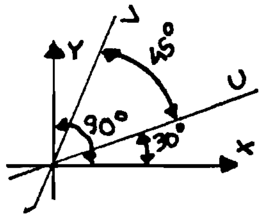
El tensor de deformación tal como se ha expuesto tiene como base el estudio que efectuó George Green en su obra: "Un ensayo de la aplicación del análisis matemático a las teorías de la Elasticidad y el Magnetismo".

Es de destacar el mérito de la aportación de Green (1793-1841), no sólo por su valor intrínseco, sino por el esfuerzo que implicó el que un modesto hijo de un molinero de Nottingham que no pudo recibir formación básica por la carencia de medios económicos, y que él lo suplió ya de adulto de forma autodidacta mediante los libros que le prestaban, llegase a efectuar aportaciones fundamentales en el desarrollo de la Teoría de la Resistencia de Materiales y de la Teoría de la Elasticidad.

Cuando George Green publicó en 1828 su obra maestra antes indicada, fue reconocido por los científicos de su época y se le permitió sólo entonces, ingresar a sus 41 años en el Gonville y Caius College of Cambridge University para graduarse como "bachelor of arts", lo que aconteció en 1837 siendo el cuarto de su promoción, significando ello su definitivo reconocimiento que se plasmó dos años más tarde, al ser elegido como miembro de un Club de Cambridge, pero desgraciadamente falleció al poco tiempo.

EJERCICIO 6.22.1. Obtengase la MATRIZ DE DEFORMACIÓN o MATRIZ DEL TENSOR DE DEFORMACIÓN, en el punto (2,3), sabiendo que las funciones de corrimiento en el plano X,Y son:

$$U = 10^{-4}\left(6x^3y^2 + 5x^2y^3 - 4xy^4 + y^5\right)$$
$$V = 3\cdot 10^{-4}\left(x^2y^3 - 2xy^4 + y^5\right)$$



(Efectuese el cálculo restringiendose al plano x,y).

Calculese las direcciones y deformaciones principales. Obtengase la deformación unitaria según un eje U que forma 30° con X y la variación angular γ_{UV} siendo el ángulo $\widehat{UV} = 45°$

SOLUCIÓN Si nos restringimos al plano X,Y la matriz $[\Omega]$ queda reducida a:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} (18x^2y^2 + 10xy^3 - 4y^4) & (12x^3y^2 + 15x^2y^2 - 16xy^3 + 5y^4) \\ (6xy^3 - 6y^4) & (9x^2y^2 - 24xy^3 + 15y^4) \end{bmatrix} =$$

Para $x=2$ e $y=3$:

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} 864 & 945 \\ -324 & 243 \end{bmatrix} = [\Omega]$$

Por lo que: $[D] = [T_0] = \frac{1}{2}\left([\Omega]^T + [\Omega]\right)$

$$\boxed{[D] = 10^{-2} \begin{bmatrix} 8.64 & 6,345 \\ 6,345 & 2.43 \end{bmatrix}}$$

⇩

$$\boxed{\varepsilon_x = 0.0864 \qquad \varepsilon_y = 0.0243 \qquad \frac{\gamma_{xy}}{2} = 0.06345}$$

Para obtener las direcciones principales, calcularemos los INVARIANTES:

$$\partial_1 = 10^{-2}\,(8,64 + 2,43) = 11,07\cdot 10^{-2} = \underline{0,1107 = \partial_1}$$
$$\partial_2 = 10^{-4}\left(8,64\cdot 2,43 - 6,345^2\right) = \underline{-19,2638\cdot 10^{-4} = \partial_2}$$

Estos invariantes deben satisfacerlos la matriz asociada a las DIRECCIONES PRINCIPALES, consecuentemente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y_0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{x_0} + \varepsilon_{y_0} &= J_1 = 0{,}1107 \\ \varepsilon_{x_0} \cdot \varepsilon_{y_0} &= J_2 = -0{,}1926 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$\Downarrow$ operando:

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \end{matrix}\right\} = \frac{0{,}1107}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}1107}{2}\right)^2 + 0{,}1926 \cdot 10^{-2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} &= 0{,}1260 \\ \varepsilon_{y_0} &= -0{,}0153 \end{aligned}}$$

Para obtener un vector colineal con el eje x_0, que simbolizaremos por $\vec{n}^{x_0}(n_x^{x_0}, n_y^{x_0})$ impondremos:

$$10^{-2} \begin{bmatrix} 8{,}64 - 12{,}60 & 6{,}345 \\ 6{,}345 & 2{,}43 - 13{,}60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x^{x_0} \\ n_y^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} -3{,}96 & 6{,}345 \\ 6{,}345 & -10{,}17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x^{x_0} \\ n_y^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Una de las filas puede eliminarse, pues son proporcionales)

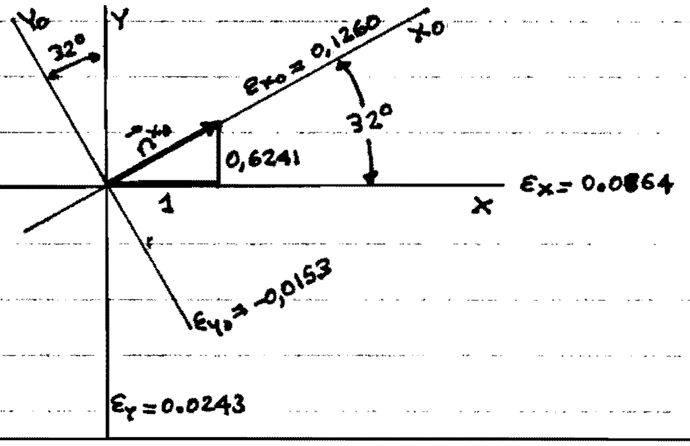
$$\Downarrow$$

$$-3{,}96\, n_x^{x_0} + 6{,}345\, n_y^{x_0} = 0 \Rightarrow \frac{n_y^{x_0}}{n_x^{x_0}} = \frac{3{,}96}{6{,}345} = 0{,}6241 = \operatorname{tag} \alpha_{x_0}$$

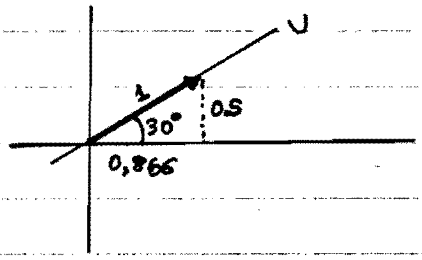
$$\Downarrow$$

$$\alpha_{x_0} = 31{,}98^\circ$$

Luego las direcciones principales son:



Calculemos la deformación unitaria según U, para lo cual calculemos las componentes de un versor indicativo de dicho eje.



$\vec{U}\,(0{,}866 \;\; 0{,}5)$

Efectuando el producto matricial que a continuación indicamos obtendremos ε_U

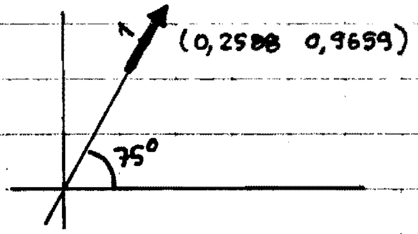
$$\varepsilon_U = [U]^T [T_0][U] = [0{,}866 \;\; 0{,}5] \cdot \begin{bmatrix} 8{,}64 \cdot 10^{-2} & 6{,}345 \cdot 10^{-2} \\ 6{,}345 \cdot 10^{-2} & 2{,}43 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \varepsilon_U$$

			0,866
			0,5
$10^{-2}\times$	8,64	6,345	10,6547
	6,345	2,43	6,7098
	0,866	0,5	12,5919

$\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon_U = 0{,}1258}$

(Al diferir en muy pocos grados el eje U y el x_0, la deformación unitaria es casi la misma).

Para calcular la variación angular del ángulo definido por las direcciones U y V, precisamos calcular ε_V mediante un proceso análogo que el efectuado para ε_U.



			0,2588
			0,9659
$10^{-2}\times$	8,64	6,345	8,3647
	6,345	2,43	3,9892
	0,2588	0,9659	6,0180

$\Downarrow$

$\boxed{\varepsilon_V = 0{,}0602}$

Para calcular la variación angular γ_{UV}, precisaremos calcular previamente el producto: $[V]^T[T_0][U]$, que a continuación efectuamos

			0,866
			0,5
$10^{-2}\times$	8,64	6,345	10,6547
	6,345	2,43	6,7098
	0,2588	0,9659	9,2384

$\Rightarrow$ $[V]^T[T_0][U] = 0{,}0924$

Puesto que el ángulo que forman U y V es de 45°, ello significa que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha = 0{,}7071$. Sustituyendo en la expresión de γ_{UV}:

$$\gamma_{uv} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(2\,[v]^T[T_0][u] - \cos\alpha\,(\varepsilon_u + \varepsilon_v)\right)$$

$$= \frac{1}{0,7071}\left(2 \cdot 0,0924 - 0,7071\,(0,1258 + 0,0602)\right)$$

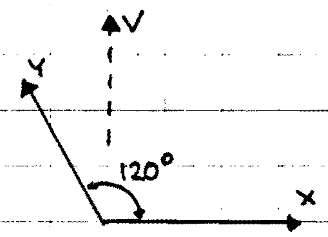
$$\boxed{\gamma_{uv} = 0,0697 \text{ radianes}}$$

La máxima variación angular en el plano XY nos lo proporciona la semidiferencia de las deformaciones principales (diámetro del círculo de Mohr).

$$\gamma_{max} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon_{y_0}\right) = \frac{1}{2}\left(0,1260 - (-0,0153)\right) = \boxed{0,0706 = \gamma_{max}}$$

EJERCICIO 6.22.2. Obtengase el TENSOR DE DEFORMACIÓN, restringiendonos al PLANO en el que se producen los corrimientos, sabiendo que:

$$U = 10^{-4}\,(6x^3y^2 - 7.5\,x^2y^3 + 3\,x\,y^4 - 0.375\,y^5)$$
$$V = 3\cdot10^{-4}\,(x^2y^3 - x\,y^4 + 0.25\,y^5)$$



siendo el punto P, de coordenadas (2,64 2,89) en el que debe obtenerse el citado TENSOR.

Calculese a continuación la matriz del TENSOR referido a X, V

SOLUCIÓN

La matriz métrica euclidea será:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \cos 120 \\ \cos 120 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de dicha matriz es:

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,\widehat{3} & 0,\widehat{6} \\ 0,\widehat{6} & 1,\widehat{3} \end{bmatrix}$$

La matriz $[\Omega]$ es:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} (18x^2y^2 - 15x\,y^3 + 3y^4) & (12x^3y - 22.5\,x^2y^2 + 12x\,y^3 - 1.875\,y^4) \\ 3(2xy^3 - y^4) & 3(3x^2y^2 - 4xy^3 + 1.25\,y^4) \end{bmatrix} = [\Omega]$$

Sustituyendo las coordenadas del punto P, la matriz $[\Omega]$ pasa a ser:

$$[\Omega] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 30,266 & -3,744 \\ 17,323 & 2,141 \end{bmatrix}$$

Así pues:

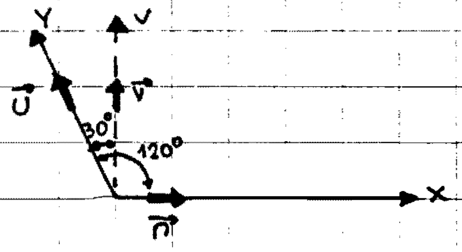
$$[T_D] = \frac{1}{2}\left([R]^{-1}[\Omega]^T[R]\left([I]+[\Omega]\right) + [\Omega]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left([R]^{-1}[\Omega]^T[R] + [\Omega]\right)$$ siendo las deformaciones suficientemente pequeñas como en el presente caso.

$$[T_D] = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1,\hat{3} & 0,\hat{6} \\ 0,\hat{6} & 1,\hat{3}\end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 30,266 & 17,323 \\ -3,744 & 2,141\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0,5 & 1\end{bmatrix} + 10^{-3}\begin{bmatrix} 30,266 & -3,744 \\ 17,323 & 2,141\end{bmatrix}\right)$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 2,7926 \cdot 10^{-2} & 9,2564 \cdot 10^{-4} \\ 1,2651 \cdot 10^{-2} & 4,4745 \cdot 10^{-3}\end{bmatrix} = [T_{D_{XY}}]}$$

La matriz del CAMBIO DE BASE será:



$$[\mathbb{C}] = \begin{bmatrix} n_x & v_x \\ n_Y & v_Y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & U_x \\ n_V & U_V\end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.866025\end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0,5774 \\ 0 & 1,1547\end{bmatrix} = [\mathbb{C}]}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.866\end{bmatrix} = [\mathbb{C}]^{-1}}$$

Por lo tanto, aplicando la TEORÍA DE CAMBIO DE BASE:

$$[T_{D_{XV}}] = [C]^{-1}[T_{D_{XY}}][C] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.866\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2,7926 \cdot 10^{-2} & 9,2564 \cdot 10^{-4} \\ 1,2651 \cdot 10^{-2} & 4,4745 \cdot 10^{-3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,5774 \\ 0 & 1,1547\end{bmatrix} =$$

$$= \boxed{10^{-2}\begin{bmatrix} 2,16 & 1,0956 \\ 1,0956 & 1,08\end{bmatrix} \doteq [T_{D_{XV}}]}$$

EJERCICIO 6.22.3. Dadas las funciones de corrimiento

$$u = 10^{-4}\,(6x^3y^3 + 3x^2z^3 - 2y^2z^3)$$
$$v = 10^{-4}\,(6x^2y^3 + 3x^2z^2 - 4y^3z^2)$$
$$w = 10^{-4}\,(2x^2y^2 + 6x^2z^3 + 3y^2z^3)$$

Respecto a un sistema XYZ cuyos ejes forman los ángulos siguientes $\alpha_{xy} = 120$ $\alpha_{zx} = 70$ $\alpha_{yz} = 80$

Determinar la matriz asociada al TENSOR DE DEFORMACIONES y la MATRIZ DE DEFORMACIÓN DE GREEN. en el punto P de coordenadas: (2, 3, 1)

Obtengase posteriormente la matriz asociada al TENSOR DE DEFORMACION respecto a un sistema de ejes, tales que

$$\begin{cases} X^* \equiv X \\ Y^* \in \text{plano } \{X, Y\} \text{ y perpendicular a } X^* \\ Z^* \text{ perpendicular a } X^* \text{ e } Y^* \end{cases}$$

SOLUCIÓN La matriz métrica Euclidea, será:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \cos 120 & \cos 70 \\ \cos 120 & 1 & \cos 80 \\ \cos 70 & \cos 80 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}34202 \\ -0.5 & 1 & 0{,}17365 \\ 0{,}34202 & 0{,}17365 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|R| = 0{,}543477 \qquad \sqrt{|R|} = 0{,}7372$$

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}78452 & 1{,}02928 & -0{,}789075 \\ 1{,}02928 & 1{,}62476 & -0{,}634172 \\ -0{,}789075 & -0{,}634172 & 1{,}38000 \end{bmatrix}$$

