

ESTUDIO TEÓRICO DE LAS ESCALERAS HELICOIDALES.-

1400246376

CO A 69.026 Gue

EXCLUS de AFETEC

Las escaleras helicoidales tienen características geométricas que las dan gran rigidez de forma, y que la hacen ser un elemento idóneo, si no fuese por la complejidad del cálculo que entrañan, que a continuación vamos a desarrollar basandonos en las siguientes hipótesis.-

- H-1.- Las tensiones se distribuyen linealmente en la sección transversal de la pieza-
- H-2.- Las deformaciones son proporcionales a las solicitudes exteriores, pese a la forma alabada.
- H-3.- Las deformaciones motivadas por las tensiones axiales y tangenciales las consideraremos despreciables.
- H-4.- La sección de la losa de hormigón, zanca de la escalera, nos servirá de base, para tomar su sección mínima, como sección uniforme y constante de la misma.
- H-5. La losa o placa helicoidal objeto del cálculo a desarrollar la consideraremos como cuerpo isotrópico.

- (H-1) La hipótesis uno, siempre que nos situemos en la "elasticidad proporcional" de la ley de Hooke, y que la sección transversal sea pequeña en referencia de la longitud total de la misma losa y del radio de curvatura del eje de ésta. El error que cometemos no será mayor que el que se comete en jácenas de gran canto, o en losas de forjados sin vigas, y en el estudio de piezas curvas.
- (H-2) Esta segunda hipótesis nos permitirá aplicar el teorema de Castigliano, ya que bajo la suposición indicada, la energía de deformación será una función de segundo grado con respecto a las solicitudes exteriores.
- (H-3) En el cálculo de la energía de deformación podremos despreciar consecuentemente los términos correspondientes a la componente normal y tangencial de la resultante de las fuerzas del sistema actuante a un lado de las secciones.
- (H-4) Consecuentemente despreciaremos los incrementos bruscos de los momentos de inercia que nos proporcionan los peldanos, aun en el caso frecuente de hormigonarlos simultáneamente a la zanca, con objeto de la simplificación del análisis y del proceso.
- (H-5) La anisotropía real de la placa nos puede producir solamente ligeras diferencias en los resultados finales, en condiciones normales.

Para comprender el cálculo, es preciso en primer lugar tener en cuenta su forma geométrica, constituida por un helicoide de eje y plano director, al que serán paralelas una serie de generatrices constituidas por rectas horizontales, que tienen siempre un punto y solo uno, con el eje de la hélice directriz.

BIBLIOTECA

UPC

Escola Tècnica Superior
Politécnica de Barcelona
BIBLIOTECA

DATOS DE PARTIDA.—

Consideremos en primer lugar los de características geométricas, que son

γ_{\max} ángulo que forman en proyección horizontal las generatrices extremas del helicoide.

h. desnivel que debe vencer la losa.

b ancho

r_i radio interno en proyección horizontal.

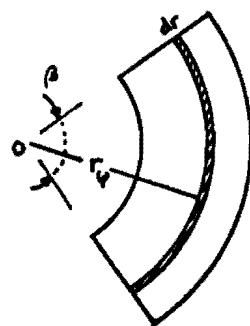
R. radio máximo " "

r radio medio.

Según el tipo de carga, veremos que nos significarán dificultades muy diferentes, según si la carga es uniformemente repartida, o simplemente simétrica, o por último si es asimétrica.

En cualquiera de los tres casos la carga no podemos suponerla actuando sobre el radio medio, sino con un cierto descentramiento e, que a continuación calculamos para el caso particular de carga uniformemente repartida, que nos constituirá el caso más habitual.

Carga diferencial actuante en un diferencial de corona.



$$\beta \frac{\pi}{180} \Gamma_y dr_i \cdot q_s$$

Momento de dicha carga diferencial respecto al punto O.

$$\Gamma_y \left(\beta \frac{\pi}{180} \Gamma_y dr_i \cdot q_s \right)$$

El momento total, será la suma de todos los momentos diferenciales, de todos los diferenciales de franja, lo que valdrá:

$$\int_{r_i}^R \beta \frac{\pi}{180} q_s \Gamma_y^2 dr_i = M^T$$

La expresión de la carga total ejercida, será:

$$\int_{r_i}^R \beta \frac{\pi}{180} q_s \Gamma_y dr_i = P^T$$

Para poder suponer la carga total concentrada en un punto distante e, del círculo de radio medio R, se tendrá que verificar que tengan igual momento respecto a cualquier punto, lo que equivale a imponer que el momento real que se ejerce M^T sea el mismo que el que posee P^T respecto a O, y por lo tanto:

$$\int_{r_i}^R \beta \frac{\pi}{180} q_s \Gamma_y^2 dr_i = (e+r) \int_{r_i}^R \beta \frac{\pi}{180} q_s \Gamma_y dr_i$$

$$\frac{R^2 - r_i^2}{3} = (e+r) \frac{R^2 - r_i^2}{2} \quad \frac{(R^2 - r_i^2)(R + r_i) - R r_i(R - r_i)}{3} = (e+r) br$$

$$R^2 - r_i^2 = (R + r_i)(R - r_i) = 2rb$$

$$R = r + b/2$$

$$r_i = R - b/2$$

$$\frac{4r^2b - b(r^2 - \frac{b^2}{4})}{3} = (e+r)br$$

$$\frac{12r^2b^2}{12r} = e+r$$

$$e = \frac{b^2}{12r} \quad (1) \quad \frac{e}{r} = \frac{b^2}{12r^2}$$

En un caso de carga variable, el punto e será función del punto que se considere, y no podremos tomar una longitud finita de losa, sino que tendremos que adoptar la superficie correspondiente a un arco diferencial, dado por un $ds/3$, así pues la igualdad de partida habrá pasado a ser:

$$\frac{d\beta \frac{\pi}{180}}{3} \cdot \int_{r_i}^R q(r_i) \cdot \Gamma_y^2 dr_i = (e+r) \frac{d\beta \frac{\pi}{180}}{3} \int_{r_i}^R q(r_i) \Gamma_y dr_i$$

Calculado e, se pasa a transformar la carga unitaria superficial en una unitaria lineal, que supondremos actuando en un arco descentrado e, respecto al arco medio. La expresión que nos definirá q, será: ángulo del arco unidad de radio $r+e = \phi = \frac{180}{\pi(r+e)}$ (ϕ en grados)

$$q = \frac{N(R^2 - r_i^2)}{\pi(r+i)} \frac{180}{360} q_s$$

$$q = \frac{rb}{r+i} q_s$$

$$q = \frac{12r^2b}{12r^2 + b^2} q_s$$

Otra expresión que es preciso calcular previamente, es la inclinación o pendiente del plano tangente a la losa, según una de las generatrices de la misma, que vendrá dada por:

$$\frac{h}{r \cdot \varphi_{\max}} = \operatorname{tg} \alpha \quad (2) \quad \text{Si } \varphi_{\max} \text{ se expresa en radianes}$$

Por lo que la variación de la altura, al girar un ángulo φ , será de:

$$\Delta h = \varphi \frac{h}{\varphi_{\max}} = \varphi \operatorname{tg} \alpha \cdot r$$

Generalmente lo indicaremos por

$$\Delta h = \frac{h}{\varphi_{\max}} \quad (3)$$

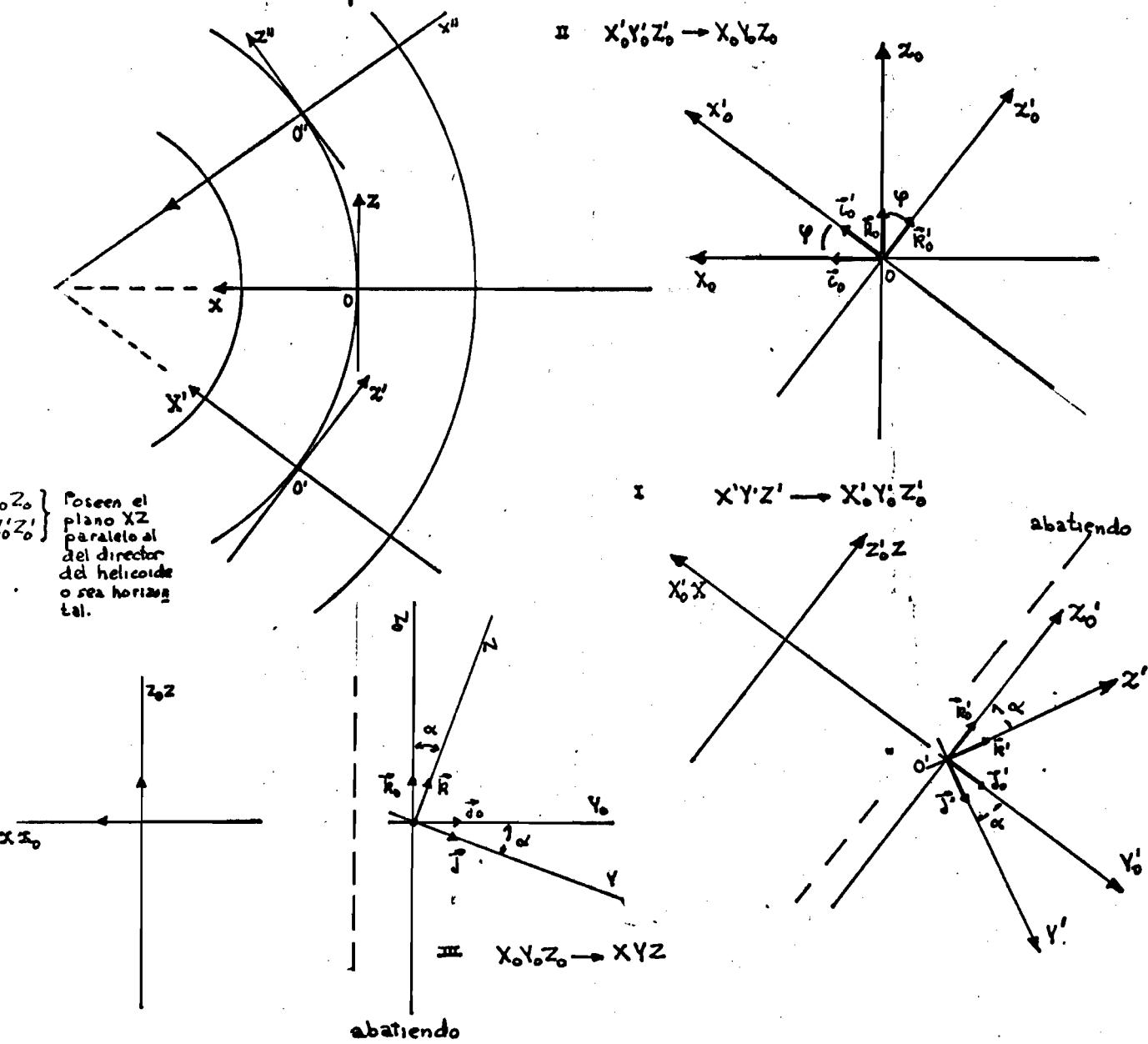
$$A' = \frac{h}{\varphi_{\max}} = \frac{r}{\varphi} \operatorname{tg} \alpha \quad (4)$$

Generalmente, dada la simetría de forma de la escalera tomamos como referencia el punto medio de la misma, lo cual significa que

$$\varphi (-\varphi_0, +\varphi_0) \quad \text{siendo } \varphi_{\max} = 2\varphi_0$$

SISTEMAS DE REFERENCIA ADECUADOS, Y LA RELACIÓN O CORRESPONDENCIA EXISTENTE ENTRE LOS MISMOS.

