

AULA POLITÈCNICA
/ TECNOLOGIA CIVIL

Martí Sánchez—Juny - Ernest Bladé
Jerónimo Puertas

Hidràulica

Hidràulica

Martí Sánchez–Juny - Ernest Bladé
Jerónimo Puertas

Hidràulica

Primera edició: setembre de 2005

Disseny de la coberta: Jordi Calvet

© els autors, 2005

© Edicions UPC, 2005
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.edu

Producció: Quality Impres, S.L.
Comte Güell 24-28, 08028 Barcelona

Dipòsit legal: B- 43.211-2005
ISBN: 84-9880-148-4

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Índex

1	Característiques mecàniques dels fluids	11
1.1	Introducció	11
1.2	Propietats intrínseques dels fluids.....	11
1.3	Exercicis proposats	29
2	Hidrostàtica.....	31
2.1	Formulació general. Principi de Pascal.....	31
2.2	Equació general de la hidrostàtica	32
2.3	Empenta hidrostàtica sobre superfícies planes.....	36
2.4	Empenta hidrostàtica sobre superfícies corbes	42
2.5	Sòlids totalment submergits. Subpressió	44
2.6	Equilibri en fluids que es mouen com un sòlid rígid	48
2.7	Exercicis proposats	49
3	Equacions fonamentals dels fluids en moviment.....	55
3.1	Descripció del moviment d'un fluid	55
3.2	Equació de continuïtat aplicada a un tub de flux	59
3.3	Equació del flux de la quantitat de moviment o equació de momentum	61
3.4	Equació del balanç d'energia. Trinomi de Bernoulli	64
3.5	Moviment laminar i turbulent. Experiència de Reynolds	71
3.6	Exercicis proposats	72
4	Introducció al moviment en làmina lliure.....	77
4.1	Característiques principals i comparació amb el moviment a pressió	77
4.2	Tipus de llera. Classificació	78
4.3	Tipus de flux	79
4.4	Distribució de velocitats a una secció	79
4.5	Distribució de la pressió a una secció recta	82
4.6	Exercicis proposats	84
5	Moviment permanent uniforme en làmina lliure	87
5.1	Equacions del moviment.....	87
5.2	Avaluació de les pèrdues contínues d'energia	88
5.3	Exercicis proposats	96
6	Energia específica.....	97
6.1	Concepte d'energia específica	97
6.2	Relació energia específica-calat per a una secció i un cabal donats.	98
6.3	Relació cabal – calat per a una secció i una energia específica donades	100
6.4	Règim crític. Règim lent i ràpid. Propagació d'una pertorbació.....	103
6.5	Concepte de secció de control.....	107
6.6	Exercicis proposats	107
7	Ressalt hidràulic. Dissipació d'energia.....	111
7.1	Descripció del fenomen	111
7.2	Ressalt hidràulic en canals de secció rectangular.	112

7.3	Diferents tipus de ressalt. Ressalt hidràulic lliure i submergit.....	118
7.4	Ressalt en canals de secció no rectangular.....	122
7.5	Exercicis proposats	124
8	Moviment gradualment variat.....	127
8.1	Equació del moviment	127
8.2	Corbes de rabeig en un canal prismàtic	129
8.3	Càlcul de les corbes de rabeig.....	138
8.4	Determinació del coeficient de Manning de manera indirecta.....	144
8.5	Condicions de contorn a considerar en les corbes de rabeig. Localització del ressalt.....	145
8.6	Exercicis proposats	148
9	Moviment ràpidament variat. Transicions	153
9.1	Introducció	153
9.2	Modificació de l'ample d'un canal de secció rectangular.....	153
9.3	Modificació de l'ample d'un canal de secció arbitrària	161
9.4	Modificació de la cota de la solera.....	162
9.5	Disseny de transicions en el tipus de secció en règim lent	165
9.6	Alteració del flux produït per les piles d'un pont	167
9.7	Exercicis proposats	169
10	Moviment ràpidament variat. Desguassos i sobreexidors. Aforaments en làmina lliure.....	171
10.1	Introducció	171
10.2	Desguassos a pressió. Coeficients de contracció i desguàs.....	171
10.3	Desguàs sota comportes verticals i radials. Desguàs lliure i submergit.....	175
10.4	Sobreexidor de caiguda lliure. Descripció	181
10.5	Sobreexidor de paret prima	183
10.6	Vessadors de paret gruixuda	191
10.7	Vessadors de perfil estricte	195
10.8	Exercicis proposats	196
11	Disseny de canals.....	199
11.1	Introducció	199
11.2	Eficiència d'una secció. Cas de secció trapezoïdal, rectangular, triangular i circular	199
11.3	Anàlisi del moviment uniforme en una secció tancada. El cas d'una secció circular.....	202
11.4	Condicionaments constructius	203
11.5	Velocitats permissibles	203
11.6	Pendents	204
11.7	Resguards.....	204
12	Moviment a pressió	205
12.1	Introducció	205
12.2	Tipus de moviment en canonades.....	205
12.3	Equacions bàsiques del règim permanent en canonades.....	206
12.4	Pèrdues d'energia repartides en una canonada.....	208
12.5	Àbac de Moody.....	214
12.6	Seccions no circulars.....	222
12.7	Altres fórmules empíriques.....	222
12.8	Envelliment d'una canonada.....	224
12.9	Diàmetre òptim d'una canonada	230
12.10	Exercicis proposats.....	231
13	Instal·lacions de bombament	237
13.1	Introducció	237
13.2	Tipus de bombes	238
13.3	Bombes centrífugues.....	238
13.4	Conseqüències de la instal·lació d'una bomba en un sistema a pressió.....	241
13.5	Risc de cavitació	242
13.6	Punt de funcionament d'una instal·lació de bombament	244
13.7	Combinació de bombes.....	248

13.8	Esquema d'una impulsió. Accessoris més habituals.....	251
13.9	Exercicis proposats	254
14	Referències bibliogràfiques	259

1 Característiques mecàniques dels fluids

1.1 Introducció

La definició formal de la mecànica de fluids estableix que aquesta és la branca de la mecànica que se centra a estudiar l'equilibri i el moviment dels fluids, igual que la mecànica racional ho fa amb els sòlids rígids i la teoria de l'elasticitat amb els sòlids elàstics. Per tant, el que diferencia una branca de l'altra és el medi en el qual centra la seva aplicació. Cal discutir, doncs, què és un fluid.

Per començar, cal establir que un fluid es pot definir com un medi natural continu i deformable que presenta una manca absoluta de rigidesa. Amb aquesta definició es comprèn, per tant, que s'hi inclouen tant els líquids com els gasos.

Un sòlid rígid s'idealitza a partir de la propietat que és indeformable sota qualsevol esforç aplicat, i un sòlid elàstic, pel fet que es deforma sota forces que no en causen el trencament, i retorna a la seva posició inicial quan l'acció desapareix. Per la seva banda, cal destacar que la diferència principal del medi fluid amb els esmentats sòlids és l'absència absoluta de rigidesa. Això fa que sota l'acció de determinats esforços es deformi de manera contínua i, tal com es veurà, ho fa amb més velocitat de deformació com més gran és l'esforç aplicat. Aquesta deformació contínua la pot mantenir sense trencar-se, cosa que assegura la continuïtat del material. Aquesta propietat és la que permet dir, encara que sigui de forma redundat, que els fluids flueixen.

1.2 Propietats intrínseques dels fluids

1.2.1 Massa i pes

S'entén per massa la propietat fonamental que permet quantificar la matèria existent en un determinat medi sigui sòlid o fluid. A partir d'aquest concepte, es pot establir la seva relació amb el volum ocupat i aleshores es defineix la densitat absoluta.

$$M = \rho \cdot V \quad (1.1)$$

on:

- M: és la massa
- V: és el volum ocupat per aquesta massa
- ρ : és la densitat absoluta.

En el sistema internacional, la unitat de la densitat són els kg/m^3 .

D'altra banda, i a diferència de la massa, el pes és una variable vectorial concretament, correspon a la força d'atracció que exerceix el camp gravitatori terrestre sobre la massa definida anteriorment. La direcció i el sentit del vector pes corresponen a la direcció i al sentit de l'acceleració de la gravetat. Així, d'aquesta definició es desprèn que:

$$\vec{P} = M \cdot \vec{g} \quad (1.2)$$

essent:

- M : la massa
- \vec{g} : l'acceleració de la gravetat
- \vec{P} : el pes

Si s'estableix la relació del pes d'un determinat medi material amb el volum que ocupa, apareix el concepte de pes específic γ :

$$\gamma = \frac{P}{V} \quad (1.3)$$

La seva unitat en el sistema internacional són N/m^3 .

Cal tenir clar que aquestes propietats que s'acaben de definir, ρ i γ , són variables tant amb la temperatura com amb la pressió. Així, a la figura 1.1 es mostra com varien la densitat i el pes específic de l'aigua amb la temperatura quan la pressió és manté constant i igual a 1013 hPa.

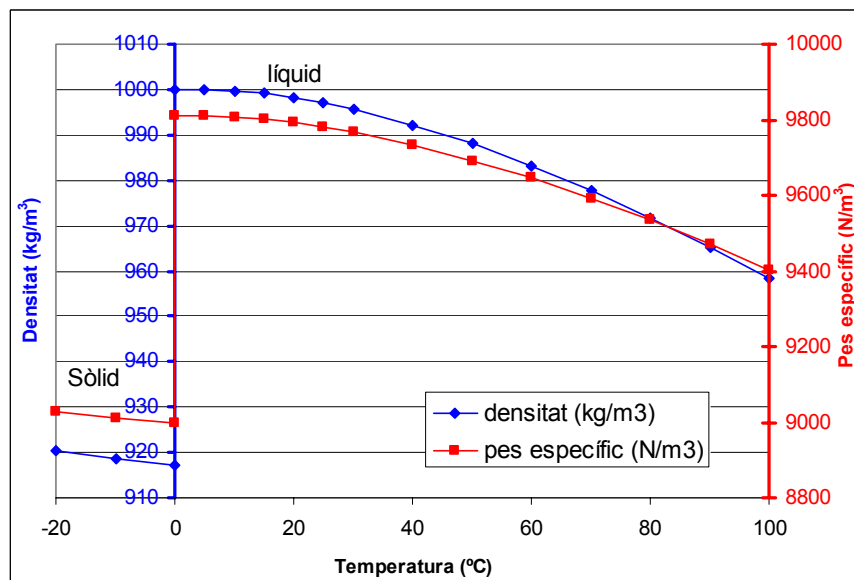


Figura 1.1 Variació de densitat i pes específic de l'aigua amb la temperatura quan la pressió a què està sotmesa és de 1013 hPa. (Font: Franzini i Finnemore, 1999, i Bosser, 1990).

1.2.2 Elasticitat

De la definició de fluid que s'ha establert (apartat 1.1), es desprèn que els fluids no disposen d'elasticitat, ni lineal, ni transversal. De tota manera, tenint en compte la necessitat de contenir els fluids en recipients, sí que es pot definir el concepte d'elasticitat volumètrica (E_v).

L'elasticitat volumètrica es pot definir com la capacitat que tenen els fluids de disminuir el volum que ocupen i, per tant, d'augmentar la seva densitat, quan es troben sotmesos a una pressió o, viceversa, d'augmentar el volum i, per tant, de disminuir la densitat, quan la pressió esmentada disminueix.

Sigui un fluid de densitat ρ_0 , que es troba sotmès a un camp de pressió P_0 i que està confinat en un recipient tancat i que ocupa inicialment un volum V_0 , la propietat d'elasticitat volumètrica permet afirmar que, si aquest recipient se sotmet a una força F com la indicada a la figura 1.2, el fluid passa a ocupar un volum V_1 més petit, té una densitat ρ_1 més gran i està sotmès un camp de pressió P_1 més gran.

Ja que la massa dins aquest recipient no pot variar:

$$d(\rho V) = 0 \Rightarrow \rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0 \quad (1.4)$$

Aleshores resulta:

$$-\frac{V}{dV} = \frac{\rho}{d\rho} \quad (1.5)$$

Si es multipliquen tots dos membres per dP , que correspondria a l'increment de pressió que percep el fluid un cop s'aplica la força F de la figura 1.2, queda:

$$-\frac{dP}{dV} = \frac{dP}{d\rho} = E_v \quad (1.6)$$

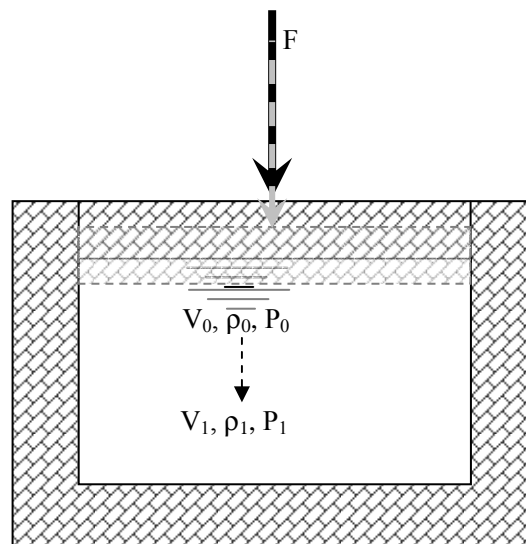


Figura 1.2 Fluid que inicialment té una densitat ρ_0 i es troba sota un camp de pressió P_0 , que està confinat en un recipient tancat i ocupa inicialment un volum V_0 . Posteriorment, aquest recipient se sotmet a una força F com la indicada, que provoca que el fluid passi a ocupar un volum V_1 més petit, tingui una densitat ρ_1 més gran i un camp de pressió P_1 més gran.

Que es defineix, precisament, com el mòdul d'elasticitat volumètric. Es pot observar que la definició matemàtica d'aquesta propietat es pot establir, tant a partir de la reducció de volum que suposa una variació en la pressió a la qual se sotmet el fluid (d'aquí el signe negatiu que hi apareix) com a partir de l'augment de densitat que això suposa (d'aquí el signe positiu que té).

Segons aquesta definició, es pot deduir que el mòdul d'elasticitat volumètric té unitats de pressió. Concretant en el cas de l'aigua, el seu valor (a una temperatura de 4°C i una pressió de 1013 hPa) és de $2.03 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Com que és una propietat que depèn de la densitat, es comprèn que depengui també tant de la pressió com de la temperatura a les quals es troba sotmès el fluid.

D'altra banda, es pot definir el mòdul de compressibilitat (β) com l'invers del mòdul d'elasticitat volumètrica. Per aquest motiu, de manera implícita se sol utilitzar indistintament un concepte o l'altre.

$$\beta = \frac{1}{E_v} \quad (1.7)$$

Cal tenir en compte, tal com s'ha vist per al cas de l'aigua, que els líquids en general tenen mòduls d'elasticitat volumètrica molt elevats (compressibilitat petita) i, a més, poc variables amb la pressió i la temperatura. A la figura 1.3 es pot veure com varia el mòdul d'elasticitat volumètric de l'aigua amb la temperatura quan la pressió a què està sotmesa és l'atmosfèrica (1013 hPa).

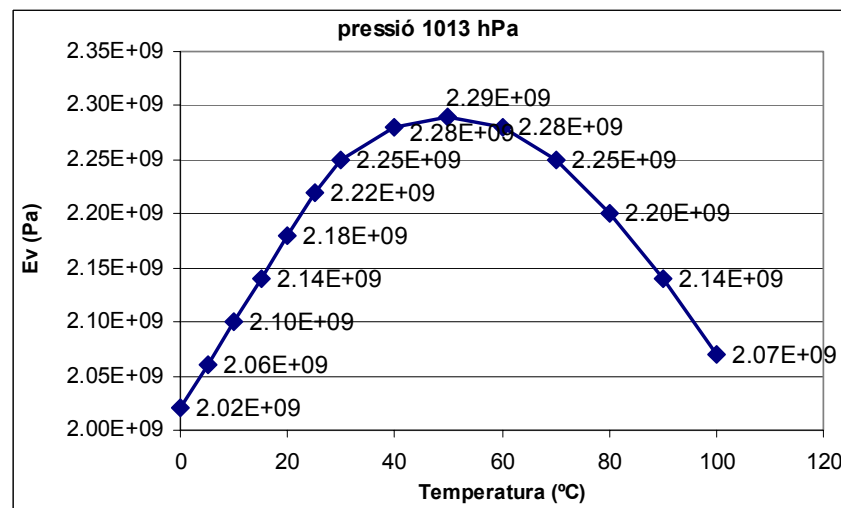


Figura 1.3 Variació del mòdul d'elasticitat volumètric amb la temperatura quan la pressió a què està sotmès és de 1013 hPa. (Font: Franzini i Finemore, 1999).

Exercici

Per fer-se una idea més concreta de la incompressibilitat de l'aigua, tan sols caldria determinar la variació de volum que experimenta 1 m^3 d'aigua a 20°C , quan se sotmet a un increment de pressió $\Delta p = 10^6 \text{ Pa}$ ¹. Considerant, doncs, el mòdul d'elasticitat volumètrica de l'aigua $2.18 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, queda:

$$\Delta V = -\frac{V \cdot \Delta P}{E_v} = -\frac{1 \text{ m}^3 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{2.18 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = -4.58 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (1.8)$$

És a dir, es tracta d'una reducció de volum que implicaria, en una secció d' $1 \times 1 \text{ m}^2$, una disminució d'altura de 0.458 mm.

¹ Per comprendre l'ordre de magnitud, cal dir que 10^6 Pa són, aproximadament, 10^5 kp/m^2 , que equivalen a 10 kp/cm^2 , els quals, per la seva banda, corresponen a la pressió que exerciria una columna d'aigua de 100 m d'alçada.

D'altra banda, els gasos són enormement compressibles (mòdul d'elasticitat volumètric molt petit). Això fa que per tal de determinar-ne el comportament dinàmic sigui imprescindible conèixer la relació entre la pressió i la temperatura, a les quals es troben sotmesos, i el volum que ocupen. Aquesta relació es coneix com l'equació o funció d'estat ($f(P, T^a, V)=0$). Per tenir un ordre de magnitud, tan sols cal comparar el mòdul de compressibilitat de l'aigua (figura 1.3) amb el de l'aire, que val $0.000103 \cdot 10^9$ Pa (a 4°C de temperatura i 1013 hPa de pressió). Es pot apreciar que és un mòdul que fa unes 20000 vegades més compressible l'aire que l'aigua. A més, cal tenir en compte que aquest valor és molt variable segons el procés termodinàmic al qual està sotmès.

1.2.3 Pressió de vapor

Abans d'establir el concepte de pressió de vapor d'un fluid i els fenòmens que hi du associats, és interessant analitzar el diagrama de fases d'un fluid, en particular per al cas de l'aigua.

a Previ. Diagrama de fases de l'aigua

Químicament, l'aigua es defineix com un compost químic format per un àtom d'oxigen i dos d'hidrogen. Així, un conjunt de molècules d'aigua es caracteritza pel fet que totes i cadascuna d'elles es troben enllaçades amb l'anomenat *enllaç d'hidrogen*, que és el que dóna a l'aigua les seves propietats. El grau d'intensitat d'aquest enllaç s'associa a l'energia que manté unides aquestes molècules i depèn, com és obvi, de la temperatura i de la pressió a les quals estan sotmeses.

Segons el contingut intern d'energia en l'esmentat enllaç d'hidrogen, l'aigua pot presentar tres estats diferents: sòlid (gel), líquid o gasós (vapor d'aigua). Són les tres fases de l'aigua. En el cas de la fase sòlida, tots els àtoms d'hidrogen estan enllaçats; en el cas de la fase líquida, hi ha algun àtom d'hidrogen que no està enllaçat, i quan la fase és gasosa, no existeixen enllaços d'hidrogen. Segons aquestes idees, a la figura 1.4 es mostra el diagrama de fases de l'aigua

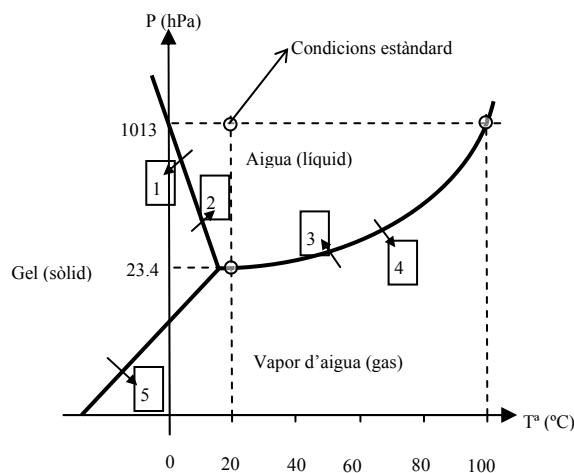


Figura 1.4 Diagrama de fases de l'aigua. 1. Canvi de fase líquida a sòlida: procés de congelació. 2. Canvi de fase sòlida a líquida: procés de fusió. 3. Canvi de fase gasosa a líquida: procés de condensació. 4. Canvi de fase líquida a gasosa: procés d'evaporació. 5. Canvi de fase sòlida a gasosa: procés de sublimació.

Del diagrama de fases es desprèn que, a la pressió atmosfèrica (1013 hPa) l'aigua es congela si la temperatura és de 0°C , mentre que bull, és a dir, s'evapora, a 100°C . D'aquest comportament general es desprèn que, si la pressió és més baixa, com és el cas de zones elevades (per exemple, al camp base de l'Everest (5300 m) o al cim (8848 m)), aleshores l'aigua bull a una temperatura més baixa de 100°C .

b Pressió de vapor. Cavitació

Amb tot el que s'ha dit fins ara, del diagrama de fases de l'aigua (figura 1.4) s'observa que, a 20°C i 1013 hPa de pressió, com és ben sabut, l'estat de l'aigua és líquid. Però, si a la mateixa temperatura de 20°C la pressió, per qualsevol motiu, caigués per sota d'un determinat valor (23.4 hPa = 0.0234 atm), l'estat de l'aigua passaria a ser aleshores gasós. Aquest valor de la *pressió s'anomena pressió de vapor o de vaporització* de l'aigua (a 20°C). A la figura 1.5 es mostra com varia la pressió de vapor de l'aigua amb la temperatura. Així, la corba de la figura 1.4 que defineix els processos d'evaporació i condensació es correspon, amb precisió, amb la corba de la figura 1.5.