Calculemos las derivadas parciales de las funciones de corrimiento para el punto propuesto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10^{-4}(18x^2y^3 + 6xz^3) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0{,}1956$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 10^{-4}(18x^3y^2 - 4yz^3) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0{,}1284$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 10^{-4}\left(9x^2z^2 - 6y^2z^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -0.0018$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 10^{-4}\left(12xy^3 + 6xz^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0,066$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 10^{-4}\left(18x^2y^2 - 12y^2z^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0,054$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 10^{-4}\left(6x^2z - 8y^3z \right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -0,0192$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 10^{-4}\left(4xy^2 + 12xz^3 \right) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0,0096$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 10^{-4}\left(4x^2y + 6yz^3 \right) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 0,0066$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 10^{-4}\left(18x^2z^2 + 9y^2z^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0,0153$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0,1956 & 0,1284 & -0,0018 \\ 0,066 & 0,054 & -0,0192 \\ 0,0096 & 0,0066 & 0,0153 \end{bmatrix}$$

La matriz de deformación de GREEN, viene determinada por la expresión matricial:

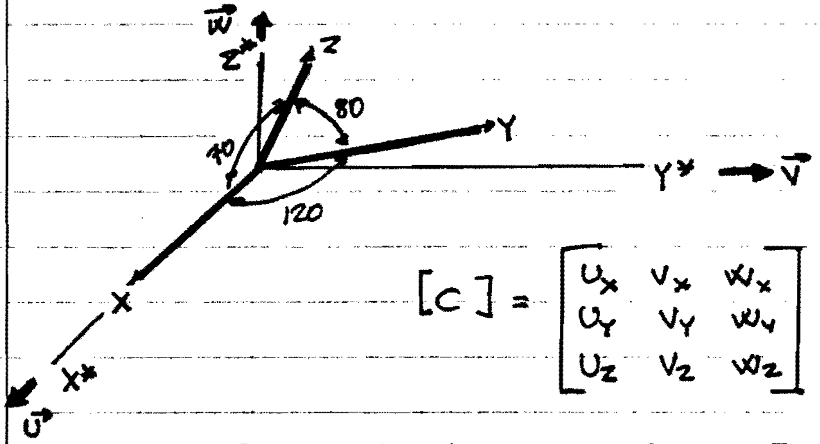
$$[D] = \frac{1}{2}\left([\Omega]^T[R] + [R][\Omega] \right) = \boxed{\begin{bmatrix} 0.1659 & 0,0368 & 0,0505 \\ 0,0368 & -0,0091 & 0,0221 \\ 0.0505 & 0,0221 & 0,0114 \end{bmatrix}} = [D]$$

La matriz asociada al tensor de deformación será:

$$[T_D] = [R]^{-1}[D] = \boxed{\begin{bmatrix} 0,29401 & 0,038827 & 0,103934 \\ 0,198444 & 0,009098 & 0,080726 \\ -0,084517 & 0,007264 & -0,03822 \end{bmatrix}} = [T_D]$$

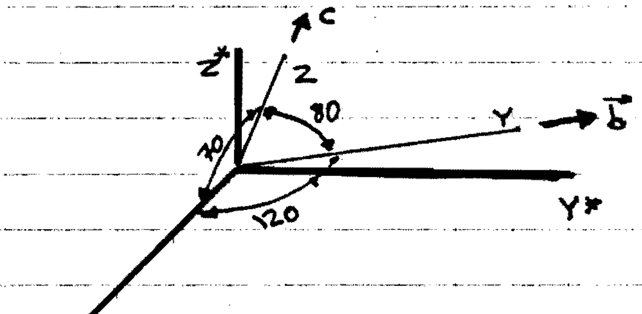
Aplicando la teoría del cambio de base, tendremos que calcular las componentes de unos versores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ cuyas lineas de acción sean los nuevos ejes de referencia, calculando sus componentes, respecto al sistema primitivo de ejes, para así poder determinar las columnas de la matriz del cambio de base, que permitirá:

$$[T_{O_{X^*Y^*Z^*}}] = [C]^{-1}[T_{O_{XYZ}}][C]$$



$$[C] = \begin{bmatrix} U_X & V_X & W_X \\ U_Y & V_Y & W_Y \\ U_Z & V_Z & W_Z \end{bmatrix}$$

Si resulta la obtención de [C] más compleja que el cálculo de $[C]^{-1}$, (que viene constituida por columnas que son las componentes de versores cuyas líneas de acción son los ejes primitivos, referidos a los nuevos ejes), procederemos determinando esta última.



$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{X^*} & b_{X^*} & c_{X^*} \\ a_{Y^*} & b_{Y^*} & c_{Y^*} \\ a_{Z^*} & b_{Z^*} & c_{Z^*} \end{bmatrix}$$

La definición de los ejes $X^*Y^*Z^*$, y el hecho de que los ejes XYZ formen los ángulos indicados, implican las siguientes condiciones.

$$\vec{a} = (a_{X^*}\ a_{Y^*}\ a_{Z^*}) \equiv (1, 0, 0)$$

$$\vec{b} \Rightarrow b_{Z^*} = 0 \qquad (Y^* \in \{XY\})$$

$$\left.\begin{aligned} b_{X^*} &= \cos 120 = -0.5 \\ b_{Y^*} &= \operatorname{sen} 120 = 0.866025 \end{aligned}\right\} \quad (\widehat{XY} = 120°)$$

$$\Downarrow \vec{b}\,(-0{,}5 \quad 0{,}866025 \quad 0)$$

$$\vec{c} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{c} &= \cos 70 \\ \vec{b}\cdot\vec{c} &= \cos 80 \\ |\vec{c}| &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{c}\,(0{,}34202 \quad 0{,}397977 \quad 0{,}851256)$$

Por lo tanto: $[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}34202 \\ 0 & 0{,}866025 & 0{,}397977 \\ 0 & 0 & 0{,}851256 \end{bmatrix}$

Invirtiendo:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}57735 & -0{,}671704 \\ 0 & 1{,}154701 & -0{,}53984 \\ 0 & 0 & 1{,}174735 \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$[T_{D_{x^*y^*z^*}}] = [C]^{-1}[T_{D_{xyz}}][C] = \boxed{\begin{bmatrix} 0{,}1659 & 0{,}1382 & -0{,}0719 \\ 0{,}1382 & 0{,}0922 & -0{,}0344 \\ -0{,}0719 & -0{,}0344 & 0{,}0068 \end{bmatrix} = [T_D^*]}$$

También puede calcularse $[T_D^*]$ sabiendo que al ser base ortogonal, se verificará: $[T_D^*] = [D^*]$, y en consecuencia puede aplicarse la expresión específica para el cambio de base de la MATRIZ DE DEFORMACIONES DE GREEN, que establece:

$$[D^*] = [C]^T [D] [C] \left(= [T_D^*] \right)$$

En el ejemplo realizado puede verificarse que:

$$J_1^D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{cases} J_1^D = 0{,}29401 + 0{,}009098 + (-0{,}03822) = 0{,}2649 \\ J_1^{D^*} = 0{,}1659 + 0{,}0922 + 0{,}0068 = 0{,}2649 \\ \operatorname{div} \vec{\delta} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0{,}1956 + 0{,}054 + 0{,}0153 = 0{,}2649 \end{cases}$$

6.23. LEYES DE HOOKE Y LAMÉ PARA MATERIALES ISÓTROPOS. (o ECUACIONES DE ENLACE)

Si las tensiones deben producir deformaciones en todo sólido real, lógicamente será factible establecer unas funciones que relacionen unas con otras.

Supongamos que se dispone de un SISTEMA DE REFERENCIA ORTOGONAL X, Y, Z, respecto al cual los TENSORES DE TENSIONES Y DE DEFORMACIONES serán simétricos y en consecuencia los determinan 6 PARÁMETROS en cada uno de dichos casos. Así pues:

$$[T_T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad [T_D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \alpha_{xy} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} & \varepsilon_y & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\left(\alpha_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \right)$$

La dependencia entre tensiones y deformaciones implica la existencia de las siguientes funciones:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= f_{11}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha_{xy}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}) \\ \sigma_y &= f_{22}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha_{xy}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}) \\ \sigma_z &= f_{33}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha_{xy}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}) \\ \tau_{xy} &= f_{12}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha_{xy}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}) \\ \tau_{zx} &= f_{31}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha_{xy}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}) \\ \tau_{yz} &= f_{23}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha_{xy}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}) \end{aligned}\right\} \text{funciones de ENLACE.}$$

El objetivo del presente tema es el de determinar las funciones f_{ij}, utilizando los datos que nos proporciona la observación del fenómeno de la DEFORMACIÓN.

De acuerdo con la experiencia, pueden establecerse las siguientes hipótesis :

* ESTADO INICIAL NEUTRO, según el cual, si las tensiones son nulas lo son también las deformaciones, o viciversa.

* CONTINUIDAD, lo que exigirá la continuidad matemática de las funciones de enlace, y el de sus derivadas de primer y segundo orden como mínimo.

* CARACTER BIUNIVOCO DE LA RELACIÓN ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES, es decir a todo estado de deformación se le asociará mediante las funciones de enlace uno, y solo un estado tensional, y viciversa, existirán unas funciones $g_{ij} = f_{ij}^{-1}$ tales que a todo estado tensional les asociará uno y solo un estado de deformación.

El carácter biunívoco, exige de por sí la existencia de las funciones inversas g_{ij}, y matemáticamente puede hablarse de la existencia de una APLICACIÓN entre los parámetros de los dos tensores indicados.

* APLICABILIDAD DEL PRINCIPIO DE LA PEQUEÑEZ DE LAS DEFORMACIONES, que nos permitirá eliminar los términos cuadráticos de las deformaciones, cuando estas están sumadas a términos lineales de las mismas.

$$\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{ii}^{2}$$

Las hipótesis básicas anteriores, permiten que si aplicamos a las funciones de enlace el desarrollo de Mac-Laurin (desarrollo de Taylor en el origen), se obtiene :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{TENSIÓN}_j\\ \text{para una cierta}\\ \text{deformaciones}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{TENSIÓN}\\ \text{para las}\\ \text{deformaciones}\\ \text{nulas, (origen)}\end{array}\right\} + \sum_i \left\{\begin{array}{l}\text{Deformación}_i\\ \text{considerada}\end{array}\right\} \times \left(\frac{\partial\ \text{TENSIÓN}_j}{\partial\ \text{DEFORMACIÓN}_i}\right)_{\substack{\text{en el}\\ \text{ORIGEN}}} +$$

$$+ \sum_i \left\{\begin{array}{l}\text{Deformación}_i^2\\ \text{considerada}\end{array}\right\} \times \frac{1}{2!} \times \left(\frac{\partial^2\ \text{TENSIÓN}_j}{\partial\ \text{DEFORMACIÓN}_i^2}\right)$$

$$+ \dots$$

NULO de acuerdo con el PRINCIPIO DEL ESTADO INICIAL NEUTRO

NULO de acuerdo con el PRINCIPIO de la PEQUEÑEZ de las DEFORMACIONES

Por lo que la expresión anterior se reduce a:

$$\left\{\text{TENSIÓN}_j\right\} = \sum_i \left(\text{Deformación}_i\right) \times \left(\frac{\partial\ \text{TENSIÓN}_j}{\partial\ \text{DEFORMACIÓN}_i}\right)_{\substack{\text{en el}\\ \text{ORIGEN}}}$$

Si la relación existente entre una TENSIÓN$_j$ y una DEFORMACIÓN$_i$ puede expresarse mediante una gráfica del tipo que indicamos en la fig. 6.23.1., la derivada expresa la pendiente de la tangente, y en consecuencia si esta es en el origen, resultará:

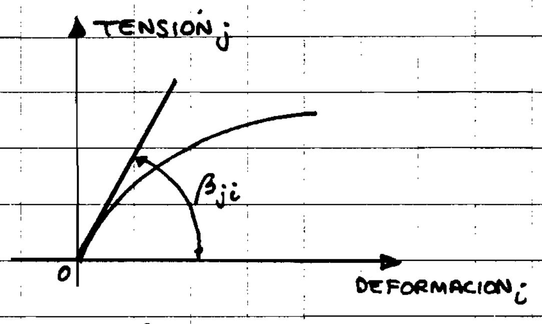


fig. 6.23.1.

$$\left(\frac{\partial\ \text{TENSIÓN}_j}{\partial\ \text{DEFORMACIÓN}_i}\right)_{\substack{\text{en el}\\ \text{ORIGEN}}} = \operatorname{tag} \beta_{ji}$$

Este significado, nos indica además de que dichas derivadas deben ser CONSTANTES CARACTERÍSTICAS de CADA MATERIAL, por lo que las simbolizaremos mediante L_{ji}, es decir:

$$L_{ji} = \left(\frac{\partial\ \text{TENSIÓN}_j}{\partial\ \text{DEFORMACIÓN}_i}\right)_{\substack{\text{en el}\\ \text{ORIGEN}}} = \operatorname{tag} \beta_{ji}$$

En consecuencia:

$$\{\text{TENSIÓN}_j\} = \sum_i L_{ji} \times \{\text{DEFORMACIÓN}_i\}$$

Así pues:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \alpha_{xy} \\ \alpha_{zx} \\ \alpha_{yz} \end{bmatrix}$$

ECUACIÓN DE ENLACE DE LAMÉ

(6.23.1.)

O de forma más simbólica: $\boxed{[\sigma] = [L][\varepsilon]}$ ECUACIÓN DE LAMÉ

Si existe una aplicación entre $[\sigma]$ y $[\varepsilon]$, ello implica que existe la matriz inversa de $[L]$, es decir que existe una cierta matriz $[H]$ tal que:

$$[H] = [L]^{-1} \qquad (6.23.2.)$$

en cuyo caso:

$$\boxed{[\varepsilon] = [H][\sigma]} \qquad (6.23.3.)$$

ECUACIÓN DE ENLACE DE HOOKE

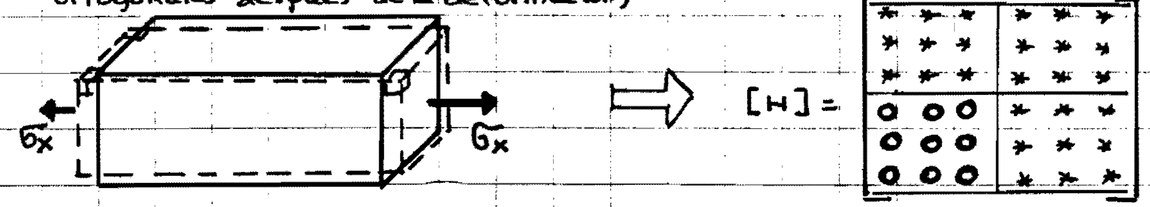
Tal como podrá razonarse más adelante, mediante la aplicación de la Ley de BETTI, las matrices $[L]$ y $[H]$ SON SIMÉTRICAS, por lo que el número máximo de coeficientes distintos que las integran serán de 21

Los coeficientes de dichas matrices los denominaremos de ahora en adelante: CONSTANTES ELASTICAS DEL MATERIAL, que no podrán superar en ningún material a 21 valores distintos, siempre y cuando nos encontremos en el CAMPO DE LAS PEQUEÑAS DEFORMACIONES.