Tendremos que analizar las condiciones de equilibrio que deben verificar las solicitudes exteriores, que sabemos que se descomponen en direcciones normales y tangenciales a las secciones mínimas, pero que en las escaleras helicoidales, nos aparece la dificultad, de que dichas secciones mínimas están giradas en el espacio, unas con respecto a las otras, por lo que si en cada sección elegimos el sistema de referencia apropiado, nos encontraremos con la dificultad de comparar elementos que los tenemos referidos a sistemas distintos, por lo que se impone como etapa previa el calcular la forma de cambiar las componentes de un vector ante un cambio de "base".



Para pasar de los ejes $X'Y'Z'$ a los $X_0Y_0Z_0$ efectuaremos el siguiente proceso

$$X'Y'Z' \rightarrow X_0Y_0Z_0 \rightarrow X_0Y_0Z_0 \rightarrow XYZ$$

Son pues 3 transformaciones las que precisamos, que resolveremos a través del cálculo matricial, para una mejor ordenación y mayor comodidad.

TRANSFORMACIÓN $X'Y'Z' \rightarrow X_0Y_0Z_0$

Para calcular este cambio de base, dado que se efectúa entre sistemas ortonormales nos bastará con calcular las de los versores $\vec{e}_0', \vec{j}_0', \vec{k}_0'$ respecto a $X'Y'Z'$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_0' = \vec{e}' \\ \vec{j}_0' = \vec{j}' \cos\alpha + \vec{k}' \sin\alpha \\ \vec{k}_0' = -\vec{j}' \sin\alpha + \vec{k}' \cos\alpha \end{array} \right\}$$

Tengamos un vector \vec{U} cuyas componentes respecto a $X'Y'Z'$ son (U_1^0, U_2^0, U_3^0) , las que tendrá respecto a $X_0Y_0Z_0$ que las simbolizaremos por (U_1^0, U_2^0, U_3^0) vendrán dados por el siguiente producto de matrices.

$$\begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACION $X_0Y_0Z_0 \rightarrow X_0Y_0Z_0$

Sea el mismo vector \vec{U} de componentes (U_1^0, U_2^0, U_3^0) respecto a $X_0Y_0Z_0$.

Las componentes $\vec{e}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ con respecto a $X_0Y_0Z_0$ nos darán los elementos de la matriz del cambio de base.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_0 = \vec{e}_0' \cos\varphi - \vec{k}_0' \sin\varphi \\ \vec{j}_0 = \vec{j}_0' \\ \vec{k}_0 = \vec{e}_0' \sin\varphi + \vec{k}_0' \cos\varphi \end{array} \right\}$$

$$\text{Las componentes del vector } \vec{U} \text{ con referencia a } X_0Y_0Z_0 \text{ serán:}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACION $X_0Y_0Z_0 \rightarrow XYZ$

El vector \vec{U} (U_1^0, U_2^0, U_3^0) respecto a $X_0Y_0Z_0$, tendrá como componentes respecto a XYZ , la terna (U_1, U_2, U_3) , que calcularemos por el siguiente producto de matrices:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e} = \vec{e}_0 \\ \vec{j} = \vec{j}_0 \cos\alpha - \vec{k}_0 \sin\alpha \\ \vec{k} = \vec{j}_0 \sin\alpha + \vec{k}_0 \cos\alpha \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{bmatrix}$$

Esto nos indica que la TRANSFORMACION $X'Y'Z' \rightarrow XYZ$ vendrá dado por:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{bmatrix}$$

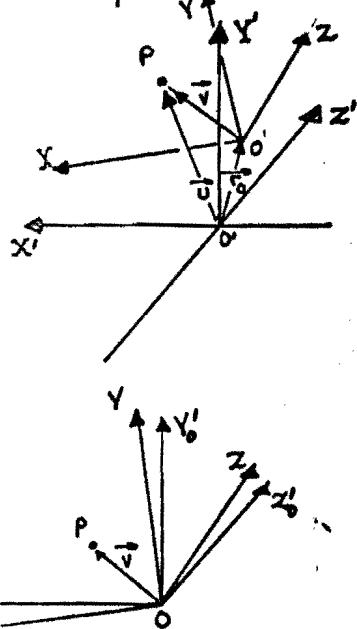
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \sin\alpha & -\sin\varphi \cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\alpha & \cos\varphi \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \sin\alpha & -\sin\varphi \cos\alpha \\ -\sin\alpha \sin\varphi & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\varphi & \frac{1}{2} \sin 2\alpha (1 - \cos^2\varphi) \\ \cos\alpha \sin\varphi & \frac{1}{2} \sin 2\alpha (1 - \cos^2\varphi) & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{bmatrix}$$

Expresión matricial que nos relaciona las componentes de un vector, según si ésta referido a $X'Y'Z'$ o a XYZ .

Para tomar momentos de las fuerzas actuantes a un lado de una cierta sección mínima precisamos poder referir las coordenadas de un punto cualquiera, que generalmente lo tendremos definido por sus coordenadas intrínsecas, a un sistema de referencia base, que como tal, adoptaremos el triedro intrínseco en el punto medio del helicóide.

Un punto lo podemos siempre referir por las coordenadas del mismo, las cuales podemos considerar como las componentes de un vector, que tiene como origen, el origen de coordenadas y como extremo el punto considerado. Así pues :



Al trasladar el origen de coordenadas, no es que se transformen las componentes del vector de posición $\vec{U} = \vec{P}-\vec{O}$ del punto P, sino que este, se transforma, en sí, pasando a ser otro vector \vec{V} .

Como puede verse en la figura.

$\vec{V} = \vec{U} - \vec{r}_0^0$ siendo \vec{r}_0^0 el vector de posición del punto O con respecto a X'Y'Z', que también se denomina vector traslación.

Las componentes de \vec{r}_0^0 y de \vec{U} deben estar con relación a un mismo sistema de referencia, así pues como \vec{U} está con respecto a X'Y'Z', y \vec{r}_0^0 nos es más cómodo calcularlo con referencia X'_0Y'_0Z'_0, lo mejor será pasar previamente \vec{U} a X'_0Y'_0Z'_0, y calcular \vec{V} con esta base, por lo que luego solo tendremos que efectuar las transformaciones de X'_0Y'_0Z'_0 \rightarrow X_0Y_0Z_0 \rightarrow XYZ.

Calculemos en primer lugar \vec{r}_0^0 respecto a X'_0Y'_0Z'_0.

La variación de altura de la losa al girar un ángulo φ , nos da la componente V del vector \vec{r}_0^0 , por lo que :

$$\frac{r_0^0}{V} = \varphi A'$$

Analizando la figura puede verse :

$$\frac{r_0^0}{x_0^0} = r - r \cos \varphi$$

$$\frac{r_0^0}{z_0^0} = r \sin \varphi$$

Por otra parte si el vector de posición del punto P, tenía unas componentes (u'_1, u'_2, u'_3) con respecto a X'Y'Z', las que tendrá en la referencia X'_0Y'_0Z'_0 sabemos que vienen dadas, por :

$$\begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \cos \varphi + u'_3 \operatorname{sen} \varphi \\ -u'_2 \operatorname{sen} \varphi + u'_3 \cos \varphi \end{bmatrix}$$

El vector $\vec{V} = \vec{U} - \vec{r}_0^0$ vendrá expresado en la base X'_0Y'_0Z'_0 por la siguiente matriz :

$$\begin{bmatrix} v_0^0 \\ v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 - r(1 - \cos \varphi) \\ u_1^0 - \varphi A' \\ u_2^0 - r \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \cos \varphi + u'_3 \operatorname{sen} \varphi - \varphi A' \\ -u'_2 \operatorname{sen} \varphi + u'_3 \cos \varphi - r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

El vector \vec{V} , vector posición del punto P en la base XYZ tendrá las siguientes componentes :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ 0 & \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \cos \varphi + u'_3 \operatorname{sen} \varphi - \varphi A' \\ -u'_2 \operatorname{sen} \varphi + u'_3 \cos \varphi - r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

que nos relaciona las coordenadas de un punto P (u'_1, u'_2, u'_3) en la base X'_0Y'_0Z'_0

Si hubiésemos transformado las componentes de \vec{r}_0 , pasándolas a la referencia $X'Y'Z'$, hubiésemos podido emplear directamente (5) para transformar V .

Para hacer la transformación $X'_0 Y'_0 Z'_0 \rightarrow X'Y'Z'$ tendríamos que emplear la matriz inversa de la correspondiente a $X'Y'Z' \rightarrow X'_0 Y'_0 Z'_0$, pero dado, que cuando se trabaja entre bases ortonormales, la inversa es la traspuesta, tendremos que las componentes de \vec{r}_0 con respecto a $X'Y'Z'$ vendrán dadas por:

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ x' \\ r_0 \\ y' \\ r_0 \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(1-\cos\varphi) \\ \varphi A' \\ r \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - r \cos\varphi \\ \varphi A' \cos\varphi - r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ \varphi A' \operatorname{sen}\varphi + r \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Aplicando (5) y denominando a $A = A' \cos\varphi$ $B = A' \operatorname{sen}\varphi$, tendremos:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi & \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi & \frac{1}{2} \operatorname{sen}2\varphi(1-\cos\varphi) \\ \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi & \frac{1}{2} \operatorname{sen}2\varphi(1-\cos\varphi) & \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 - r(1-\cos\varphi) \\ u'_2 - \varphi A + r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ u'_3 - \varphi B - r \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \end{bmatrix}$$