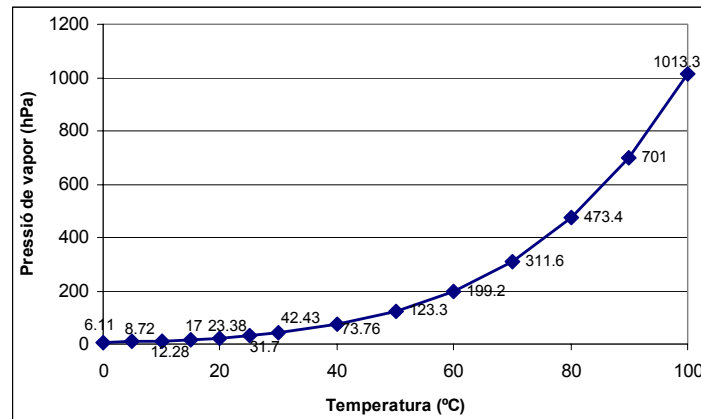


Figura 1.5 Variació de la pressió de vapor amb la temperatura. (Font: Franzini i Finnemore, 1999; i Munson et al., 1999).



Figura 1.6 Efecte de la cavitació en el rodent d'una bomba axial. A dalt, vista general del rodent: s'hi pot apreciar com tots els àleps, que tenen un gruix d'uns 5 mm, es troben "picats" per efecte de la cavitació. A baix, detalls dels forats que s'han fet en alguns dels àleps.

Aquest concepte és molt important en el disseny de sistemes hidràulics en els quals, pel motiu que sigui, s'esperin pressions baixes que, a la temperatura de funcionament del propi sistema hidràulic, estiguin entorn del valor de la pressió de vapor. Si per algun motiu en algun punt d'un líquid la pressió cau per sota de la seva pressió de vapor, aquest es vaporitza en aquell punt i es crea una cavitat plena de vapor, així es trenca la continuïtat del medi líquid. Així, el fluid, que en passar per aquell punt de pressió baixa comença a "bullir" quan continua avançant i passa a una secció contigua sotmesa a una pressió una mica superior, recupera la pressió, i es torna a produir aleshores el canvi a fase líquida un altre cop. Es dona la particularitat que aquest segon canvi és força violent i genera forts impactes contra els contorns, que els pot malmetre fàcilment (erosió per cavitació).

Aquest fenomen es coneix en mecànica de fluids amb el nom de *cavitació*, és indesitjable i cal evitar-lo, ja que pot provocar el desgast i el trencament dels contorns, amb els riscos que això comporta per a la seguretat de la instal·lació. A les fotografies que es mostren a la figura 1.6 es pot comprovar l'efecte que la cavitació pot tenir en el rodet d'una bomba hidràulica. S'hi poden apreciar uns forats considerables en els àleps, que són d'acer, d'uns 5 mm de gruix.

1.2.4 Viscositat

Concepte que dona idea de la resistència a fluir d'un fluid, com a resultat de la interacció i la cohesió de les seves molècules.

Per analitzar el moviment d'un fluid sobre un contorn sòlid fix, es pot simplificar considerant les partícules que es mouen segons línies rectes i paral·leles entre si. A la figura 1.7 es mostra l'esquema del perfil de velocitats en una secció transversal. De manera intuïtiva, es comprèn que la velocitat d'una partícula de fluid a la secció en qüestió depèn de la seva distància al contorn sòlid. Així, sobre el contorn, la velocitat ha de ser nul·la (condició d'adherència perfecta), i pot créixer a mesura que la partícula s'hi trobi més lluny.

Amb això, es pot suposar que el flux es produeix en forma de capes o làmines de gruix diferencial (dy) amb la velocitat (v) que varia en la direcció perpendicular al contorn (direcció de l'eix y). Aquest tipus de moviment es coneix amb el nom de *règim o flux laminar*.

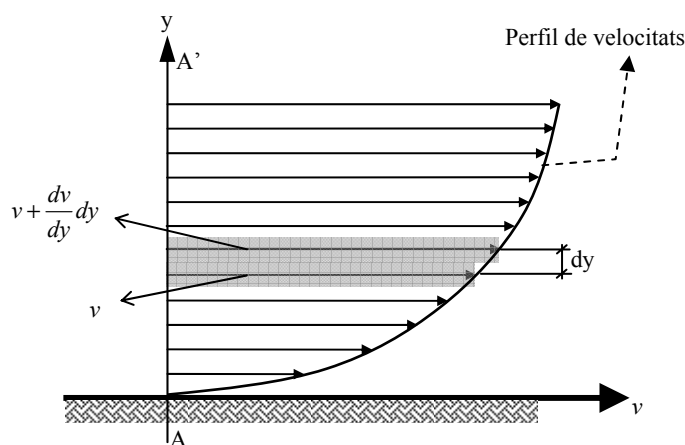


Figura 1.7 Perfil de velocitats en la secció transversal AA'.

Newton va establir que, entre les esmentades capes o làmines de gruix diferencial separades dy , que es desplacen a unes velocitats v i $v+(dv/dy)dy$, respectivament, s'hi desenvolupa un esforç tangencial (τ) que s'oposa al moviment que val:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy} \quad (1.9)$$

L'expressió (1.9) correspon a la llei de Newton per als fluids viscosos, i estableix una expressió matemàtica d'un fet experimental.

Aquesta llei es podria enunciar dient que l'esforç tangencial que es desenvolupa en el si d'un fluid en règim laminar és proporcional al gradient transversal de velocitats d'aquest moviment. La constant de proporcionalitat (μ) és una característica intrínseca dels fluids i es coneix com a viscositat dinàmica.

Si es considera un element rectangular de fluid, ABCD:

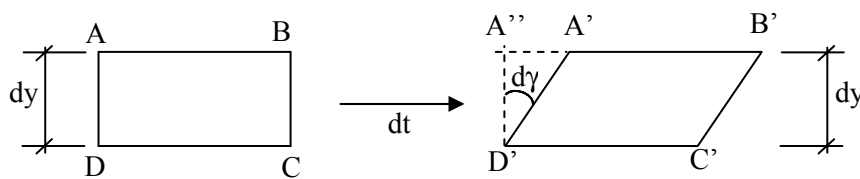


Figura 1.8 Règim laminar. Deformació d'un element rectangular ABCD.

Suposant aquest element en moviment, i considerant que la velocitat del flux per anar de D a D' és v , i que en la làmina immediatament superior, per anar d'A a A' és $v+dv$, es pot escriure:

$$AA' = (v + dv) \cdot dt \quad (1.10)$$

$$DD' = v \cdot dt \quad (1.11)$$

I com que es tracta d'un element rectangular, $AA'' = DD'$, es dedueix que:

$$A'A'' = dv \cdot dt \quad (1.12)$$

Però, d'altra banda, geomètricament, es pot escriure la relació següent:

$$\frac{A'A''}{dy} = \text{tg}(d\gamma) \quad (1.13)$$

I com que, per definició, $d\gamma$ és un angle diferencial i la tangent d'un angle diferencial és igual a l'arc ($\text{tg}(d\gamma) \approx d\gamma$), aleshores queda:

$$A'A'' \approx dy \cdot d\gamma \quad (1.14)$$

I, per tant, igualant les dues expressions (1.12) i (1.14), resulta:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dy} \quad (1.15)$$

Aquesta igualtat permet reescriure la llei de Newton dels fluids viscosos (1.9) com:

$$\tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad (1.16)$$

on $d\gamma$ és la deformació angular de l'angle D (figura 1.8), inicialment recte. Aquesta expressió permet afirmar que la tensió tangencial que es desenvolupa en el si d'un fluid laminar en moviment és proporcional a la velocitat de deformació angular².

Dimensionalment, la viscositat dinàmica depèn de:

$$[\mu] = \frac{\frac{[F]}{[L]^2}}{\frac{[T]}{[L]}} \Rightarrow [\mu] = \frac{[F] \cdot [T]}{[L]^2} \quad (1.17)$$

En el Sistema Internacional d'unitats la viscositat dinàmica té unitats de $\frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s$. Tradicionalment, en mecànica de fluids, s'han emprat molt, per caracteritzar aquesta variable, les unitats en el sistema CGS: $\frac{dyna \cdot s}{cm^2} = poise$.

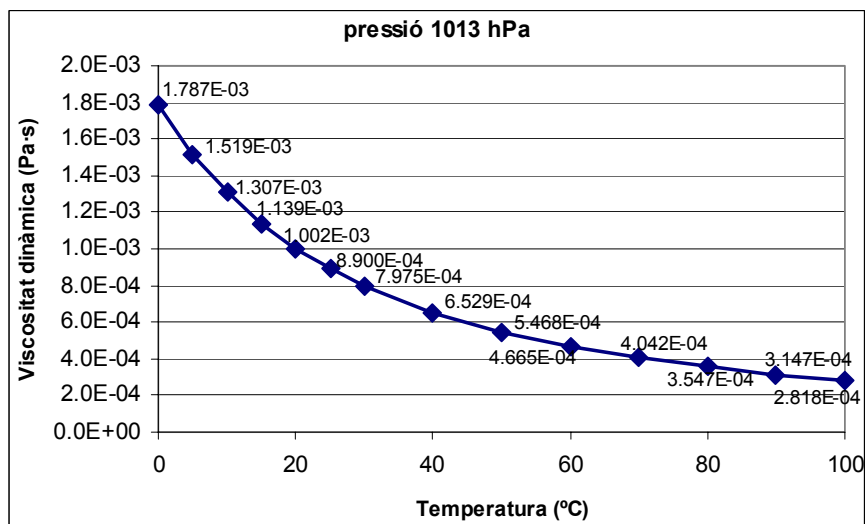


Figura 1.9 Variació de la viscositat dinàmica de l'aigua amb la temperatura a la pressió atmosfèrica (1013 hPa). (Font: Franzini i Finnemore, 1999, i Munson et al., 1999).

La viscositat dinàmica de l'aigua, a 20°C i 1013 hPa, és 0.001002 Pa·s o el que és el mateix, 0.01 poise. Aquest valor es pot comparar amb el de la viscositat dinàmica de l'aire, en les mateixes condicions de pressió i temperatura: 0.0000181 Pa·s. A la figura 1.9 es presenta com varia la viscositat dinàmica de l'aigua segons la temperatura quan la pressió és de 1013 hPa.

La viscositat és una propietat molt sensible a variacions de la temperatura i la pressió. Intuïtivament, és fàcil adonar-se que en augmentar la temperatura (escalfant oli per cuinar) la viscositat disminueix (es torna més líquid, menys viscos); en canvi, si el que passa és que augmenta la pressió, la viscositat també tendeix a augmentar (augmenta el fregament entre les làmines de gruix dy).

² Un concepte anàleg es planteja en el cas dels sòlids elàstics, quan es parla del mòdul d'elasticitat transversal. En aquest cas, es pot escriure: $\tau = G \cdot \Delta\gamma$, on G és el mòdul d'elasticitat transversal i $\Delta\gamma$ la deformació angular del sòlid elàstic. La diferència amb els fluids és que aquests, en repòs, no poden transmetre en el seu interior cap esforç tangencial τ , ja que per a un fluid en repòs $d\gamma/dt = 0$, mentre que els sòlids elàstics en repòs sí que poden fer-ho.

Si es divideix la viscositat dinàmica per la densitat del fluid, se n'eliminen els aspectes dinàmics (qualsevol relació amb les magnituds [F]). Així, es defineix la viscositat cinemàtica (ν):

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.18)$$

que, tenint en compte que una força es pot escriure com $[F]=[M][L][T]^{-2}$, de manera dimensional depèn de:

$$[\nu] = \frac{[F][T][L]^{-2}}{[M][L]^{-3}} \Rightarrow [\nu] = \frac{[M][L][T]^{-2} \cdot [T][L]^{-2}}{[M][L]^{-3}} \Rightarrow [\nu] = [L]^2 \cdot [T]^{-1} \quad (1.19)$$

I, per tant, la seva unitat en el Sistema Internacional és: m^2/s .

a Fluids newtonians i no newtonians

Els fluids que verifiquen l'equació (1.9), s'anomenen *fluids newtonians*. Aquests fluids tenen la particularitat que la relació entre les tensions tangencials generades en el seu si i el gradient transversal de velocitats que provoquen és lineal. El pendent d'aquesta relació lineal és precisament la viscositat dinàmica (figura 1.10). L'esmentada relació entre τ i dv/dy o, el que és el mateix, entre τ i $d\gamma/dt$, es coneix en mecànica de fluids com *reograma*, que constitueix l'equació constitutiva del fluid.

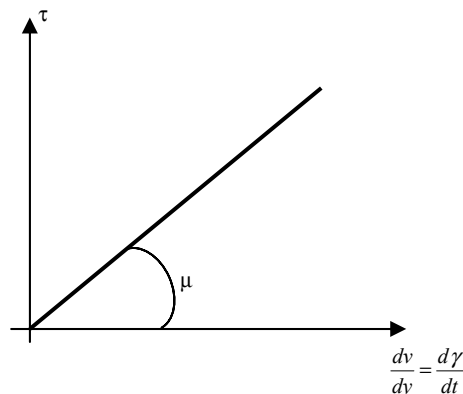


Figura 1.10 Reograma d'un fluid newtonià.

Es poden definir els casos extrems. Per exemple, els casos ideals en què $\mu=0$, que representen els fluids no viscosos, o $\mu=\infty$, en què qualsevol gradient de velocitats, per petit que sigui, desenvolupa en el si del fluid un camp de tensions tangencials ∞ , és a dir, no flueix, de fet és un comportament similar a un sòlid rígid.

Exercici

Un fluid newtonià circula per una canonada horitzontal de radi R , degut a un gradient de pressions $dp/dz=constant$ (z segons l'eix de la canonada).

Determineu:

- A. Lleis de tensions tangencials.

- B. Velocitat, velocitat mitjana i màxima.
- C. Cabal.
- D. Potència dissipada per unitat de longitud de canonada.
- E. Energia dissipada per unitat de pes transportat.

Aplicació: obteniu la potència necessària per transportar 10 l/s d'un oli de viscositat 1 poise a través d'una canonada horitzontal de 100 m de longitud i 0.2 m de diàmetre.

A. Llei de tensions tangencials

Cal plantejar l'equilibri de forces en la direcció del moviment, en un element diferencial:

$$[p - (p + dp)]2\pi r dr + \tau 2\pi r dz - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr) dz = 0$$

Desenvolupant i negligint el terme de tercer ordre:

$$\begin{aligned} r dp dr - \tau dr dz - r d\tau dz &= 0 \Rightarrow \\ r dp dr &= -dz d(\tau r) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Tal com planteja l'enunciat, s'imposa que el gradient de pressions sigui una constant, que val:

$$\frac{dp}{dz} = -I\gamma = ctt \tag{1.21}$$

El signe negatiu indica que el moviment s'estableix des de les seccions que tenen més pressió cap a les que en tenen menys.

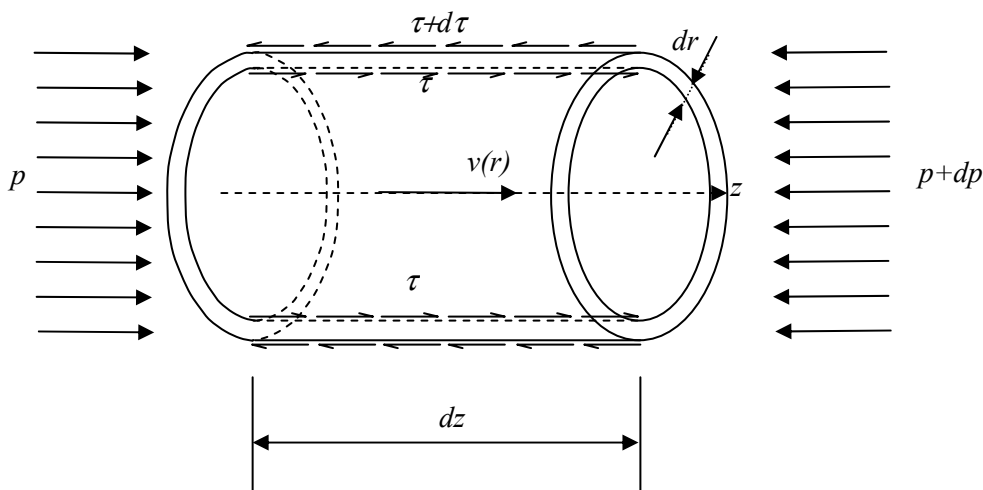


Figura 1.11 Esquema de les accions que actuen sobre un tub diferencial d'un fluid newtonià que circula per una canonada horitzontal de radi R, degut a un gradient de pressions $dp/dz = \text{constant}$.

Considerant les relacions(1.20) i (1.21), resulta: $I \gamma r dr = d(\tau r) \Rightarrow$

$$\tau = \frac{I\gamma r}{2} \tag{1.22}$$

que és una llei de tensions tangencials (τ) que varia linealment amb el radi, amb els signes que es mostren a la figura següent:

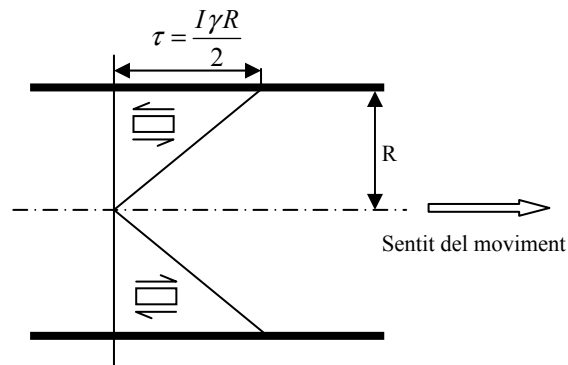


Figura 1.12. Llei de tensions tangencials resultant.

B. Llei de velocitats

En tractar-se d'un fluid newtonià ha de complir la llei de Newton dels fluids viscosos (equació (1.9)):

$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = -\mu \frac{dv}{dr}$, on la relació $dr = -dy$ pot apreciar-se a la figura següent:

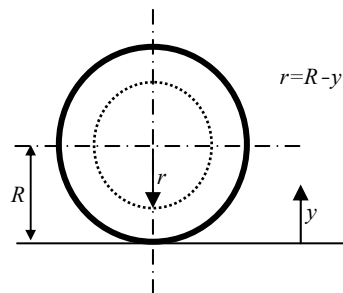


Figura 1.13 Correspondència entre la variable y i la variable radial r .

Aleshores:

$$-\frac{I\gamma r}{2} = \mu \frac{dv}{dr} \Rightarrow dv = -\frac{I\gamma}{2\mu} r dr$$

Integrant aquesta última expressió i imposant com a condició de contorn que sobre el contorn de la canonada ($r=R$) s'ha de donar la condició d'adherència perfecta ($v=0$), s'obté la llei de velocitats:

$$v = \frac{I\gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (1.23)$$

coneguda com la *fórmula de Poiseuille*, que és una llei parabòlica amb el radi.

D'ella es pot obtenir la velocitat mitjana:

$$v_{mitjana} = \frac{1}{S} \iint_S v dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{I\gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) r dr d\theta \Rightarrow$$

on l'element diferencial d'àrea dS és:

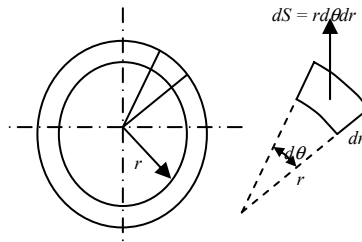


Figura 1.14 Definició d'un element diferencial d'àrea en una secció circular.

Integrant, doncs, s'obté:

$$v_{mitjana} = \frac{I\gamma R^2}{8\mu} \quad (1.24)$$

La velocitat màxima es pot obtenir de la llei (1.23) imposant:

$$\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{I\gamma}{4\mu}(0 - 2r) = 0 \Rightarrow r = 0$$

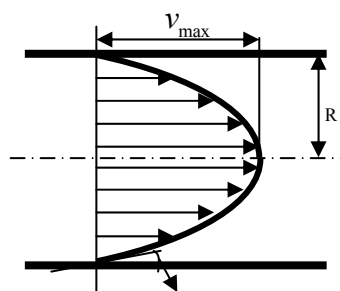
és a dir, el valor màxim de la velocitat es dona sobre l'eix de la canonada ($r=0$), i aquest valor màxim val:

$$v_{max} = v(r=0) = \frac{I\gamma}{4\mu} R^2 \quad (1.25)$$

Es pot apreciar, comparant-la amb la velocitat mitjana (1.24), que es dona:

$$v_{max} = 2v_{mitjana} \quad (1.26)$$

Amb això es pot caracteritzar millor la llei de velocitats en el si d'un fluid newtonià que s'està movent en una canonada circular sota un gradient de pressió constant:



Atenció: La llei de velocitats no és tangent al contorn, perquè això implicaria que $\tau \rightarrow \infty$, i s'ha vist que no és així.

Figura 1.15 Llei de distribució de velocitats en una secció transversal de la canonada.

C. Cabal

El cabal correspon al volum de fluid que passa a través d'una secció per unitat de temps. Es calcula fent:

$$Q = \iint_S v dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{I\gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) r d\theta dr \Rightarrow$$

Integrant, s'obté fàcilment:

$$Q = \frac{\pi I \gamma}{8\mu} R^4 = v_{mijana} \pi R^2 \quad (1.27)$$

D. Potència dissipada en el moviment

A l'element de volum format per la làmina cilíndrica de gruix dr , que es mostra a la figura 1.11, totes les partícules fluides tenen una velocitat idèntica (donada per (1.23)) i estan sotmeses a la mateixa tensió tangencial τ (donada per (1.22)).

La potència dissipada per aquest element de volum és igual a la resultant de les tensions tangencials per la velocitat. Aquesta és la potència dissipada per les forces viscoses. En aquest cas, aquesta potència coincideix amb la comunicada pel gradient de pressions que causa el moviment. Cal adonar-se que, si la canonada no fos horitzontal, també caldria considerar la potència dissipada per les forces de pes.

De tota manera, en aquest cas, la potència dissipada en aquest element de volum és:

$$\begin{aligned} dW &= v \cdot [dz(2\pi(r+dr)(\tau+d\tau) - 2\pi r\tau)] \Rightarrow \\ dW &= 2\pi v dz (rd\tau + \tau dr) \end{aligned}$$

Per tant, la potència dissipada en un tram de canonada de longitud L , serà:

$$W = \int_0^L \int_0^R 2\pi v dz (rd\tau + \tau dr)$$

on, substituint convenientment per la relació (1.22) que dóna la dependència de la τ amb el radi r :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^L \int_0^R 2\pi v dz \left(r \frac{I\gamma}{2} dr + \frac{I\gamma r}{2} dr \right) \Rightarrow \\ W &= \int_0^L \int_0^R (2\pi r dr) v dz \gamma I \Rightarrow \\ W &= \int_0^L dz \gamma I \int_0^R 2\pi r dr v \Rightarrow \\ W &= \gamma I Q L \end{aligned} \quad (1.28)$$

I per unitat de longitud ($L = 1$) resulta:

$$W(L=1) = \gamma I Q \quad (1.29)$$

E. Energia dissipada per unitat de pes

L'energia dissipada a la longitud L en un temps t , és:

$$E = \int_0^t W dt = \gamma I Q L t$$

De manera que l'energia dissipada per unitat de pes transportat a una longitud L de canonada serà:

$$\frac{\gamma I Q L t}{Q t \gamma} = I L$$

És a dir, el paràmetre I definit a (1.21), correspon a l'energia per unitat de pes i per unitat de longitud. I rep el nom de *pendent motriu*.