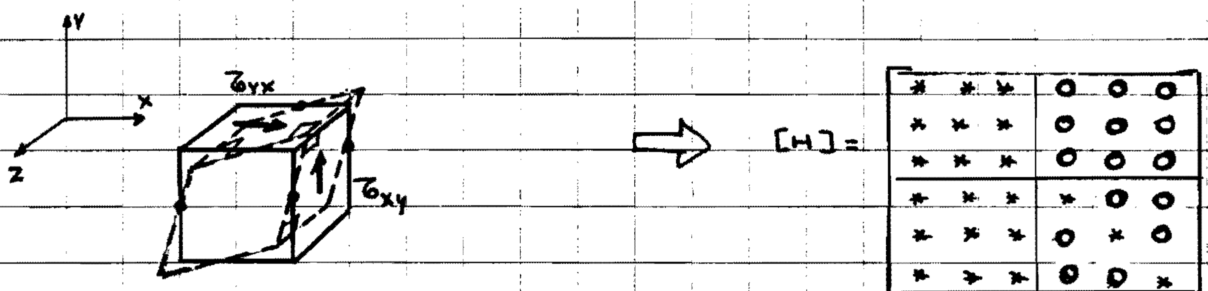
Un cuerpo, en el que al aplicarse una TENSIÓN TANGENCIAL se producen DEFORMACIONES UNITARIAS LONGITUDINALES según las direcciones en que actua la citada tensión tangencial, se dice que es ANISÓTROPO, estos materiales presentan también la particularidad, de que al sufrir tensión normal según una dirección, se producirán VARIACIONES ANGULARES en el plano de dicha dirección y sus ortogonales, y que la respuesta que presenta el material depende de la dirección en la que actua el esfuerzo.

Lo usual, no son los materiales ANISÓTROPOS, sino los que denominaremos ISÓTROPOS, en los que si se traccionan según una cierta dirección, se producirán alargamientos según esa misma dirección, y acortamientos en las direcciones ortogonales con la misma, las cuales mantendrán su caracter de perpendiculares, por lo que en los planos correspondientes no se habrán producido VARIACIONES ANGULARES, y dichas respuestas serán idénticas, para cualquier dirección en que se ejezza el esfuerzo.

(las caras XY, YZ, ZX siguen siendo ortogonales después de la deformación)



CUERPO ISÓTROPO



(no se producen alargamientos o acortamientos según X, Y, Z, ni variaciones angulares en los planos ortogonales)

fig. 6.23.2.

Analizando lo que significa la matriz [H] y el concepto de ISOTROPÍA, deben ser nulos una serie de constantes elásticas, tal como se refleja en la fig. 6.23.2., así pues, puede asegurarse que en un cuerpo ISÓTROPO son NULOS los siguientes elementos de la matriz [H].

$$[H] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

Lo expuesto nos reduce el número posible de CONSTANTES ELÁSTICAS a NUEVE. (9)

Haciendo intervenir que el comportamiento del material debe ser el mismo, para cualquier dirección en que se apliquen las tensiones, se deduce que los siguientes grupos de constantes elásticas deben ser iguales.

3 CONSTANTES IGUALES

1er GRUPO

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

6 CONSTANTES IGUALES

2º GRUPO

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

3er GRUPO

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

3 CONSTANTES IGUALES.

Por lo tanto, en un cuerpo ISÓTROPO, como máximo pueden existir 3 CONSTANTES ELÁSTICAS DISTINTAS

Simbolicémoslas de la forma siguiente:

1er GRUPO $\Longrightarrow$ $1/E$

2º GRUPO $\Longrightarrow$ $-\nu/E$

3er GRUPO $\Longrightarrow$ $1/G_T$

CONSTANTES ELÁSTICAS: $E,\ \nu,\ G_T$

(6.23.4.)

Por lo que la matriz de ENLACE DE HOOKE, para cuerpos ISÓTROPOS es:

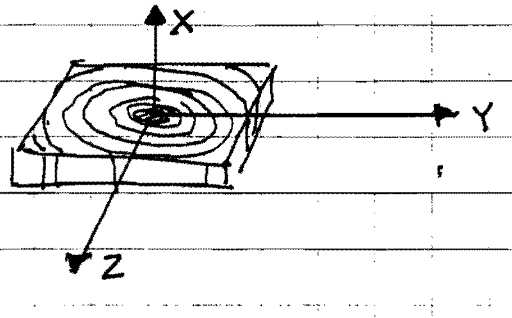
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (6.23.5.)$$

LEY DE HOOKE GENERALIZADA

$(\alpha_{ij} = \gamma_{ij}/2)$

Existen materiales que no presentan fenómenos de distorsión ante el proceso de la deformación, pero sí que poseen respuesta diferenciada según la dirección en que se ejerza el esfuerzo, como acontece en las maderas, por lo que son materiales ISÓTROPOS.

$$[H] = \begin{bmatrix} 1/80000 & -1/200\,000 & -1/200000 & 0 & 0 & 0 \\ -1/200\,000 & 1/4000 & -1/5333 & 0 & 0 & 0 \\ -1/200\,000 & -1/5333 & 1/4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/36400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/36400 \end{bmatrix}$$



(madera: BALSA)

Invirtiendo la matriz [H] se obtendrá la matriz [L] que establece la aplicación inversa.

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_T \end{bmatrix}$$

(6.23.6.)

es decir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = [L] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

ECUACIONES DE LAMÉ

(6.23.7.)

$(\gamma_{ij}/2 = \alpha_{ij})$

Gabriel Lamé
(1795-1870)

De la observación de la LEY DE HOOKE GENERALIZADA (6.23.5.) y de las ECUACIONES DE LAMÉ ((6.23.6.) y (6.23.7.), se deduce que para materiales ISÓTROPOS (o anisótropos sin fenómenos de distorsión como la madera), si:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{IMPLICA:} \quad \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o viciversa.

Esto implica a su vez, que EN MATERIALES ISÓTROPOS LAS DIRECCIONES PRINCIPALES DEL TENSOR DE TENSIONES Y DEL TENSOR DE DEFORMACIONES SON COINCIDENTES.

Si todas las tensiones tangenciales son nulas, y sólo una de las tensiones normales es distinta de cero, se dice que el elemento está solicitado a TRACCIÓN O COMPRESIÓN PURA, en cuyo caso se verificará según (6.23.5.):

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x \neq 0 \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0\end{array}\right\} \quad \boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}}$$

LEY DE HOOKE (6.23.8.)

Expresión que por su simplicidad es de gran uso y utilidad, pero que está restringida su aplicación a BARRAS SOLICITADAS A TRACCIÓN O COMPRESIÓN PURA.

Se enunció por primera vez en 1678, en una publicación denominada "LECCIONES DE POTENCIA RESTITUTIVA", cuyo autor era Robert Hooke, nacido el 18 de julio de 1635 en Freshwater, Isla de Wight

Robert Hooke, fué alumno de Oxford, y posteriormente miembro y secretario de la Royal Society, y es sin duda uno de los genios de la historia de la Ciencia, pero tuvo la desgracia de ser contemporáneo con Isaac Newton, que le eclipsó totalmente, pasando desapercibida su importante aportación a la Ley de Gravitación Universal. Efectuó importantes estudios e investigaciones en casi todos los campos de la Ciencia.

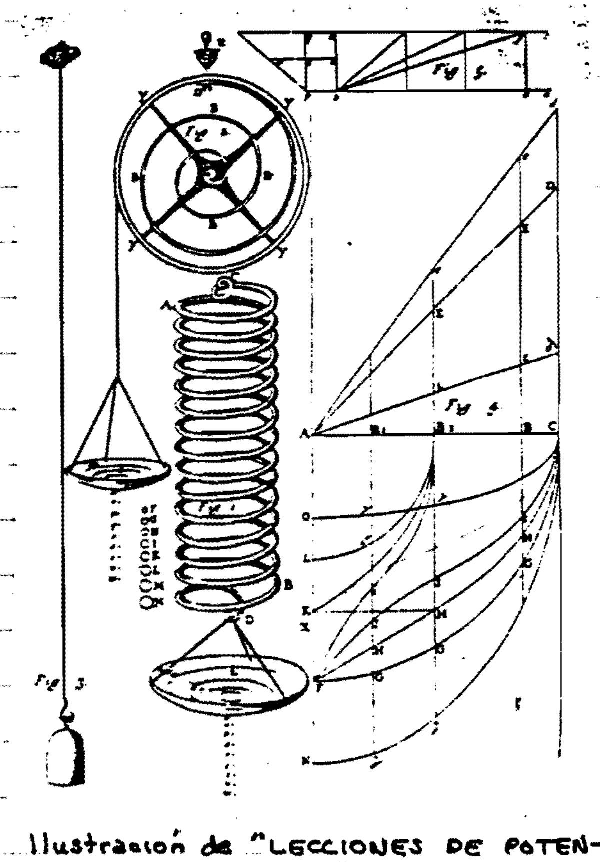


Ilustración de "LECCIONES DE POTENCIA RESTITUTIVA"

Hooke enunció su ley de forma muy simple: "LA POTENCIA DE CUALQUIER RESORTE está en la misma proporción que la fuerza que se ejerce sobre él, es decir: si una fuerza lo extiende un espacio, dos fuerzas lo doblarán dos espacios, y tres doblarán tres, etc".

La relación inversa de relacionar las tensiones en función de las deformaciones recibe el nombre de George Lamé cuya vida está íntimamente ligada a Clapeyron al que se debe la expresión del trabajo externo de deformación.

G. Lamé (1795-1870) y B.P.E. Clapeyron (1799-1864) se graduaron como Ingenieros por la École Polytechnique en 1818 y por la de Minas dos años más tarde.

Sus brillantes expedientes como alumnos aventajados, motivó que ambos fuesen recomendados para que colaborasen en la creación de una nueva Escuela de Ingenieros, el Instituto de Caminos y Comunicaciones de San Petesburgo, la cual tendría más tarde una gran influencia en el desarrollo científico ruso.

Ha sido frecuente la colaboración franco-rusa, como lo demuestran no sólo estos dos ingenieros, sino otros muchos que aportaron a la rusa de los zares, la tradición y experiencia científica de Francia, siendo un caso destacable la del Ingeniero militar Betancourt que fué Director de la Escuela de Ingeniería citada en Rusia.

Lamé y Clapeyron enseñaron matemáticas y física a la vez que colaboraban en la concepción y realización de diversos proyectos, como varios puentes suspendidos que en aquel entonces se realizaron en San Petesburgo.

Lamé observó el fenómeno de fluencia o plastificación del acero cuando construyó una máquina especial para investigar las propiedades mecánicas del hierro ruso.

Otro interesante trabajo fué el estudio que ambos realizaron sobre la estabilidad de los arcos, con ocasión de la reconstrucción de la catedral de Saint Isaac en San Peterburgo.

Lamé y Clapeyron en su permanencia en Rusia, escribieron una importante memoria "sur l'equilibre interieur des corps solides homogénes", la cual fue presentada a la Academia de Ciencias Francesa, y estudiada en la misma por Poisson y Navier en 1828, y publicada cinco años más tarde en "Memoires presentés par divers savants"

Lamé y Clapeyron asumieron la teoría molecular debida a Navier, por lo que fueron partidarios de la existencia de una única constante elástica, y como otros muchos insignes científicos de la época se equivocaron totalmente en este tema.

Lamé utilizando el concepto de tensión debida a Cauchy, definió la superficie que configuraban los extremos de los infinitos vectores tensión asociados a las superficies definibles en un punto P, la cual es un ELIPSOIDE que recibe desde entonces la denominación de este ingeniero francés.

Lamé analizó el problema de la resistencia última de un material sometido a estados triples de tensión, así como el caso del cuerpo infinito limitado por un plano, sobre el que actuan fuerzas distribuidas normales al mismo.

La memoria anterior fué la base sobre la que se elaboró el primer libro de la Teoría de la Elasticidad que Lamé lo denominó: "Leçons sur la théorie Mathématique de l'Elasticité des corps solides"

En 1831 al deteriorarse las relaciones políticas entre Rusia y Francia, Lamé y Clapeyron regresaron a Francia, donde colaboraron en diversos proyectos ferroviarios, pero finalmente Lamé se decidió por la docencia en la École Polytechnique de Paris.

Lamé estudió con especial interes la resistencia de superficies esféricas, para lo cual utilizó coordenadas curvilineas, escribiendo sobre este tema diversas memorias.

En 1843 Lamé fue elegido miembro de la Academia Francesa de Ciencia y en 1850 fué profesor en la Sorbone.

En 1863 cesa por motivos de salud su labor docente falleciendo siete años más tarde.

Clapeyron desde su regreso a Francia tuvo una gran participación en los proyectos que se realizaron en aquel entonces en la construcción de la red viaria de Francia. Aplicó la termodinámica en el diseño de la locomotora.

En 1844 impartió en la École des Ponts et Chausseés un curso de máquinas de vapor, siendo considerado como un profesor excelente, pues unía el conocimiento teórico y la experiencia práctica.

En 1848 Clapeyron desarrolló un método para el análisis de vigas continuas.

El famoso teorema de Clapeyron lo publicó Lamé en su libro, bautizándolo con el nombre de su colega, denominación con la cual se ha difundido hasta nuestros diás.

En 1858 Clapeyron fué nombrado miembro de la Academia de Ciencias Francesa, con la que colaboró a la vez que impartía docencia en la Escuela de Puentes, hasta su muerte acaecida en 1864.

6.24. SIGNIFICADO DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS

* Supongamos que una barra está sometida únicamente a una tensión σ_x, siendo X la directriz de la misma, tal como se refleja en la figura 6.24.1., es decir a un estado de TRACCIÓN PURA.

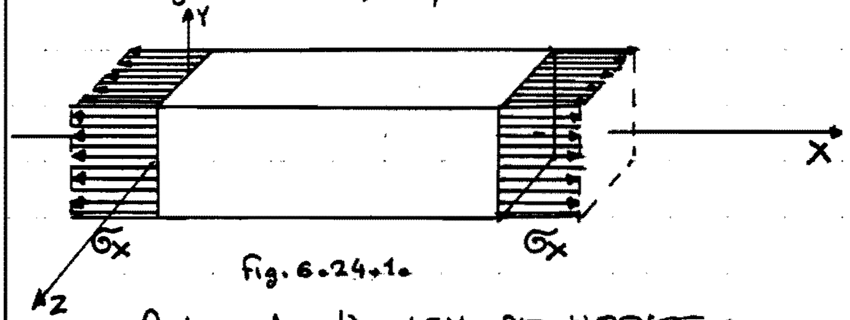


fig. 6.24.1.

Aplicando la LEY DE HOOKE :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$$

Y consecuentemente $E = \sigma_x / \varepsilon_x$, por lo que la constante E expresa la pendiente del diagrama tensión-deformación unitaria, $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ tal como ya se indicó al razonar el caracter de constantes de los elementos que integran la MATRIZ DE ENLACE.

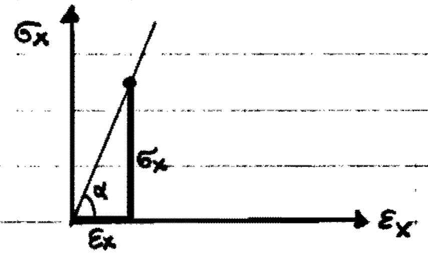


fig. 6.24.2.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \Rightarrow \operatorname{tag}\alpha = E$$

Por otra parte, puede verificarse que si a una barra la aplicamos una tensión :

$$\sigma_x = E$$

resultará que la deformación unitaria longitudinal es UNO, es decir :

$$\varepsilon_x = 1,$$

y recordando la definición de deformación unitaria longitudinal, como el cociente entre el INCREMENTO DE LONGITUD, y la LONGITUD INICIAL, resulta que para que la misma sea unitaria, es preciso que el incremento de longitud iguale a la longitud inicial, lo que exige en el caso de un alargamiento, que la longitud final sea doble que la inicial.