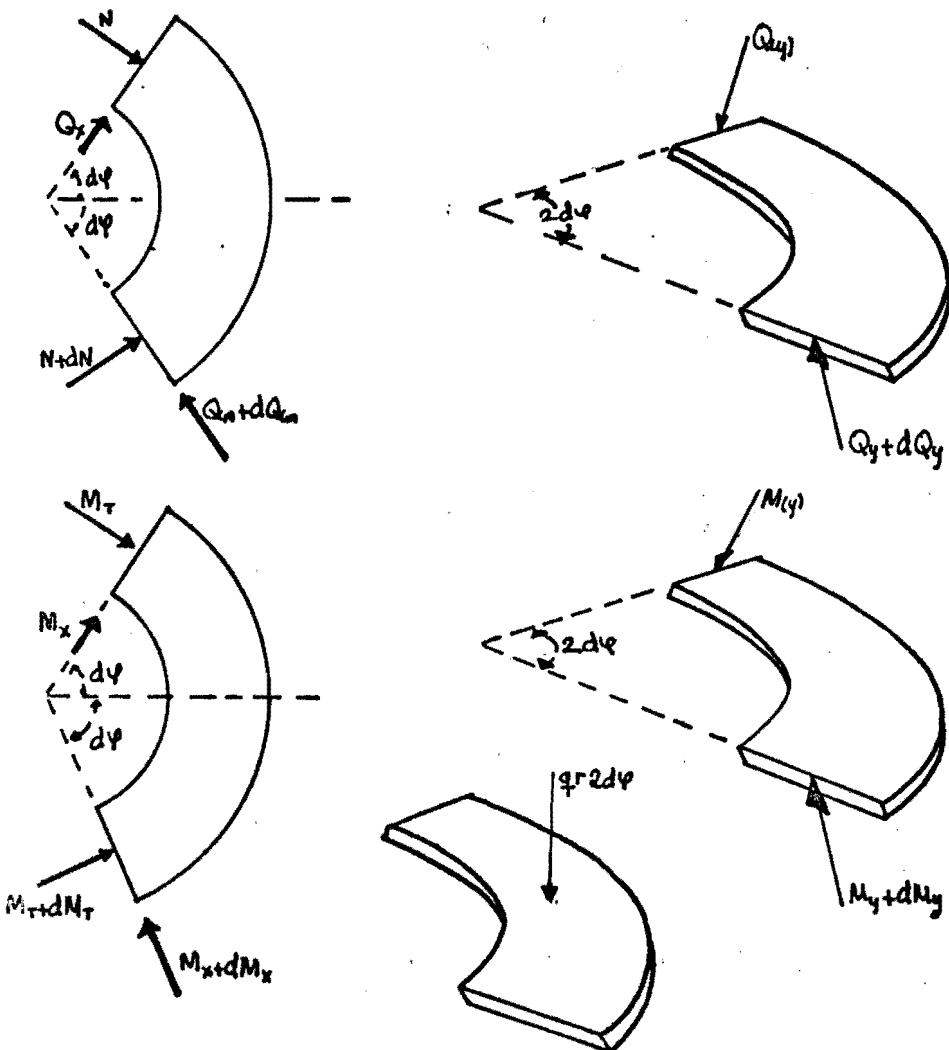
Expresión equivalente a la (6).

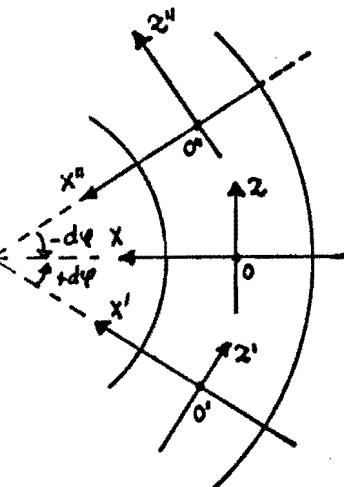
$\left\{ \begin{array}{l} (u'_1, u'_2, u'_3) \text{ coordenadas del punto respecto } X'Y'Z' \\ (v_1, v_2, v_3) \quad " \quad " \quad " \text{ mismo punto } " \quad XY \end{array} \right.$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

Analizadas las posibles dificultades que en el aspecto matemático nos podemos encontrar, vamos a pasar a la resolución del problema fundamental.

Veamos que dependencia existe entre las distintas componentes de la solicitud exterior, que se condicionan entre sí para hacer posible el equilibrio estático en cada uno de sus elementos diferenciales.





Las condiciones de equilibrio de las solicitudes que se han representado en los dibujos anteriores, las vamos a imponer sobre el sistema XYZ.

Para pasar de los ejes X'Y'Z' a los XYZ, emplearemos (5), para un angulo $\varphi = d\varphi$, y análogamente, de los X''Y''Z'' uno de $-d\varphi$.

Referiremos primeramente las fuerzas actuantes sobre cada sección mínima, respecto a su propio sistema de referencia.

FUERZAS ACTUANTES.

$$\begin{cases} X' \\ Y' \\ Z' \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, N+dN) \\ (Q_x+dQ_x, 0, 0) \\ (0, Q_y+dQ_y, 0) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Punto de aplicación} \\ (0, 0, 0) \end{array}$$

$$X'Y'Z' \xrightarrow{d\varphi} XYZ$$

$$\begin{cases} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, -N) \\ (-Q_x, 0, 0) \\ (0 - Q_y, 0) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Punto de aplicación} \\ (0, 0, 0) \end{array}$$

$$X''Y''Z'' \xrightarrow{-d\varphi} XYZ$$

$$\begin{array}{l} \text{Punto de aplicación} \\ (-e, 0, 0) \end{array}$$

$$(0, -qr2d\varphi \cos\alpha, -qr2d\varphi \operatorname{sen}\alpha)$$

MOVICCIÓN SOBRE EL EJE X

Solo precisaremos efectuar el producto de las componentes del vector a cambiar, por la 1era fila de la matriz del cambio de base.

$$en d\varphi \cos\alpha (N+dN) + (Q_x+dQ_x) \cos d\varphi + (Q_y+dQ_y) \operatorname{sen} d\varphi \operatorname{sen}\alpha + N \cdot \operatorname{sen}(-d\varphi) \cos\alpha - Q_{x1} \cos(d\varphi) - Q_y \operatorname{sen}(d\varphi) \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\frac{dQ_x}{2d\varphi} = \cos\alpha N - Q_y \operatorname{sen}\alpha$$

MOVICCIÓN SOBRE EL EJE Y.-

Emplearemos ahora la 2^a fila de la matriz del cambio de base.

$$\operatorname{sen} 2\alpha (1 - \cos d\varphi) (N+dN) + (Q_y+dQ_y) (\cos^2 d\varphi + \operatorname{sen}^2 d\varphi) - (Q_x+dQ_x) \operatorname{sen} d\varphi \operatorname{sen} d\varphi - N \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \cos(-d\varphi)) + Q_{x1} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-d\varphi) - Q_{y1} (\cos^2 d\varphi + \operatorname{sen}^2 d\varphi) - qr2d\varphi \cos\alpha = 0$$

$$Q_y - 2Q_x \operatorname{sen}\alpha d\varphi - qr2d\varphi \cos\alpha = 0$$

$$\frac{dQ_y}{2d\varphi} = Q_x \operatorname{sen}\alpha + qr \cos\alpha$$

MOVICCIÓN SOBRE EL EJE Z.-

$$+ dN (\operatorname{sen}^2 d\varphi + \cos^2 d\varphi) + (Q_x+dQ_x) \cos\alpha \operatorname{sen} d\varphi + (Q_y+dQ_y) \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \cos d\varphi) - N (\operatorname{sen}^2 d\varphi + \cos^2 d\varphi) \cos(-d\varphi) - Q_x \cos\alpha \operatorname{sen}(-d\varphi) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \cos(-d\varphi)) Q_y - qr2d\varphi \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$+ 2Q_x \cos\alpha \operatorname{sen} d\varphi - qr2d\varphi \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\frac{dN}{2d\varphi} = -Q_x \cos\alpha + qr \operatorname{sen}\alpha$$

Con lo cual hemos planteado 3 ecuaciones diferenciales que nos permitirán salvo tres constantes conocidas, calcular las funciones Q_x , Q_y y N , como veremos más adelante.

MOMENTOS ACTUANTES.-

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_x+dM_x, 0, 0) \\ (0, M_y+dM_y, 0) \\ (0, 0, M_z+dM_z) \end{array} \right. \begin{cases} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (-M_{x1}, 0, 0) \\ (0, -M_{y1}, 0) \\ (0, 0, -M_{z1}) \end{array} \right.$$

Proyectemos estos vectores sobre los ejes XYZ, mediante la transformación (5).

$$M_x = (M_x+dM_x) \cos d\varphi - M_{x1} \cos(-d\varphi) + (M_y+dM_y) \operatorname{sen} d\varphi \operatorname{sen}\alpha - M_{y1} \operatorname{sen}(-d\varphi) \operatorname{sen}\alpha - (M_z+dM_z) \operatorname{sen} d\varphi \cos\alpha - M_{z1} \operatorname{sen}(-d\varphi) \cos\alpha$$

$$M_x = dN_x + 2M_y \operatorname{sen} d\varphi - 2M_z \operatorname{cos} d\varphi$$

despreciando los infinitesimos superiores

EJE Y

$$N_y = -(M_x + dM_x) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} d\varphi + (M_y + dM_y) (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} d\varphi) + (M_T + dM_T) \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} d\varphi)$$

$$+ M_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (-d\varphi) - M_y (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} (-d\varphi)) - M_T \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} (-d\varphi))$$

$$\Sigma M_y = -2M_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} d\varphi + dM_y$$

$$\Sigma N_y = -2M_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} d\varphi + dM_y$$

EJE Z

$$\Sigma N_z = (M_x + dM_x) \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} d\varphi - M_y \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} (-d\varphi) + (M_y + dM_y) \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} d\varphi) - M_T \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} (-d\varphi)) +$$

$$+ (M_T + dM_T) (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{cos} d\varphi) - M_T (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{cos} (-d\varphi))$$

$$\Sigma M_z = 2M_x \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} d\varphi + dM_T$$

Tenemos que calcular los momentos que nos efectuarán las fuerzas actuantes a un lado de la sección, para lo cual nos interviene el punto de aplicación de las mismas, lo que nos lleva a calcular las coordenadas de los centros de las caras O' y O'' respecto a XYZ, para lo cual emplearemos la transformación (6).