F. Aplicació numèrica

Treballant amb el Sistema Internacional d'unitats,

- $Q = 10 \text{ l/s} = 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$
- $\mu = 1 \text{ poise} = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ³, es pot comparar aquest valor amb el de la viscositat dinàmica de l'aigua a 20° i 1 atm, que val $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.
- $L = 100 \text{ m}$
- $\phi = 0.2 \text{ m}$

$$W = QI\gamma L = Q \frac{8Q\mu}{\pi\gamma R^4} \gamma L \Rightarrow W = \frac{8(10^{-2})^2 0.1}{\pi \left(\frac{0.2}{2}\right)^4} = 25.5w$$

1.2.5 Tensió superficial

La tensió superficial és un fenomen intrínsec als líquids que es presenta a la seva superfície lliure, això és, la interfície de contacte entre medis diferents com el contacte aire-líquid o el contacte aire-líquid-contorn. A l'interior d'un líquid les molècules es troben enllaçades les unes amb les altres amb unes forces d'atracció que són les que li confereixen les propietats com a líquid (forces de cohesió). Aquestes forces s'equilibren entre si en totes les direccions de l'espai. Per tant, qualsevol molècula a l'interior d'un líquid és atreta per totes aquelles situades en una esfera de radi igual al radi d'acció d'aquestes forces moleculars (de l'ordre de mil·lèsimes de mil·límetre).

En canvi, qualsevol molècula que es trobi a una profunditat inferior al radi d'acció esmentat, o bé sobre la pròpia superfície, no disposa de molècules d'aquell líquid a la zona superior que equilibrin l'atracció d'aquelles que es troben al casquet inferior. Això provoca un desequilibri entre les forces de cohesió moleculars. Per tant, per aconseguir mantenir l'equilibri a la superfície hi han d'aparèixer unes determinades forces de tracció, que fan que es comporti com una membrana tensa. Les responsables d'aquestes forces de tracció són les forces de tensió superficial.

Es pot particularitzar l'explicació anterior a allò que succeeix a les partícules de líquid que es troben a l'entorn de la zona de contacte entre un líquid, el contorn sòlid que el conté i l'atmosfera superior. En aquest cas, tal com s'esquematitza a la figura 1.16, les forces de cohesió que les partícules de líquid exerceixen generen una acció resultant \vec{B} que s'ha d'equilibrar amb l'atracció \vec{A} de les molècules que formen part del contorn sòlid i es troben en el seu entorn. Aquestes dues accions generen la resultant $\vec{A} + \vec{B}$, que té una component tangencial a la superfície lliure del fluid. Tenint en compte que els fluids no suporten en repòs cap esforç tangencial, i considerant que les molècules de gas (aire) que es troben a prop d'aquest contorn exerceixen una atracció negligible sobre aquesta zona (deguda a la seva dispersió més gran i cohesió nul·la), es comprèn que l'única manera de compensar aquesta component tangencial que té el líquid és corbant el contacte entre la superfície lliure i el recipient.

³ El nombre de Reynolds (capítol 2, apartat 5) val:

$$\text{Re} = \frac{v\phi}{\nu} = \frac{Q\phi\rho}{\mu S} \Rightarrow \text{Re} = \frac{10^{-2} 0.2 \rho}{0.1\pi \left(\frac{0.2}{2}\right)^2} = 0.6366\rho$$

El límit el dona la condició $\text{Re} < 2400$, que és la condició de règim laminar.

D'aquesta manera, es disposa d'un nombre més gran de molècules de líquid en aquest entorn que permeten augmentar el valor de l'acció \vec{B}' fins que s'anul·li la component tangencial de la resultant $\vec{A} + \vec{B}'$. Aquest procés mecànic és el que explica la formació dels meniscs.

L'única manera de mantenir la curvatura d'aquest menisc és gràcies a l'existència de forces de tracció en la superfície lliure que es comporta com una membrana. Com que la superfície sobre la qual actuen té un gruix negligible les forces de tensió superficial s'expressen, dimensionalment, com una força per unitat de longitud, i es defineixen segons el coeficient σ de tensió superficial:

$$[\sigma] = \frac{[F]}{[L]} \quad (1.30)$$

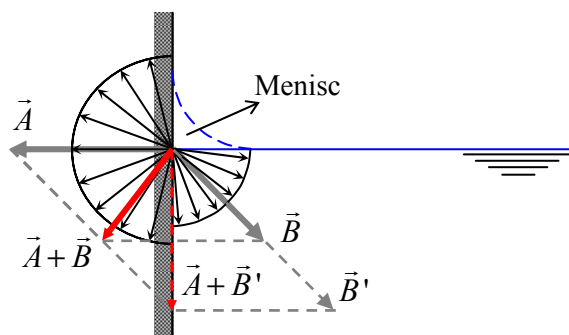


Figura 1.16 Esquema de forces que expliquen la formació d'un menisc.

El valor de la tensió superficial de qualsevol líquid, igual que les altres característiques intrínseques dels fluids, depenen de la temperatura i la pressió. A la figura 1.17 es mostra la variació de la tensió superficial de l'aigua segons la temperatura a una pressió de 1013 kPa, de la qual es pot destacar que a una temperatura de 20°C val 0.0728 N/m.

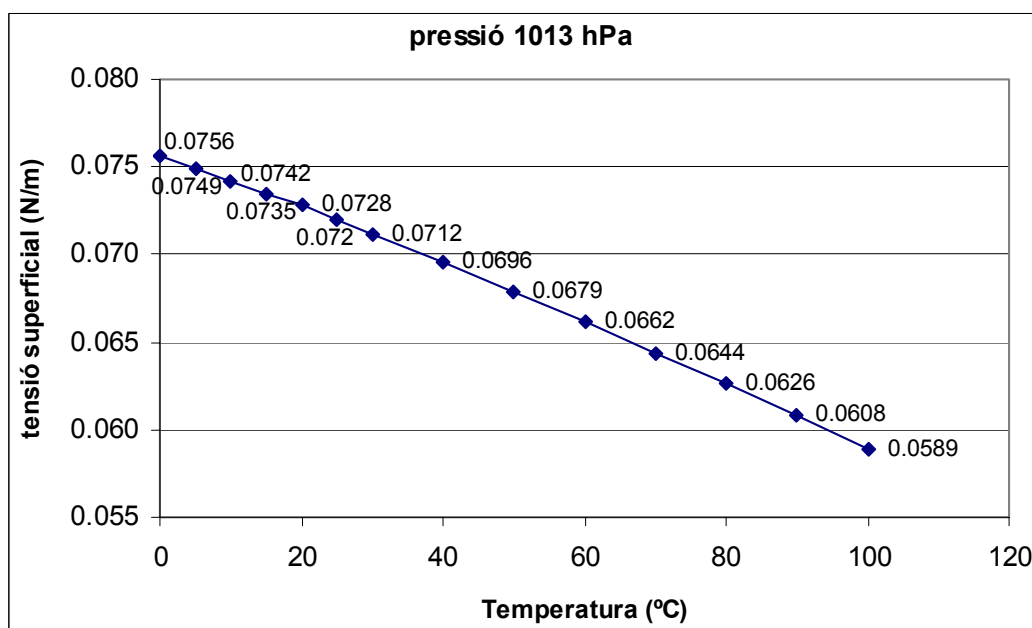


Figura 1.17 Variació de la tensió superficial (σ) amb la temperatura quan la pressió a què està sotmesa és de 1013 hPa. (Font: Franzini i Finemore, 1999).

a Llei de Laplace

A la figura 1.18 es mostra un element diferencial d'una superfície lliure d'un líquid. Aquesta superfície en qüestió té, en general, doble curvatura de radis R_1 i R_2 , essent ds_1 i ds_2 els diferencials d'arc en les curvatures principals. Per la seva banda, les forces \vec{F}_1 i \vec{F}_2 són les forces de tensió superficial (esforços de tracció) que mantenen les esmentades curvatures d'aquesta superfície. Aquestes forces tenen una component vertical que es pot analitzar:

$$2 \cdot F_1 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \sigma \cdot ds_1 \cdot \frac{ds_2}{2 \cdot R_2} = \frac{\sigma}{R_2} \cdot ds_1 \cdot ds_2 \tag{1.31}$$

$$2 \cdot F_2 \cdot \sin \beta = 2 \cdot \sigma \cdot ds_2 \cdot \frac{ds_1}{2 \cdot R_1} = \frac{\sigma}{R_1} \cdot ds_1 \cdot ds_2 \tag{1.32}$$

on s'ha considerat que $\sin \alpha = \frac{ds_2/2}{R_2} = \frac{ds_2}{2R_2}$ i que $\sin \beta = \frac{ds_1/2}{R_1} = \frac{ds_1}{2R_1}$.

Així, de les expressions anteriors (1.31) i (1.32), es pot obtenir la component vertical total que provoquen les forces de tensió superficial:

$$\sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot ds_1 \cdot ds_2 \tag{1.33}$$

El fet que la superfície que s'ha representat a figura 1.18 sigui convexa representa que la pressió de fluid sobre la superfície (p. ex. l'aire) ha de ser més gran que la que exerceix sota ella l'altre fluid (p. ex. l'aigua). Aquesta diferència de pressions s'ha d'equilibrar amb la component vertical obtinguda a (1.33) que, per tant, ha de tenir sentit ascendent.

$$\Delta p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot ds_1 \cdot ds_2 \Rightarrow \Delta p = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{1.34}$$

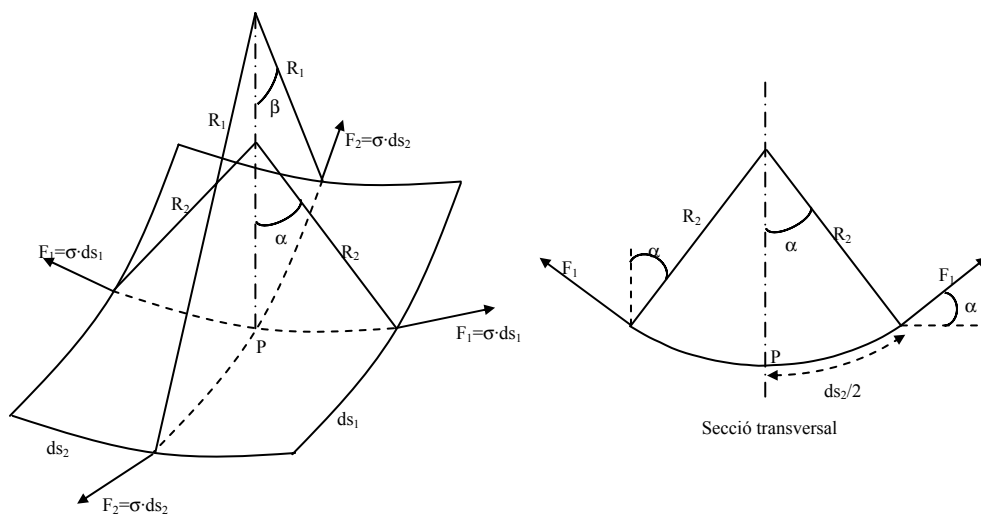


Figura 1.18 Esquema de forces que actuen sobre una membrana de doble curvatura.

Aquest resultat és el que es coneix com la llei de Laplace, que indica que la diferència de pressió existent entre dos costats d'una superfície fluida és igual a una constant pròpia del fluid (σ , tensió superficial) per la suma dels inversos dels radis de curvatura principals de la superfície.

La llei de Laplace pressuposa una discontinuïtat en la pressió entre els dos costats d'una interfície situada entre dos medis fluids, de manera que, com més petits els radis de curvatura principals de l'esmentada superfície, més gran és el salt de pressió que hi ha.

Exercici

D'una manera ben senzilla, aplicant la llei de Laplace, es pot determinar la diferència de pressió que hi ha d'haver entre l'interior i l'exterior d'una gota o bombolla esfèrica (de radi R), o d'un doll de líquid cilíndric i indefinit (també de radi R).

$$\text{Gota esfèrica: } \Delta p = \sigma \cdot \frac{2}{R}$$

$$\text{Doll d'aigua en caiguda lliure: } \Delta p = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow \Delta p = \frac{\sigma}{R}$$

b Capil·laritat. Llei de Jurin

Sigui un tub cilíndric, de radi R prou petit, obert pels dos extrems, un dels quals està submergit en un recipient ple d'un fluid de pes específic γ . Part del fluid del recipient puja (ascens capil·lar) pel tub fins a una alçada h , per l'acció de les forces de tensió superficial. A la figura 1.19 es mostra un esquema de les forces que actuen sobre el tub esmentat.

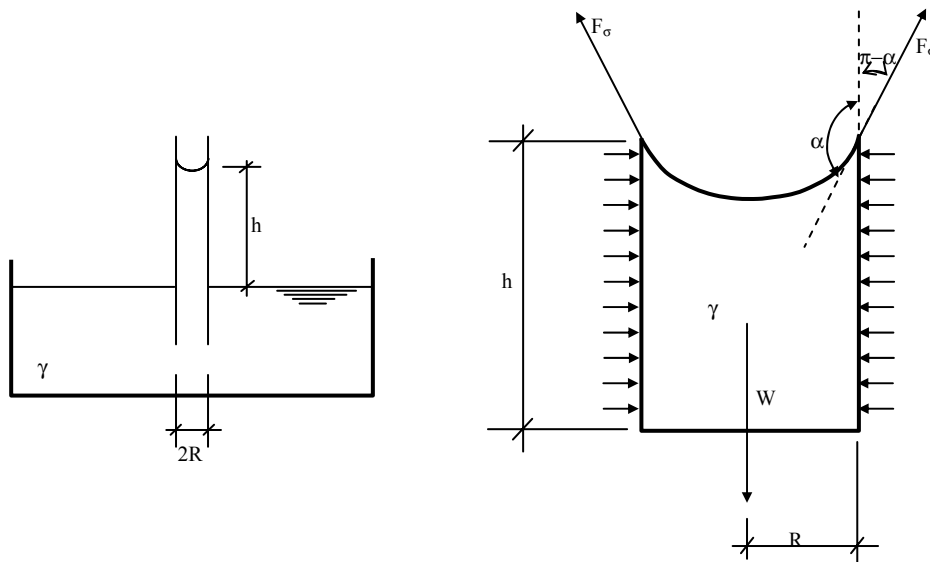


Figura 1.19 Esquema de les accions que actuen sobre un tub capil·lar cilíndric, per acció de les forces de tensió superficial.

Així, es pot plantejar l'equilibri de forces que actuen sobre el volum de fluid de la dreta de la figura 1.19, de manera que el pes de fluid que puja pel tub és:

$$W = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \gamma \quad (1.35)$$

I la component vertical de la força de tensió superficial, segons la figura 1.19 i la figura 1.20:

$$F_{\sigma V} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma \cdot \cos(\pi - \alpha) = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma \cdot \cos \alpha \quad (1.36)$$

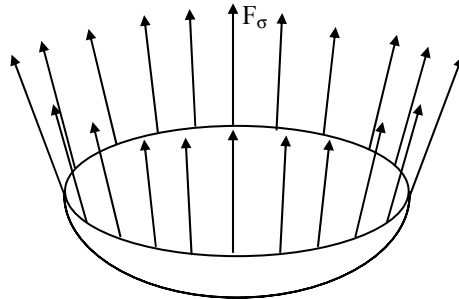


Figura 1.20 Les forces de tensió superficial actuen sobre tota la longitud de circumferència del menisc.

Amb tot això, en resulta l'equilibri següent:

$$\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \gamma = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma \cdot \cos \alpha \Rightarrow h = \frac{-2 \cdot \sigma \cdot \cos \alpha}{R \cdot \gamma} \quad (1.37)$$

Aquesta és coneguda com la llei de Jurin⁴ per l'ascens capil·lar. Aquesta expressió introdueix el concepte de l'angle α , que es coneix amb el nom d'*angle de contacte*. Es pot donar la casuística següent:

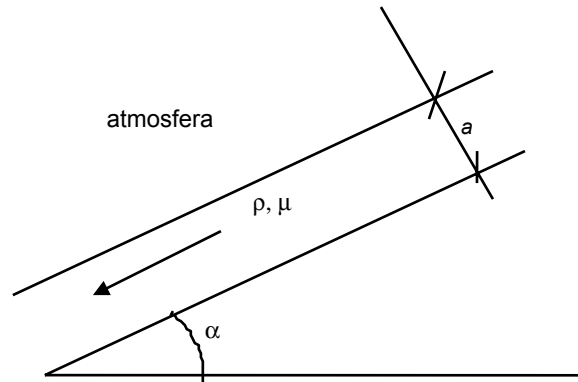
- $\alpha > \frac{\pi}{2}$ es diu que el líquid mulla el sòlid. En aquest cas, $h > 0$ i, per tant, es defineix un ascens capil·lar. És el cas de l'aigua en contacte amb vidre: $\alpha \approx 180^\circ$.
- $\alpha < \frac{\pi}{2}$ es diu que el líquid no mulla el sòlid. En aquest cas, $h < 0$ i, per tant, es defineix un descens capil·lar. És el cas del mercuri en contacte amb vidre: $\alpha \approx 50^\circ$.
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En aquest cas, $h = 0$.

1.3 Exercicis proposats

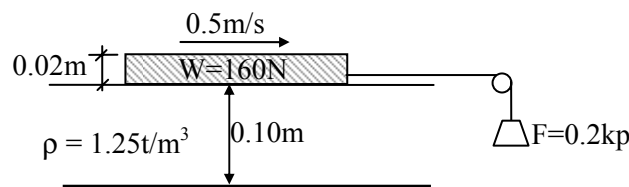
1. Determineu l'altura a la qual puja l'aigua en un tub de vidre de 2 mm de diàmetre (angle de contacte: 180°), si es pot considerar el valor de la tensió superficial $\sigma = 0.0728 \text{ N/m}$ i el seu pes específic $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$.
2. Una canonada de 100 m de longitud i 200 mm de diàmetre en buit (a pressió atmosfèrica) té 10 mm de gruix i una elasticitat lineal $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$. La canonada es pot deformar lliurement. Si s'omple d'aigua ($E_v = 2.225 \cdot 10^8 \text{ kp/m}^2$) fins assolir una pressió de 2943 kPa, es demana determinar el volum i el pes d'aigua que s'hi ha introduït.

⁴ Es pot justificar també a partir de la llei de Laplace, suposant que la superfície que forma el menisc és un casquet esfèric de radi R i determinant la diferència de pressió en el menisc entre l'exterior del líquid ($p_e = 0$) i l'interior ($p_i = -\gamma h$). Aquests dos valors de les pressions, a banda i banda, queden perfectament justificats al capítol 3.

3. Determineu la llei de velocitats d'un fluid newtonià i incompressible de gruix a que llisca sobre un pla inclinat que forma α amb l'horitzontal. La viscositat dinàmica del fluid és μ i la seva densitat, ρ .



4. Determineu l'esforç tallant sobre la superfície del terreny que hi ha un dia de vent. Es suposa que, aquell dia, el perfil de velocitats de l'aire sobre la superfície del terreny és: $v=50\cdot y-700\cdot y^3$, on y és l'altura sobre la superfície del terreny del punt de mesura (en m, i considerant $0<y<0.2$) i v és la velocitat (en m/s). Considereu que la viscositat dinàmica de l'aire aquell dia val $2.02\cdot 10^{-6}$ kg s/m² i el pes específic 12.02 N/m³.
5. La placa plana d' $1\times 1\times 0.02$ m³ i 160 N de pes, de la figura, sotmesa a una força de 0.2 kp, es mou a una velocitat de 0.5 m/s sobre 0.10 m d'un fluid newtonià de 1.25 t/m³ de densitat. Raoneu si les afirmacions següents són certes o falses:



- Això no té sentit, ja que, la placa s'enfonsa en el fluid i no llisca.
- La viscositat dinàmica del fluid és 0.4 Pa·s.
- La viscositat cinemàtica del fluid és 0.32 m²/s.
- La tensió superficial influeix en la flotabilitat de la placa.
- Si el mòdul de compressibilitat volumètric del fluid fos $E_v=200$ MPa, el calat sota la placa passaria a ser 0.092 m.

2 Hidrostàtica

2.1 Formulació general. Principi de Pascal

2.1.1 Introducció

De manera anàloga al que és l'estàtica en la mecànica racional, la hidrostàtica és la branca de la mecànica de fluids que s'encarrega d'estudiar les condicions d'equilibri dels fluids en repòs. Però a diferència dels sòlids rígids en l'estàtica, es comprova que els fluids en moviment, en el cas que no hi hagi moviment relatiu entre partícules adjacents, també estan en condicions hidrostàtiques. Per tant, qualsevol dels dos casos només s'aconsegueix si s'assegura que no hi ha moviment relatiu entre partícules adjacents. Aquesta condició implica, en analitzar la llei de Newton dels fluids viscosos, que no es desenvolupen tensions tangencials dins del fluid i per tant, que els únics esforços que pot resistir un fluid per trobar-se en condicions hidrostàtiques són tensions normals a qualsevol punt.

2.1.2 Principi de Pascal

Sigui un element diferencial com el que es mostra a la figura 2.1, en el si d'un fluid en repòs. Per a un angle θ qualsevol, la condició d'equilibri en la direcció horitzontal (x) i vertical (y), per unitat d'angle, s'estableix:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x \cdot dy - P \cdot ds \cdot \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

$$P_x \cdot dy - P \cdot dy = 0 \Rightarrow \quad (2.2)$$

$$P_x = P \quad (2.3)$$

on s'ha tingut en compte que $ds \cdot \sin \theta = dy$.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_y \cdot dx - P \cdot ds \cdot \cos \theta = 0 \quad (2.4)$$

$$P_y \cdot dx - P \cdot dx = 0 \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$P_y = P \quad (2.6)$$

on ara s'imposa que $ds \cdot \cos \theta = dx$.