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\Delta L}{L} \\ \\ \varepsilon_x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta L = L \Rightarrow L^* = 2 \cdot L$$

Según lo expuesto:

LA CONSTANTE E, EXPRESA LA TENSIÓN DE TRACCIÓN PRECISA PARA QUE UN CUERPO DUPLIQUE SU LONGITUD INICIAL MEDIANTE EL PROCESO DE LA DEFORMACIÓN.

Naturalmente, es sólo teórica dicha tensión $\sigma_x = E$, puesto que el cuerpo alcanzaría la rotura con valores de la tensión muchísimo más bajos, en la inmensa mayoría de materiales, no obstante, el significado propuesto posee un gran interes conceptual.

La constante E, se suele denominar MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL o bien MÓDULO DE YOUNG.

* Veamos ahora el significado de la CONSTANTE ν, para lo cual seguiremos utilizando la fig. 6.24.1., la cual corresponde a una barra traccionada que la experiencia nos demuestra que se alarga según el eje X, y se acorta transversalmente, es decir, según las direcciones Y y Z, tal como se indica en la fig. 6.24.2.

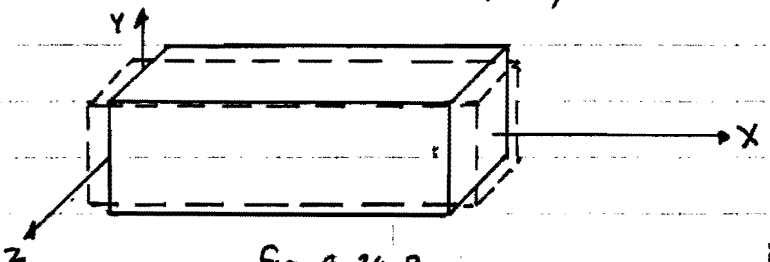


Fig. 6.24.2.


POISSON

Indicamos que: $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$

pero de acuerdo con la LEY GENERALIZADA DE HOOKE, el resto de la deformaciones son:

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \qquad \gamma_{xy} = 0$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \qquad \gamma_{zx} = 0$$
$$\gamma_{yz} = 0$$

Si establecemos un cociente entre el ACORTAMIENTO TRANSVERSAL Y EL ALARGAMIENTO LONGITUDINAL, obtendremos:

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\frac{\nu}{E}\sigma_x}{\frac{1}{E}\sigma_x} = -\nu$$

El signo menos indica el caracter distinto de ambas deformaciones, puesto que mientras que una es un alargamiento, la otra es un acortamiento.

En consecuencia; la CONSTANTE ν EXPRESA EN VALOR ABSOLUTO LA RELACIÓN ENTRE LOS ACORTAMIENTOS TRANSVERSALES Y LOS ALARGAMIENTOS LONGITUDINALES.

Y suele denominarse COEFICIENTE DE POISSON.

* La tercera constante elástica que hemos simbolizado por G_T, nos permite relacionar la tensión tangencial con el ángulo de cizalladura que produce la deformación correspondiente a dichas tensiones. En efecto, supongamos un estado tensional en el que únicamente $\tau_{xy} \neq 0$

$$\tau_{xy} \neq 0 \qquad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

según la ley GENERALIZADA DE HOOKE, resultará que las deformaciones que se producirán ante tal estado tensional serán:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G_T} \tau_{xy} \end{array}\right. \Longrightarrow G_T = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

Así pues, en un cubo en el que fijasemos su cara inferior a un plano infinitamente rígido, la deformación que se produciría al aplicar τ_{xy} y τ_{yx}, sería:

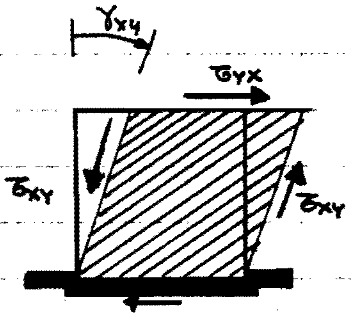


fig. 6.24.3.

Por lo que evidentemente G_T señala también la pendiente de la gráfica TENSIÓN TANGENCIAL – VARIACIÓN ANGULAR (6.24.4.)

$$\operatorname{tag} \beta = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

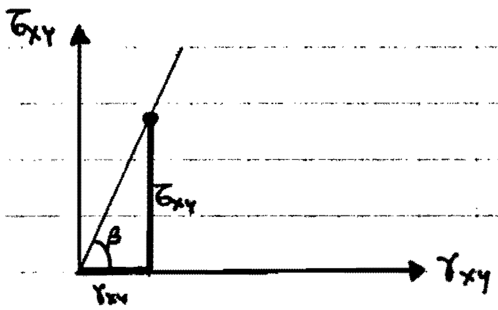


fig. 6.24.4.

También puede definirse G_T, como la tensión tangencial precisa para que el ángulo de distorsión sea un radian, lo que exige tensiones tan sumamente grandes, que son imposible de que el material pueda llegar a sufrirlas, puesto que con valores muy inferiores de las mismas alcanzará la rotura.

La denominación habitual de G_T, es el de MÓDULO DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL

Las dimensiones de E y G_T son las de $F/[L]^2$, en tanto que ν es ADIMENSIONAL.

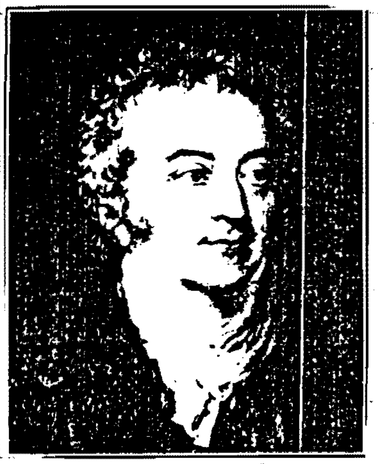
En la tabla siguiente se proporcionan los valores habituales de las CONSTANTES ELÁSTICAS.

MATERIAL	E	ν	G_T
Acero	$2{,}1 \cdot 10^6$	0,28	820300
Hierro	$1{,}9 \cdot 10^6$	0,28	742190
Fundición	$1{,}3 \cdot 10^6$	0,25	520000
Cobre	$1{,}2 \cdot 10^6$	0,33	451130
Bronce	$1{,}18 \cdot 10^6$	0,36	433800
Aluminio	$0{,}7 \cdot 10^6$	0,34	261200
Plomo	$0{,}166 \cdot 10^6$	0,44	57640
Vidrio	$0{,}6 \cdot 10^6$	0,25	240000
Hormigón	$0{,}25 \cdot 10^6$	0,2	104167
Madera	$0{,}1 \cdot 10^6$	0,2	41667
	(Kg/cm²)	(—)	(Kg/cm²)

fig. (6.24.5.)

El hecho de que se denominé a la constante E, módulo de Young, es una realidad no esclarecida de forma satisfactoria, para algunos es debido al reconocimiento a Thomas Young por la determinación de dicho módulo para una gran diversidad de materiales, lo cual, si bien no totalmente probado no es en absoluto extraño pues Young efectuó aportaciones y trabajos en campos tan diferentes como Medicina, Física y Resistencia de Materiales.

Thomas Young nació en Milverton, Somerset el 13 de junio de 1773, y de él se dice que leía a los dos años, y que a los cuatro ya había leído la Biblia, demostrando durante toda su vida sus portentosas capacidades, que motivaron que en su etapa como alumno de Cambridge fuese conocido como "Phenomenon Young".



THOMAS YOUNG

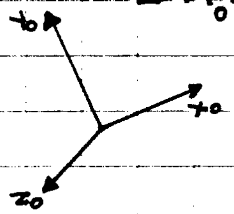
Estudió medicina, y fue secretario de la Royal Society, pero realizó trabajos tan diversos como descifrar los jeroglíficos del Antiguo Egipto.

Murió en Londres el 10 de mayo de 1829.

6.25. RELACIÓN ENTRE EL TENSOR DE TENSIONES Y EL DE DEFORMACIONES EN MATERIALES ISÓTROPOS.

Tal como ya se ha indicado, las DIRECCIONES PRINCIPALES DEL TENSOR DE TENSIONES SON COINCIDENTES con las DEL TENSOR DE DEFORMACIONES, dado las propiedades atribuidas a los MATERIALES ISÓTROPOS

Supongamos que adoptamos como sistema de referencia las DIRECCIONES PRINCIPALES, en cuyo caso las matrices asociadas a los dos tensores, serán:



$$[T_{\sigma_0}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_0} \end{bmatrix} \qquad [T_{\delta}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{z_0} \end{bmatrix}$$

(6.25.1.) (Con el subíndice cero, indicamos que la referencia es una dirección principal)

Según la ley GENERALIZADA DE HOOKE, puede establecerse (6.25.2.):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{z_0} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{x_0} \\ \sigma_{y_0} \\ \sigma_{z_0} \end{bmatrix}$$

(6.25.2.)

Suprimiendo las 3 últimas columnas de (6.23.5.) puesto que $\tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$, y las tres últimas filas, puesto que ya sabemos que $\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$.

La expresión anterior equivale a (6.25.3.).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{z_0} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{x_0} \\ \sigma_{y_0} \\ \sigma_{z_0} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} \left(\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} + \sigma_{z_0} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(6.25.3.)

Las dos primeras matrices columnas, constituyen las diagonales principales (trazas), de los tensores $[T_{D_\delta}]$ y $[T_{T_0}]$ que se han indicado en (6.25.1.), y dado que los restantes elementos son nulos en las matrices asociadas, será factible transformar (6.25.3.) en (6.25.4.) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{z0} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z0} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{x0}+\sigma_{y0}+\sigma_{z0}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6.25.4.)

Simbolizando por $[I]$ la matriz unidad, se verificará en tensores referidos a sus direcciones principales, el que :

$$[T_{\delta}] = \frac{1+\nu}{E}[T_{T_0}] - \frac{\nu}{E}(\sigma_{x0}+\sigma_{y0}+\sigma_{z0})[I] \qquad (6.25.5.)$$

La suma de las tensiones σ_{x0}, σ_{y0} y σ_{z0} es el INVARIANTE LINEAL ∂_1^T DEL TENSOR DE TENSIONES, por lo que podremos establecer :

$$[T_{\delta}] = \frac{1+\nu}{E}[T_{T_0}] - \frac{\nu}{E}\partial_1^T [I] \qquad (6.25.6.)$$

Aplicando la teoría del CAMBIO DE BASE, podremos establecer :

$$[T_0] = [C]^{-1}[T_{D_0}][C] \qquad (6.25.7.)$$

siendo $[C]$ la matriz del CAMBIO DE BASE.

Sustituyendo (6.25.6.) en (6.25.7.) se obtiene :

$$[T_0] = [C]^{-1}\left(\frac{1+\nu}{E}[T_{T_{0r}}] - \frac{\nu}{E}\partial_1^T [I]\right)[C]$$

$$[T_0] = \frac{1+\nu}{E}[C]^{-1}[T_{T_0}][C] - \frac{\nu}{E}\partial_1^T [C]^{-1}[I][C]$$

Como: $[T_T] = [C]^{-1}[T_{T_0}][C]$ y $[C]^{-1}[I][C] = [C]^{-1}[C] = [I]$

resultará:

$$\boxed{[T_D] = \frac{1+\nu}{E}\,[T_T] - \frac{\nu}{E}\,\partial_1^T\,[I]} \quad (6.25.8.)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\gamma_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\tau_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{ij} = \frac{1}{\frac{E}{2(1+\nu)}}\,\tau_{ij} = \gamma_{ij}$$

Puesto que según la LEY GENERALIZADA DE HOOKE, se debe verificar: $\gamma_{ij} = \frac{1}{G_T}\,\tau_{ij}$

se desprende que:

$$\boxed{G_T = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (6.25.9.)$$

Por lo que, la CONSTANTE ELÁSTICA G_T NO ES INDEPENDIENTE DE E y ν, y la fórmula (6.25.9.) establece la correspondiente relación.

Si deseamos obtener el TENSOR DE TENSIONES en función del TENSOR DE DEFORMACIONES, puede ello efectuarse deduciendo previamente la relación entre los INVARIANTES LINEALES de los tensores de TENSIONES y de DEFORMACIONES. ($\partial_1^T, \partial_1^D$)

Sumando las tres filas, es decir las tres igualdades de la expresión (6.25.3.), resultará:

$$(\varepsilon_{x_0}+\varepsilon_{y_0}+\varepsilon_{z_0}) = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{x_0}+\sigma_{y_0}+\sigma_{z_0}) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{x_0}+\sigma_{y_0}+\sigma_{z_0})\,3$$

$$\partial_1^D = \frac{1+\nu}{E}\,\partial_1^T - \frac{3\nu}{E}\,\partial_1^T \Rightarrow \boxed{\partial_1^D = \frac{1-2\nu}{E}\,\partial_1^T} \quad (6.25.10.)$$

$$\boxed{\partial_1^T = \frac{E}{1-2\nu}\,\partial_1^D} \qquad (6.25.11.)$$

Sustituyendo en (6.25.8.) resulta:

$$[T_0] = \frac{1+\nu}{E}[T_T] - \frac{\nu}{E}\frac{E}{1-2\nu}\partial_1^D\,[I]$$

$$\boxed{[T_T] = \frac{E}{1+\nu}[T_0] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\partial_1^D\,[I]} \qquad (6.25.12.)$$

Resumiendo, resultará:

$$\boxed{\begin{aligned} [T_0] &= \frac{1+\nu}{E}[T_T] - \frac{\nu}{E}\partial_1^T\,[I] \\ [T_T] &= \frac{E}{1+\nu}[T_0] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\partial_1^D\,[I] \\ G_T &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \partial_1^D &= \frac{1-2\nu}{E}\partial_1^T \end{aligned}} \qquad (6.25.13.)$$

OPCIONAL

Si queremos relacionar en BASE NO ORTOGONAL la matriz de las TENSIONES $[\sigma]$, con la matriz del TENSOR DE DEFORMACIONES, debemos recordar la relación:

$$[T_T] = \frac{1}{\sqrt{|R|}}[\sigma][S_\alpha][R]$$

$$\Downarrow$$

$$[\sigma] = \sqrt{|R|}\;[T_T][R]^{-1}[S_\alpha]^{-1} \qquad (6.25.14.)$$

Sustituyendo (6.25.12.) en (6.25.14.):

$$\boxed{[\sigma] = \sqrt{|R|}\left(\frac{E}{1+\nu}[T_0] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\partial_1^D[I]\right)[R]^{-1}[S_\alpha]^{-1}}$$

(6.25.15.)