O' (0,0,0) respecto a X'Y'Z'. $\xrightarrow{d\varphi}$ XYZ

$$\begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} d\varphi & 0 & -\operatorname{sen} d\varphi \\ -\operatorname{sen} d\varphi & \operatorname{cos} d\varphi & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} d\varphi \\ \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} d\varphi & \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} d\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -d\varphi A' \\ -r \operatorname{sen} d\varphi \end{bmatrix}$$

$$O_1 = +r d\varphi^2 \quad Q_1 = 0$$

$$O_2 = -d\varphi A' \operatorname{cos} \alpha + r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} d\varphi \operatorname{sen} d\varphi = d\varphi r (-\operatorname{tag} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$$

$$O_3 = -d\varphi A' \operatorname{sen} \alpha - r \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} d\varphi \operatorname{sen} d\varphi$$

$$O_3 = -d\varphi r (+\operatorname{tag} \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha) = -d\varphi r \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -d\varphi \cdot D_0$$

$$O_2 = 0$$

$$D_0 = r \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = r \operatorname{sec} \alpha$$

$$O' (0, 0, -D_0 d\varphi)$$

El de O'', será dada la simetría O'' (0, 0, +D_0 d\varphi)

En dichos puntos estarán aplicadas las fuerzas, N, Q_y y Q_x, de las que naturalmente despreciaremos sus incrementos diferenciales pues nos producirían infinitésimos de orden superior. Proyectemoslos y veamos los pares que se nos pueden producir. Empleando (5):

X	-N \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} d\varphi	Q_x \operatorname{cos} d\varphi	Q_y \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} d\varphi
	N \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} (-d\varphi)	-Q_x \operatorname{cos} d\varphi	-Q_y \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (-d\varphi)
	4	5	6

Y	N \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} d\varphi)	-Q_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} d\varphi	Q_y (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} d\varphi)
	-N \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} (-d\varphi))	Q_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (-d\varphi)	-Q_y (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} (-d\varphi))
	7	8	9

Z	N (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{cos} d\varphi)	Q_x \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} d\varphi	\frac{1}{2} Q_y \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} d\varphi)
	-N (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{cos} (-d\varphi))	-Q_x \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} (-d\varphi)	-\frac{1}{2} Q_y \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{cos} (-d\varphi))

Nos producen pares las descomposiciones (2), (4), (6), (7) y (9), pero teniendo en cuenta que las (1) y (5) representan infinitésimos de segundo orden, y por lo tanto despreciables, quedan solamente:

(2), (6) y (7). que los constituyen las componentes:

$$(2) \quad Q_{cx}$$

$$(6) \quad Q_y$$

$$(7) \quad N_z$$

Los momentos que nos pueden producir estas componentes serán:

$$\begin{array}{lll} M_2 = -Q_{0x} 2O_3 & M_3 = -Q_y 2O_1 & M_2 = +N_x 2O_1 \\ M_3 = +Q_x 2O_2 & M_1 = +Q_y 2O_3 & M_1 = -N_z 2O_2 \end{array}$$

nación de subíndices indicada, será señal de que el signo es positivo, y si permitemos efectuar permutación el signo es negativo.

Al ser $O_1 < O_3 > 0$ solo tendremos 2 momentos.
Sustituyendo valores.

$$\begin{array}{lll} M'_{0x} = Q_y 2D_0 d\varphi & M'_{0y} = -Q_{0x} 2D_0 d\varphi & M'_T = 0 \\ M''_{0x} = 0 & M''_{0y} = 0 & M''_T = 0 \end{array}$$

La carga actuante sobre la lata también provocará momentos.

$$\begin{array}{ll} M_2 = \{q\}_3 e_1 = -q_3 e_1 = -qr 2d\varphi \operatorname{sen}\alpha \cdot e = M''_y \\ M_3 = -\{q\}_2 e_1 = +q_2 e_1 = qr 2d\varphi \operatorname{cos}\alpha \cdot e = M''_T \end{array}$$

SUMA DE MOMENTOS, SEGUN CADA EJE: CONDICIONES DE EQUILIBRIO Y ECUACIONES DIFERENCIALES.—

EJE X

$$\sum M_x + M'_x + M''_x = 0 \quad dM_x + 2M_y \operatorname{sen}\alpha d\varphi - 2M_T \operatorname{cos}\alpha d\varphi + Q_y 2D_0 d\varphi = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{2d\varphi} = M_T \operatorname{cos}\alpha - M_y \operatorname{sen}\alpha - Q_y D_0}$$

EJE Y

$$\sum M_y + M'_y + M''_y + M''_3 = 0 \quad -2M_x \operatorname{sen}\alpha d\varphi + dM_y - Q_x 2D_0 d\varphi - qr 2d\varphi \operatorname{sen}\alpha \cdot e = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_y}{2d\varphi} = M_x \operatorname{sen}\alpha + Q_x D_0 + qr e \operatorname{sen}\alpha}$$

EJE Z

$$\sum M_T + M'_T + M''_T + M'''_T = 0 \quad 2M_x \operatorname{cos}\alpha d\varphi + dM_T + 0 + 0 + qr 2d\varphi \operatorname{cos}\alpha \cdot e = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_T}{2d\varphi} = -M_x \operatorname{cos}\alpha - qr e \operatorname{cos}\alpha}$$

El cuadro de ecuaciones diferenciales.

$\frac{dQ_x}{d\varphi} = \operatorname{cos}\alpha N - Q_y \operatorname{sen}\alpha$	$\frac{dM_x}{d\varphi} = M_T \operatorname{cos}\alpha - M_y \operatorname{sen}\alpha - Q_y D_0$	III
$\frac{dQ_y}{d\varphi} = Q_x \operatorname{sen}\alpha + qr \operatorname{cos}\alpha$	$\frac{dM_y}{d\varphi} = M_x \operatorname{sen}\alpha + Q_x D_0 + qr e \operatorname{sen}\alpha$	IV
$\frac{dN}{d\varphi} = -Q_x \operatorname{cos}\alpha + qr \operatorname{sen}\alpha$	$\frac{dM_T}{d\varphi} = -M_x \operatorname{cos}\alpha - qr e \operatorname{cos}\alpha$	V

$$D_0 = r \operatorname{seca}\alpha$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES.—

$$\frac{dQ_x}{d\varphi} \operatorname{sen}\alpha = Q_x \operatorname{sen}^2\alpha + qr \operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{dN}{d\varphi} \operatorname{cos}\alpha = -Q_x \operatorname{cos}^2\alpha + qr \operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha \frac{dQ_x}{d\varphi} - \frac{dN}{d\varphi} \operatorname{cos}\alpha = Q_x$$

Derivando I obtenemos:

$$\frac{d^2Q_x}{d\varphi^2} = \operatorname{cos}\alpha \frac{dN}{d\varphi} - \frac{dQ_x}{d\varphi} \operatorname{sen}\alpha$$

Sustituyendo lo anteriormente obtenido, llegaremos a:

$$\frac{d^2Q_x}{d\varphi^2} = -Q_x \quad \text{Lo que es una ecuación diferencial inmediata, cuya solución más general es:}$$

$$Q_x = Y_1' \operatorname{sen}\varphi + Y_2' \cos\varphi$$

Podemos adoptar $Y_1' = \frac{Y_1}{r}$ e $Y_2' = \frac{Y_2}{r}$, sustituyendo:

$$\underline{Q_x = \frac{1}{r}(Y_1 \operatorname{sen}\varphi + Y_2 \cos\varphi)}$$

Empleando la ecuación III

$$\frac{dN}{d\varphi} = -\frac{1}{r}(Y_1 \operatorname{sen}\varphi + Y_2 \cos\varphi) \cos\alpha + qr \operatorname{sen}\alpha. \quad \text{integrandos:}$$

$$N = -\frac{\cos\alpha}{r} (-Y_1 \cos\varphi + Y_2 \operatorname{sen}\varphi) + \operatorname{sen}\alpha r \int_0^\varphi q d\varphi + Y_3'$$

$$\text{Tomando } Y_3' = \frac{Y_3}{r} \operatorname{sen}^2\alpha \quad \text{y}$$

$$\boxed{N = r \operatorname{sen}\alpha \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{Y_3}{r} \operatorname{sen}^2\alpha - \frac{\cos\alpha}{r} (Y_2 \operatorname{sen}\varphi - Y_1 \cos\varphi)}$$

Si integramos II obtendremos una nueva constante de integración, pero I nos señala que no posee un valor independiente de las anteriormente obtenidas. Por lo cual:

$$R = \frac{Y_3' \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{Y_3}{r} \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

Integrando II

$$\boxed{Q_y = r \cos\alpha \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{Y_3}{r} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{r} (Y_2 \operatorname{sen}\varphi - Y_1 \cos\varphi)}$$

Resolvamos ahora las IV, V y VI

$$\frac{dM_x}{d\varphi} \cos\alpha = -M_x \cos^2\alpha - qr \operatorname{cos}^2\alpha$$

$$\frac{dM_y}{d\varphi} \operatorname{sen}\alpha = M_y \operatorname{sen}^2\alpha + Q_x \operatorname{sen}\alpha + qr \operatorname{sen}^2\alpha$$

Diferencia:

$$\frac{dM_x}{d\varphi} \cos\alpha - \frac{dM_y}{d\varphi} \operatorname{sen}\alpha = -M_x - qr \operatorname{re} - Q_x \operatorname{rtag}\alpha$$

Derivando IV obtendremos esta misma diferencia, lo que nos permite sustituir:

$$\frac{d^2M_x}{d\varphi^2} = -M_x - qr \operatorname{re} - Q_x \operatorname{rtag}\alpha - \frac{dQ_y}{d\varphi} \frac{r}{\cos\alpha} \quad \text{Podemos sustituir la derivada de } Q_y \text{ por su equivalente según III.}$$

$$\frac{d^2M_x}{d\varphi^2} + M_x = -qr \operatorname{re} - Q_x \operatorname{rtag}\alpha - Q_x \operatorname{rtag}\alpha - qr^2 = -2Q_x \operatorname{rtag}\alpha - qr(r+\operatorname{re})$$

$$\frac{d^2M_y}{d\varphi^2} + M_y = -2\operatorname{tag}\alpha (Y_1 \operatorname{sen}\varphi + Y_2 \cos\varphi) - qr(r+\operatorname{re})$$

Ecación diferencial que tiene como solución:

$$M_x(\varphi) = -\operatorname{tag}\alpha Y_1 (\operatorname{sen}\varphi - Y_1 \cos\varphi) + Y_4 \operatorname{sen}\varphi + Y_5 \cos\varphi + f(\varphi)$$

M_T. lo obtendremos integrando VI

$$M_T = -\cos\alpha \int_0^\varphi M_x d\varphi - r \operatorname{cos}\alpha \int_0^\varphi q d\varphi + Y_6$$

Siendo:

$$\int_0^\varphi M_x d\varphi = -Y_4 \cos\varphi + Y_5 \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{tag}\alpha [-Y_4 \cos\varphi Y_2 + Y_5 \operatorname{sen}\varphi - Y_1 \operatorname{sen}\varphi Y_1 - Y_1 \cos\varphi] + \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi$$

$$\int_0^\varphi M_x d\varphi = -Y_4 \cos\varphi + Y_5 \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tag}\alpha [Y_2 \operatorname{sen}\varphi + Y_1 \operatorname{cos}\varphi - Y_2 \operatorname{sen}\varphi + Y_1 \cos\varphi] - f(\varphi) - r(r+\operatorname{re}) \int_0^\varphi q d\varphi$$

Por lo que

$$M_T = \cos\alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + Y_4 \cos\varphi + Y_5 \sin\varphi \right] - \sin\alpha \left[Y_2 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi - Y_3 \sin\varphi + Y_6 \cos\varphi \right] + Y_6$$