De les igualtats (2.3) i (2.6) es pot concloure que la pressió en un punt d'un fluid en repòs, o en moviment, és independent de la direcció en què s'apliqui, sempre que no hi hagi esforços tangencials. Això és equivalent a escriure que les tensions normals que actuen sobre qualsevol punt d'un fluid no depenen de la direcció del pla sobre el qual s'apliquen sinó únicament del punt que es consideri. Aquest enunciat es coneix com el principi de Pascal.

El principi de Pascal, expressat en aquests termes, té una implicació immediata, que és que qualsevol pressió exercida sobre la superfície d'un fluid es transmet de manera uniforme a tots els punts de la seva massa.

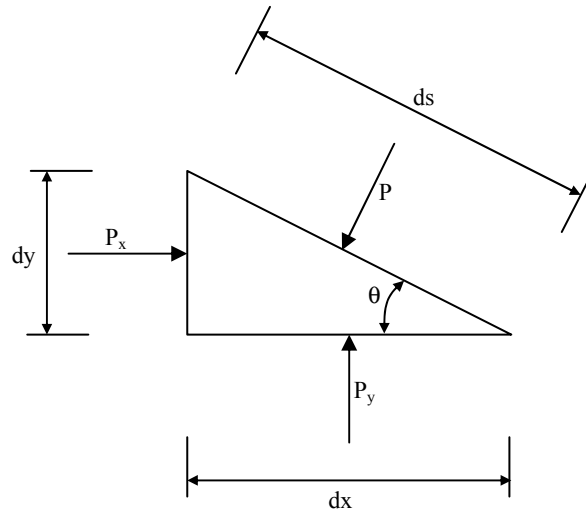


Figura 2.1 Accions sobre un element diferencial qualsevol en un fluid en repòs.

2.2 Equació general de la hidrostàtica

Sigui un volum diferencial de fluid en repòs, en el qual no hi ha esforços tangencials. El fluid és de densitat ρ i sobre ell està actuant una força exterior per unitat de massa⁵ $\vec{b} = (X, Y, Z)$.

En aquestes condicions, es pot estudiar l'equilibri en les tres direccions de l'espai (figura 2.2):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P \cdot dy \cdot dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot X \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (2.7)$$

expressió que, un cop simplificada, queda:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot X \quad (2.8)$$

I de manera anàloga en les altres direccions de l'espai:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \cdot Y \quad (2.9)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \cdot Z \quad (2.10)$$

Les tres equacions (2.8) a (2.10) en les tres direccions principals de l'espai es poden escriure, doncs, de manera vectorial:

⁵ Una força per unitat de massa és una acceleració. Per tant, en el camp gravitatori terrestre, la component vertical Z inclou inevitablement l'acceleració de la gravetat. Així, doncs, estrictament parlant, no cal considerar el pes en el desenvolupament, ja que implícitament ja està inclòs en la component vertical esmentada.

$$\rho \vec{b} = \overline{\text{grad}} P \quad (2.11)$$

que constitueix l'equació fonamental de la hidrostàtica.

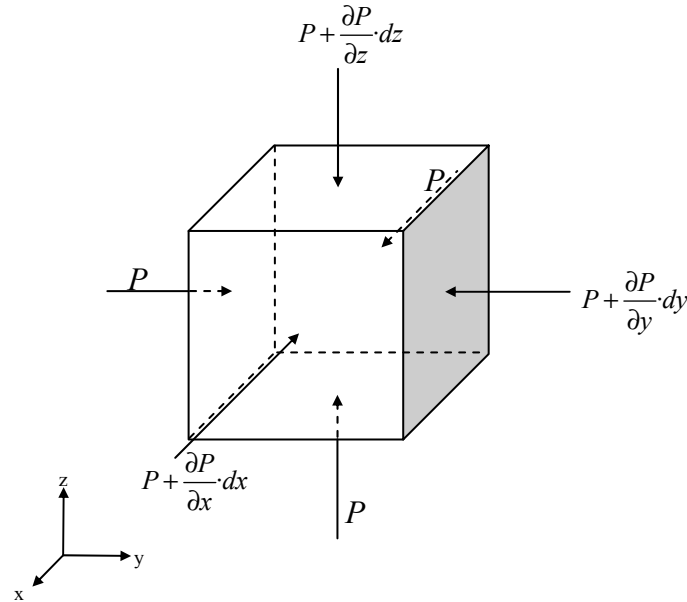


Figura 2.2 Forces de superfície sobre un element de volum diferencial en un fluid en repòs.

Cal notar que l'equació (2.11) indica que el camp de forces exterior per unitat de massa ha de ser perpendicular a les superfícies $P = \text{constant}$ (superfícies isòbares). Però no tots els camps vectorials són susceptibles d'admetre superfícies ortogonals. L'equació (2.11) es continua complint si es fa el rotacional a banda i banda de la igualtat:

$$\overline{\text{rot}}(\rho \vec{b}) = \overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}} P) \quad (2.12)$$

Però el rotacional d'un gradient és igual a zero i, per tant, l'expressió anterior es pot acabar desenvolupant segons el rotacional d'un producte:

$$\rho \overline{\text{rot}}(\vec{b}) - \vec{b} \times \overline{\text{grad}} \rho = \vec{0} \quad (2.13)$$

Finalment, aquesta igualtat es pot multiplicar escalarment pel vector \vec{b} i, tenint en compte que el segon sumand de (2.13) és un vector perpendicular al propi \vec{b} , queda:

$$\vec{b} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{b} = 0 \quad (2.14)$$

Així doncs, a partir d'un simple desenvolupament matemàtic, es pot arribar a demostrar que aquesta condició (2.14), a més de ser necessària, també és suficient i, per tant, és la condició de compatibilitat del camp de forces per unitat de massa. Així doncs, perquè existeixin superfícies isòbares ($P = \text{constant}$) perpendiculars al camp \vec{b} , és condició necessària i suficient que a qualsevol punt del fluid el vector del camp \vec{b} sigui ortogonal al seu rotacional (expressió (2.14)).

Per exemple, un camp d'acceleracions \vec{b} constant compleix la condició (2.14) i, per tant, és un camp que dóna condicions hidrostàtiques.

2.2.1 Estàtica de fluids al camp gravitatori terrestre

El camp gravitatori terrestre és un camp d'acceleracions constant, que ve definit per:

$$\vec{b} = (0, 0, -g) \quad (2.15)$$

on el signe menys s'imposa per coherència amb el criteri de signes fixat a la figura 2.2. D'aquesta manera, les superfícies isòbares es transformen en plans paral·lels al pla xy . A partir de l'equació general (2.11) es pot escriure el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= 0 \\ \frac{dP}{dy} &= 0 \\ \frac{dP}{dz} &= -\rho \cdot g \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

la solució del qual és:

$$\begin{aligned} P &= C_x \text{ en la direcció } x \\ P &= C_y \text{ en la direcció } y \\ P + \rho \cdot g \cdot z &= C_z \text{ en la direcció } z \end{aligned} \quad (2.17)$$

Per determinar les constants d'integració (C_x , C_y , C_z), cal conèixer la pressió a un punt de l'espai (condició de contorn). Segons el principi de Pascal, la pressió en un punt de l'espai és constant sigui quina sigui la direcció d'aproximació al punt. Així, l'esmentada condició de contorn consisteix a imposar que en un determinat punt (x_0 , y_0 , z_0) la pressió val P_0 .

$$\begin{aligned} P_0 &= C_x \text{ en la direcció } x \\ P_0 &= C_y \text{ en la direcció } y \\ P_0 + \rho \cdot g \cdot z_0 = C_z &\Rightarrow P - P_0 = \rho \cdot g \cdot (z_0 - z) \text{ en la direcció } z \end{aligned} \quad (2.18)$$

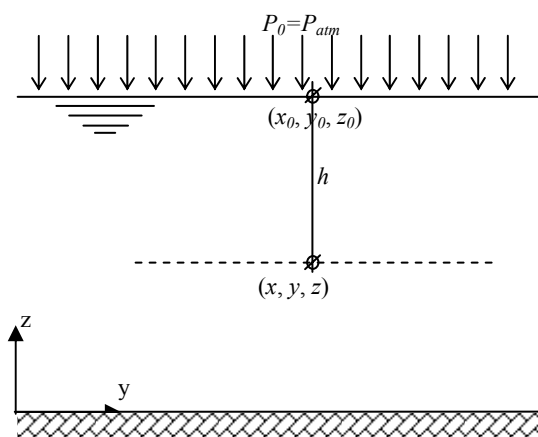


Figura 2.3 Criteri per determinar les constants d'integració (C_x , C_y , C_z) de les equacions (2.17) i (2.18).

Si, tal com s'esquematitza a la figura 2.3, es considera, sense perdre generalitat, que el punt (x_0, y_0, z_0) pertany a la superfície lliure del fluid i que en aquesta superfície la pressió és coneguda i igual a la pressió atmosfèrica⁶ ($P_0 = P_{atm}$), l'equació (2.18) en la direcció vertical⁷ queda:

$$P = P_{atm} + \gamma h \quad (2.19)$$

que defineix la variació de l'anomenada *pressió absoluta* en un punt qualsevol dins de la massa d'un fluid de pes específic γ . Segons aquest resultat, cal notar que, en la superfície terrestre, la P_{atm} està actuant sobre tots i cadascun dels punts i, segons el principi de Pascal, el seu valor és constant sigui quina sigui la direcció d'aproximació al punt. A més la pròpia equació (2.19) indica que, sigui quina sigui la profunditat h del punt d'estudi a ell es transmet també la P_{atm} que actua en la superfície del fluid. És a dir, en qualsevol punt dins de la massa d'un fluid de pes específic γ constant la pressió té dues components: una (P_{atm}), deguda a la pressió que realitza l'atmosfera terrestre sobre qualsevol punt en el seu interior, i la segona (γh), deguda a la columna de fluid sobre aquell punt. Tenint en compte, per tant, que la pressió atmosfèrica hi actua sempre, per simplicitat, aquest sumand s'obvia i es defineix aleshores la *pressió relativa* a partir de la columna d'aigua per sobre del punt:

$$P = \gamma h \quad (2.20)$$

En endavant, i abusant del llenguatge, quan es parla de pressió a l'interior d'un fluid es fa referència a la pressió relativa. Quan es pretén fer algun comentari sobre la pressió absoluta, la referència a aquest terme és explícita.

2.2.2 Mesura de pressions relatives. Manòmetres

a Manòmetre simple o piezòmetre

En un dipòsit amb un fluid incompressible de pes específic γ , en repòs, s'hi connecta un conducte vertical com es mostra a la figura 2.4. L'aigua puja fins a l'altura H que hi ha a l'interior del dipòsit, perquè al punt O la pressió que hi exerceix tota la massa d'aigua és igual a la columna d'aigua a la qual està submergit (γH).

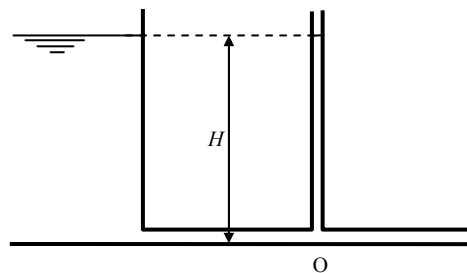


Figura 2.4 Manòmetre simple o piezòmetre.

b Manòmetre diferencial

En un dipòsit amb un fluid incompressible de pes específic γ , en repòs, s'hi connecta un conducte en forma de U, amb un altre fluid incompressible de pes específic γ' al seu interior, tal com es mostra a la figura 2.5. Suposant que, en la situació d'equilibri, el pla AB defineixi la posició de la interfície de separació entre els dos fluids dins del tub, s'ha de donar que:

⁶ La pressió atmosfèrica es defineix com la pressió que realitza l'atmosfera terrestre sobre els cossos que es troben al seu interior.

⁷ En endavant, es considera únicament la direcció vertical (z), ja que les altres dues són redundants perquè la pressió hi és constant. Les altres dues defineixen precisament les superfícies isòbares: plans paral·lels al pla horitzontal (x, y).

$$\begin{aligned} P_A &= \gamma \cdot H \\ P_B &= \gamma' \cdot h \end{aligned} \quad (2.21)$$

Com que A i B estan en un mateix pla, aleshores $P_A = P_B$, perquè en cas contrari hi hauria un desequilibri i, per tant, moviment. S'ha de complir, doncs, la relació següent:

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{h}{H} \quad (2.22)$$

Es pot apreciar que, en cas que $\gamma < \gamma'$, aleshores l'altura en el tub es redueix en la mateixa proporció que els pesos específics i $h < H$. Això dona un sistema de mesurament de nivells en grans dipòsits.

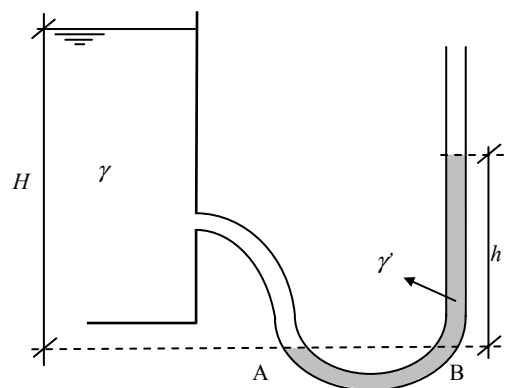


Figura 2.5 Manòmetre diferencial.

2.3 Empenta hidrostàtica sobre superfícies planes

Sigui la superfície plana de la figura 2.6, d'àrea S , submergida en un fluid incompressible de pes específic γ . En aquesta figura, l'eix $O\Psi$ defineix el pla perpendicular al paper de la superfície lliure del fluid i l'eix Ox , el pla xy que conté la superfície plana en qüestió.

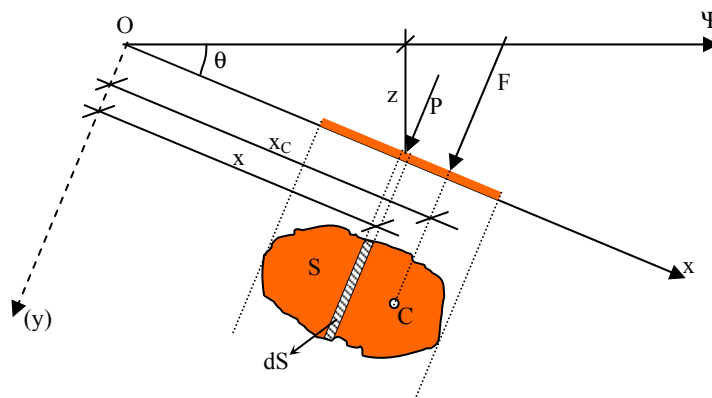


Figura 2.6 Superfície plana submergida en un fluid incompressible.

P caracteritza la pressió hidrostàtica que actua sobre un diferencial de àrea (dS) i, òbviament, ho fa perpendicularment a ell. L'objectiu és calcular la resultant F de tota la distribució de pressions sobre la superfície plana. Si el diferencial d'àrea es troba a una profunditat genèrica z , es pot escriure:

$$dF = P \cdot dS \Rightarrow dF = \gamma \cdot z \cdot dS \quad (2.23)$$

Integrant aquesta expressió diferencial per a tota la superfície:

$$F = \int_S \gamma \cdot z \cdot dS \Rightarrow F = \int_S \gamma \cdot x \cdot \sin \theta \cdot dS \quad (2.24)$$

Es pot treure fora del signe integral els paràmetres constants:

$$F = \gamma \cdot \sin \theta \int_S x \cdot dS \quad (2.25)$$

S'observa que la integral correspon al moment estàtic de primer ordre de la superfície plana en qüestió (numerador de (2.26)):

$$\bar{x}_G = \frac{\int_S x \cdot dS}{S} \quad (2.26)$$

I, per tant, substituint resulta:

$$F = \gamma \cdot \sin \theta \cdot \bar{x}_G \cdot S \quad (2.27)$$

Aquesta equació es més còmode escriure-la segons la profunditat:

$$F = \gamma \cdot z_G \cdot S = P_G \cdot S \quad (2.28)$$

És a dir, la resultant de la distribució de pressions sobre una superfície plana submergida en un fluid incompressible és igual a la pressió hidrostàtica que actua sobre el centre de gravetat geomètric de la superfície.

Tenint en compte que la direcció d'aquesta força resultant també és perpendicular al pla que conté la superfície, només manca establir el punt d'aplicació per tenir totalment definit el vector. El punt on està aplicada la força resultant de la distribució de pressions actuant es defineix com a *centre de pressions*. Per determinar-lo, es poden prendre moments respecte de l'eix Oy de la figura 2.6. Així, el moment de la resultant F respecte d'aquest eix és:

$$M_{Oy} = F \cdot x_C \quad (2.29)$$

mentre que el moment de la distribució de pressions:

$$M_{Oy} = \int_S x \cdot P \cdot dS \quad (2.30)$$

Aquests dos moments han de ser iguals, per tant,

$$F \cdot x_C = \int_S x \cdot \gamma \cdot z \cdot dS \quad (2.31)$$

Tenint en compte la relació entre la profunditat z i la coordenada x que estableix la pròpia figura 2.6, resulta:

$$F \cdot x_C = \int_S x \cdot \gamma \cdot x \cdot \sin \theta \cdot dS \Rightarrow F \cdot x_C = \gamma \cdot \sin \theta \cdot \int_S x^2 \cdot dS \quad (2.32)$$

La integral que en queda és la definició del moment d'inèrcia de la superfície respecte de l'eix Oy. Tenint això en compte i substituint per (2.27):

$$x_C = \frac{I_{Oy}}{x_G \cdot S} \quad (2.33)$$

En general, determinar la posició exacta de l'eix Oy és complicat, ja que per a això caldria, en cada cas, conèixer la intersecció del pla que conté la superfície amb la superfície lliure del fluid. Per aquest motiu, l'anterior expressió se sol referir a l'eix paral·lel a Oy que passa pel centre de gravetat de la superfície, fent servir el teorema de Steiner:

$$x_C = \frac{I_G + S \cdot x_G^2}{x_G \cdot S} \Rightarrow x_C = x_G + \frac{I_G}{x_G \cdot S} \quad (2.34)$$

Tenint en compte que el moment d'inèrcia i la superfície, per definició, són uns valors positius, i que la posició del centre de gravetat de la superfície (x_G) segons la definició dels eixos de la figura 2.6 també és un valor positiu, aleshores el centre de pressions es troba sempre a més profunditat que el centre de gravetat ($x_C > x_G$); només en el cas particular que la superfície sigui paral·lela a la superfície lliure del fluid, ambdós no tan sols es troben a la mateixa profunditat sinó que coincideixen.

De manera anàloga es pot determinar la coordenada y_C del centre de pressions, prenent moments respecte de l'eix Ox. En aquest cas, el moment de la resultant val:

$$M_{Ox} = F \cdot y_C \quad (2.35)$$

mentre que el moment de la distribució de pressions:

$$M_{Ox} = \int_S y \cdot P \cdot dS \quad (2.36)$$

Igualant ambdues expressions, resulta:

$$F \cdot y_C = \gamma \sin \theta \cdot \int_S x \cdot y \cdot dS \quad (2.37)$$

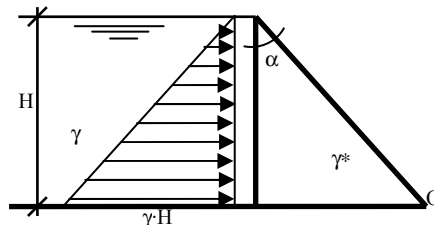
on, ara, la integral defineix el moment d'inèrcia encreuat de la superfície en qüestió respecte del sistema d'eixos fixat. Per tant:

$$y_C = \frac{I_{xy}}{S \cdot x_G} \quad (2.38)$$

Exercici

Donada la presa de gravetat de la figura, de pes específic γ^* , es demana obtenir el valor de *tang* α per als casos següents:

- 1) Que la presa no bolqui.
- 2) Que la presa no bolqui i que no es produeixin traccions al seu interior.



1) L'empenta hidrostàtica sobre la presa té la distribució lineal que es detalla a la figura i la seva resultant per unitat d'ample és:

$$E_H = \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2, \text{ situada a } \frac{H}{3} \text{ de la base de la presa.}$$

La presa resisteix aquesta empenta horitzontal oposant-hi el seu propi pes⁸, que per unitat d'ample val:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma^* \cdot H^2 \cdot \tan \alpha, \text{ situada a } \frac{2 \cdot H \cdot \tan \alpha}{3} \text{ del punt O.}$$

Imposant que la presa no bolqui al voltant del punt O, resulta:

$$M_O = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \gamma^* \cdot H^2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{2 \cdot H \cdot \tan \alpha}{3} - \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2 \cdot \frac{H}{3} = 0$$

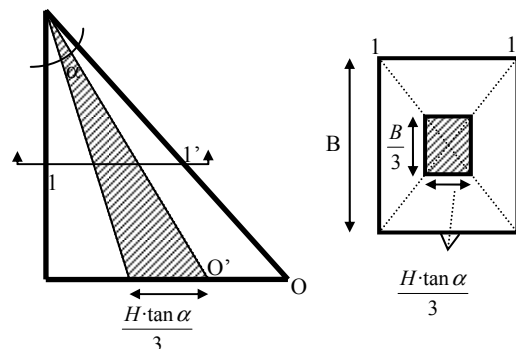
I, reordenant, queda:

$$2 \cdot \gamma^* \cdot \tan^2 \alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{2\gamma^*}}$$

Tenint en compte que el pes específic del formigó és aproximadament 22563 N/m³ i que el de l'aigua és 9810 N/m³, resulta un angle $\alpha = 25^\circ$ o el que és el mateix, un angle de 65° amb l'horitzontal.

2) La condició que no hi hagin traccions dins del cos de la presa es redueix a imposar que el punt d'aplicació de la resultant de les accions sobre la presa (empenta hidrostàtica i pes) es trobi dins del *nucli central* de la presa.

El nucli central d'una secció rectangular és un rectangle homotètic de raó 1/3, tal com es mostra a la figura següent.



⁸ D'aquí el nom que reben aquesta tipologia de preses: *preses de gravetat*.

En aquest cas, les accions sobre la presa són:

- Empenta hidrostàtica: $E_H = \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2$, situada a $\frac{H}{3}$ de la base de la presa.
- Pes de la presa: $W = \frac{1}{2} \cdot \gamma^* \cdot H^2 \cdot \tan \alpha$, situat a $\frac{H \cdot \tan \alpha}{3}$ del punt O'.