Relación entre la MATRIZ DE LAS TENSIONES y la MATRIZ DEL TENSOR DE DEFORMACIONES EN BASE NO ORTOGONAL

6.26. NÚMERO DE CONSTANTES ELÁSTICAS INDEPENDIENTES

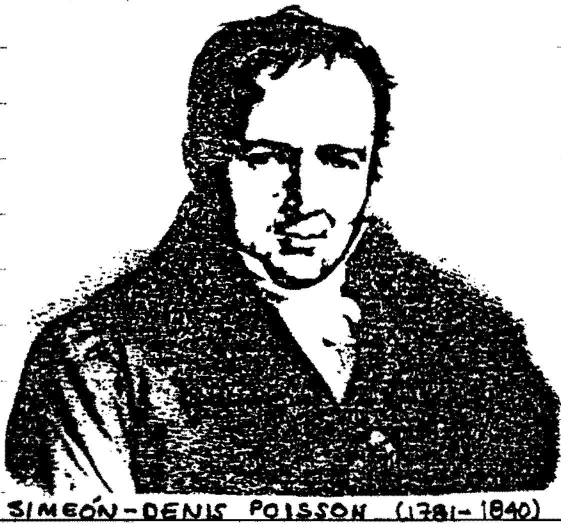
Definimos inicialmente tres constantes elásticas E, ν y G_T, pero en (6.25.9.) hemos deducido que G_T está determinado por las dos primeras constantes elásticas E y ν.

$$G_T = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

por lo que como máximo, en cuerpos isótropos existen DOS CONSTANTES ELÁSTICAS INDEPENDIENTES

LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785-1836)

Este hecho, parece sumamente claro, una vez estudiada la teoría anteriormente expuesta, pero ello en realidad no ha sido así históricamente, puesto que en mayo de 1821, Louis Marie Henri Navier terminó una memoria en la que exponía la teoría MOLECULAR que posteriormente se denominaría "de NAVIER" en su honor, desarrollando por primera vez las ecuaciones generales de equilibrio y movimiento que deben satisfacer todo punto de un sólido, utilizandose la hipótesis de que todas las moléculas de un cuerpo se ejercen fuerzas de linea de acción la recta que las une, de módulo proporcional a la variación unitaria de la distancia que las separa, y de sentido opuesto al movimiento relativo existente entre las mismas.



SIMEÓN-DENIS POISSON (1781-1840)

Mediante un minucioso desarrollo de la TEORÍA MOLECULAR, Simeón-Denis Poisson demostró que las deformaciones unitarias transversales son la cuarta parte de las deformaciones unitarias longitudinales y de signo opuesto, es decir que $\nu = 0.25$ para todo material.

La conclusión de Poisson, justifica que el coeficiente ν se denomine con el nombre de dicho científico, y que a partir de entonces la conjunción de los estudios de Navier y Poisson se denominara TEORIA DE LA UNICONSTANTE, puesto que al ser ν constante, las características elásticas del material solo dependería del MODULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL.

A la citada TEORÍA, se unieron como paladines científicos del prestigio de Culmann, Gabriel Lamé y Barré de Saint-Venant.

K. Culmann (1821-1881)

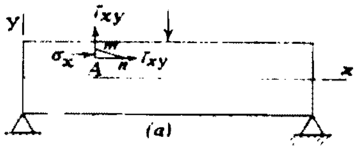
La importancia de Karl Culmann es mucho mayor que la del simple hecho de haber participado en el debate del número de constantes elásticas, puesto que sus aportaciones a la grafoestática son de una singular importancia.

El trabajo profesional de Culmann se centró fundamentalmente en el diseño y construcción de puentes para ferrocarriles, debiéndose a él la solución gráfica de obtener la posición más desfavorable de un tren de cargas al desplazarse a lo largo de una viga. Su libro "Die graphische Statik" publicado en 1866 en Zürich (Era profesor de teoría de estructura del Politécnico de Zürich), es una obra de capital importancia, donde enseña la forma de utilizar los polígonos funiculares para resolver los más diversos problemas

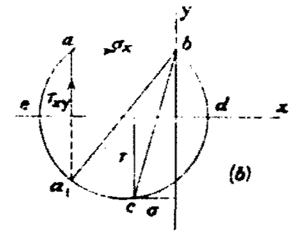
Culmann propuso para el análisis de las tensiones un círculo que es el antecesor del círculo que hoy conocemos como de Mohr.

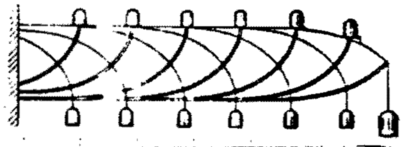
Su análisis de tensiones y deformaciones está influenciado por "RESUMEN DE LAS LECCIONES" de Navier, hecho que motivó su apoyo a la TEORÍA DE LA UNICONSTANTE.

Pero el hecho que tendría una mayor importancia, para que la polémica sobre una o dos constantes perdurará fue el apoyo que prestó a la TEORÍA MOLECULAR Barré de Saint-Venant

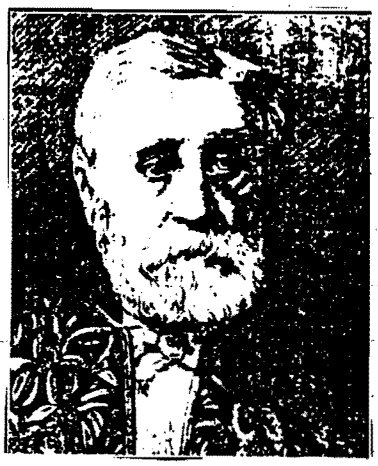


CIRCULO DE TENSIONES DE CULMANN





Es curioso, que aceptasen la teoría de la UNICONSTANTE hombres de la capacidad de Saint-Venant, que fué el primero que explicó la TEORÍA DE LA ELASTICIDAD en aulas universitarias, y cuyo estudio sobre la TEORÍA DE LA TORSIÓN y el MÉTODO SEMI-INVERSO que utilizó en la misma, han pasado a formar parte del cuerpo doctrinal fijo de nuestra ciencia.



BARRÉ de SAINT-VENANT (1797—1886)

Saint-Venant también efectuó un importante estudio sobre el ANÁLISIS DINÁMICO, enunció su famoso principio como pieza fundamental en la exposición de su TEORÍA DE LA TORSIÓN

Las mayores contribuciones a la TEORÍA DE LA ELASTICIDAD las efectuó como comentarios traduciendo obras, llegando al caso de que fuese mayor la información contenidas en dichas notas marginales que el propio texto principal.

Únicamente se conserva además de su MEMORIA sobre la TEORÍA DE LA TORSIÓN, sus famosas "LECCIONES" que recojen sus clases magistrales en la Escuela Politécnica de París, cuando fué nombrado profesor como sustituto del Prof. Coriolis, por enfermedad de este, y en donde queda constancia de su defensa de la TEORÍA DE LA UNICONSTANTE.

La vida de Saint-Venant, explica el poco eco que tuvo en su época un científico de talla excepcional como él, como consecuencia de la marginación que sufrió por ser uno de los primeros pacifistas activo de que se tiene constancia, lo que motivo un rechace de sus contemporaneos acusandole de cobarde y de haber desonrado el uniforme de su Patria. En 1814 fue movilizado para defender París, otorgandosele el grado de sargento primero, como premio al hecho de que fuese número uno de su promoción en la Escuela Politécnica, y ello le llevo a que el acto de objeción de conciencia que protagonizó tuviese una mayor gravedad.

Saint-Venant el 30 de marzo de 1814, de forma inesperada abandonó su posición gritando: " Mi conciencia me prohibe luchar".

Las consecuencias fueron lógicamente graves, fue expulsado de la Politécnica, y pese a su gran formación tuvo que trabajar durante ocho años como ayudante en la industria de la pimienta.

Saint-Venant nació en 1797 en el castillo de Fortoiseau (Seine y Marne), siendo hijo de un experto en economía rural y falleció a los 89 años de edad en plena actividad.

El primero que puso en crisis la teoría de la UNICONSTANTE fué George Green (1793-1841) cuya reseña biográfica ya se expuso en (6.22.).

Cauchy fué el primer científico de resonancia que apoyo a Green, encabezando una polémica que duraría un tercio de siglo.

AGUSTIN CAUCHY

A Cauchy se unió W. Wertheim que fué el primero en abordar por vía experimental la resolución del debate sobre UNA O DOS CONSTANTES ELÁSTICAS INDEPENDIENTES.

Wertheim había nacido en Viena en 1815, doctorandose en medicina, e iniciando sus trabajos de investigación determinando el módulo de Young de diversos materiales.

Wertheim observó que al aumentar las tensiones, deja de verificarse la ley de Hooke por perderse la linealidad entre tensiones y deformaciones, y pretendió determinar la tensión σ_p que denominó LIMITE ELÁSTICO DEL MATERIAL, siendo sin duda el primero que introdujo este concepto. (fig. 6.26.1.)

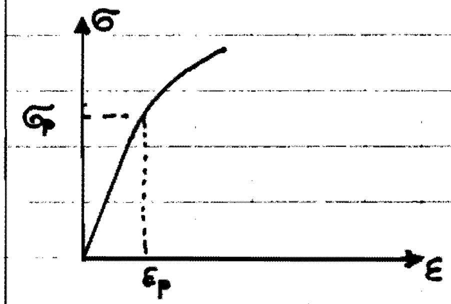


fig. 6.26.1.

Wertheim observó la imposibilidad de establecer σ_p, por el hecho de que todos los materiales no verifican en realidad la Ley de Hooke, por no ser perfectamente lineal la relación entre tensión-deformación, tal como se refleja en la fig. 6.26.2.

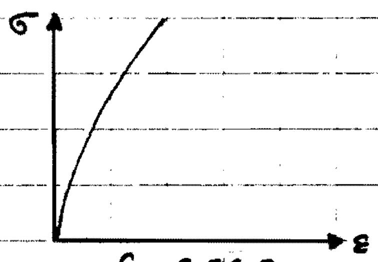


fig. 6.26.2.

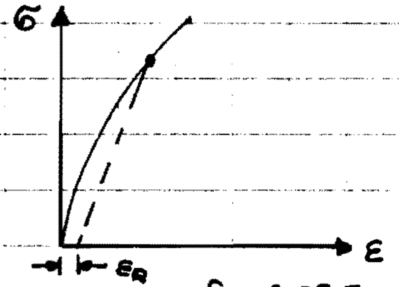


fig. 6.26.3.

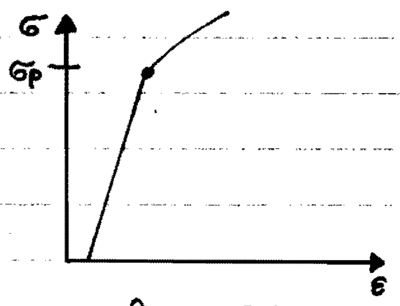


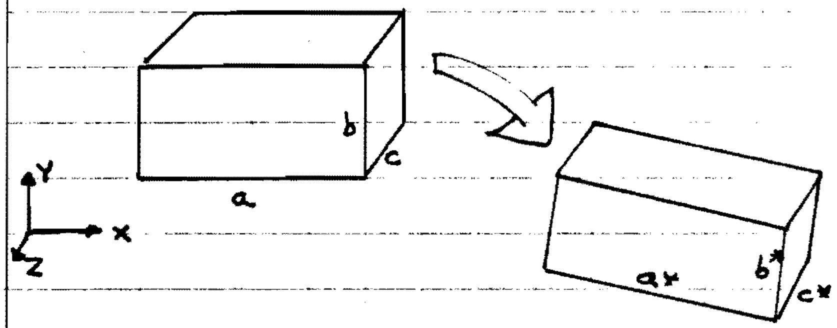
fig. 6.26.4.

Wertheim se percató que como consecuencia de la no linealidad, al cesar la tensión, se producen deformaciones remanentes ε_R. (fig. 6.26.3) después de lo cual, el comportamiento del material varió, siendo lineal hasta σ_p. (fig. 6.26.4.)

Esto le condujo a cambiar la definición del LÍMITE ELÁSTICO estableciendo que es la TENSIÓN que genera una deformación remanentes de 0.00005, definición que hoy aun se mantiene.

Wertheim propuso el siguiente método para la determinación del coeficiente ν, a traves del cual dedujo que en casi todos los materiales en vez de ser el valor de 0.25 que estableció la teoría de la uniconstante, uno próximo a 1/3

La variación unitaria de volumen de un paralelepípedo puede calcularse mediante la expresión:



$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{a^*b^*c^* - abc}{abc} = \frac{a^*b^*c^*}{abc} - 1 = \frac{(a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c)}{abc} - 1$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right) - 1 = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \underbrace{\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z}_{\text{despreciables si las deformaciones son sumamente pequeñas}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \partial_1^D} \quad (6.26.1.)$$

Como se dedujo en (6.24.10) $\partial_1^D = \frac{1-2\nu}{E}\, \partial_1^T$, por lo que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}\, \partial_1^T \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)} \quad (6.26.2.)$$

y en consecuencia, Wertheim utilizó:

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)E}{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}\right) \quad (6.26.3.)$$

De (6.25.3.) se deduce que por ser lógicamente

$$\text{sig}\{\Delta V\} = \text{sig}\{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\left(\frac{\Delta V}{V}\right) E}{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(\frac{\Delta V}{V}\right) E}{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}\right) \leq 0.5 \qquad \boxed{\nu \leq 0.5}$$

Lo cual determina el límite superior de ν.

Los ensayos de Wertheim no fueron concluyentes dado que las desviaciones de ν experimentales respecto al valor 0.25, se pudieron atribuir a la influencia de ligeras anisotropías de los materiales.

Wertheim después de alcanzar un alto grado en la Universidad Politécnica, tuvo un final trágico suicidándose, lo que impidió que fuese él, el que tuviese el honor de finalizar la polémica sobre las constantes elásticas.

FRANZ NEUMANN
(1798-1895)

Sería por la vía experimental iniciada por WERTHEIM que se alcanzaría la solución definitiva del problema, la cual llegaría de la mano de Franz Neumann y de su discípulo W. Voigt.

Franz Neumann nacido en Joachimsthal en la provincia de Brandenburgo en 1798, en el seno de una modesta familia, fué movilizado con motivo de las contiendas bélicas que en aquel entonces convulsionaba Europa Central, estudió inicialmente teología y derecho, y posteriormente en la Universidad de Berlín, Ingeniería en la especialidad de Minas.

Neumann estableció la base teórica de la FOTOELASTICIDAD.

La principal contribución a la ciencia, quizas fué la creación de SEMINARIOS en las UNIVERSIDADES, que la práctica demostró ser un eficaz sistema para la formación de futuros investigadores, y como método de investigación, lo que motivo que la Universidad de Königsberg adquiriera un prestigio creciente y que de la misma surgieran científicos de la valiá de Kirchhoff, Clebech, Borchardt, Saalschütz y Voigt.

Neumann defendió en un principio la TEORIÁ MOLECULAR y de la UNICONSTANTE, pero al mantener correspondencia con el investigador ruso Kupffer que pretendió determinar el módulo de Young, calculando G_T por medio de ensayos de tracción, se observó valores incorrectos de E, si se adoptaba como $\nu=0.25$, ello condujo a Neumann a defender el carácter de variable según el material del coeficiente de Poisson.

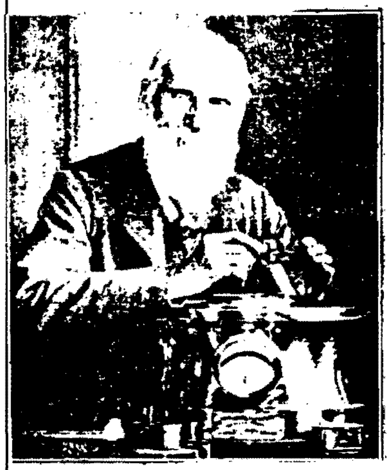
Para demostrar dicha realidad de forma incontestable, y que no se pudiese recurrir al argumento de que el material estaba afectado de anisotropiá, Neumann aconsejo a su discipulo W. Voigt que utilizase cristales perfectamente cortados según los ejes de simetria de su estructura cristalina, y en efecto, se obtuvieron valores de ν distintos de 0.25

La via experimental se demostro como el método determinante para establecer una realidad que desde el punto de vista teorico no se habia podido esclarecer.