Si escogemos $Y_6 = -Y_6 \cos\alpha \sin\alpha$, tendremos:

$$M_T = \cos\alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + Y_4 \cos\varphi - Y_5 \sin\varphi - Y_6 \sin\alpha \right] - \sin\alpha \left[Y_2 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi - Y_3 \sin\varphi + Y_6 \cos\varphi \right]$$

Analicemos ahora el término independiente de M_y que II nos indica que está supeditado a los anteriores.

$$k = \frac{1}{\sin\alpha} \left(\cos\alpha Y_6 - \frac{Y_3}{r} \sin\alpha \cos\alpha \frac{\Gamma}{\cos\alpha} \right) = \frac{1}{\sin\alpha} (-Y_6 \cos\alpha \sin\alpha - Y_3 \sin\alpha) = -Y_6 \cos^2\alpha - Y_3$$

Integrando II.

$$\begin{aligned} M_y &= \sin\alpha \int M_x d\varphi + D_0 \int Q_x d\varphi + r \sin\alpha \int q d\varphi + k\varphi = \\ &= \sin\alpha \left[-Y_4 \cos\varphi + Y_5 \sin\varphi + \operatorname{tag}\alpha (Y_2 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi - Y_3 \sin\varphi + Y_6 \cos\varphi) - f'(\varphi) - r(r+\epsilon) \int_0^\varphi q d\varphi \right] + \\ &\quad + \frac{I}{\cos\alpha} \frac{1}{r} (-Y_1 \cos\varphi + Y_2 \sin\varphi) + r \sin\alpha \int_0^\varphi q d\varphi - Y_6 \cos^2\alpha - Y_3 = \\ &= -\sin\alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + Y_4 \cos\varphi - Y_5 \sin\varphi - \operatorname{tag}\alpha (Y_2 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi) \right] + \cos\alpha (Y_2 \sin\varphi - Y_1 \cos\varphi) - \\ &\quad - Y_3 - Y_6 \cos^2\alpha = M_y \end{aligned}$$

El cuadro de ecuaciones de cada solicitud es:

$$Q_x = \frac{1}{r} (Y_1 \sin\varphi + Y_2 \cos\varphi)$$

$$N = r \sin\alpha \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{Y_3}{r} \sin^2\alpha - \frac{\cos\alpha}{r} (Y_2 \sin\varphi - Y_1 \cos\varphi)$$

$$Q_y = r \cos\alpha \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{Y_3}{r} \sin\alpha \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{r} (Y_2 \sin\varphi - Y_1 \cos\varphi)$$

$$M_x = -\operatorname{tag}\alpha \int (Y_1 \sin\varphi - Y_1 \cos\varphi) + Y_4 \sin\varphi + Y_5 \cos\varphi + f(\varphi)$$

$$M_T = \cos\alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + Y_4 \cos\varphi - Y_5 \sin\varphi - Y_6 \sin\alpha \right] - \sin\alpha \left[Y_2 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi - Y_3 \sin\varphi + Y_6 \cos\varphi \right]$$

$$\begin{aligned} M_y &= -\sin\alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + Y_4 \cos\varphi - Y_5 \sin\varphi - \operatorname{tag}\alpha (Y_2 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi) \right] - Y_3 - Y_6 \cos^2\alpha + \\ &\quad + [\sin\varphi \cdot Y_2 - Y_1 \cos\varphi] \cos\alpha \end{aligned}$$

Siendo $f(\varphi)$ la solución de la ecuación diferencial:

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = -qr(r+\epsilon).$$

CONDICIONES PARA EL CÁLCULO DE LAS CONSTANTES HIPERESTÁTICAS.-

Fundandonos en el hecho de que las escaleras helicoidales generalmente se efectúan con doble empotramiento, podremos plantear que los desplazamientos en los mismos han de ser nulos, ya sean giros o traslaciones.

El teorema de Castigliano nos indica que el angulo de giro que se produce en un punto es igual a la derivada parcial de la energía de deformación respecto al momento aplicado a dicho punto.

Calculamos pues, la expresión indicativa de la energía de deformación a lo largo de la losa:

$$W = \int_s \left(\frac{N_x^2}{2EI_x} + \frac{Q_x^2}{2G_x I_{xy}} + \frac{Q_y^2}{2G_y I_{xz}} + \frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2G_z I_o} \right) ds \quad ds: \text{diferencial de abcisa curvilínea.}$$

Por la hipótesis-3, de despreciar las deformaciones producidas por las fuerzas axiales y tangenciales, podremos al mismo despreciar los términos correspondientes a su energía de deformación.

El teorema de Castigliano, es conveniente hacerlo notar, el que es posible su aplicación por la suposición efectuada de que las deformaciones son proporcionales a las solicitudes aplicadas, condición que puede dejarse de cumplir, como sucede en realidad, pero en un grado despreciable, en el presente caso, aunque el material se comporta de acuerdo con la ley de Hooke.

Según lo expuesto la energía de deformación vendrá dada por:

$$W = \int_s \left(\frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2G_z I_o} \right) ds.$$

Pasando de abcisas curvilineas a polares:

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2G_z I_o} \right) \frac{rd\varphi}{\cos\alpha}$$

Dado por sabido que: $G_z = \frac{2EI_x I_y}{I_o^2}$ resultará: $2G_z I_o = \frac{4EI_x I_y}{I_o}$

Sustituyendo:

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2 I_o}{4EI_x I_y} \right) \frac{rd\varphi}{\cos\alpha}$$

$I_o = I_x + I_y$ puesto que es el momento de inercia polar.

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{M_x^2}{2} + \frac{M_y^2}{2} \frac{I_x}{I_y} + \frac{M_z^2}{4} \cdot \frac{(I_x + I_y)}{I_y} \right) \frac{rd\varphi}{\cos\alpha}, \frac{1}{EI_x}$$

Llamando a $\frac{I_x}{I_y} = a$ $\frac{I_x + I_y}{2I_y} = b$ resultará: $b = \frac{(a+1)}{2}$

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r}{EI_x \cos\alpha} \left(\frac{M_x^2}{2} + \frac{M_y^2}{2} a + \frac{M_z^2}{2} b \right) d\varphi$$

Si suponemos una solicitud unidad en uno de los empotramientos, las funciones de los momentos flectores, y torsores de dicha solicitud unidad, serán en realidad las derivadas parciales de las funciones de momentos, respecto a un momento aplicado en dicho empotramiento, funciones que son precisamente las que nos surgirán al aplicar el teorema de Castigliano. En efecto.

$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial M_A}$ Sustituyendo la energía de deformación por la expresión que la define, y empleando el concepto de derivada de un integral paramétrica:

$$\theta_A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r}{EI_x \cos\alpha} \left(M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_A} + M_y \frac{\partial M_y}{\partial M_A} + M_z \frac{\partial M_z}{\partial M_A} b \right) d\varphi$$

Las derivadas parciales

$\frac{\partial M_x}{\partial N_A}$ es la función de M_x correspondiente a un momento unidad aplicado en A, y que representa una tendencia de giro, en el plano en que medimos θ . y análogamente con $\frac{\partial M_y}{\partial N_A}$ y $\frac{\partial M_T}{\partial N_A}$.

El punto de aplicación del momento A nos altera los límites de integración de la integral indicativa de $\frac{\partial M}{\partial N_A}$, ya que N_A variará de ecuación en A, por lo que

$$\theta_A = \int_{-\varphi_0}^A + \int_A^{\varphi_0}$$

Pero si A, es uno de los empotramientos será correcto : $\theta_A = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}$

Para calcular las constantes hiperestáticas, impondremos que ante 6 solicitudes unidades independientes, y aplicadas en los empotramientos, los giros que se producirán serán nulos.

Para analizar qué solicitudes unidad nos conviene aplicar, podemos considerar descompuestas las ecuaciones de momentos obtenidas, como una combinación lineal de 6 solicitudes no necesariamente unidad, pero linealmente independiente, más una séptima que nos representa las cargas existentes o funciones supeditadas de forma directa, mientras que las otras 6, solo nos representarán las acciones de los empotramientos para mantener las condiciones de equilibrio estático. Esta descomposición es :

$$M_{x_0} = f(\varphi)$$

$$M_{y_0} = -\operatorname{sen}\alpha [f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi]$$

$$M_{x_1} = +\operatorname{tg}\alpha \varphi \cos\varphi$$

$$M_{y_1} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - \operatorname{cos}\alpha \cos\varphi$$

$$M_{x_2} = -\operatorname{tg}\alpha \varphi \operatorname{sen}\varphi$$

$$M_{y_2} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\varphi$$

$$M_{x_3} = 0$$

$$M_{y_3} = -1$$

$$M_{x_4} = \operatorname{sen}\varphi$$

$$M_{y_4} = -\operatorname{sen}\alpha \cos\varphi$$

$$M_{x_5} = \cos\varphi$$

$$M_{y_5} = +\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi$$

$$M_{x_6} = 0$$

$$M_{y_6} = -\cos^2\alpha$$

$$M_{T_0} = \operatorname{cos}\alpha [f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi]$$

$$M_{T_1} = -\operatorname{sen}\alpha [+\operatorname{cos}\varphi + \operatorname{sen}\varphi]$$

$$M_{T_2} = -\operatorname{sen}\alpha [-\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{cos}\varphi]$$

$$M_{T_3} = 0$$

$$M_{T_4} = \operatorname{cos}\alpha \cos\varphi$$

$$M_{T_5} = -\operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\varphi$$

$$M_{T_6} = -\operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

Las constantes de la dependencia lineal de estas 6 funciones con la ecuación general de momentos generales son las constantes hiperestáticas que hemos de obtener.