Cal imposar que la resultant de les dues anteriors no surti del nucli central:

$$M_{O'} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \gamma^* \cdot H^2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{H \cdot \tan \alpha}{3} - \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2 \cdot \frac{H}{3} = 0$$

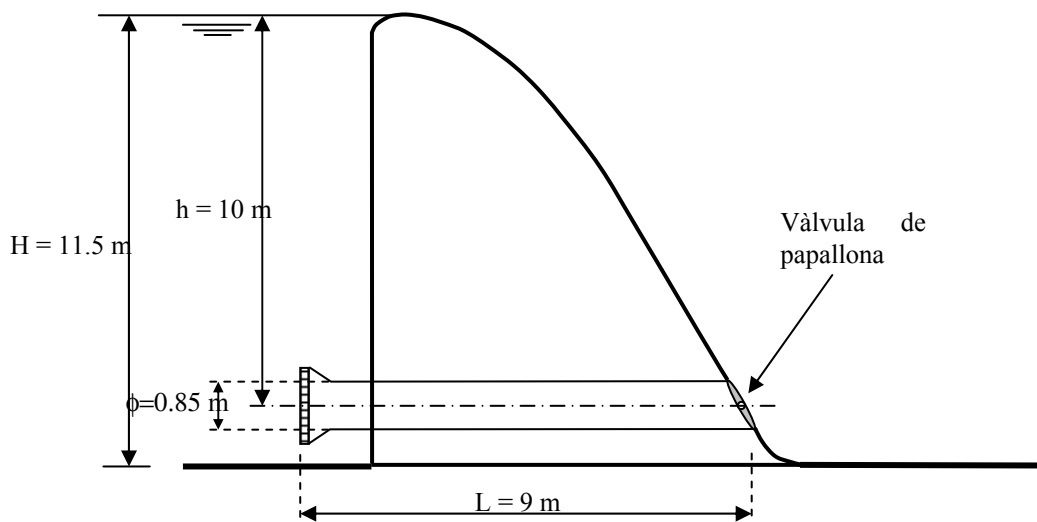
Reordenant, queda:

$$\gamma^* \cdot \tan^2 \alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma^*}}$$

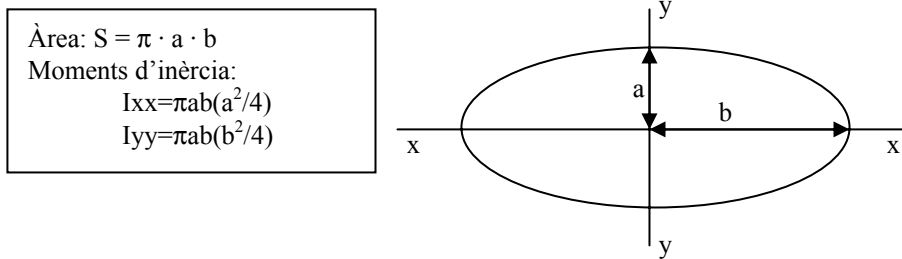
que per al cas del formigó i l'aigua dona un angle amb l'horitzontal de 56.6° que resulta, com és lògic, una condició més restrictiva que el primer apartat.

Exercici

Un assut d'altura $H = 11.5$ m i ample $B = 25$ m disposa d'un desguàs de fons constituït per un conducte d'acer de longitud $L = 9$ m i de diàmetre $\phi = 0.85$ m. El flux en aquesta canonada es regula des del seu extrem aigües avall per una vàlvula de papallona, tal com es mostra a la figura següent. Es demana determinar la força i el moment màxims que la vàlvula ha de resistir quan es troba totalment tancada en la situació en què l'assut estigui a punt de vessar.



Nota: A causa de la inclinació que ha de tenir la comporta, la papallona és una el·lipse de diàmetre menor aproximadament igual al diàmetre ϕ de la canonada i de diàmetre major igual a $1.305 \cdot \phi$.



Càlcul de la força i el moment resultants

Per a una altura d'aigua de 10 m sobre l'eix del desguàs de fons, la resultant F val:

$$F = \gamma z_G S = 9810 \cdot 10 \cdot 0.7405 = 72643.05 \text{ N}$$

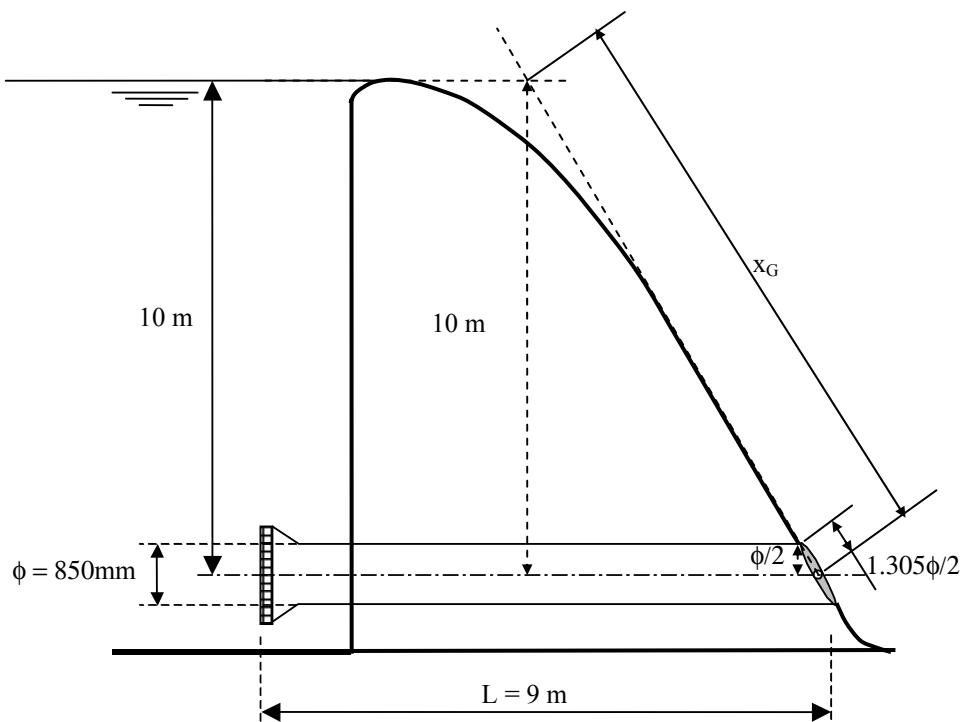
$$S = \pi \frac{0.850}{2} \frac{1.305 \cdot 0.850}{2} = 0.7405 \text{ m}^2$$

que està aplicada sobre el centre de pressions que es pot localitzar a partir de:

$$x_G = \frac{10 \cdot \frac{1.305\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} = 13.05 \text{ m}$$

$$I_G = \pi \frac{\phi}{2} \frac{1.305\phi}{2} \left(\frac{\left(\frac{1.305\phi}{2} \right)^2}{4} \right) = 0.05695 \text{ m}^4$$

$$x_C = x_G + \frac{I_G}{x_G S} = 13.05 + \frac{0.05695}{13.05 \cdot 0.7405} = 13.06 \text{ m}$$



Finalment, el moment resultant val:

$$M_o = F(x_c - x_G) = 72643.05 \cdot 0.00589 = 428.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

2.4 Empenta hidrostàtica sobre superfícies corbes

Segui la superfície corba mostrada a la figura 2.7, submergida a un fluid incompressible de pes específic γ . La superfície es discretitza en elements diferencials d'àrea, com el de la figura, que cobreixin tota la superfície. L'empenta resultant es determina analitzant les pressions sobre tots i cadascun d'aquests elements diferencials.

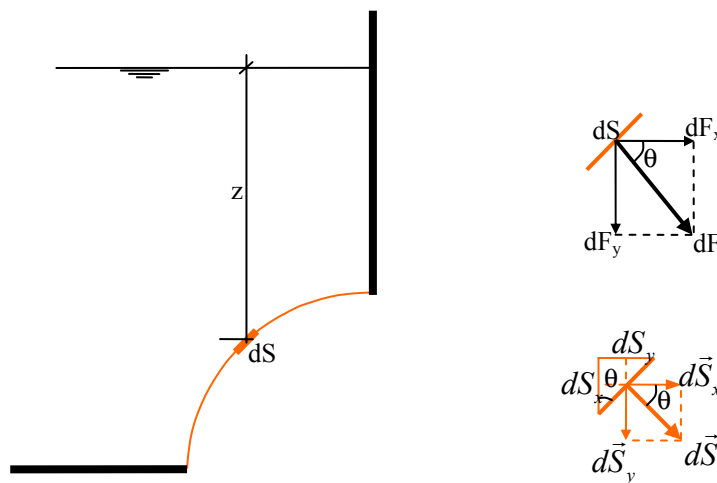


Figura 2.7 Superfície corba submergida en un fluid incompressible.

2.4.1 Component horitzontal:

A la mateixa figura 2.7 s'ha descompost l'empenta en cada element diferencial, com també el propi vector de superfície. La component horitzontal sobre cada element val:

$$dF_x = dF \cdot \cos \theta = \gamma \cdot z \cdot \cos \theta \cdot dS \quad (2.39)$$

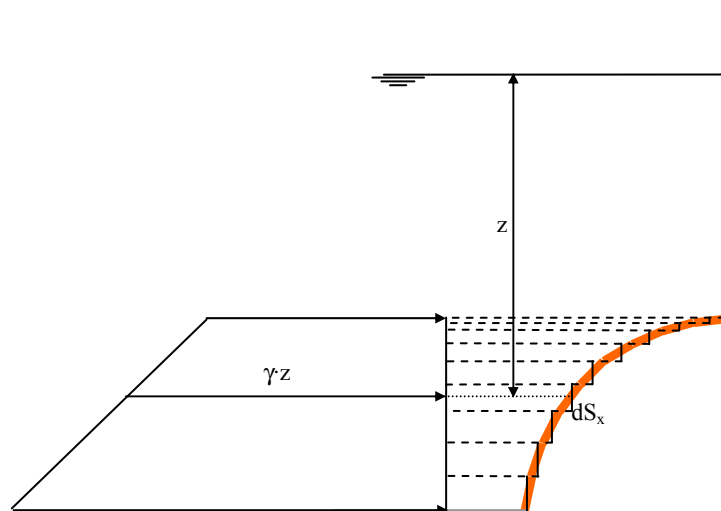


Figura 2.8. Acció en la direcció vertical sobre cada diferencial de superfície.

Integrant la força que actua sobre tots i cadascun dels elements diferencials que cobreixen la superfície queda:

$$F_x = \int dF_x = \int_S \gamma z \cdot \cos \theta \cdot dS \quad (2.40)$$

de manera que el component horitzontal de l'empenta sobre la superfície corba es calcula determinant l'empenta sobre la superfície vertical de projecció de la superfície corba i actuant sobre el centre de gravetat del prisma de pressions que es forma.

$$F_x = \int_{S_v} \gamma z \cdot dS_x \quad (2.41)$$

Així, qualsevol superfície corba submergida que tingui la mateixa projecció vertical (figura 2.9) té la mateixa component horitzontal que la seva empenta resultant.

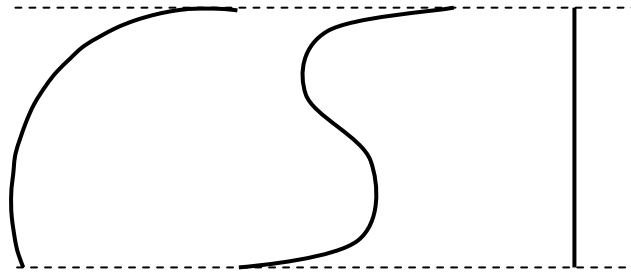


Figura 2.9 Comparació de les projeccions verticals de diferents superfícies corbes. La component horitzontal de l'empenta sobre totes elles coincideix.

2.4.2 Component vertical

Per determinar la component vertical, es procedeix de manera semblant.

$$dF_y = dF \cdot \sin \theta = \gamma z \cdot \sin \theta \cdot dS \quad (2.42)$$

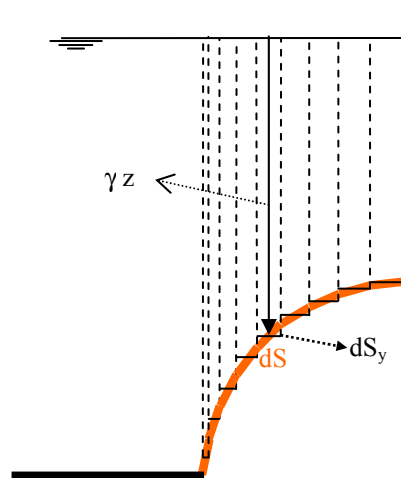


Figura 2.10. Acció en la direcció vertical sobre cada diferencial de superfície.

En aquest cas, la component vertical de la resultant es calcula sumant les components verticals que actuen sobre la projecció horitzontal dels diferencials d'àrea en què s'ha discretitzat la superfície.

$$F_y = \int dF_y = \int_S \gamma \cdot z \cdot \sin \theta \cdot dS \quad (2.43)$$

$$F_x = \int_{S_H} \gamma \cdot z \cdot dS_y \quad (2.44)$$

2.5 Sòlids totalment submergits. Subpressió

2.5.1 Principi d'Arquímedes

Sigui el sòlid homogeni ABCD definit a la figura 2.11, submergit completament en un fluid incompressible de pes específic γ . Si s'aïlla el volum de control amb costats verticals tangents al cos, es poden identificar les forces verticals que actuen sobre els dos volums de fluid que queden dins de l'element de volum i que en garanteixen l'equilibri (figura 2.12).

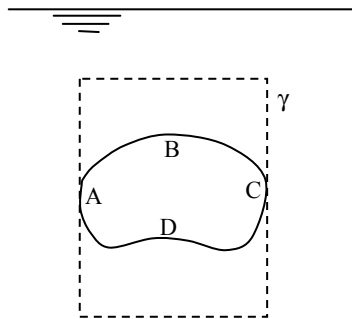


Figura 2.11. Sòlid homogeni ABCD submergit en un fluid incompressible.

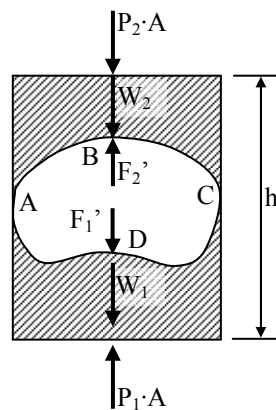


Figura 2.12. Accions que actuen sobre l'element de volum que conté el sòlid ABCD per assegurar-ne l'equilibri.

on

- W_1 i W_2 són els pesos de les porcions de fluid que queden dins de l'element de volum i que envolten el sòlid (zones ratllades de la figura 2.12).
- $(P_1 \cdot A)$ i $(P_2 \cdot A)$ són la resultant de les pressions sobre les cares superior i inferior, respectivament, de l'element de volum tangent al sòlid.
- F_1' i F_2' són les reaccions que les cares del sòlid ABC i CDA, respectivament, exerceixen sobre el fluid per assegurar-ne l'equilibri.

Així, per a la porció superior, l'equilibri permet escriure l'equació següent:

$$-F'_2 + W_2 + P_2 \cdot A = 0 \quad (2.45)$$

Per a la porció inferior, en canvi:

$$F'_1 + W_1 - P_1 \cdot A = 0 \quad (2.46)$$

Les dues darreres equacions, permeten escriure'n una de manera conjunta:

$$F'_1 - F'_2 = (P_1 - P_2) \cdot A - (W_1 + W_2) \quad (2.47)$$

La variació de les pressions ($P_1 - P_2$) ve donada per la diferència de profunditats d'ambdues cares de l'element de volum. Per tant:

$$E = F'_1 - F'_2 = \gamma \cdot h \cdot A - (W_1 + W_2) \quad (2.48)$$

El primer sumand correspon al pes del cilindre de fluid que s'estén entre els plans horitzontals que limiten els extrems superior i inferior de l'element de volum. El segon membre correspon als pesos de fluid entre l'element de volum i ambdues cares. Per tant, la diferència d'ambdós sumands de l'expressió (2.48), correspon al pes d'un volum de fluid exactament igual al volum del sòlid.

E representa l'acció sobre el fluid, cal notar que, amb el criteri de signes considerat, $E > 0$, és a dir, resulta una força descendent. Habitualment, l'acció E , o *empenta hidrostàtica*, es pren com l'acció del fluid sobre el cos i, en aquest cas, és ascendent. Així s'enuncia el conegut principi d'Arquímedes: tot cos submergit en un fluid experimenta una empenta vertical i ascendent igual al pes del fluid desallotjat.

Amb tot això es conclou que, quan el pes d'un sòlid en un líquid sigui superior a l'empenta d'Arquímedes que aquest li provoca, aquest sòlid s'enfonsa en el líquid fins arribar al fons. En cas que el pes del sòlid sigui més petit que el volum de fluid que desplaça, aquest sòlid sura.

2.5.2 Subpressió

En cas que el sòlid homogeni submergit es trobi recolzat en el fons del fluid incompressible, de pes específic γ , es poden donar dues situacions segons com sigui el contacte entre el cos i el fons, que són conceptualment diferents i que es tradueixen en comportaments sensiblement diferents: amb adherència perfecta (situació ideal) i sense adherència perfecta (situació real).

a Adherència perfecta

Aquesta és una situació ideal. Tal com s'il·lustra a la figura 2.13, en les accions que actuen sobre el sòlid cal tenir en compte la pressió atmosfèrica ja que, com que hi ha contacte perfecte entre el sòlid i el fons, en aquest contacte, per definició, no hi ha espai per a cap partícula fluida. Per tant, la pressió que li correspondria al fluid per la columna d'aigua que té per sobre no s'ha pogut transmetre a aquesta zona.

Sobre el sòlid, la resultant de totes les forces que estan actuant és:

$$F_{solid} = \gamma \cdot h \cdot S + P_{am} \cdot S \quad (2.49)$$

De manera que la força T que cal fer per aixecar el sòlid del fons serà:

$$T = W + \gamma \cdot h \cdot S + P_{atm} \cdot S \quad (2.50)$$

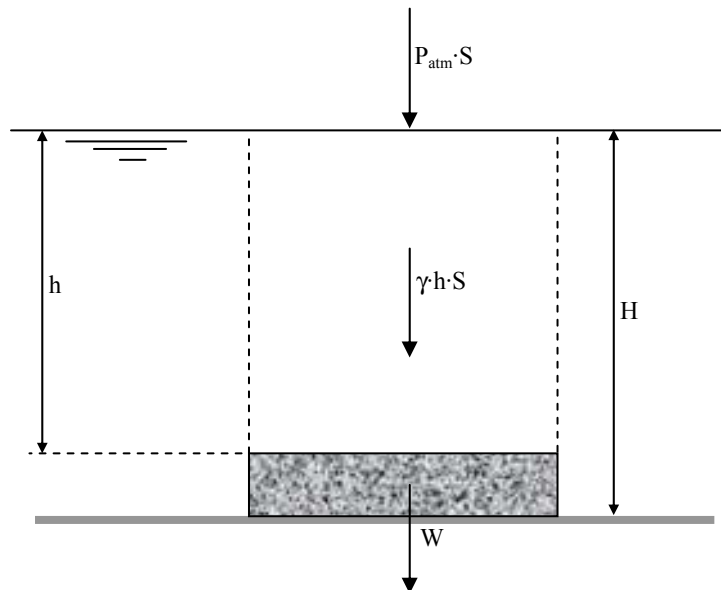


Figura 2.13 Sòlid homogeni recolzat en el fons d'un fluid incompressible. Contacte perfecte.

b Sense adherència perfecta

Aquesta és la situació real que es dona en qualsevol contacte entre un sòlid submergit i el fons. En aquest cas, el cos s'hi recolza sense continuïtat geomètrica, a escala microscòpica. Això afavoreix que en la interfície de contacte hi hagi partícules de fluid que transmeten la pressió corresponent a la columna d'aigua que tenen per sobre. Així, sobre el sòlid actua la resultant següent.

$$F_{solid} = \gamma \cdot S \cdot (h - H) \quad (2.51)$$

Cal observar que, ara, l'acció de la pressió atmosfèrica es produeix en ambdues cares del sòlid, la superior i la inferior, i en sentits contraris, per la qual cosa el seu efecte total es cancel·la. Igualment, ara, a diferència de (2.49) cal tenir en compte la pressió del fluid, que queda en el contacte i que es transmet sobre la cara inferior del sòlid en sentit ascendent. Per tant, l'expressió (2.51), finalment coincideix amb l'empenta d'Arquímedes sobre el sòlid (vertical i ascendent).

En aquest cas, segons això, per aixecar el sòlid del fons cal fer la força:

$$T = W + \gamma \cdot S \cdot (h - H) \quad (2.52)$$

que, si es compara amb el cas de contacte perfecte (2.50), es pot concloure que, en el cas real, els sòlids que es recolzen en el fons d'un líquid veuen reduït el seu pes, en part a causa de la cancel·lació de l'efecte de la pressió atmosfèrica i en part per l'acció de l'empenta d'Arquímedes sobre el sòlid. Aquest resultat és transcendental per estudiar l'estabilitat d'estructures d'obra civil, que tenen els seus fonaments en terrenys saturats. L'exemple típic és el cas de les preses.

L'efecte de la subpressió en estructures com les preses provoca una reducció del pes aparent del sòlid i, per tant, la possible desestabilització de l'estructura si aquestes forces no es tenen en compte en els càlculs. Sovint, per reduir l'efecte d'aquest fenomen, sobretot quan cal construir en terrenys força permeables, s'actua per eliminar, en la mesura que sigui possible, l'aigua dels fonaments de la presa construint-hi xarxes de drenos.