Así pues, después de un tercio de siglo de debates, quedaba establecido de forma definitiva, que en cuerpos ISÓTROPOS son DOS LAS CONSTANTES ELÁSTICAS INDEPENDIENTES, y en los ANISÓTROPOS VEINTIUNA COMO MÁXIMO.

Desde un punto de vista teórico fue William Thomson, más conocido como LORD KELVIN, quien al redactar los artículos de colaboración para la confección de la novena edición de la Enciclopedia Británica proporciona una explicación del fracaso de la TEORIÁ MOLECULAR, al señalar que la misma no considera las fuerzas de fricción, cuya existencia él verificó, así como a la circunstancia de que en los sólidos a diferencia de los fluidos dichas fuerzas no son proporcionales a la velocidad de las moléculas.

Thomson al definir el módulo de ELASTICIDAD LONGITUDINAL hace referencia a Thomas Young, hecho que contribuyo de forma definitiva a la actual denominación de dicha constante elástica.



LORD KELVIN

El máximo error de Kelvin, fué declarar pomposamente en 1880 que: "LA FÍSICA YA ESTÁ TOTALMENTE DESCUBIERTA", error que él mismo pudo comprobar, si bien de forma tozuda, no aceptó la realidad de los nuevos descubrimientos, negando la radiactividad entre otras cosas.

No obstante, la categoria de LORD KELVIN es merecedora de que se conozca su biografia, que a continuación resumimos.

William Thomson nació en Belfast el 26 de Junio de 1824, en el seno de una familia de origen escoces, siendo el padre un famoso profesor de matemáticas, que al ganar la cátedra en la Universidad de Glasgow, se trasladaron a dicha ciudad cuando él tenia ocho años.

Asistió desde el primer momento a las conferencias que daba su padre, y a la edad de diez años ingresó en la citada Universidad, estudiando lenguas clásicas, matemáticas y filosofiá natural.

A los dieciseis años, leyó el libro de Fourier "Teoriá analítica del calor", libro que estudiaba a escondidas de su padre, que consideraba que las vacaciones eran para descansar y aprender idiomas, a cuyo fin se hablan desplazado a Frankfort, para que perfeccionase su alemán, no obstante todos los dias, se refugiaba en el sótano y leiá algo de Fourier.

No fué sorprendentemente el número uno en su graduación, en el Colegio de St. Peter de CAMBRIDGE, sino el dos, porqué su excesiva creatividad, quizas le impidió prepararse y centrarse en las pruebas especificas que se efectuaban para establecer el orden de la promoción.

Siendo alumno presentó ante la Royal Society una memoria sobre matemáticas, que fue leida por un veterano profesor ya que su edad impedia que él pudiera efectuarlo.

A los veintidos años fue nombrado profesor de Filosofiá Natural de la Universidad de Glasgow, en la cual impartió una docencia de un alto nivel, que a veces provocaba que no le pudieran entender los que no poseian un alto nivel personal.

Apoyó e hizo que el trabajo de Joule lo admitiese la comunidad científica de su época.

Estableció el cero absoluto (-273,18°C)

En 1851 anunció que la degradación de la energiá al transformarse en calor, produciriá el fin del Universo, si este no era infinito, concepto de degradación que posteriormente Clausius denominó "ENTROPIA"

Efectuó un importante estudió sobre los cambios de temperatura que se producen como consecuencia de tracciones o compresiones instantáneas, así como el trabajo preciso para completar un ciclo de carga y descarga.

Kelvin dedujo que si una probeta se somete durante un pequeño intervalo de tiempo a una tensión σ_0, el proceso de deformación es OAB de la figura 6.26.5.

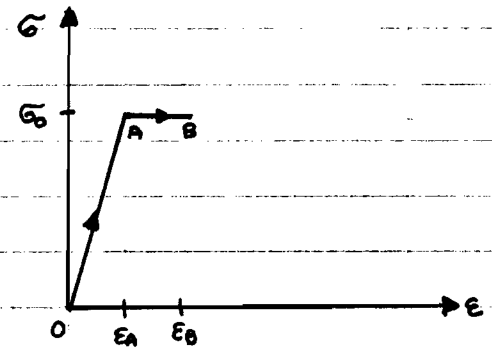


fig. 6.26.5

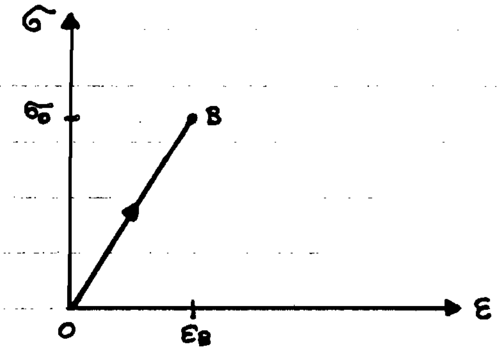


fig. 6.26.6.

En contraste, si la tensión se incrementa lentamente hasta el valor σ_0, el proceso de deformación es OB, de la fig. 6.26.6.

En el primer caso, la tracción produce un incremento de volumen, que exige un aporte de calor del entorno, pero dado el carácter casi instantaneo del proceso, este no puede efectuarse, por lo que desciende la temperatura del sólido. Una vez finalizado el proceso de incremento de la tensión, estabilizada esta en el valor σ_0, el entorno cederá calor al cuerpo, y este al incrementar su temperatura se dilatará según la recta AB.

El proceso de descarga puede realizarse según las dos mismas posibilidades, proceso instantaneo o lento (fig. 6.26.7 y 6.26.8).

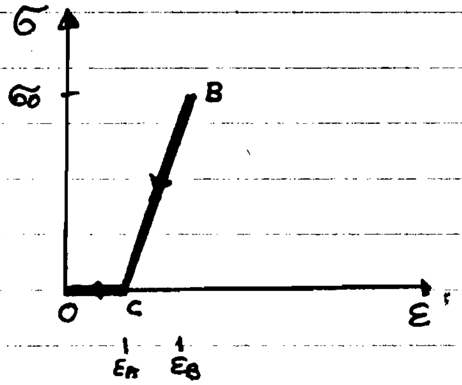


fig. 6.26.7

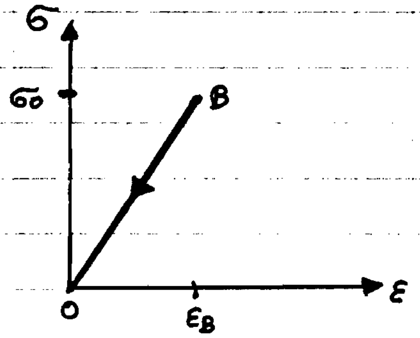


fig. 6.26.8.

El área OABC representa el trabajo mecánico por unidad de volumen que se pierde en el ciclo de carga-descarga, según dedujo Kelvin.

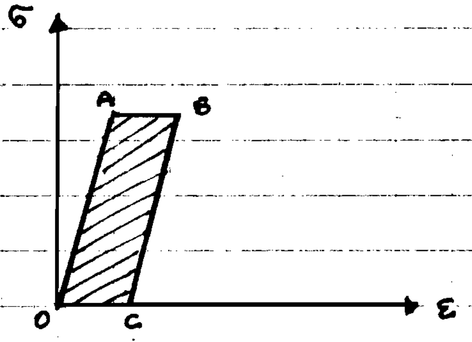


Fig. 6.26.9.

Lord Kelvin demostró que existían materiales peculiares que al alargarse se calientan en vez de enfriarse como acontece con la goma india.

Kelvin fué el primero en enunciar que el TRABAJO DE DEFORMACIÓN SÓLO ES FUNCIÓN DE LA DEFORMACIÓN FINAL, Y NO DEL PROCESO SEGÚN EL CUAL SE ALCANZA DICHA DEFORMACIÓN.

En colaboración con P.G. Tait, inició en 1861 la redacción de "TRATADO DE FILOSOFIA NATURAL", en donde están recogidas importantes aportaciones de Kelvin a la TEORÍA DE LA ELASTICIDAD, libro que se publicó en 1867.

En la citada obra, resuelve el problema del cuerpo homogéneo, isótropo y semiinfinito sometido a una acción puntual, problema que es de vital importancia en la base teórica del moderno método de los ELEMENTOS DE CONTORNO.

Estudió las condiciones de contorno de placas, completando la teoría efectuada por Kirchhoff.

Cambridge no se resignó a que Kelvin no perteneciese a su cuadro de profesores, efectuandose múltiples intentos para convencerle a retornar a la Universidad de la que era exalumno, ofreciendoselele entre otras cosas, la cátedra de Física Cavendisch, pero él prefirió continuar en Glasgow.

El dia de su jubilación (1899) concurrieron a Glasgow científicos de todo el mundo para felicitar a este extraordinario científico, pero a los pocos dias presentó una instancia para ser admitido como estudiante investigador, a fin de poder tener una presencia reglamentaria en la Universidad y de esta forma acceder a los laboratorios que él antes dirigía, y poder continuar sus investigaciones.

Murió admirado y respetado a los ochenta y cuatro años, el 17 de diciembre de 1907, siendo enterrado en la abadia de Westminster al lado de Isaac Newton.

6.27. REPRESENTACION CONJUNTA DE LOS CÍRCULOS DE MOHR ASOCIADOS A LOS TENSORES DE TENSIÓN Y DE DEFORMACIÓN.

En base ORTOGONAL, hemos indicado en (6.25.8.) el que se verifica la siguiente relación entre los tensores de tensiones y de deformaciones

$$[T_D] = \frac{1+\nu}{E}[T_T] - \frac{\nu}{E}\vartheta_1^T [I] \qquad (6.27.1.)$$

El segundo sumando sólo afecta a los términos de la diagonal principal, dado que es el producto de un número real por la matriz unidad, por lo que inicialmente la relación entre las matrices de ambos tensores está determinada por el factor

$$\text{DEFORMACIONES} = \frac{1+\nu}{E}\ \text{TENSIONES}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{DEFORMACIONES} = \frac{1}{2G_T}\ \text{TENSIONES}} \qquad (6.27.2.)$$

Si para representar el círculo de Mohr de tensiones, un determinado segmento le corresponde un valor σ_U, el mismo segmento se le asociará una deformación $\varepsilon_U = \frac{\sigma_U}{2G_T}$, que se empleará para construir el círculo de Mohr de DEFORMACIONES.

0 —— σ_U

0 —— ε_U

$$\boxed{\varepsilon_U = \frac{\sigma_U}{2G_T}} \qquad (6.27.3.)$$

ESCALAS PARA INTERPRETAR LOS CÍRCULOS DE MOHR DE TENSIONES Y DE DEFORMACIONES

Para que el círculo de Mohr sea único, es preciso desplazar el origen en el valor :

$$\Delta = \frac{\nu \partial_1^T}{E}$$

que por representar una deformación deberá utilizarse la escala gráfica de deformaciones.

Si deseamos calcular el desplazamiento del origen entre el sistema de referencia σ, τ y el de $\varepsilon, \gamma/2$, en TENSIONES, nos bastará con utilizar el factor de relación entre las dos escalas, y en consecuencia:

$$\Delta = \left(\frac{\nu \partial_1^T}{E}\right) \times (2G_T) = \boxed{\frac{\nu \partial_1^T}{1+\nu} = \Delta}$$

DESPLAZAMIENTO MEDIDO EN LA ESCALA DE TENSIONES.

(6.27.4.)

Si tenemos en cuenta la relación entre los invariantes lineales de los tensores de tensiones y de deformaciones indicada en (6.24.10), resultará:

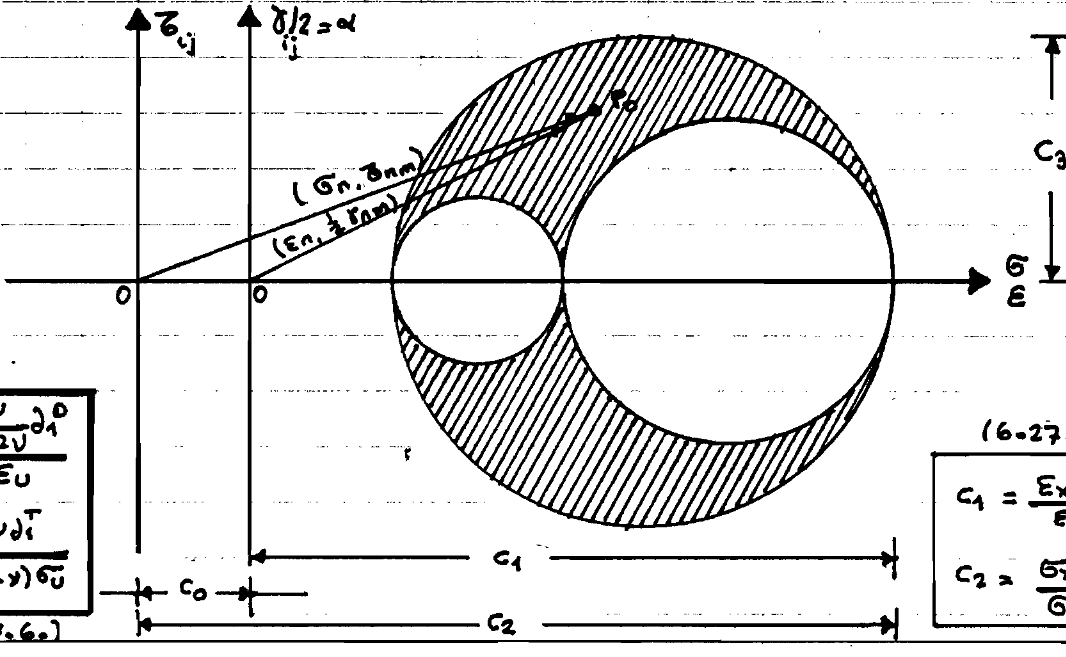
$$\Delta = \frac{\nu \partial_1^T}{E} = \frac{\nu}{E}\left(\frac{E}{1-2\nu}\,\partial_1^D\right) = \boxed{\frac{\nu}{1-2\nu}\,\partial_1^D = \Delta}$$

DESPLAZAMIENTO MEDIDO EN LA ESCALA DE DEFORMACIONES

(6.27.5.)

Si $\partial_1^T > 0$ o $\partial_1^D > 0$, la posición relativa de los ejes de referencia para que el círculo de Mohr sea único, será:

$\partial_1^T > 0$
$\partial_1^D > 0$



$$\boxed{C_0 = \frac{\frac{\nu}{1-2\nu}\partial_1^D}{\varepsilon_U} \qquad C_0 = \frac{\nu \partial_1^T}{(1+\nu)\sigma_U}}$$

(6.27.6.)