Si escogemos como solicitudes unidad, estas seis ecuaciones divididas previamente por sus valores modulares, podremos imponer que los giros que calcularemos a través del teorema de Castigliano, son nulos, al suponerlos actuando en los empotramientos, hecho que viene señalado por los límites de integración, y por la continuidad de la función en todo el helicóide, así pues, siendo los modulos de dichas solicitudes los valores desconocidos

$k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6$ tendremos:

$$\theta_1 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{r}{EI_x \cos\alpha} \left(M_x \frac{M_{x_1}}{k_1} + M_y \frac{M_{y_1}}{k_1} a + M_T \frac{M_{T_1}}{k_1} b \right) d\varphi = 0$$

$$\theta_2 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{r}{EI_x \cos\alpha} \left(M_x \frac{M_{x_2}}{k_2} + M_y \frac{M_{y_2}}{k_2} a + M_T \frac{M_{T_2}}{k_2} b \right) d\varphi = 0$$

$$\theta_3 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{r}{EI_x \cos\alpha} \left(M_x \frac{M_{x_3}}{k_3} + M_y \frac{M_{y_3}}{k_3} a + M_T \frac{M_{T_3}}{k_3} b \right) d\varphi = 0$$

$$\theta_4 = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\Gamma}{EI_x \cos \alpha} \left(M_x \frac{M_{x_1}}{R_4} + M_y \frac{M_{y_4}}{R_4} + M_T \frac{M_{T_4}}{R_4} \right) d\varphi = 0$$

$$\theta_5 = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\Gamma}{EI_x \cos \alpha} \left(M_x \frac{M_{x_5}}{R_5} + M_y \frac{M_{y_5}}{R_5} + M_T \frac{M_{T_5}}{R_5} \right) d\varphi = 0$$

$$\theta_6 = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\Gamma}{EI_x \cos \alpha} \left(M_x \frac{M_{x_6}}{R_6} + M_y \frac{M_{y_6}}{R_6} + M_T \frac{M_{T_6}}{R_6} \right) d\varphi = 0$$

Eliminando los factores constantes, dada la igualdad impuesta a cero, y descomponiendo las ecuaciones de momentos flectores, en las ecuaciones componentes, tendremos:

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} [(M_{x_0} + M_{x_1} + M_{x_2} + M_{x_3} + M_{x_4} + M_{x_5} + M_{x_6}) M_{x_1} + a(M_{y_0} + \dots + M_{y_6}) M_{y_1} + b(M_{T_0} + \dots + M_{T_6}) M_{T_1}] d\varphi = 0$$

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} [(M_{x_0} + M_{x_1} + M_{x_2} + M_{x_3} + M_{x_4} + M_{x_5} + M_{x_6}) M_{x_6} + a(M_{y_0} + \dots + M_{y_6}) M_{y_6} + b(M_{T_0} + \dots + M_{T_6}) M_{T_6}] d\varphi = 0$$

Lo que puede expresarse de la siguiente forma:
Calculando previamente:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (M_{x_0} M_{x_R} + M_{y_0} M_{y_R} + M_{T_0} M_{T_R} b) d\varphi \\ &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (M_{x_0} M_{x_R} + M_{y_0} M_{y_R} + b M_{T_0} M_{T_R}) d\varphi \end{aligned}$$

$$\delta_{01} + \delta_{11} Y_1 + \delta_{21} Y_2 + \delta_{31} Y_3 + \delta_{41} Y_4 + \delta_{51} Y_5 + \delta_{61} Y_6 = 0 \quad (1)$$

$$\delta_{02} + \delta_{12} Y_1 + \delta_{22} Y_2 + \delta_{32} Y_3 + \delta_{42} Y_4 + \delta_{52} Y_5 + \delta_{62} Y_6 = 0 \quad (2)$$

$$\delta_{03} + \delta_{13} Y_1 + \delta_{23} Y_2 + \delta_{33} Y_3 + \delta_{43} Y_4 + \delta_{53} Y_5 + \delta_{63} Y_6 = 0 \quad (3)$$

$$\delta_{04} + \delta_{14} Y_1 + \delta_{24} Y_2 + \delta_{34} Y_3 + \delta_{44} Y_4 + \delta_{54} Y_5 + \delta_{64} Y_6 = 0 \quad (4)$$

$$\delta_{05} + \delta_{15} Y_1 + \delta_{25} Y_2 + \delta_{35} Y_3 + \delta_{45} Y_4 + \delta_{55} Y_5 + \delta_{65} Y_6 = 0 \quad (5)$$

$$\delta_{06} + \delta_{16} Y_1 + \delta_{26} Y_2 + \delta_{36} Y_3 + \delta_{46} Y_4 + \delta_{56} Y_5 + \delta_{66} Y_6 = 0 \quad (6)$$

Las (2) y (5) quedarán en realidad reducidas a tres términos. Estas dos ecuaciones son en realidad las correspondientes a carga simétrica, y las demás solo son precisas para cargas asimétricas, ya que cuando existe simetría las (1), (3), (4) y (6) se hacen cero.

Así pues generalmente solo tendremos que calcular el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{02} + \delta_{22} Y_1 + \delta_{52} Y_5 = 0 \\ \delta_{05} + \delta_{25} Y_2 + \delta_{55} Y_5 = 0 \end{aligned} \right\}$$

En casos de simetría de carga, todas las constantes hiperestáticas excepto Y_2 e Y_5 han de ser nulas, puesto que la función de momento flectores X , lo debe ser, y en tal caso, han de desaparecer todas las funciones M_y e M_T .

trigonométricas que al cambiar de signo φ , también cambian de signo, tales como son $\sin \varphi$ o bien $\cos \varphi$, pero no, $\varphi \sin \varphi$ o bien $\cos \varphi$, que son simétricas. M_y y M_T son antisimétricas.

Resolviendo el sistema reducido indicado, llegaremos a que:

$$Y_2 = - \frac{\delta_{02} \delta_{55} - \delta_{05} \delta_{25}}{\delta_{22} \delta_{55} - \delta_{25}^2}$$

$$Y_5 = - \frac{\delta_{02} \delta_{55} - \delta_{05} \delta_{25}}{\delta_{55} \delta_{22} - \delta_{25}^2}$$

CONSTANTES HPERESTÁTICAS
para carga simétrica.

Calculemos las deltas que precisaremos en casos de carga simétrica:

$$\delta_{02} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (M_{x_0} M_{x_2} + N_{y_0} M_{y_2} a + N_{z_0} M_{z_2} b) d\varphi =$$

$$= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left(-f(\varphi) \operatorname{tag}\varphi \sin\varphi - a \sin^2 \alpha \operatorname{tag}\varphi \cos\varphi f'(\varphi) - a \cos\alpha \sin\alpha f'(\varphi) \sin\varphi - a \operatorname{tag}\varphi \sin^2 \alpha \cos\varphi r^2 \int_0^\varphi q d\varphi - \right. \\ \left. - a \sin\alpha \cos\alpha r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + b \cos\alpha \sin\alpha \sin\varphi f'(\varphi) - b \cos\alpha \sin\alpha \cos\varphi f'(\varphi) + \right. \\ \left. + b \cos\alpha \sin\alpha \sin\varphi r^2 \int_0^\varphi q d\varphi - b \cos\alpha \sin\alpha \cos\varphi r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right) d\varphi =$$

$$\delta_{02} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (-f(\varphi) \varphi \sin\varphi \operatorname{tag}\varphi) d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f'(\varphi) \varphi \left[-a \sin^2 \alpha \operatorname{tag}\varphi \cos\varphi - b \cos\alpha \sin\alpha \cos\varphi \right] d\varphi +$$

$$+ \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f'(\varphi) \left[-a \cos\alpha \sin\alpha \sin\varphi + b \cos\alpha \sin\alpha \sin\varphi \right] d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^2 \sin\varphi \int_0^\varphi q d\varphi \left[-a \sin\alpha \cos\alpha + b \sin\alpha \cos\alpha \right] d\varphi$$

$$- \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \varphi \cos\varphi r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \left[a \operatorname{tag}\varphi \sin^2 \alpha + b \cos\alpha \sin\alpha \right] d\varphi =$$

$$\operatorname{tag}\varphi \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f(\varphi) \cdot \varphi \sin\varphi d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \operatorname{tag}\varphi \cos\varphi \varphi f'(\varphi) \left[-a \sin^2 \alpha - (a+1) \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right] d\varphi +$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{1}{2} (1-a) \cos\alpha \sin\alpha \sin\varphi f'(\varphi) d\varphi + \frac{\sin 2\alpha (1-a)}{4} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^2 \sin\varphi \int_0^\varphi q d\varphi d\varphi -$$

$$- \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \operatorname{tag}\varphi \varphi \cos\varphi \left[a \sin^2 \alpha + (a+1) \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right] r^2 \int_0^\varphi q d\varphi d\varphi =$$

$$= \operatorname{tag}\varphi \left[- \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f(\varphi) \varphi \sin\varphi d\varphi - \frac{(a-1) \sin^2 \alpha + (a+1)}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\varphi \varphi f'(\varphi) d\varphi - \frac{(a-1) \sin^2 \alpha + (a+1)}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\varphi \varphi r^2 \int_0^\varphi q d\varphi d\varphi \right]$$

$$+ \frac{\sin 2\alpha (1-a)}{4} \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin\varphi f'(\varphi) d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^2 \sin\varphi \int_0^\varphi q d\varphi d\varphi \right]$$

Llamando a $\frac{(a-1) \sin^2 \alpha + (a+1)}{2} = F$

$$\frac{\sin 2\alpha (1-a)}{4} = E_0$$

$$\delta_{02} = E_0 \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin\varphi \left(f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right) d\varphi \right] - \operatorname{tag}\varphi \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f(\varphi) \varphi \sin\varphi d\varphi - F \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\varphi \varphi \left(f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right) d\varphi \right]$$

$$S_{05} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (M_{x_0} M_{x_5} + M_{y_0} M_{y_5} a + M_{z_0} M_{z_5} \frac{1}{2}(1+a)) d\varphi =$$

$$= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \sin^2 \alpha \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \operatorname{sen} \varphi \left(f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right) d\varphi - \cos^2 \alpha \frac{1}{2}(1+a) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \operatorname{sen} \varphi \left(f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right) d\varphi =$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \frac{(a-1) \operatorname{sen}^2 \alpha + (a+1)}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \operatorname{sen} \varphi \left(f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right) d\varphi = S_{05}$$

$$S_{22} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \tan^2 \alpha \varphi^2 \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\tan \alpha \operatorname{sen} \alpha \varphi \cos \varphi + \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (4 \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)^2 d\varphi =$$

$$\left[-\frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \varphi_0^3 + \frac{1-2\varphi_0^2}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_0 \right] + \frac{a}{\cos \alpha} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\operatorname{sen}^2 \alpha \varphi \cos \varphi + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (4^2 \cos^2 \varphi - 2\varphi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi$$

$$\tan^2 \alpha \left[\frac{1}{3} \varphi_0^3 + \frac{1-2\varphi_0^2}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_0 - \frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi_0 \right] + \frac{a}{\cos \alpha} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\operatorname{sen}^2 \alpha \varphi^2 \cos^2 \varphi + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \left[\frac{1}{3} \varphi_0^3 - \frac{1-2\varphi_0^2}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_0 + \frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi_0 \right] - \frac{1}{4}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \left[\operatorname{sen} 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0 \right] + \frac{1}{4}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \left[2\varphi_0 - \operatorname{sen} 2\varphi_0 \right] =$$

$$\frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} \varphi_0^3 + \frac{1-2\varphi_0^2}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_0 - \frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi_0 \right] + \frac{1}{4}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \left[\frac{2}{3} \varphi_0^3 - \frac{1-2\varphi_0^2}{2} \operatorname{sen} 2\varphi_0 + \varphi_0 \cos 2\varphi_0 - \operatorname{sen} 2\varphi_0 + 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0 + 2\varphi_0 - \operatorname{sen} 2\varphi_0 \right] +$$