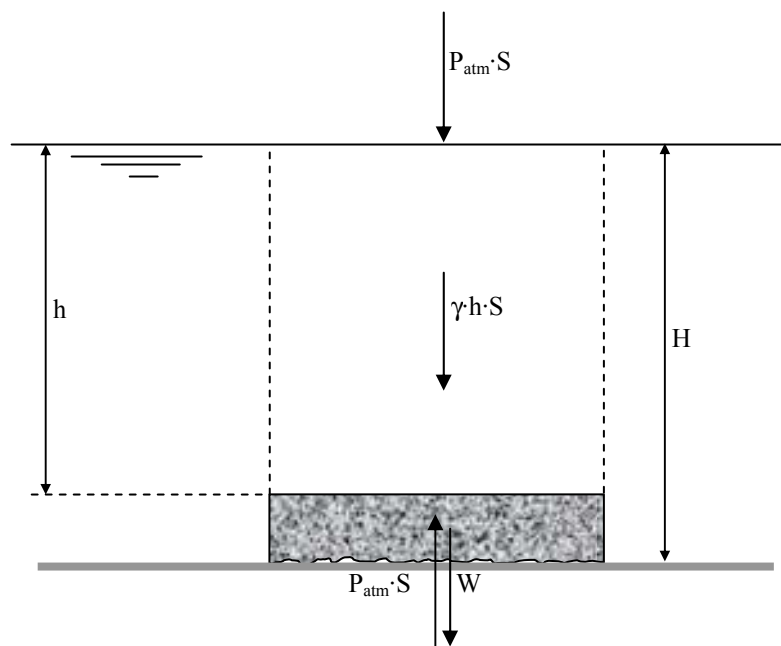
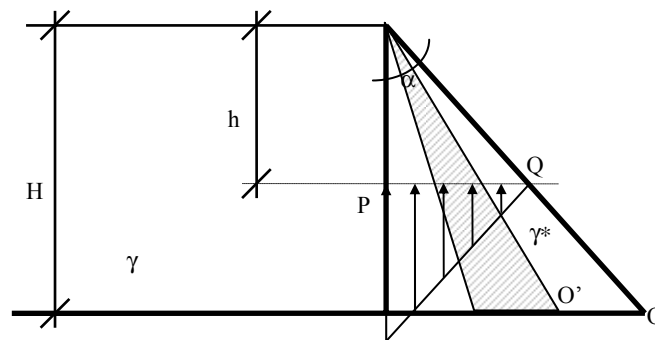


Figura 2.14 Sòlid homogeni recolzat en el fons d'un fluid incompressible. Contacte real.

Exercici

Donada la presa de gravetat de la figura, de pes específic γ^* , es demana obtenir el valor de $\tan \alpha$ per al cas següent:

- No es produeixin traccions, però a una altura genèrica h hi ha una subpressió de llei lineal, tal que a P val $h\gamma$ i a Q val 0



En aquest cas, a l'empenta horitzontal i al pes cal afegir-li una nova acció, que és la subpressió, que segueix la llei lineal que es descriu a l'enunciat. Per tant, s'han de considerar les forces següents:

- Empenta hidrostàtica: $E_H = \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2$, situada a $\frac{H}{3}$ de la base de la presa.
- Pes de la presa: $W = \frac{1}{2} \cdot \gamma^* \cdot H^2 \cdot \tan \alpha$, situat a $\frac{H \cdot \tan \alpha}{3}$ del punt O' .
- Subpressió: $S = \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2 \cdot \tan \alpha$, situat a $\frac{H \cdot \tan \alpha}{3}$ del punt O' .

Imposant que la resultant de les tres forces no surti del nucli central:

$$M_{O'} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \gamma^* \cdot H^2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{H \cdot \tan \alpha}{3} - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{H \cdot \tan \alpha}{3} - \frac{1}{2} \cdot \gamma H^2 \cdot \frac{H}{3} = 0$$

I reordenant, queda:

$$(\gamma^* - \gamma) \cdot \tan^2 \alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma^* - \gamma}}$$

que per al cas del formigó i l'aigua, resulta un angle amb l'horitzontal de 48.7°, que torna a ser una condició més restrictiva que les analitzades en l'exercici de la pàgina 38.

2.6 Equilibri en fluids que es mouen com un sòlid rígid

Als apartats 2.1 i 2.2 s'han discutit les condicions que permeten assegurar que un fluid es troba en situació hidrostàtica. A més del cas evident de fluids en repòs ($\vec{v} = \vec{0}$), s'aconsegueix en el cas que totes les partícules fluids presentin una acceleració constant (moviment uniformement accelerat), que indica que el fluid s'accelera en bloc, com si es tractés d'un sòlid rígid. En aquest cas, no hi ha moviment relatiu entre partícules líquides, de manera que no es desenvolupen tensions tallants entre elles.

2.6.1 Acceleració lineal uniforme

Segui un recipient obert com el de la figura 2.15, en el qual hi ha un fluid, no necessàriament incompressible, de pes específic γ . El recipient es desplaça segons una trajectòria rectilínia, amb una acceleració constant genèrica $a = (a_x, a_y, a_z)$. Tenint en compte que en la direcció z, a més, hi actua l'acceleració de la gravetat en sentit descendent, el sistema d'equacions (2.11) dona:

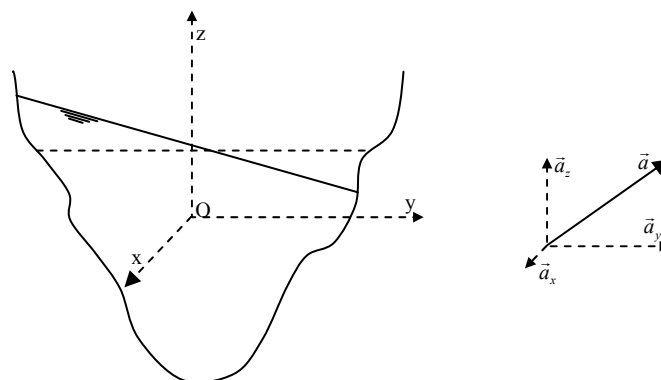


Figura 2.15 Líquid en un recipient obert a una acceleració lineal uniforme

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\rho \cdot a_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\rho \cdot a_y \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho \cdot (g + a_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

D'aquesta manera, la variació de pressió entre dos punts propers (x, y, z) i $(x+dx, y+dy, z+dz)$ es pot escriure:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz \quad (2.54)$$

De manera que, de l'equació general de la hidrostàtica, resulta:

$$dP = -\rho \cdot a_x \cdot dx - \rho \cdot a_y \cdot dy - \rho \cdot (a_z + g) \cdot dz \quad (2.55)$$

Les superfícies isòbares han de complir que $dP=0$; per tant, són els plans definits per:

$$-\rho \cdot a_x \cdot x - \rho \cdot a_y \cdot y - \rho \cdot (a_z + g) \cdot z = C \quad (2.56)$$

on C és la constant que defineix la família de plans paral·lels.

En el cas particular que $a_x = a_y = 0$ i $a_z \neq 0$, que correspon a una massa de líquid que s'accelera en la direcció vertical, l'equació (2.56) condueix a plans horitzontals, tot i que el sistema (2.53) dóna una distribució de pressions sensiblement diferent de la que s'ha obtingut a (2.18), (2.19) o (2.20).

Un altre cas particular curiós es dóna en el cas d'un líquid en caiguda lliure. En aquest cas, el camp de forces per unitat de massa és $a_x = a_y = 0$, i $a_z = -g$. En aquesta situació, els gradients de pressió en les tres direccions de l'espai (2.53) són iguals a zero. Això implica que la pressió que envolta la massa de líquid val zero i, per tant, és nul·la en qualsevol punt del líquid. És a dir, en situació d'ingravedesa, a l'interior d'un líquid no es desenvolupa ni tan sols pressió.

Es dóna el cas que, si el líquid no es disgrega, això és degut a l'acció de les forces de tensió superficial.

2.7 Exercicis proposats

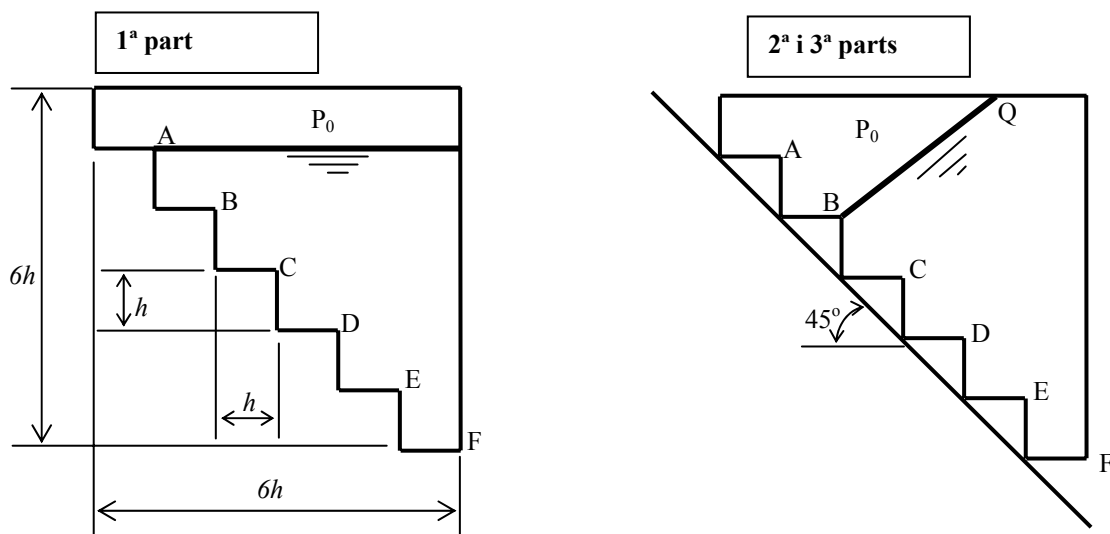
1. La figura representa un tanc tancat hermèticament amb el fons seguint un perfil escalonat. La longitud de la petja i l'altura de la contrapetja de cada graó valen h , que donen una altura i una longitud totals iguals a $6h$.

Si a l'interior del tanc hi ha un fluid de pes específic constant γ , fins a una altura de $5h$, i sobre la superfície lliure existeix una pressió P_0 , es demana:

- Representeu gràficament la variació de la pressió sobre la paret escalonada.

En un moment donat, s'observa que el tanc comença a moure's sobre un plànol inclinat que forma 45° amb l'horitzontal i que la superfície lliure passa a ser el plànol que passa per l'aresta B i per un determinat punt Q de la superfície del tanc. En aquest cas:

- Determineu el mòdul i el sentit de l'acceleració amb què es mou el tanc.
- Representeu gràficament l'evolució de la pressió sobre la paret escalonada.



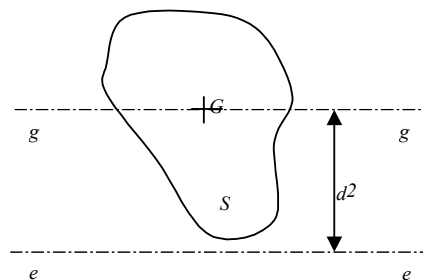
2. Una vàlvula de papallona controla la sortida d'un dipòsit d'aigua ($\gamma_w = 1t/m^3$). La vàlvula pot girar al voltant d'un eix diametral O . Si l'eix de la canonada, de diàmetre $\phi = 1\text{ m}$, forma 45° amb l'horitzontal, el centre de la vàlvula es troba a una profunditat $H = 2\text{ m}$ de la superfície lliure, i aigües avall de la vàlvula la canonada està buida:

- Determineu el mòdul, la direcció i el sentit de la força i dels moments resultants que ha de resistir la vàlvula en aquestes circumstàncies.

Si, mantenint-se la vàlvula completament tancada, el tram de canonada aigües avall de la vàlvula es troba completament ple d'aigua i connectat a un dipòsit, la superfície lliure del qual es troba a una distància $H' = 1\text{ m}$ per sota del centre de la vàlvula:

- Determineu el mòdul, la direcció i el sentit de la força i dels moments resultants que ha de resistir la vàlvula en aquestes circumstàncies.

Expresseu els resultats en el Sistema Internacional d'unitats.



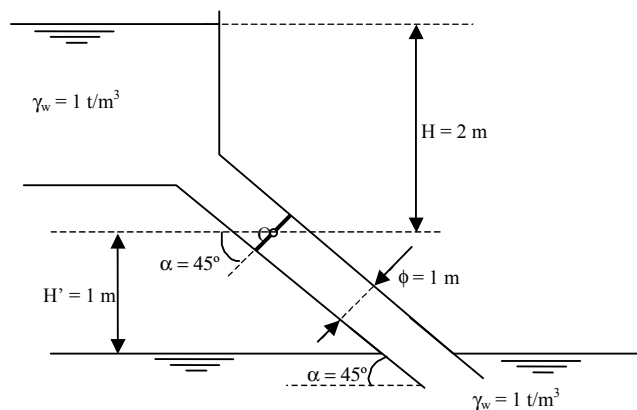
El moment d'inèrcia d'un cercle de radi R respecte d'un eix diametral val:

$$I = \pi R^4/4$$

El teorema de Steiner, referit al moment d'inèrcia d'una superfície plana d'àrea S i centre de gravetat G , afirma que:

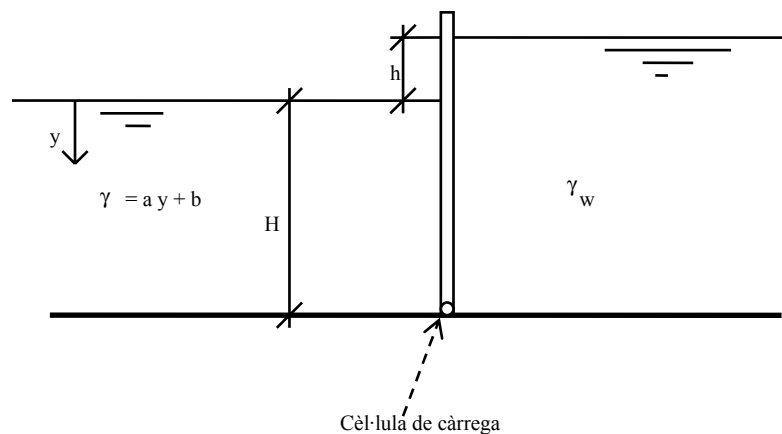
$$I_e = I_g + S \cdot d^2$$

on $g-g$ i $e-e$ són eixos paral·lels.



3. Es disposa d'uns fangs de pes específic (γ) variable, la llei del qual es pot acceptar lineal segons l'expressió $\gamma = a \cdot y + b$, on y és la profunditat i a i b , dues constants. A fi d'obtenir els valors a i b , es construeix un dipòsit, dividit en dues parts per una comporta rectangular de longitud L , recolzada en el seu fons mitjançant una articulació. D'aquesta manera, s'omple de fangs fins a una altura H una de les dues parts, mentre que l'altra s'omple d'aigua fins a tenir una sobrelevació h respecte de l'anterior. Si la comporta es manté en posició vertical i el seu suport es troba connectat a una cèl·lula de càrrega que permet conèixer, per a cada situació d'equilibri, les reaccions que s'hi produeixen, es demana:

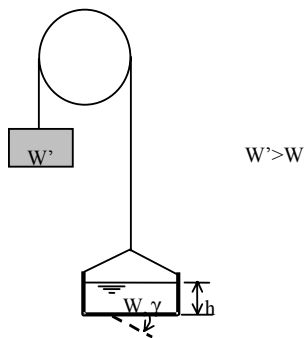
- Determineu les constants a i b , en funció de les altures H i h .
- És possible una situació d'equilibri per a $h=0$? En cas afirmatiu, determineu a i b per al cas que el dipòsit s'ompli a una altura d'1 m en ambdues parts, la longitud de la comporta sigui de 1 m i que la reacció mesurada sigui de 41.67 Kp en sentit de la part amb aigua cap a la qual contingui els fangs. En cas negatiu, determineu igualment a i b perquè, amb la mateixa comporta, $h = 0.20$ m.
- Una vegada ajustades les constants a i b , determineu el centre de pressions a banda i banda de la comporta.



4. Sigui un recipient ple de líquid de pes específic γ , essent W el pes total (líquid més recipient). El recipient es desplaça verticalment i cap amunt perquè està suspès a l'extrem d'un cable instal·lat en una políja, i a l'extrem oposat del cable hi actua una força $W' > W$.

Al fons del recipient hi ha una petita comporta que s'obre cap a l'exterior d'aquest si la pressió relativa del líquid sobre ella supera un determinat valor p_0 . Determineu el valor del contrapès W' que originaria la obertura de la comporta per a una altura h de líquid en el recipient.

Es negligeixen les masses del cable i de la politja, com també la resistència a la rodadura d'aquesta última.



5. Es pretén elevar un globus esfèric omplint-lo d'heli. El globus està fet d'un material elàstic que permet que es deformi segons l'equació

$$dr = K r dp$$

on r és el radi del globus, p és la pressió interior i K és una constant.

Se sap que:

- quan la pressió és la pressió atmosfèrica (p_0), el radi és r_0 ,
- el pes específic de l'aire és γ_a ,
- l'heli es pot considerar que es comporta com un fluid perfecte que, en condicions isotermes, verifica

$$E = p$$

on E és el mòdul de compressibilitat i p la pressió absoluta.

→ Trobeu la pressió d'heli per a la qual el globus presenta una força ascensional màxima.

Se sap que

- la pressió atmosfèrica és $p_0 = 1 \text{ atm}$,
- el pes específic de l'aire $\gamma_a = 1.2060 \text{ kp/m}^3$,
- la constant del globus és $K = 7.000 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{N}$,
- la densitat de l'heli a pressió atmosfèrica p_0 és $\rho_0 = 0.180 \text{ kg/m}^3$,
- el radi inicial del globus és $r_0 = 2 \text{ m}$,

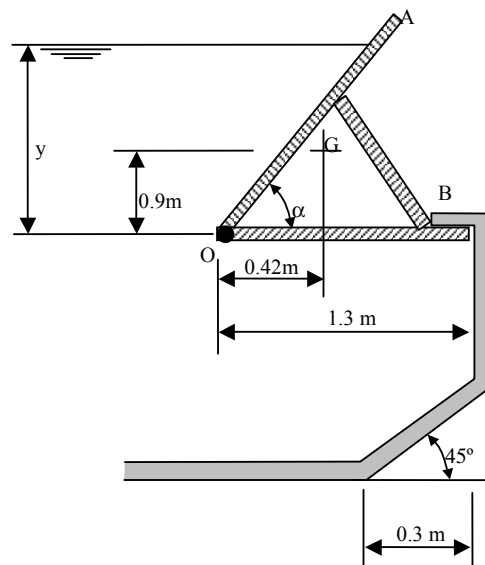
Determineu, en el Sistema Internacional d'unitats:

- la pressió d'heli per a la qual es produeix aquesta força ascensional màxima.
- el valor de la força ascensional màxima.
- el radi del globus en aquestes condicions.
- el pes específic de l'heli per a aquesta situació.

6. Es vol determinar el valor màxim de l'angle α , de la comporta de la figura, perquè s'obri amb una altura d'aigua $y = 1.88 \text{ m}$. La comporta pot girar al voltant del punt O .

Per a l'angle α obtingut, analitzeu com varia la força que ha de resistir el suport B d'acord amb l'altura d'aigua y . Quina és la mínima altura d'aigua (y) necessària per mantenir la comporta tancada? Quina és la màxima força que ha de resistir el suport B , per a un dimensionament correcte de l'estructura de formigó que ha de suportar la comporta?

La comporta té un ample (direcció perpendicular a pla del dibuix) de 2 m , un pes de 400 kp i el seu centre de gravetat correspon al punt G de la figura.



3 Equacions fonamentals dels fluids en moviment

3.1 Descripció del moviment d'un fluid

El moviment d'un fluid és senzillament una deformació contínua d'aquest. Per descriure aquest moviment es pot considerar el fluid constituït per partícules infinitesimals que mantenen les propietats macroscòpiques i que en el seu moviment es mantenen en contacte alhora que es deformen (hipòtesi de medi continu).

Així, el moviment d'una partícula es pot definir a partir d'una funció que en determini la posició a l'espai al llarg del temps. Aquesta funció es defineix com la *trajectòria* de la partícula i se'n poden fer dues descripcions:

- *Descripció lagrangiana*: el moviment es descriu analitzant la posició d'una determinada partícula del fluid en el temps. És a dir, es fa el seguiment d'una partícula.
- *Descripció euleriana*: el moviment es descriu examinant els valors de les propietats mecàniques del fluid en cada punt segons el temps. És a dir, es fixa un punt de l'espai i s'analitza com evoluciona una determinada propietat en el temps.

Aquestes dues descripcions es poden discutir considerant, per exemple, la qualitat d'una massa d'aigua. Hi ha diferents equips de mesurament de la qualitat d'una massa d'aigua (p. ex. un embassament). Es pot fixar en un punt determinat de l'embassament un equip, ancorat en el fons, que permeti obtenir variables com la temperatura de l'aigua, la densitat, el pH, etc, o els mateixos mesuraments es podrien dur a terme amb el mateix equip però arrossegat des d'una barca que seguís la trajectòria de les partícules. El primer correspon a una descripció euleriana de cada variable i requereix d'una xarxa de sensors distribuïts en la massa d'aigua per poder estimar l'evolució de cada variable en tota la massa i en el temps. El segon cas correspon a una descripció lagrangiana de la variació dels esmentats paràmetres, per a la qual cal conèixer la trajectòria de la barca en el temps (informació que avui en dia és relativament fàcil d'obtenir a partir d'equips GPS).

En mecànica de fluids, i en hidràulica en particular, sol ser més senzill usar el mètode eulerià (p. ex. estacions d'aforament en canals, ús de sensors de mesurament de velocitats i cabals en canonades, ús sensors piezorresistius o piezoelèctrics per al mesurament de pressions, etc.), tot i que en alguns casos és adequat l'ús de la descripció lagrangiana (p. ex. mesuraments en oceanografia amb boies que segueixen els corrents marins, ús de colorants i traçadors per a l'estudi del flux en medis porosos, etc.)

3.1.1 Vector de posició i camp de velocitat i acceleració

El mètode eulerià utilitza el concepte de la *representació de camp* de flux. Aquest concepte correspon a la descripció de qualsevol propietat del fluid segons la ubicació i l'instant de temps. Així, si es considera un sistema cartesià convencional amb els vectors unitaris $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, es pot definir la funció vectorial de variable real:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} \quad (3.1)$$

que rep el nom de *vector de posició*, en què la *trajectòria* és el lloc geomètric de les posicions que ocupen les partícules del fluid al llarg del temps.