(6.27.7.)

$$\boxed{C_1 = \frac{\varepsilon_{xo}}{\varepsilon_U} \qquad C_2 = \frac{\sigma_{xo}}{\sigma_U}}$$

6.28. ESTADOS PLANOS DE DEFORMACION

Puede definirse como estados planos de deformación, aquellos en los que una de las componentes i de los vectores corrimientos en todo punto es nula (o constante), y las otras dos componentes presentan valores independientes de la coordenada correspondiente al eje i

Sea el eje i el z, y la base ORTOGONAL, en cuyo caso:

$$\left.\begin{array}{l} u = f_1(x, y) \\ v = f_2(x, y) \\ w = 0 \quad (\text{ó cte}) \end{array}\right\}$$

Esto suele acontecer en sólidos que poseen una longitud indefinida según OZ, y las secciones transversales XY son constantes, estando todas ellas sometidas a la acción de fuerzas de idéntica distribución. En las condiciones expuesta los desplazamientos según el eje OZ pueden considerarse impedidos en todas las secciones, y los corrimientos de cada punto se verificarán siempre en el plano transversal XY, dependiendo únicamente los mismos de las coordenadas x e y, y de forma independiente de la coordenada z.

Son casos típicos de DEFORMACIÓN PLANA el muro de contención de tierras con altura constante y sometido a la misma presión del terreno, o la de un túnel de alcantarillado o las tuberías subterraneas

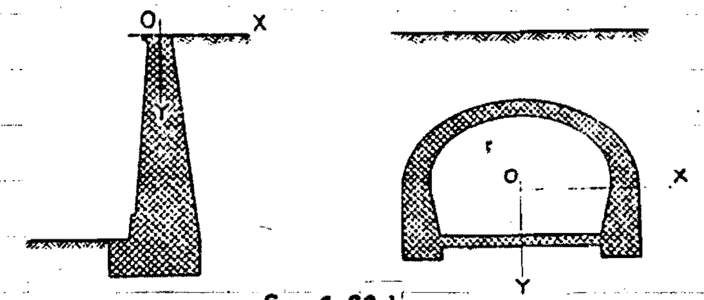


Fig. 6.28.1.

La matriz GRADIENTE de las DEFORMACIONES será:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y recordando que para pequeñas deformaciones, y en base ortogonal se verifica:

$$[T_0] = \frac{1}{2}\left([\Omega]^T + [\Omega] \right)$$

$$\Downarrow$$

$$[T_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ello implica, que la matriz del TENSOR DE DEFORMACIONES, referida a sus DIRECCIONES PRINCIPALES, presentará la siguiente forma:

$$[T_0] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos indica, que el círculo de Mohr ocupará la siguiente posición respecto al sistema de referencia $\varepsilon, \gamma/2$:

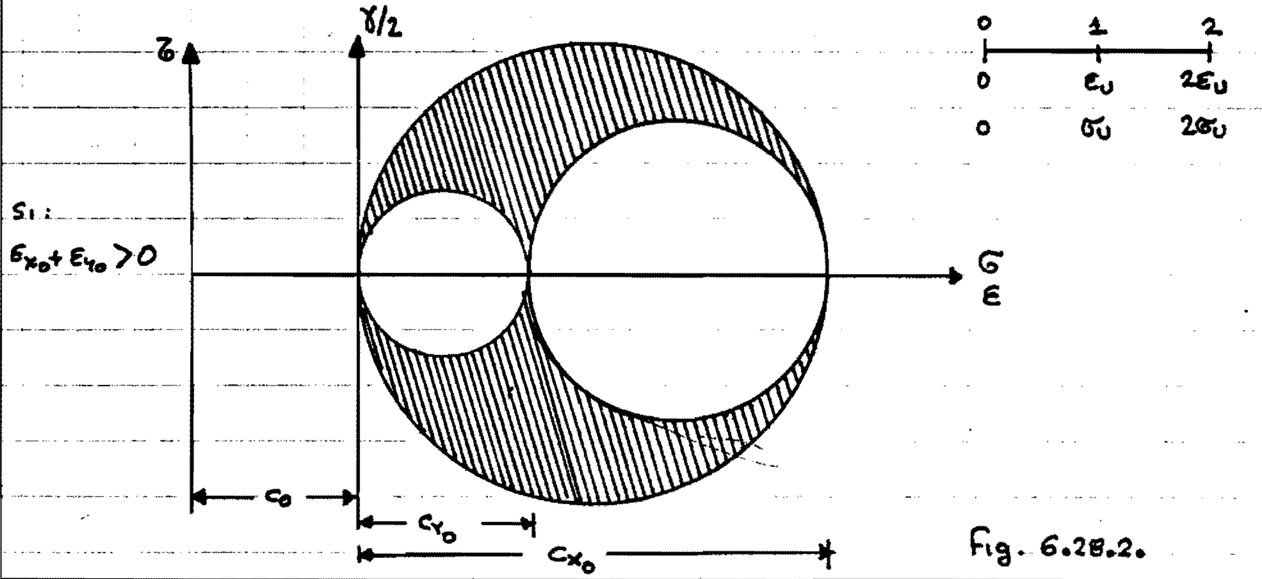


Fig. 6.28.2.

Siendo:

$$\boxed{c_0 = \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{x_0}+\varepsilon_{y_0})\frac{1}{\varepsilon_U}} = \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\frac{1}{\varepsilon_U}$$

$$\boxed{c_{x_0} = \frac{\varepsilon_{x_0}}{\varepsilon_U}} \qquad \boxed{c_{y_0} = \frac{\varepsilon_{y_0}}{\varepsilon_U}}$$

La fig. 6.28.2 nos enseña gráficamente el que

> UN ESTADO PLANO DE DEFORMACIÓN, en el que $\underline{\partial_1^D \neq 0}$,
>
> NO ES UN ESTADO PLANO DE TENSIONES

puesto que según lo expuesto en 6.26., resultará:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_U &= \varepsilon_U \cdot 2G_T \\ \sigma_{x_0} &= (c_0 + c_{x_0})\sigma_U \\ \sigma_{y_0} &= (c_0 + c_{y_0})\sigma_U \\ \sigma_{z_0} &= c_0\,\sigma_U \end{aligned}\right\}$$

luego los TRES AUTOVALORES DEL TENSOR DE TENSIONES SERÁN NO NULOS.

El hecho expuesto, de que el tensor de tensiones no sea de 2 DIMENSIONES, nos indica que no pueden eliminarse sin previo análisis la tercera fila y columna de las matrices que establecen las relaciones (6.25.13.), que a continuación reproducimos:

$$\left.\begin{aligned} [T_0] &= \frac{1+\nu}{E}[T_T] - \frac{\nu}{E}\,\partial_1^T [I] \qquad (6.28.1.) \\ [T_T] &= \frac{E}{1+\nu}[T_0] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\partial_1^D [I] \qquad (6.28.2.) \end{aligned}\right\}$$

La transformación (6.28.2) de deformaciones a tensiones puede efectuarse prescindiendo de la tercera fila y columna, en cuyo caso desarrollada pasará a ser:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \alpha_{xy} \\ \alpha_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad (6.28.3.)$$

$(\alpha_{xy} = 1/2\,\gamma_{xy})$

De la ecuación matricial (6.28.2.), mediante su tercera fila, se deduce que:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \quad (6.28.4.)$$

De la (6.28.1.), utilizando su tercera fila se llega a que:

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (6.28.5.)$$

Esta expresión nos permite calcular ϑ_1^T en función exclusiva de σ_x y σ_y

$$\vartheta_1^T = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\boxed{\vartheta_1^T = (1+\nu)(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (6.28.6.)$$

Sustituyendo (6.28.6.) en (6.28.1.), y eliminando la tercera fila y columna, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}(1+\nu)(\sigma_x + \sigma_y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)} \quad (6.28.7.)$$

Resumiendo:

$[T_D] = \frac{1+\nu}{E}\left([T_T] - \nu(\sigma_x + \sigma_y)[I]\right)$	$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$
$[T_T] = \frac{E}{1+\nu}\left([T_D] + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)[I]\right)$	$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

(6.28.8.)

Si utilizamos las MATRICES DE ENLACE para establecer la relación entre TENSIONES Y DEFORMACIONES, puede verificarse que dichas matrices serán en el caso de ESTADOS PLANOS DE DEFORMACIÓN :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

ESTADOS PLANOS DE DEFORMACIÓN

(6.28.9.)

En el caso de BASE NO ORTOGONAL, como corresponde a la figura 6.28.3., las expresiones (6.28.8.) son válidas, pero solo hay que tener presente que:

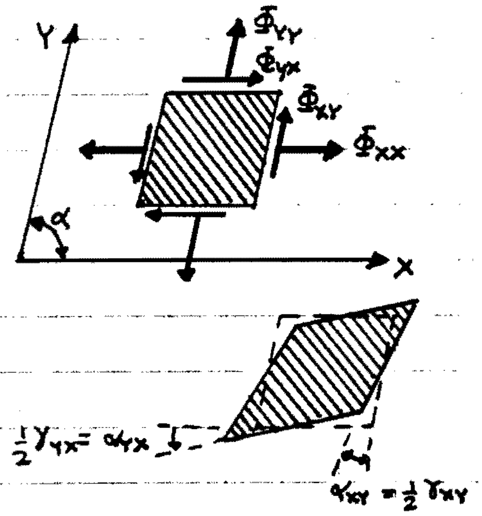


fig 6.28.3.

$$[T_T] = \frac{1}{\sqrt{|R|}}[\sigma][S_\alpha][R]$$

Como: $[R] = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|R| = 1 - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$[S_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

$$[T_T] = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{d_1^T = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\cos\alpha(\Phi_{xy}+\Phi_{yx})\right)} \Leftarrow \boxed{[T_T] = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix}}$$

(6.28.11.) (6.28.10.)

Lo que permite también establecer:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}[T_T]\begin{bmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{bmatrix}} \quad (6.28.12.)$$

Sustituyendo en (6.28.8), las expresiones (6.28.10) a (6.28.12), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{\operatorname{sen}\alpha\, E}\left(\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix} - \nu\left(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\cos\alpha(\Phi_{xy}+\Phi_{yx})\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)\operatorname{sen}\alpha}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

(6.28.13.)

Las expresiones (6.28.13.), pueden transformarse en forma de MATRICES DE ENLACE, y deducirse las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E \operatorname{sen}\alpha} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & -\nu\cos\alpha & \cos\alpha(1-\nu) \\ -\nu & 1-\nu & \cos\alpha(1-\nu) & -\nu\cos\alpha \\ 2\cos\alpha & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2\cos\alpha & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{yy} \\ \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{yy} \\ \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)\operatorname{sen}\alpha} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & -\frac{1}{2}(1-2\nu)\cos\alpha & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 & -\frac{1}{2}(1-2\nu)\cos\alpha \\ -\nu\cos\alpha & -(1-\nu)\cos\alpha & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \\ -(1-\nu)\cos\alpha & -\nu\cos\alpha & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \end{bmatrix}$$

(6.28.14.) $\quad (\Phi_{yx} = \Phi_{xy})$

Expresiones que para $\alpha = \pi/2$ coinciden con las (6.28.9.)

6.29. ESTADOS PLANOS DE TENSIÓN

Es el estado tensional más frecuente en la práctica, puesto que en casi todas las BARRAS se produce dicho estado.

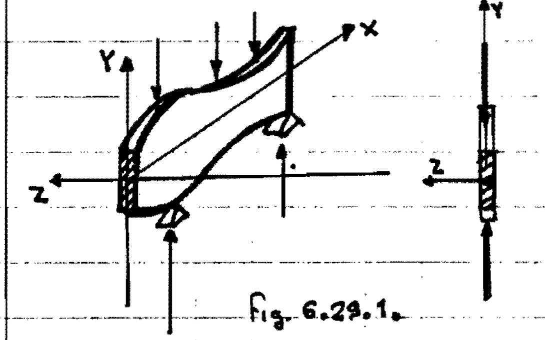


fig. 6.29.1.

Si las cargas se ejercen todas con líneas de acción contenidas en un plano (PLANO DE CARGAS), y este contiene a la fibra media de la barra, se produce un ESTADO PLANO DE TENSIÓN, y dado que la descripción efectuada se ajusta a la forma en que estan solicitados la mayor parte de los elementos estructurales, es obvio que posea una importancia primordial este tipo de estado tensional.

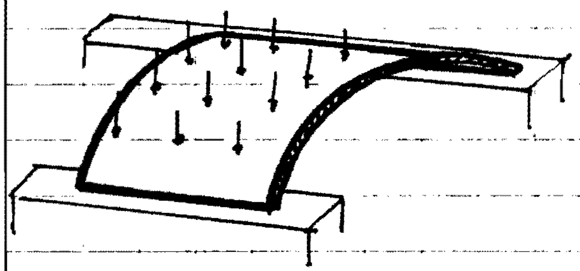


fig. 6.29.2.

Pero sería falso pensar que únicamente se producen estados tensionales planos en elementos estructurales de tipo BARRA, puesto que también se producen en las láminas delgadas

El hecho fundamental es que una de las dimensiones como mínimo, del elemento debe ser sumamente pequeña en comparación con las restantes, y que las tensiones que se producen de acuerdo con dicha dirección, producidas directamente en el CONTORNO por las acciones exteriores deben ser despreciables con las que se preveen que se producen en otras direcciones.

En la fig. 6.29.2. la tensión que se produce ortogonalmente al plano medio de la lámina, en un punto cualquiera de la misma, es despreciable con las que se producirán por el fenómeno de la flexión según el citado plano, tal como nos lo indica la fig. 6.29.3.,

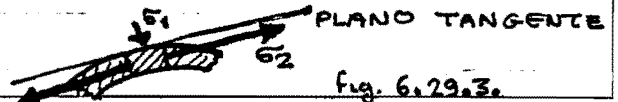


fig. 6.29.3.

en la que σ_1 es muy inferior a σ_2.

Para comprender esto, pongamos un ejemplo sencillo consistente en una viga de madera de 30x40 cms y de luz 6 metros, que sufre una acción distribuida incluido su propio peso de 2000 Kg/m, sabiendo que está simplemente apoyada en sus extremos.

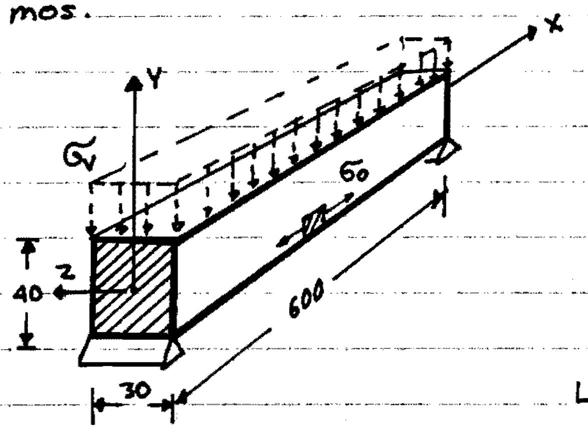


fig. 6.29.4.

$\sigma_v = -0,66\ \mathrm{Kg/cm^2}$ $(\sigma_v \times 30 \times 100 = 2000)$

$\sigma_0 = 112,5\ \mathrm{Kg/cm^2}$

$\Downarrow$

$\cancel{\sigma_v}$

La tensión normal que produce directamente la carga distribuida es de $-0,66\ \mathrm{Kg/cm^2}$, en tanto que la tensión según la dirección x que se produce debido al fenómeno de la flexión llega alcanzar el valor de $112,5\ \mathrm{kg/cm^2}$

Según la dirección z las tensiones también deberán ser nulas, puesto que en el contorno lo serán por no existir acción exterior, y dado el pequeño espesor, una función continua que represente σ_z no podrá alcanzar valores significativos si partiendo de cero, debe volver en un intervalo pequeño a tomar nuevamente el valor cero.