$$\left[\frac{1}{3} \varphi_0^3 - \frac{1-2\varphi_0^2}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_0 + \frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi_0 \right] + \frac{a \operatorname{sen}^2 \alpha}{2} \left[\operatorname{sen} 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0 \right] + \frac{a \cos^2 \alpha}{2} \left[2\varphi_0 - \operatorname{sen} 2\varphi_0 \right] =$$

$$\tan^2 \alpha \left[\frac{1}{3} \varphi_0^3 + \frac{1-2\varphi_0^2}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_0 - \frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi_0 \right] + \frac{1}{4}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \left[\frac{2}{3} \varphi_0^3 - \frac{5-2\varphi_0^2}{2} \operatorname{sen} 2\varphi_0 + 3\varphi_0 \cos 2\varphi_0 + 2\varphi_0 \right] +$$

$$\frac{\varphi_0^3}{3} \left[a \operatorname{sen}^2 \alpha \tan^2 \alpha \right] + \frac{\varphi_0^2}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha a \operatorname{sen}^2 \alpha \tan^2 \alpha + a \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{ta}^2 \alpha \frac{\varphi_0}{2} \cos 2\varphi_0 - \frac{a}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha \tan^2 \alpha \operatorname{sen} 2\varphi_0 +$$

$$\operatorname{sen} 2\varphi_0 \left[\frac{a \operatorname{sen}^2 \alpha - a + a \operatorname{sen}^2 \alpha}{2} \right] - a \operatorname{sen}^2 \alpha \varphi_0 \cos 2\varphi_0 + a \frac{\varphi_0}{2} \cos^2 \alpha =$$

$$\tan^2 \alpha \left[\frac{1}{3} \varphi_0^3 \left(1 + \frac{1}{4}(1+a) \cos^2 \alpha 2 + a \operatorname{sen}^2 \alpha \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}(1+a) \cos^2 \alpha - a \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \varphi_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 - (\operatorname{sen} 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0) \right] \cdot$$

$$\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{4}(1+a) \cos^2 \alpha + \frac{a \operatorname{sen}^2 \alpha}{4} - \frac{a \cos^2 \alpha}{2} \right] + (2\varphi_0 - \operatorname{sen} 2\varphi_0) \left[\frac{1}{4}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{4}(1+a) \operatorname{sen}^2 \alpha - \right.$$

$$\left. \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4} + \frac{a \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{ta}^2 \alpha}{2} - \frac{2 a \operatorname{sen}^2 \alpha - a}{2} + \frac{a \cos^2 \alpha \tan^2 \alpha}{2} \right] =$$

$$\frac{1}{2} (1-a) + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{1}{2} \cdot$$

CARGA ASIMETRICA.-

$$\delta_{11} = \operatorname{tg}^2 \alpha \left[\frac{1}{3} (2-c) \varphi_0^3 + \frac{1}{2} c \varphi_0^2 \sin 2\varphi_0 + \frac{1}{4} (2-3c-2a) (\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0) \right] + \frac{1}{4} (2c-1+3a) \cdot (2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0)$$

$$\delta_{12} = 0 = \delta_{21}$$

$$\delta_{13} = 2a [\cos \alpha \sin \varphi_0 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tag} \alpha (\varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0)] = \delta_{31}$$

$$\delta_{14} = \frac{1}{4} \operatorname{tag} \alpha [c (\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0) - 2(1-c-a)(2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0)] = \delta_{41}$$

$$\delta_{15} = 0 = \delta_{51}$$

$$\delta_{16} = \cos \alpha [(2c-1+3a)(2 \operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) + c \varphi_0 \cos \varphi_0] = \delta_{61}$$

$$\delta_{23} = 0 = \delta_{32}$$

$$\delta_{24} = 0 = \delta_{42}$$

$$\delta_{26} = 0 = \delta_{62}$$

$$\delta_{33} = 2a \varphi_0$$

$$\delta_{34} = 2a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi_0 = \delta_{43}$$

$$\delta_{25} = 0 = \delta_{52}$$

$$\delta_{36} = 2a \cos^2 \alpha \varphi_0 = \delta_{63}$$

$$\delta_{44} = (2-c)\varphi_0 - \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2\varphi_0$$

$$\delta_{45} = 0 = \delta_{54}$$

$$\delta_{46} = -\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha (1-a) \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\delta_{56} = 0 = \delta_{65}$$

$$\delta_{66} = \cos^2 \alpha (2c-1+3a) \varphi_0$$

Calculadas las δ pasariamos a resolver el sistema de ecuaciones que se indica en la pagina-14- para obtener las constantes hiperestáticas del sistema.
Naturalmente se tendrían que calcular las S_{01} , de forma análoga a como lo planteamos para S_{02} y S_{05}

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.-

Constituye un caso particular de la carga simétrica.

El valor q es constante a lo largo del helicoide.

La solución de la ecuación diferencial:

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = -qr(r+\epsilon)$$

Al ser q un valor no dependiente de φ , resulta evidente que:

$$f(\varphi) = -qr(r+\epsilon) = -q \frac{12r^2 + b^2}{12} = f(\varphi) \quad \text{y} \quad f'(\varphi) = 0$$

Las S_{02} y S_{05} que solo pudimos expresar en función de $f(\varphi)$, ahora podremos darlas en forma totalmente resuelta. En efecto:

$$S_{02} = E_0 r^2 q \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi + \operatorname{tag} \alpha q r(r+\epsilon) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi - Fr^2 q \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi =$$

$$= (E_0 r^2 q + \operatorname{tag} \alpha qr(r+\epsilon)) 2(\operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) - Fr^2 q 2 \left(\frac{\varphi_0^2}{2} \operatorname{sen} \varphi_0 - 2(\operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \right) =$$

$$= 2r^2 q \operatorname{tag} \alpha \left[(\operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \left(\frac{\cos^2 \alpha (1-a)}{2} + (1 + \frac{q}{r}) + \frac{(a-1) \operatorname{sen}^2 \alpha + (a+1)}{2} \right) - \frac{(a-1) \operatorname{sen}^2 \alpha + (a+1)}{2} \varphi_0^2 \operatorname{sen} \varphi_0 \right] =$$

$$= 2r^2 q \operatorname{tag} \alpha \left[(\operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \left(\frac{\cos^2 \alpha (1-a)}{2} + 1 + \frac{q}{r} + a - 1 - (a-1) \cos^2 \alpha + a + 1 \right) - \left(\frac{(a-1)}{2} - \frac{(a-1) \cos^2 \alpha + (a+1)}{2} \right) \varphi_0^2 \operatorname{sen} \varphi_0 \right] =$$

$$= 2r^2 q \operatorname{tag} \alpha \left[(\operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \left(\frac{1}{2} \cos^2 \alpha (1-a) - 3 + 3a + 4 - a + \frac{q}{r} \right) - \left(1 - (1-a) + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha (1-a) \right) \varphi_0^2 \operatorname{sen} \varphi_0 \right] =$$

$$2r^2 q \operatorname{tag} \alpha \left[(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \left(4 - 3c - a + \frac{b^2}{12r^2} \right) - (1-c) \varphi_0^2 \sin \varphi_0 \right]$$

$$\begin{aligned} S_{05} &= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (-qr(r+\epsilon)) \cos \varphi d\varphi - (1-c) r^2 q \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= -2qr(r+\epsilon) \sin \varphi_0 - (1-c) r^2 q 2 (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) = \\ &= 2qr^2 \left[(1-c)\varphi_0 \cos \varphi_0 - \left(2 - c + \frac{b^2}{12r^2} \right) \sin \varphi_0 \right] = S_{05} \end{aligned}$$

(sustituimos directamente:
 $\frac{(a-1) \sin^2 \alpha + (a+1)}{2} = 1-c$
puesto que ya se ha obtenido dicha igualdad).

El cálculo de las S_{22} , S_{52} y S_{55} se efectuará por las mismas fórmulas que se indicaron se tendrá que resolver también el mismo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se indicó para las cargas simétricas.

RESUMEN DE LA SISTEMÁTICA A SEGUIR.—

A. CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.—

1º φ_{\max} en radianes.

$$2º \quad \operatorname{tag} \alpha = \frac{h}{r \varphi_{\max}}$$

3º Calculo de las siguientes expresiones trigonométricas:

a) Conociendo $\operatorname{tag} \alpha$, se averiguaren los valores de:

$\sin \alpha$
 $\cos \alpha$.
 $\operatorname{tag} \alpha$.

b) Conocido φ_{\max} pasado ya en radianes, tendremos que obtener

$$\varphi_0 = \varphi_{\max}/2$$

$\sin \varphi_0$
 $\cos \varphi_0$
 $\sin 2\varphi_0$
 $\cos 2\varphi_0$
 φ_0^2
 φ_0^3

4º Calculo de la carga unitaria lineal

$$q = \frac{12r^2 b}{12r^2 + b^2} q_s$$

5º $\frac{e}{r} = \frac{b^2}{12r^2}$ valor unitario respecto al radio del descentramiento de la carga lineal supuesta.

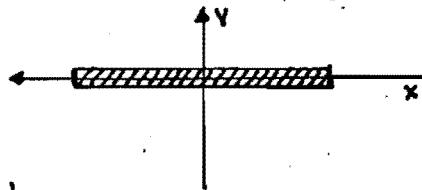
6º Obtención de I_x e I_y

7º Valor de los parámetros:

$$a = \frac{I_x}{I_y} \quad y \quad c = \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) (1-a)$$

8º Calculo de las deltas:

$$S_{02} = 2r^2 q \operatorname{tag} \alpha \left[(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \left(4 - 3c - a + \frac{b^2}{12r^2} \right) - (1-c) \varphi_0^2 \sin \varphi_0 \right]$$



$$\delta_{05} = 2q r^2 \left[(1-c)\psi_0 \cos\psi_0 - \left(2-c + \frac{J^2}{2r^2}\right) \sin\psi_0 \right]$$

$$\delta_{22} = \tan^2 \alpha \left[\frac{1}{3} (2-c)\psi_0^3 - \frac{1}{2} c \psi_0^2 \sin 2\psi_0 - \frac{1}{4} (2-3c) \alpha (\sin 2\psi_0 - 2\psi_0 \cos 2\psi_0) \right] + \frac{1}{4} (2c-1+3\alpha) (2\psi_0 - \sin 2\psi_0)$$

$$\delta_{25} = \delta_{52} = -\frac{1}{4} \tan \alpha \left[2(2\psi_0 - \sin 2\psi_0)(1-c-\alpha) + c(\sin 2\psi_0 - 2\psi_0 \cos 2\psi_0) \right]$$

$$\delta_{55} = (2-c)\psi_0 + \frac{1}{2} c \sin 2\psi_0$$

9º Calculo de las constantes hiperestáticas:

$$Y_2 = - \frac{\delta_{02} \delta_{55} - \delta_{05} \delta_{52}}{\delta_{22} \delta_{55} - \delta_{25}^2}$$

que son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \delta_{02} + \delta_{22} Y_2 + \delta_{52} Y_5 = 0 \\ \delta_{05} + \delta_{25} Y_2 + \delta_{55} Y_5 = 0 \end{cases}$$

$$Y_5 = + \frac{\delta_{05} \delta_{22} - \delta_{02} \delta_{25}}{\delta_{25} \delta_{22} - \delta_{25}^2}$$