A partir d'aquesta definició es pot establir una de les variables principals que cal determinar quan s'estudia la cinemàtica d'un fluid: el *camp de velocitat*:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(x, y, z, t) \cdot \vec{i} + v_y(x, y, z, t) \cdot \vec{j} + v_z(x, y, z, t) \cdot \vec{k} \quad (3.2)$$

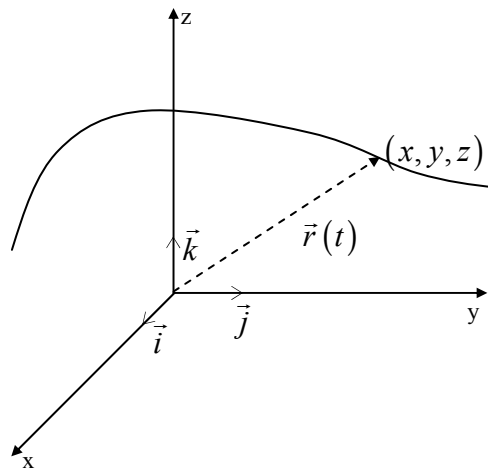


Figura 3.1 Vector de posició i trajectòria en el moviment d'un fluid.

on, per tant:

$$v_x = \frac{dx}{dt}(x, y, z, t), \quad v_y = \frac{dy}{dt}(x, y, z, t), \quad v_z = \frac{dz}{dt}(x, y, z, t) \cdot \vec{k} \quad (3.3)$$

Així, per definició s'estableix que la velocitat d'una partícula representa la variació amb el temps del vector de posició d'aquella partícula. La velocitat també és una funció vectorial de variable real. Per tant, es pot determinar el mòdul de la velocitat com:

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3.4)$$

En cada instant, l'envolupant del camp de velocitats es defineix com *camp de línies de corrent*⁹. Cal observar que aquesta definició introdueix una característica particular, que és que dues línies de corrent mai no es poden tallar, ja que això implicaria que la partícula en el punt de tall tindria dues velocitats diferents en un mateix instant.

Sovint, per un abús del llenguatge, es parla de la velocitat quantificant-ne el mòdul, mentre que se n'obvia d'esmentar la direcció i sentit. Cal, però, no oblidar el caràcter vectorial d'aquesta variable.

⁹ Línies que a cada punt i a cada instant són tangents al vector velocitat. Cal observar la diferència d'aquest concepte amb el de trajectòria. Ambdós conceptes només coincideixen quan no hi ha cap dependència amb el temps (règim permanent o estacionari).

Lògicament, la possible dependència amb el temps de la velocitat introdueix també el concepte de *camp d'acceleració*, que pot ser producte d'un canvi en el mòdul de la velocitat o en la seva direcció, o en tots dos conceptes alhora.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_x(x, y, z, t)\vec{i} + a_y(x, y, z, t)\vec{j} + a_z(x, y, z, t)\vec{k} \quad (3.5)$$

3.1.2 Classificació del moviment

Geomètricament, un fluid en moviment pot requerir una, dues o les tres coordenades de l'espai per ser descrit. Es parla, doncs, de flux *unidimensional* (1D), *bidimensional* (2D) o *tridimensional* (3D), respectivament.

En els fluxos unidimensionals només interessa la coordenada en la direcció del moviment, i és negligible qualsevol variació segons les altres dues. En els fluxos bidimensionals es considera també la coordenada en la direcció del moviment i interessa també una coordenada transversal a aquesta. En els tridimensionals, interessen les tres.

Quan es considera la dependència temporal es parla de *règim variable*, quan qualsevol paràmetre (escalar o vectorial) varia amb el temps, i de *règim permanent* o *estacionari*, quan tots són constants amb el temps. Qualsevol flux en règim permanent pot ser *variat*, quan no varia amb el temps però sí depèn de la posició de la partícula, i *uniforme*, quan és constant tant en el temps com en l'espai.

3.1.3 Volum de control

És un volum fix a l'espai de forma i magnitud constants. El seu contorn se sol anomenar *superfície de control*. Pot ser de qualsevol mida (macroscòpic o infinitesimal) i forma que sigui útil.

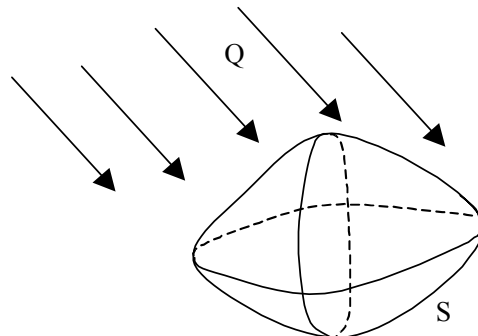


Figura 3.2 Balanç de cabal a través d'un volum de control.

3.1.4 Tub de flux. Definició de cabal

Un *tub de flux*, també anomenat *tub de corrent*, és la superfície definida per les línies de corrent (l_1, l_2, \dots) que es recolzen sobre una corba tancada c_1 , com s'esquematitza a la figura 3.3. Aquest tub permet delimitar una regió finita de l'espai si es defineix una altra corba tancada qualsevol, c_2 o c_3 .

Se sol parlar de *vena fluida* quan es refereix al volum dins del tub de corrent. Aquesta regió és útil per establir condicions d'equilibri de forces o plantejar qualsevol balanç, tal com es veurà més endavant. Si la corba c_1 no és tancada, es defineix la *superfície de corrent* com la superfície generada per c_1 i les línies de corrent que la intercepten.

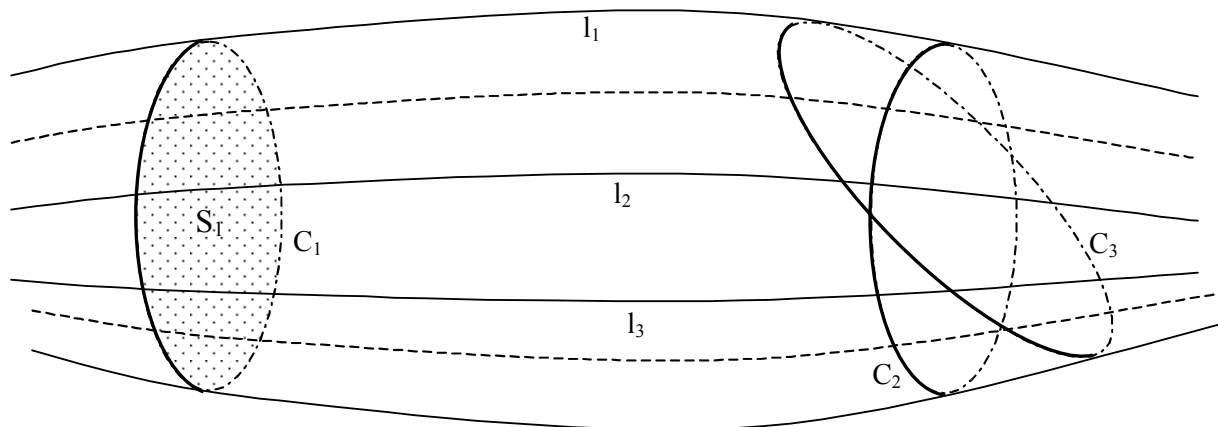


Figura 3.3 Definició d'un tub de flux o tub de corrent.

El tub de flux es caracteritza pel fet que la seva superfície lateral està formada per línies de corrent, de manera que el flux transversal a ella és nul. A partir d'aquí s'estableix el concepte de *cabal* com el flux de camp de velocitat a través d'una superfície S , delimitada per una corba tancada c_1 :

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.6)$$

on Q és el cabal, \vec{v} el camp de velocitat i $d\vec{S}$ és un vector de magnitud dS i direcció perpendicular a la superfície S .

Igualment, també es pot definir el *cabal de massa* com el flux de massa a través de la superfície S :

$$Q = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.7)$$

on ρ és la densitat del fluid en cada punt i cada instant.

També es pot establir un balanç del volum (o massa) de fluid que travessa una determinada superfície tancada (sigui tub de flux o no) per unitat de temps. Aquest concepte dimensionalment és un cabal, encara que estrictament parlant es tractaria únicament d'una variació del volum al seu interior, per unitat de temps:

$$\frac{\Delta Vol}{\Delta t} = Q_{net} = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.8)$$

Si la superfície A és el contorn del volum de control definit per un tub de flux i les dues superfícies delimitades per les corbes c_1 i c_2 de la figura 3.3, es pot escriure:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Vol}{\Delta t} = Q_{net} &= \int_A \vec{v} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \\ Q_{net} &= \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (3.9)$$

De manera anàloga, es pot plantejar el balanç de massa a l'interior del volum, afegint-hi la densitat.

És interessant adonar-se que aquest balanç és nul quan el règim és permanent, però no té per què ser-ho en règim variable i fluids compressibles, ja que a cada instant la superfície lateral del tub de flux va canviant i, per tant, també el volum que tanca.

3.2 Equació de continuïtat aplicada a un tub de flux

Per obtenir l'equació de continuïtat, cal imposar el principi de conservació de la massa. Aquest estableix que la massa que entra en el tub de flux és igual a la que surt més la que s'hi acumula, per unitat de temps.

Sigui un tub de flux (figura 3.4), pel qual es defineix un eix, amb els vectors velocitat a cada punt gairebé paral·lels a aquest eix. A qualsevol punt d'una secció transversal i a cada instant de temps, hi ha un vector velocitat diferent de manera que, per unitat de temps, cada element de superfície $d\vec{S}$ ha estat travessat per un determinat volum fluid $dVol$. Així, a partir de la definició de cabal (3.8) el volum total de fluid que travessa la secció 11' val:

$$dVol = dt \cdot \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.10)$$

Es pot definir la velocitat mitjana a la secció 11':

$$V_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.11)$$

de manera que:

$$Q_1 = V_1 \cdot S_1 \quad (3.12)$$

representa el cabal que travessa la secció 11', entrant al volum definit per les seccions 11' i 22'.

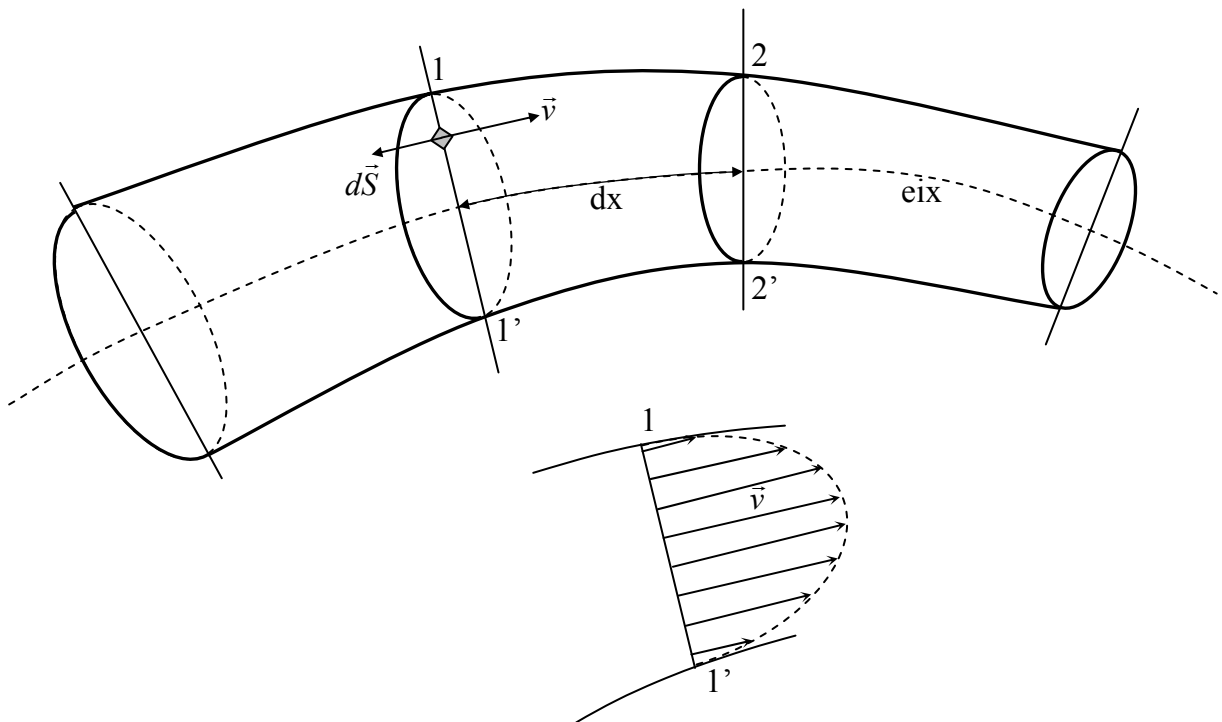


Figura 3.4 Tub de flux per dur a terme el balanç de massa.

Es pot arribar a una expressió equivalent si s'analitza el cabal que surt del volum esmentat a través de la secció 22', de manera que es pot establir l'equació de continuïtat fent el balanç de massa en aquest volum.

Si S és el valor mitjà de l'àrea dins de l'element de volum de longitud dx , o sigui, és el valor mitjà de S_1 i S_2 , en un determinat instant de temps t , la massa al seu interior és:

$$M(t) = \rho \cdot S \cdot dx \quad (3.13)$$

En general, el moviment és variable en el temps i, per tant, la massa al cap de dt valdrà:

$$M(t+dt) = \rho \cdot S \cdot dx + \frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \Rightarrow M(t+dt) = M(t) + \frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \quad (3.14)$$

on el segon sumand és la variació de la quantitat en què ha canviat la massa en un instant dt .

D'altra banda, a través de la secció 11', en un instant dt hi entra una massa:

$$M_{entra11'} = \rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1 \cdot dt \quad (3.15)$$

mentre que a través de la secció 22', al mateix instant dt en surt una massa:

$$M_{sur22'} = \rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2 \cdot dt \quad (3.16)$$

Per tant, entre 11' i 22' la massa ha variat:

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1 \cdot dt - \rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2 \cdot dt = -\frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} \cdot dx \cdot dt \quad (3.17)$$

La igualtat (3.17), es fonamenta en el fet que S_1 i S_2 estan separats una distància infinitesimal dx , de manera que si es fa el límit del primer terme de la igualtat quan la distància dx tendeix a zero, resulta la derivada del segon terme de la igualtat.

En aquest punt, cal adonar-se que aquest segon terme de (3.17) expressa el mateix concepte (quantitat de massa en que ha variat el volum definit entre 11' i 22') que el segon sumand de l'expressió (3.14) i, per tant, han de ser idèntics:

$$\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

que és l'equació de continuïtat aplicada a un tub de flux.

3.2.1 Casos particulars

En el cas que el règim sigui permanent, és a dir, que no hi ha dependència amb el temps, l'equació de continuïtat es redueix a:

$$\frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \rho \cdot V \cdot S = ctt \quad (3.19)$$

és a dir, la quantitat de massa fluida que travessa una secció per unitat de temps és constant.

Si el fluid és incompressible (densitat constant) però el règim és variable amb el temps, es pot simplificar de la forma següent:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(V \cdot S)}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

Si, en aquest cas, a més, es pogués considerar que el tub de flux considerat és indeformable (p. ex. canonada rígida en un flux a pressió), aleshores la superfície S no variaria amb el temps i resultaria:

$$\frac{\partial(V \cdot S)}{\partial x} = 0 \Rightarrow Q = ctt \text{ al llarg de tot el conducte} \quad (3.21)$$

És a dir, el cabal es mantindria constant a tota secció del tub i variaria de manera simultània amb el temps en totes elles.

Finalment, si el fluid és incompressible i, a més, el règim és permanent, resulta que el cabal és constant en el temps i al llarg de tot el tub.

3.3 Equació del flux de la quantitat de moviment o equació de momentum

Sigui la porció de fluid definida en el tub de flux de la figura 3.5, entre les seccions 1 i 2 en un instant determinat. Aquest element, al cap d'un dt , s'ha desplaçat a 1'2', essent la distància que ha recorregut:

$$\begin{aligned} \text{Distància de 1 a 1'}: v_1 \cdot dt \\ \text{Distància de 2 a 2'}: v_2 \cdot dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

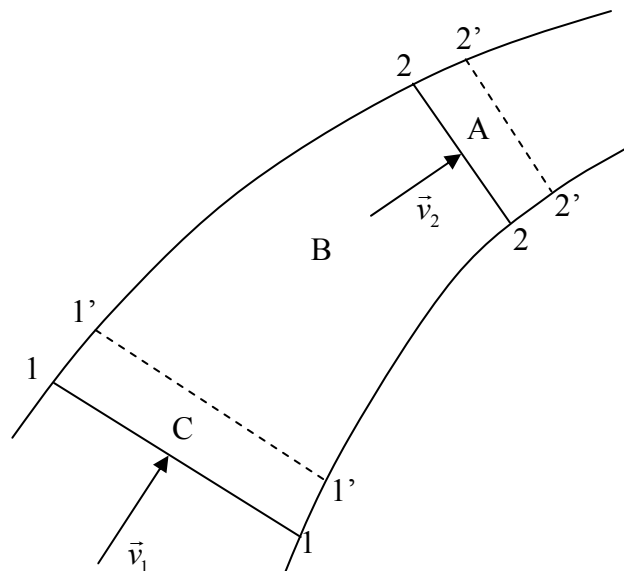


Figura 3.5 Tub de corrent per estudiar el flux de la quantitat de moviment.

La segona llei de Newton permet afirmar que la força total que s'ha exercit sobre la porció de fluid considerada perquè es desplaçi tal com s'ha descrit és igual a la variació de la quantitat de moviment en aquella porció de fluid en el dt considerat.

Acceptant la hipòtesi que a tota la secció es pot assumir que la velocitat es distribueix de manera aproximadament uniforme, la variació de quantitat de moviment es pot determinar a partir de:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (3.23)$$

– Quantitat de moviment guanyat amb l'aparició del volum A:

$$m_2 \cdot \vec{v}_2 = \rho_2 \cdot (S_2 \cdot v_2 \cdot dt) \cdot \vec{v}_2 \quad (3.24)$$

– Quantitat de moviment perdut amb la desaparició del volum C:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 = -\rho_1 \cdot (S_1 \cdot v_1 \cdot dt) \cdot \vec{v}_1 \quad (3.25)$$

– Variació, en dt , de la quantitat de moviment en el volum B:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho_1 \cdot dVol \cdot \vec{v} \cdot dt \quad (3.26)$$

De manera que la resultant de les forces exercides sobre el fluid es pot calcular substituint convenientment a (3.23):

$$\sum \vec{F} = \rho_2 \cdot (S_2 \cdot v_2) \cdot \vec{v}_2 - \rho_1 \cdot (S_1 \cdot v_1) \cdot \vec{v}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho_1 \cdot \vec{v} \cdot dVol \quad (3.27)$$

En cas que el règim sigui permanent i el fluid incompressible, el terme (3.26) és nul i la densitat no varia, i resulta:

$$\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot Q \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \Delta \vec{v} \quad (3.28)$$

L'equació de momentum és vectorial i engloba totes les forces que actuen sobre el volum fluid com també les seves condicions externes, sense tenir en compte els canvis interns d'energia.

Si no es pot acceptar la hipòtesi que la velocitat es manté constant en tota la secció, es pot justificar que l'expressió és igualment vàlida corregint l'increment de velocitat amb un paràmetre β , que s'anomena *coeficient de Boussinesq*:

$$\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \Delta (\beta \vec{v}_m) \quad (3.29)$$

Per determinar el coeficient de Boussinesq cal conèixer la distribució de velocitats en la secció. Es pot justificar (Sotelo, 1995), que β es pot determinar fent:

$$\beta = \frac{\int_S v^2 \cdot dS}{v_m^2 \cdot S} \quad (3.30)$$

D'aquesta definició es desprèn que, si la distribució de velocitats és uniforme, el coeficient β val 1. Per contra, en seccions on localment hi hagi problemes de separació del flux respecte del contorn o d'altra índole que provoquin distorsions en el perfil de velocitats, es pot arribar a assolir valors de β pròxims a 1.33.

Exercici

Determineu l'acció sobre el colze d'una canonada, situada sobre un pla horitzontal, pel qual circula un cabal Q a pressió.

La força \vec{F} l'exerceix el conducte sobre el flux i l'obliga a modificar la direcció del moviment.

Com que el conducte es troba sobre un pla horitzontal, no cal considerar l'acció del pes, ja que va en direcció perpendicular a aquest pla. Per tant, imposant l'equació de momentum (3.28) queda:

$$\vec{F} + \overline{P_1 \cdot S_1} + \overline{P_2 \cdot S_2} = \rho \cdot Q \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (3.31)$$

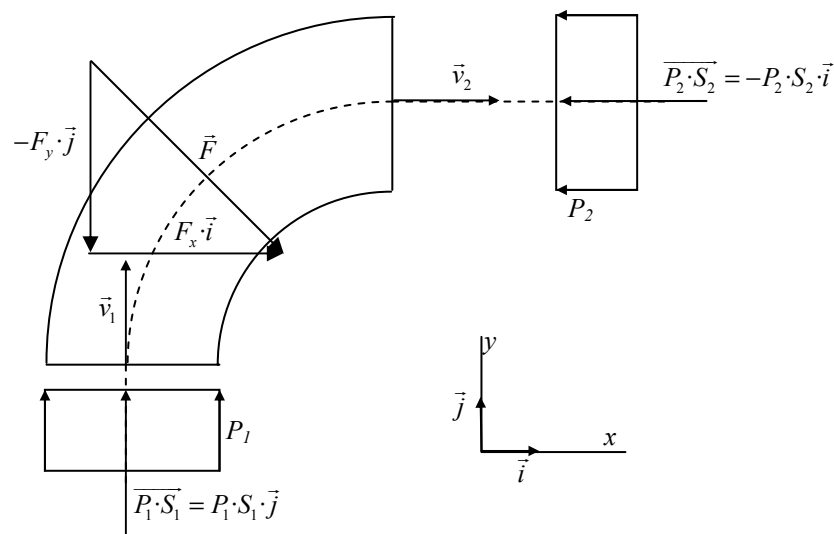


Figura 3.6 Volum de control per a l'anàlisi del colze de 90°.

Equació vectorial que es pot descompondre segons la direcció que es consideri. Tenint en compte que el règim és permanent i que el conducte manté el diàmetre constant ($S_1=S_2$), descomponent-la segons els eixos x i y , queda:

$$\text{Direcció } x: F_x - P_2 \cdot S = \rho \cdot Q \cdot (v - 0) \Rightarrow F_x = P_2 \cdot S + \rho \cdot Q \cdot v \quad (3.32)$$

$$\text{Direcció } y: -F_y + P_1 \cdot S = \rho \cdot Q \cdot (0 - v) \Rightarrow F_y = P_1 \cdot S + \rho \cdot Q \cdot v \quad (3.33)$$

Sense perdre generalitat, es pot imposar com a darrera hipòtesi que no hi ha pèrdues d'energia ni localitzades ni repartides entre les seccions 1 i 2 (apartat 3.4). D'aquesta manera, es pot suposar que $P_1=P_2$. De manera que $F_x=F_y$ i, per tant, la direcció de \vec{F} forma 45° amb l'horitzontal, el sentit és cap a avall i el mòdul:

$$|F| = \sqrt{2} \cdot P \cdot S + \sqrt{2} \cdot \rho \cdot Q \cdot v \quad (3.34)$$

És interessant observar que, en el cas de la direcció x , $\overline{P_2 \cdot S_2}$ i \vec{v}_2 tenen sentits oposats i en canvi, apareixen en l'equació (3.32), corresponent a aquesta direcció, amb el mateix signe. Això no és una incongruència intuïtivament es pot arribar a justificar:

- Si augmenta la pressió P , la força \vec{F} que el colze exerceix sobre el fluid també augmenta, en totes les seves components x i y .
- Si augmenta la velocitat del flux, la resposta del colze ha de ser augmentar les dues components de la força \vec{F} . Dit d'una altra manera, si la velocitat és més gran cal fer més força per subjectar el colze (força d'igual mòdul i però direcció en sentit contrari a \vec{F}).