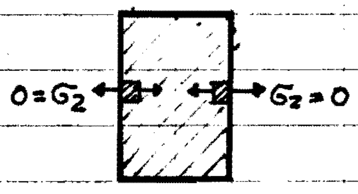


fig. 6.29.5.

La matriz del tensor de tensiones en base ORTOGONAL y en un estado PLANO DE TENSIONES, será:

$$[T_T] = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$J_1^T = \sigma_x + \sigma_y$$

Pero el hecho de que el estado sea plano de tensiones, no implica que sea un estado plano de deformaciones, (si $\partial_1^T \neq 0$), tal como puede verse geométricamente mediante los círculos de Mohr.

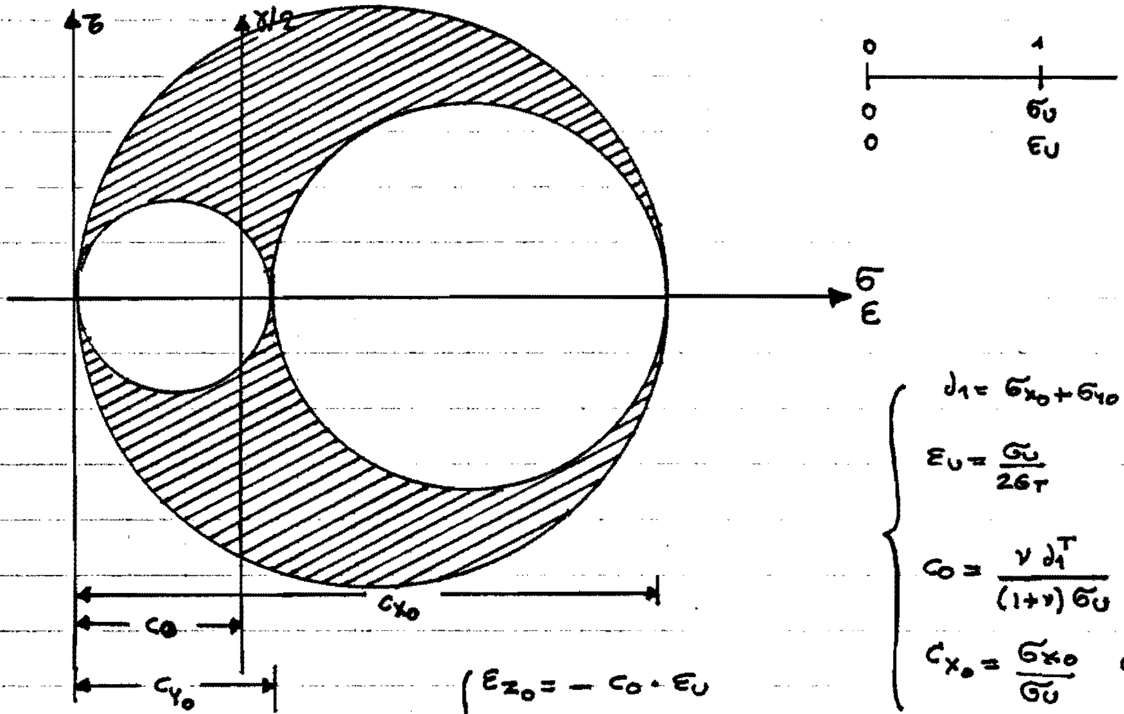


fig. 6.29.5.

$$\begin{cases} \partial_1 = \sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} \\ \varepsilon_U = \dfrac{\sigma_U}{2G_T} \\ c_0 = \dfrac{\nu\, \partial_1^T}{(1+\nu)\,\sigma_U} \\ c_{x_0} = \dfrac{\sigma_{x_0}}{\sigma_U} \quad c_{y_0} = \dfrac{\sigma_{y_0}}{\sigma_U} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{z_0} = -\,c_0 \cdot \varepsilon_U \\ \varepsilon_{y_0} = (c_{y_0} - c_0)\,\varepsilon_U \\ \varepsilon_{z_0} = (c_{x_0} - c_0)\,\varepsilon_U \end{cases}$$

De las ecuaciones matriciales (6.25.13.) no pueden eliminarse directamente la tercera fila y columna, puesto que en el tensor $[T_0]$ existen elementos no nulos, según acaba de demostrarse.

De la ecuación:

$$[T_0] = \frac{1+\nu}{E}\,[T_T] - \frac{\nu}{E}\,\partial_1^T\,[I] \qquad (6.29.1.)$$

Se deduce que: $\boxed{\varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)}$ (6.29.2.)

En cuyo caso, ya puede eliminarse de (6.29.1.) las citadas tercera fila y columna, pasando a ser:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad (6.29.3.)$$

De la relación matricial:

$$[T_T] = \frac{E}{1+\nu}[T_D] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, \mathcal{J}_1^D\, [I] \qquad (6.29.4.)$$

Se verificará:

$$\sigma_z = 0 = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)} \qquad (6.29.5.)$$

Esto nos permite obtener $\mathcal{J}_1^D$ en función exclusiva de ε_x y ε_y

$$\mathcal{J}_1^D = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_x+\varepsilon_y - \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) =$$

$$= (\varepsilon_x+\varepsilon_y)\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right) = \boxed{\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \mathcal{J}_1^D} \qquad (6.29.6.)$$

Sustituyendo en (6.29.4) la expresión (6.29.6.), resultará, eliminando la tercera fila y columna

$$\boxed{\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y\end{bmatrix} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}} \qquad (6.29.7.)$$

Resumiendo:

$[T_D] = \frac{1+\nu}{E}[T_T] - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)[I]$	$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$
$[T_T] = \frac{E}{1+\nu}[T_D] + \frac{\nu E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)[I]$	$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$

(6.29.8.)

Si utilizamos las MATRICES DE ENLACE para establecer la relación entre TENSIONES Y DEFORMACIONES, estas serán para el caso de ESTADOS PLANOS DE TENSIONES las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

ESTADOS PLANOS
DE
TENSIÓN

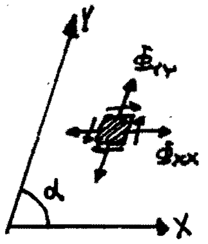
(6.29.9.)

OPCIONAL

Si la BASE es NO ORTOGONAL, la relación entre la matriz asociada al TENSOR DE TENSIONES y LA MATRIZ DE LAS TENSIONES, es:

$$[T_T] = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\begin{bmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{YX}\\ \Phi_{XY} & \Phi_{YY}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{bmatrix} \qquad (6.29.10)$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{YX}\\ \Phi_{XY} & \Phi_{YY}\end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}[T_T]\begin{bmatrix}1 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 1\end{bmatrix} \qquad (6.29.11.)$$



$$\partial_1^T = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\Phi_{XX}+\Phi_{YY}+\cos\alpha\left(\Phi_{XY}+\Phi_{YX}\right)\right) \qquad (6.29.12.)$$

Según se dedujo en (6.28.).

Sustituyendo en (6.29.8.), resultará:

$$\boxed{\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{YX} & \varepsilon_y\end{bmatrix} = \frac{1}{E\operatorname{sen}\alpha}\left((1+\nu)\begin{bmatrix}\Phi_{XX} & \Phi_{YX}\\ \Phi_{XY} & \Phi_{YY}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{bmatrix} - \nu\left(\Phi_{XX}+\Phi_{YY}+\cos\alpha\left(\Phi_{XY}+\Phi_{YX}\right)\right)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)}$$

(6.29.13.)

$$\boxed{\begin{bmatrix}\Phi_{XX} & \Phi_{YX}\\ \Phi_{XY} & \Phi_{YY}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)\operatorname{sen}\alpha}\left(\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{YX} & \varepsilon_y\end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 1\end{bmatrix}}$$

(6.29.14.)

Las expresiones (6.28.13.) y (6.28.14.) pueden transformarse en forma de MATRICES DE ENLACE, alcanzandose las siguientes conclusiones:

$$\boxed{\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{YX}\end{bmatrix} = \frac{1}{E\operatorname{sen}\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\cos\alpha & \cos\alpha\\ -\nu & 1 & \cos\alpha & -\nu\cos\alpha\\ 2(1+\nu)\cos\alpha & 0 & 0 & 2(1+\nu)\\ 0 & 2(1+\nu)\cos\alpha & 2(1+\nu) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{XX}\\ \Phi_{YY}\\ \Phi_{XY}\\ \Phi_{YX}\end{bmatrix}} \qquad (6.29.15.)$$

$(\Phi_{YX} = \Phi_{XY})$

OPCIONAL

$$\begin{bmatrix} \Phi_{XX} \\ \Phi_{YY} \\ \Phi_{XY} \\ \Phi_{YX} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)\,\text{sen}\,\alpha} \begin{bmatrix} 1 & \nu & -\frac{1}{2}(1-\nu)\cos\alpha & 0 \\ \nu & 1 & 0 & -\frac{1}{2}(1-\nu)\cos\alpha \\ -\cos\alpha\cdot\nu & -\cos\alpha & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ -\cos\alpha & -\cos\alpha\,\nu & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \end{bmatrix}$$

$(\Phi_{xy} = \Phi_{yx})$ (6.29.16.)

Realmente el concepto de ESTADOS PLANOS se debe a A. Clebsch (1833-1872), que lo expuso en su libro "Theorie der Elasticität fester Körper" publicada en 1862 y que más tarde lo tradujo Barré de Saint-Venant en 1883, ampliando su contenido teórico como era habitual para este último.

Clebesch fué alumno de Newmann en la Universidad de Königsber, su ciudad natal, y quien además le dirigió su tesis doctoral.

Clebsch fué primero profesor en Berlin, siendo más tarde nombrado catedrático de Mecánica Teórica de la Escuela Politécnica de Karlsruhe, a los veinticinco años.

Sólo tardo tres años en redactar su tratado de Elasticidad, dandose la circunstancia que en aquel entonces (1861) sólo había un libro de Elasticidad del profesor Lamé, pero cuya estructuración estaba orientada hacia su posible aplicación para la acústica y la óptica, en tanto que Clebsch lo enfocó para las posibles aplicaciones de la TEORÍA DE LA ELASTICIDAD EN INGENIERIA.

El libro pese a contener importantes aportaciones a la TEORÍA DE LA ELASTICIDAD, e incorporar recientes aportaciones como la teoría de la torsión de Saint-Venant y la de placas de Kirchhoff, no tuvo excesivo éxito, quizas por la excesiva profundidad con que eran abordados temas de interes puntual, que rompian la estructuración general de la obra, y por el excesivo lenguaje matemático, que lejos de ser un medio se transforma en la obra en el propio fin.

El tercer capítulo del citado libro desarrolla con profundidad LOS ESTADOS PLANOS DE TENSIÓN, abordando los mismos en función de los parámetros tensionales de su plano, lo que se efectua por primera vez.

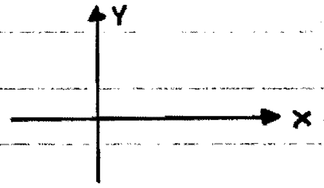
En el último capítulo aborda problemas elementales de la Resistencia de Materiales, y en el mismo efectua una interesante aportación para facilitar la obtención de las constantes de integración que se producen al resolver la ecuación diferencial de la linea elástica de una barra

Clebsch también propuso en su obra un método para la resolución de celosiás isostáticas e hiperestáticas que podemos considerar el antecesor del método MATRICIAL DE LAS DEFORMACIONES o método MATRICIAL DE LA RIGIDEZ, salvo que como es lógico aun no utiliza la nomenclatura matricial y utiliza simplemente expresiones algebraicas ordinarias.

Efectuó importantes aportaciones en óptica.

Clebsch finalmente optó por las matemáticas, pasando en 1863 a la cátedra de matemáticas de la Universidad de Giesen y en 1868 a la de Götingen donde demostraría su extraordinario talento, y cuatro años mas tarde sería Rector de dicha Universidad cargo que casí no ejerció pues murió en ese mismo año a la edad de 39, a causa de una difteria.

EJERCICIO 6.29.1. En el ejercicio 6.22.1. conocidas las funciones de corrimiento según ejes X e Y, se obtuvo el tensor de deformación referido a dicho sistema, cuya matriz asociada se dedujo que era:



$$[T_D] = 10^{-2}\begin{bmatrix} 8{,}64 & 6{,}345 \\ 6{,}345 & 2{,}43 \end{bmatrix}$$

Obténgase la matriz asociada al tensor de tensiones, sabiendo que el ESTADO ES PLANO DE TENSIONES, y que $E = 10^4$, $\nu = 0.3$

SOLUCIÓN Según hemos expuesto en (6.29.7.) se verifica:

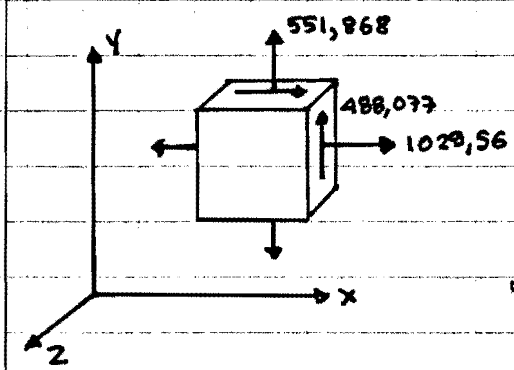
$$[T_T] = \frac{E}{1+\nu}\left([T_D] + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)[I] \right)$$

Operando:

$$[T_T] = \frac{10^4}{1{,}3}\left(10^{-2}\begin{bmatrix} 8{,}64 & 6{,}345 \\ 6{,}345 & 2{,}43 \end{bmatrix} + \frac{0{,}3}{0{,}7}10^{-2}(8{,}64+2{,}43)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[T_T] = \begin{bmatrix} 664{,}615 & 488{,}077 \\ 488{,}077 & 186{,}923 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 364{,}945 & 0 \\ 0 & 364{,}945 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T_T] = \begin{bmatrix} 1029{,}56 & 488{,}077 \\ 488{,}077 & 551{,}868 \end{bmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sigma_x = 1029{,}56 \\ \sigma_y = 551{,}868 \\ \tau_{xy} = 488{,}077 \end{array}}$$



También podría calcularse aplicando las ecuaciones de LAMÉ para estados triples en general, si a traves de las mismas se deduce previamente la deformación unitaria ε_z, ya que si el estado es plano de tensiones, no lo será de deformaciones.

Sabemos por (6.23.6) que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Como sabemos ε_x, ε_y, E, ν, así como el que $\sigma_z = 0$, resultará operando:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix} = 19230 \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,64 \cdot 10^{-2} \\ 2,43 \cdot 10^{-2} \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

De la tercera fila, se deduce que:

$$0 = 638,628 + 13461\, \varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = -0,0474}$$

$\Downarrow$ Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = 19230 \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,64 \\ 2,43 \\ -4,74 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = 57,69 \begin{bmatrix} 2,\hat{3} & 1 & 1 \\ 1 & 2,\hat{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8,64 \\ 2,43 \\ -4,74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1029,76 \\ 552,09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

Por otro lado: $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$

Operando $\tau_{xy} = \dfrac{10^4}{2 \cdot 1,3} 6,345 \cdot 10^{-2} = 488,077 = \tau_{xy}$

Lo que coincide con los resultados obtenidos mediante el uso de la expresión directa (6.29.7.)