10º Calculo de las ecuaciones representativas de las solicitudes:

$$Q_x = \frac{1}{r} (Y_2 \sin \psi + Y_5 \cos \psi)$$

$$N = r \sin \alpha \cdot q \psi + \frac{Y_3}{r} \sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{r} (Y_2 \sin \psi - Y_5 \cos \psi)$$

$$Q_y = r q \cos \alpha + \frac{Y_3}{r} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{r} (Y_2 \sin \psi - Y_5 \cos \psi)$$

$$M_x = -\tan \alpha \cdot \psi (Y_2 \sin \psi - Y_5 \cos \psi) + Y_2 \sin \psi + Y_5 \cos \psi - qr(r+\epsilon)$$

$$M_T = \cos \alpha \left[r^2 \psi + Y_2 \cos \psi - Y_5 \sin \psi - Y_6 \sin \alpha \right] - \sin \alpha [4Y_2 \cos \psi + Y_5 \sin \psi - Y_2 \sin \psi + Y_5 \cos \psi]$$

$$M_y = -\sin \alpha \left[r^2 \psi + Y_2 \cos \psi - Y_5 \sin \psi - \tan \alpha (4Y_1 \cos \psi + 4Y_2 \sin \psi) \right] - Y_2 - Y_6 \cos^2 \alpha + \\ + [\sin \psi Y_2 - Y_5 \cos \psi] \cos \alpha$$

11º Trazado de las gráficas correspondientes a los 6 tipos de solicitudes.

12º Dimensionado

13º Comprobación a la torsión, se puede efectuar mediante la fórmula:

$$\chi_T = (4.81 - 1.81) \frac{b-h}{\sqrt{2h^2+b^2}} \frac{M_T}{h^2 b}$$

lo cual nos indicará si es precisa armadura especial o no.

CARGA SIMETRICA.- NO UNIFORMEMENTE REPARTIDA.-

Etapas $\frac{19}{27} \left. \frac{27}{39} \right\}$ Exactamente igual que en el proceso anterior

14º Calculo de la función de los descentramientos:

$$e(r, \psi) = \int_{r+h/2}^{r+h/2} q_s(r, \psi) \cdot r^2 dr = \\ \int_{r+h/2}^{r+h/2} q_s(r, \psi) r dr$$

Siendo: $q_s = f(r, \psi)$ lo cual lo hemos simbolizado mediante: $q_s(r, \psi)$

59 Calculo de la carga lineal.

$$q = \int_{r-b/2}^{r+b/2} \int_{\psi-\psi_0}^{\psi+\psi_0} r q_s(r, \psi) d\psi dr$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2(r+e)}$$

60 } Igual que en el caso de carga uniformemente repartida.

61 Solución de la ecuación diferencial $f''(e) + f(e) = -qr(r+e)$

62 Calculo de los deltas.

Parámetros previos:

$$F = \tan \alpha (1-c)$$

$$E_0 = F - a \tan \alpha = \tan \alpha (1-c-a)$$

$$\delta_{02} = E_0 \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \sin \psi (f'(e) + r^2 \int_0^\psi q d\psi) d\psi - \tan \alpha \int_{-\psi_0}^{\psi_0} f(e) \psi \sin \psi d\psi - F \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos \psi \left(f'(e) + r^2 \int_0^\psi q d\psi \right) d\psi$$

$$\delta_{03} = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} f(\psi) \cos \psi d\psi - (1-c) \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \sin \psi \left(f'(e) + r^2 \int_0^\psi q d\psi \right) d\psi$$

$\delta_{25} = \delta_{52}$, δ_{22} y δ_{33} igual que en el caso de la carga uniforme.

109 Resolución del sistema de las constantes hiperestáticas, tal como se indica en el apartado 99 de la carga uniforme, con lo que obtendremos Y_2 e Y_3 .

119 Cálculo de las ecuaciones representativas de las solicitudes.

$$Q_x = \frac{1}{r} (Y_1 \sin \psi + Y_2 \cos \psi)$$

$$N = r \sin \alpha \int_0^\psi q d\psi + \frac{Y_3 \sin \alpha}{r} - \frac{\cos \alpha}{r} (Y_2 \sin \psi - Y_1 \cos \psi)$$

$$Q_y = r \cos \alpha \int_0^\psi q d\psi + \frac{Y_3 \sin \alpha \cos \alpha}{r} + \frac{\sin \alpha}{r} (Y_2 \sin \psi - Y_1 \cos \psi)$$

$$M_x = -\tan \alpha \cdot \psi (Y_2 \sin \psi - Y_1 \cos \psi) + Y_4 \sin \psi + Y_5 \cos \psi + f(\psi)$$

$$M_y = \cos \alpha \left[f'(\psi) + r^2 \int_0^\psi q d\psi + Y_4 \cos \psi - Y_5 \sin \psi - Y_6 \sin \alpha \right] - \sin \alpha \left[\psi Y_2 \cos \psi - Y_1 \sin \psi - Y_2 \sin \psi + Y_1 \cos \psi \right]$$

$$M_z = -\sin \alpha \left[f'(\psi) + r^2 \int_0^\psi q d\psi + Y_4 \cos \psi - Y_5 \sin \psi - \tan \alpha (r Y_1 \cos \psi + r Y_2 \sin \psi) \right] - Y_2 - Y_1 \cos^2 \alpha +$$

$$+ [\sin \alpha \cdot Y_2 - Y_1 \cos \psi] \cos \alpha.$$

121 Trazado de las gráficas correspondientes a los 6 tipos de solicitudes.

134 Dimensionado

CARGA NO SIMETRICA.-

19 - 21 - 21 - 41 - 51 - 61 - 71 - 81 - 91

10 Además hay que calcular las demás δ , mediante las expresiones:

$$\delta_{11} = \tan^2 \alpha \left[\frac{1}{3} (2-c) \psi_0^3 + \frac{1}{2} c \psi_0^2 \sin 2\psi_0 + \frac{1}{4} (2-3c-2a) (\sin 2\psi_0 - 2\psi_0 \cos 2\psi_0) \right] + \frac{1}{4} (2c-1+3a) (2\psi_0 + \sin 2\psi_0)$$

$$\delta_{12} = 0 = \delta_{21}$$

$$\delta_{13} = 2a [\cos \alpha \sin \psi_0 + \sin \alpha \tan \alpha (Y_0 \cos \psi_0 - \sin \psi_0)] = \delta_{31}$$

$$\delta_{14} = \frac{1}{4} \tan \alpha [c (\sin 2\psi_0 - 2\psi_0 \cos 2\psi_0) - 2(1-c-a)(2\psi_0 + \sin 2\psi_0)] = \delta_{41}$$

$$\delta_{15} = \delta_{51} = 0$$

$$\delta_{16} = \cos \alpha [(2c-1+2a)(2 \sin \psi_0 - \psi_0 \cos \psi_0) + c \psi_0 \cos \psi_0] = \delta_{61}$$

$$\delta_{23} = 0 = \delta_{32}$$

$$\delta_{23} = 2a \psi_0$$

$$\delta_{34} = 2a \cos^2 \psi_0 = \delta_{43}$$

$$\delta_{24} = 0 = \delta_{42}$$

$$\delta_{24} = 2a \sin \alpha \sin \psi_0 = \delta_{43}$$

$$\delta_{44} = (2-c) \psi_0 - \frac{1}{2} c \sin 2\psi_0$$

$$\delta_{26} = 0 = \delta_{62}$$

$$\delta_{26} = 0 = \delta_{53}$$

$$\delta_{45} = 0 = \delta_{54}$$

$$\delta_{46} = -\sin \alpha \cos^2 \alpha (1-\alpha) \sin \gamma_0$$

$$\delta_{56} = 0 = \delta_{65}$$

$$\delta_{66} = \cos^2 \alpha (2\zeta - 1 + 3\alpha) \gamma_0$$

119 Obtención de

$\delta_{01}, \delta_{03}, \delta_{04}, \delta_{06}$ Empleando:

$$\delta_{0K} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (M_{x_0} M_{x_K} + M_{y_0} M_{y_K} \alpha + \frac{1}{2}(1+\alpha) M_{T_0} M_{T_K}) d\varphi$$

Siendo: $M_{x_0} = f(\varphi)$

$$M_{y_0} = -\sin \alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right]$$

$$M_{x_1} = \tan \alpha \gamma \cos \varphi$$

$$M_{y_1} = \tan \alpha \sin \alpha \gamma \sin \varphi - \cos \alpha \cos \varphi$$

$$M_{x_3} = 0$$

$$M_{y_3} = -1$$

$$M_{x_4} = \sin \varphi$$

$$M_{y_4} = -\sin \alpha \cos \varphi$$

$$M_{x_6} = 0$$

$$M_{y_6} = -\cos^2 \alpha$$

$$M_{T_0} = \cos \alpha \left[f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right]$$

$$M_{T_1} = -\sin \alpha \left[\cos \varphi + \gamma \sin \varphi \right]$$

$$M_{T_3} = 0$$

$$M_{T_4} = \cos \alpha \cos \varphi$$

$$M_{T_6} = -\cos \alpha \sin \alpha$$

120 Resolución del sistema siguiente:

$$\delta_{01} + \delta_{11} Y_1 + \dots + \delta_{31} Y_3 + \delta_{41} Y_4 + \dots + \delta_{61} Y_6 = 0$$

$$\delta_{02} + \dots + \delta_{22} Y_2 + \dots + \delta_{52} Y_5 + \dots = 0$$

$$\delta_{03} + \delta_{13} Y_1 + \dots + \delta_{23} Y_2 + \delta_{43} Y_4 + \dots + \delta_{63} Y_6 = 0$$

$$\delta_{04} + \delta_{14} Y_1 + \dots + \delta_{24} Y_2 + \delta_{44} Y_4 + \dots + \delta_{64} Y_6 = 0$$

$$\delta_{05} + \delta_{25} Y_2 + \dots + \delta_{55} Y_5 = 0$$

$$\delta_{06} + \delta_{16} Y_1 + \dots + \delta_{26} Y_2 + \delta_{46} Y_4 + \dots + \delta_{66} Y_6 = 0$$

139 Obtención de las solicitudes exteriores mediante las ecuaciones indicadas en el caso de carga simétrica no uniforme del apartado 11

140 Trazado de las gráficas correspondientes a los 6 tipos de solicitudes Dimensionado.

159