Per analitzar també l'ordre de magnitud del qual s'està parlant es poden posar valors numèrics a l'exercici. Per exemple, per a una pressió $P=98100 \text{ Pa}^{10}$, amb un diàmetre de 200 mm i una velocitat mitjana del flux de 3 m/s :

$$\sqrt{2} \cdot P \cdot S = \sqrt{2} \cdot 98100 \cdot \pi \cdot \frac{0.2^2}{4} = 4358.5 \text{ N} \quad (3.35)$$

$$\sqrt{2} \cdot \rho \cdot Q \cdot v = \sqrt{2} \cdot 1000 \cdot \pi \cdot \frac{0.2^2}{4} \cdot 3 = 399.9 \text{ N} \quad (3.36)$$

Es pot observar que la component corresponent a la pressió en el conducte és d'un ordre de magnitud més gran que la corresponent a l'aportació de la velocitat del flux. De manera que la força F val:

$$|F| = \sqrt{2} \cdot P \cdot S + \sqrt{2} \cdot \rho \cdot Q \cdot v = 4758.3 \text{ N} \quad (3.37)$$

Aquesta és la força que el contorn exerceix sobre el volum de control. De manera que l'acció que el flux exerceix sobre el colze (que cal tenir en compte per protegir-lo) és la mateixa en mòdul i direcció, però en sentit contrari.

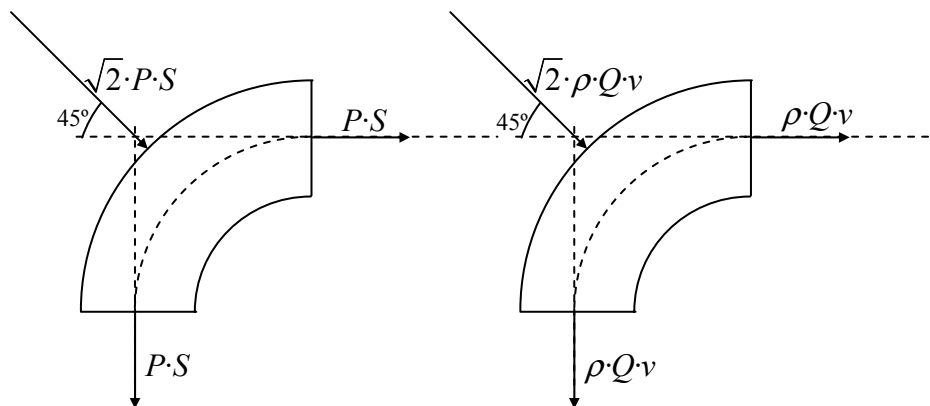


Figura 3.7 Descomposició de les forces sobre el volum de control que formen \vec{F} .

3.4 Equació del balanç d'energia. Trinomi de Bernoulli

Sigui el tub de flux de la figura 3.8, de secció i longitud infinitesimals (dS i dx), situat a una altura h sobre un determinat pla de referència. A continuació s'analitza el flux de la quantitat de moviment segons la direcció de l'eix del tub, en què el sentit del moviment se suposa positiu (p. ex. d'esquerra a dreta de la figura).

¹⁰ Equival, aproximadament, a la pressió que exerciria una columna d'aigua de 10 m.

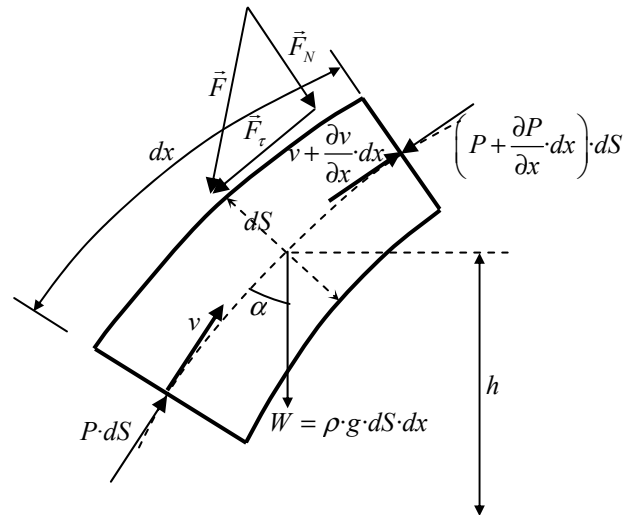


Figura 3.8 Accions sobre el tub de flux.

- Accions sobre el fluid, en la direcció de l'eix:

$$\text{Component del pes: } -\rho \cdot g \cdot dS \cdot dx \cdot \cos \alpha = -\rho \cdot g \cdot dS \cdot dh \quad (3.38)$$

$$\text{Pressió de la resta del fluid: } P \cdot dS - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dS = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dS \quad (3.39)$$

$$\text{Acció del contorn sobre el fluid: } \vec{F}_\tau = -\bar{\tau} \cdot dp \cdot dx \quad (3.40)$$

on $\bar{\tau}$ correspon al valor de la tensió tangencial mitjana sobre el contorn, dp és el perímetre mitjà del tub de flux i, per tant, $dp \cdot dx$ l'àrea del contorn lateral del tub de flux. Cal observar que la component en la direcció normal al contorn (\vec{F}_N) no es considera perquè actua en la direcció perpendicular a la de l'eix.

- Variació de la quantitat de moviment, en la direcció de l'eix, acceptant que la distribució de velocitats en qualsevol secció del tub del flux és uniforme¹¹:

$$(\rho \cdot Q \cdot \Delta v)_{eix} = \rho \cdot Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx = \rho \cdot v \cdot dS \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad (3.41)$$

Considerant règim permanent, que el fluid és incompressible i que el moviment s'estableix pràcticament paral·lel a l'eix (això permet acceptar que la distribució de pressions és hidrostàtica), es poden igualar les projeccions de les forces i de la variació de la quantitat de moviment:

$$-\rho \cdot g \cdot dS \cdot dh - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dS - \bar{\tau} \cdot dp \cdot dx = \rho \cdot v \cdot dS \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad (3.42)$$

Dividint els dos membres de la igualtat per $dS \cdot dx$:

$$\gamma \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\bar{\tau} \cdot \frac{dp}{dS} \quad (3.43)$$

¹¹ És a dir que la velocitat, en cada secció transversal del tub de flux es manté aproximadament constant en ella, tot i que sí que pot variar de secció a secció.

Fins ara s'ha considerat sempre que el fluid és incompressible ($\rho = \text{cte}$), per tant:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{\bar{\tau} dp}{\gamma dS} \quad (3.44)$$

La suma dels tres termes del primer membre es coneix amb el nom de *trinomi de Bernoulli*, en honor al matemàtic suís Daniel Bernoulli (1700–1782), el qual a l'esborrany del seu llibre *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum* (1733) i a la seva posterior edició definitiva (1738) va presentar els principals conceptes plantejats. De tota manera, a tall d'anècdota, cal dir que Bernoulli realment no planteja el trinomi com a tal. No va ser fins uns pocs anys més tard que, gairebé simultàniament, Euler i Lagrange l'escriurien com es coneix avui en dia:

$$h + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = B \quad (3.45)$$

Cal notar que els tres sumands tenen unitats de longitud i representen, respectivament:

- $h = \frac{m \cdot g \cdot h}{m \cdot g}$ l'energia potencial de l'element fluid per unitat de pes.
- $\frac{P}{\gamma} = \frac{P \cdot S \cdot dx}{\gamma \cdot S \cdot dx}$ l'energia de pressió per unitat de pes.
- $\frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{m \cdot g}$ l'energia cinètica de la porció de fluid per unitat de pes.

De manera que la suma (3.45) de tots tres termes representa l'energia mecànica total de l'element fluid per unitat de pes i té dimensions de longitud. La suma dels termes de cota i pressió defineixen el que es coneix com a *energia piezomètrica* i, en la seva representació gràfica, la *línia piezomètrica*, mentre que la suma dels tres termes defineix l'energia mecànica total i, gràficament, la *línia d'energia*.

L'equació (3.44) estableix com varia el trinomi al llarg de l'eix. Definint el quocient entre la secció transversal i el perímetre com una nova variable coneguda com a *radi hidràulic*:

$$\frac{S}{p} = R_h \quad (3.46)$$

Es pot escriure que:

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\bar{\tau}}{\gamma R_h} \quad (3.47)$$

És interessant observar que el segon membre de la igualtat representa l'energia mecànica total que es dissipa (perquè duu el signe negatiu) per unitat de pes (segons s'ha justificat per B), i també per unitat de longitud (en ser dividit per dx). Veiem que això coincideix amb el concepte de *pendent motriu* (I) que ja s'ha plantejat quan s'ha estudiat el problema de Poiseuille¹². Si bé el concepte esmentat es va introduir per al cas dels fluids newtonians, es pot observar que ara no s'ha fet cap incís sobre les característiques reològiques del fluid i, per tant, l'expressió (3.47) és aplicable en qualsevol cas. Per tant, per mantenir la coherència amb la definició establerta de *pendent motriu* es pot escriure igualment que:

¹² Fluid newtonià a pressió dins d'una canonada horitzontal, movent-se sota un gradient de pressió constant.

$$\frac{dB}{dx} = -I = -\frac{\bar{\tau}}{\gamma R_h} \quad (3.48)$$

En general, el balanç d'energia (trinomi de Bernoulli) es planteja entre dues seccions separades una distància Δx . La igualtat (3.48) permet següent plantejament:

$$\Delta B = B_2 - B_1 = -I \cdot \Delta x \Rightarrow B_1 - B_2 = I \cdot \Delta x \quad (3.49)$$

on la secció 2 es troba aigües avall de la 1. Aquesta expressió planteja el balanç d'energia segons el qual l'energia per unitat de pes a la secció 1 (amunt) menys l'energia per unitat de pes a la secció 2 (avall) és igual a l'energia per unitat de pes que es dissipa entre ambdues.

3.4.1 Cas particular. Distribució no uniforme de velocitats a la secció

L'equació del balanç d'energia entre dues seccions que permet plantejar el trinomi de Bernoulli és escalar i té en compte els canvis interns d'energia entre les dues seccions, però no les forces totals ni els condicionaments exteriors.

Una de les hipòtesis bàsiques per a l'obtenció del trinomi de Bernoulli ha estat plantejar que la velocitat en cada secció es distribueix de manera pràcticament uniforme. En alguns casos, però, aquesta hipòtesi no es pot acceptar i la distribució de velocitats dista molt de ser uniforme. En aquests casos, l'energia cinètica per unitat de pes també s'allunya del valor $v^2/2g$ i cal introduir-hi una correcció a partir del que es coneix com a *coeficient de Coriolis*:

$$B = h + \frac{P}{\gamma} + \alpha \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (3.50)$$

Si la velocitat mitjana de tot el pes de fluid a través d'una secció determinada val v_m , la seva energia cinètica per unitat de temps val:

$$\alpha \cdot \frac{v_m^2}{2g} \cdot \gamma \cdot v_m \cdot S \quad (3.51)$$

D'altra banda, l'energia cinètica del pes de fluid que travessa un element diferencia dS per unitat de temps és:

$$\frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \cdot v \cdot dS \quad (3.52)$$

De manera que a tota la secció cal fer la integral de superfície de (3.52):

$$\iint_s \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \cdot v \cdot dS \quad (3.53)$$

Les expressions (3.51) i (3.53) conceptualment expressen el mateix; per tant:

$$\alpha \cdot \frac{v_m^2}{2g} \cdot \gamma \cdot v_m \cdot S = \iint_s \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \cdot v \cdot dS \quad (3.54)$$

De manera que el *coeficient de Coriolis* (α) val:

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 \cdot S} \iint_S v^3 \cdot dS \quad (3.55)$$

Del propi plantejament es desprèn que, si la distribució de velocitats en la secció és uniforme, el coeficient de Coriolis val 1. En cas contrari (p. ex. en seccions molt irregulars en rius naturals), s'han arribat a mesurar coeficients al voltant de 2.

3.4.2 Potència del flux a través d'una secció

Qualsevol fluid en moviment, pel fet de moure's, té una determinada potència (W) que s'estima fent:

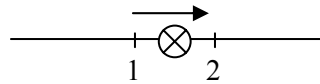
$$W = B \cdot \gamma \cdot Q \quad (3.56)$$

Aquest concepte té interès sobretot quan s'estudien màquines hidràuliques que poden subministrar potència al flux (bombes hidràuliques) o que n'hi poden treure per aprofitar-la (turbines).

Les bombes hidràuliques requereixen una potència de funcionament (W_{bomba}) més gran que la que finalment subministren al flux (W). Les turbines, en canvi, generen una potència ($W_{turbina}$) menor que la que reben del fluid en moviment (W). Aquesta diferència, en qualsevol cas, és deguda als fenòmens d'escalfament per fregament dels elements mòbils d'aquestes màquines (p. ex. eix, àleps, rodet, etc.). Així, s'introdueix el concepte de rendiment (η) de la màquina:

$$\text{Bomba hidràulica: } \Delta B_{12} \cdot \gamma \cdot Q = W_{bomba} \cdot \eta \quad (3.57)$$

$$\text{Turbina: } \Delta B_{12} \cdot \gamma \cdot Q \cdot \eta = W_{turbina} \quad (3.58)$$



Bomba: $B_1 < B_2$

Turbina: $B_1 > B_2$

Figura 3.9. Esquema d'una bomba o una turbina en un sistema a pressió.

3.4.3 Interpretació del trinomi de Bernoulli en una canonada amb flux a pressió

Com ja s'ha comentat, una de les particularitats que té el trinomi de Bernoulli és que presenta unitats de longitud. Això el fa molt senzill d'estudiar gràficament, ja que permet una interpretació, de tipus energètic, dels moviments dels fluids força pràctica. En parlar de distàncies, cal fixar prèviament un sistema de referència, que consisteix, en general, en un pla horitzontal que serveix com a origen.

En un flux a pressió, el balanç (3.49) es planteja en termes mitjans referits a l'eix de la conducció. Així, el terme z es refereix a l'alçada de l'eix a la secció en qüestió respecte del pla horitzontal, $P/\gamma a$ la càrrega de pressió que el flux exerceix sobre l'eix i $v^2/2g$ a l'altura de velocitat corresponent a la velocitat mitjana del flux en la secció.

Partint de l'equació esmentada (3.49), el pendent motriu es pot analitzar geomètricament:

$$I = -\frac{dB}{dx} \Rightarrow I = -\frac{dB}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \tan \beta \cdot \cos \alpha \quad (3.59)$$

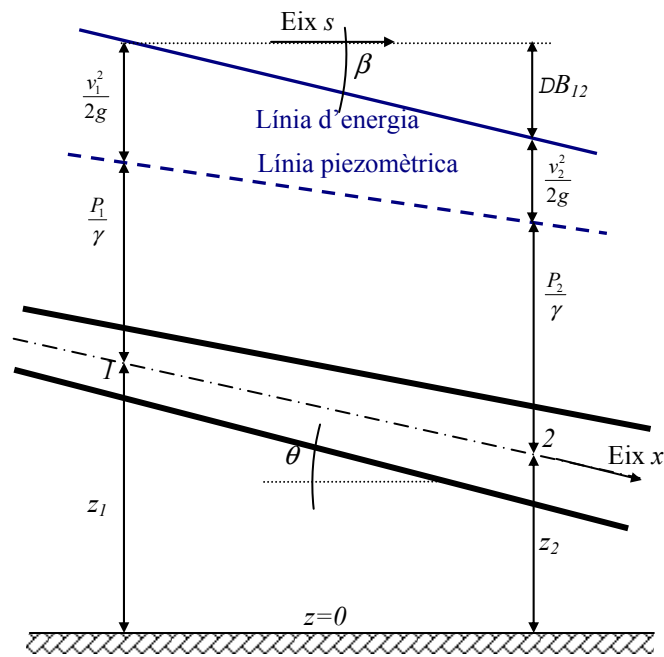


Figura 3.10 Trinomi de Bernoulli en un sistema a pressió.

L'angle β que forma la línia d'energia amb l'horitzontal en general és constant quan l'angle θ que forma l'eix de la canonada amb l'horitzontal ho és i es pot assegurar que el pendent motriu no varia entre 1 i 2. Al capítol on s'estudia el flux a pressió s'analitzen les expressions empíriques que serveixen per obtenir el pendent motriu i en quines condicions es pot admetre que es manté constant entre dues seccions.

En el cas de la figura 3.10, si el diàmetre de la conducció és constant ($\phi_1 = \phi_2$) i el règim és permanent ($Q = \text{cte}$), l'energia de velocitat és constant entre 1 i 2 i, per tant, la línia piezomètrica i d'energia són *paral·leles*. Aleshores, les pèrdues d'energia entre 1 i 2 (ΔB_{12}) són degudes a diferències en les pressions i cotes:

$$\frac{d}{dx} \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -I \quad (3.60)$$

Imposant que el diàmetre i el cabal es mantenen constants entre 1 i 2:

$$\frac{d}{dx} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) = -I \quad (3.61)$$

Tenint en compte que la variació de la cota z respecte de l'eix x es pot relacionar amb l'angle de l'eix amb l'horitzontal (θ):

$$\frac{dP}{dx} = (-I + \sin \theta) \cdot \gamma \quad (3.62)$$

És a dir, en aquest cas, el problema fonamental consisteix a determinar la variació de la pressió al llarg de la canonada ($P(x)$), i per obtenir-ho cal conèixer el pendent motriu I .

3.4.4 Interpretació del trinomi de Bernoulli en un flux en làmina lliure

La diferència principal amb el cas d'un sistema a pressió és l'existència d'una superfície lliure en contacte amb l'atmosfera. Això hi introdueix alguns matisos alhora d'estudiar el trinomi de Bernoulli.

A més, hi ha diferències en l'anàlisi segons l'angle del contorn amb l'horitzontal.

- 1) angle $\theta < 10^\circ$. En aquest cas, la profunditat d'aigua mesurada segons la vertical coincideix amb la profunditat mesurada segons la perpendicular al contorn ($y \approx d$):
 - z : l'energia de posició es mesura des d'un pla horitzontal de referència fins al punt més baix de la secció transversal. El contorn de la secció rep el nom de *solera*.
 - P/γ : l'energia de pressió coincideix amb la profunditat d'aigua respecte del punt més baix de la solera, sempre que el pendent del canal ($\tan\theta$) sigui petit i la distribució de pressions es pugui considerar hidrostàtica i no hi hagi components de l'acceleració del flux normals a la direcció del moviment (això, en general, es pot acceptar si les línies de corrent tenen una curvatura negligible i són pràcticament paral·leles). Aquesta profunditat rep el nom de *calat*. D'aquesta manera, s'entén que la superfície lliure de l'aigua coincideix amb la línia piezomètrica del flux.
 - $v^2/2g$: l'energia de velocitat es determina a partir de la velocitat mitjana del flux a la secció considerada. Geomètricament, es mesura des de la superfície lliure de l'aigua fins a la línia d'energia.

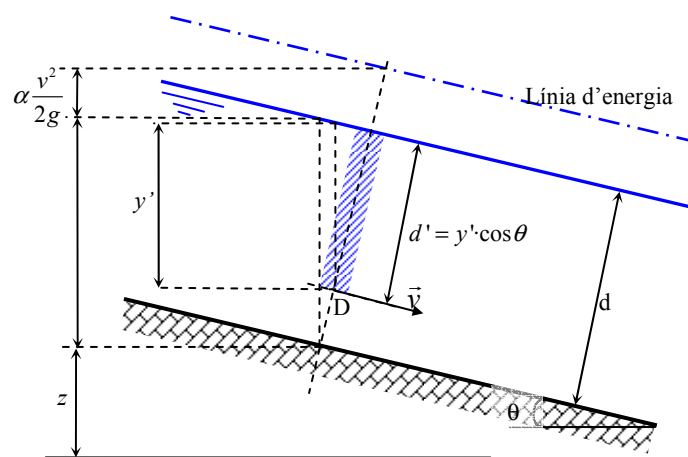


Figura 3.11 Trinomi de Bernoulli en un flux en làmina lliure.

- 2) angle $\theta > 10^\circ$. Ara cal introduir una correcció al terme d'energia de pressió, ja que la profunditat mesurada segons la vertical no coincideix amb la profunditat mesurada segons la perpendicular al contorn ($y \neq d$).

Si es posa un piezòmetre en direcció perpendicular a la solera en qualsevol punt D, l'aigua hi puja fins a la superfície lliure. Si el mateix piezòmetre es posa en la direcció vertical al punt D, la pressió ha de ser la mateixa que abans; per tant:

$$\frac{P}{\gamma} = d \cdot \cos \theta \quad (3.63)$$

on d és la profunditat mesurada en la direcció perpendicular a la solera:

$$d = y \cdot \cos \theta \quad (3.64)$$

de manera que:

$$\frac{P}{\gamma} = y \cdot \cos^2 \theta \quad (3.65)$$

on y és el calat mesurat en la direcció vertical. Per tant, el trinomi de Bernoulli quedaria:

$$B = h + y \cdot \cos^2 \theta + \alpha \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (3.66)$$

3.5 Moviment laminar i turbulent. Experiència de Reynolds

L'experiència de Reynolds permet distingir entre dues categories de fluxos segons la velocitat, la dimensió del moviment i les característiques viscoses del fluid.

En la figura 3.12 s'esquematitza la infraestructura necessària per realitzar l'experiència de Reynolds. Aquesta consisteix en un conducte transparent controlat en el seu extrem aigües avall per una vàlvula que permet regular el flux que surt del dipòsit de càrrega, en capçalera, ple d'aigua. En algun punt d'aquest conducte, s'hi injecta un colorant que tingui una densitat similar a la de l'aigua per evitar fenòmens de flotabilitat o enfonsament d'aquest colorant dins de l'aigua.

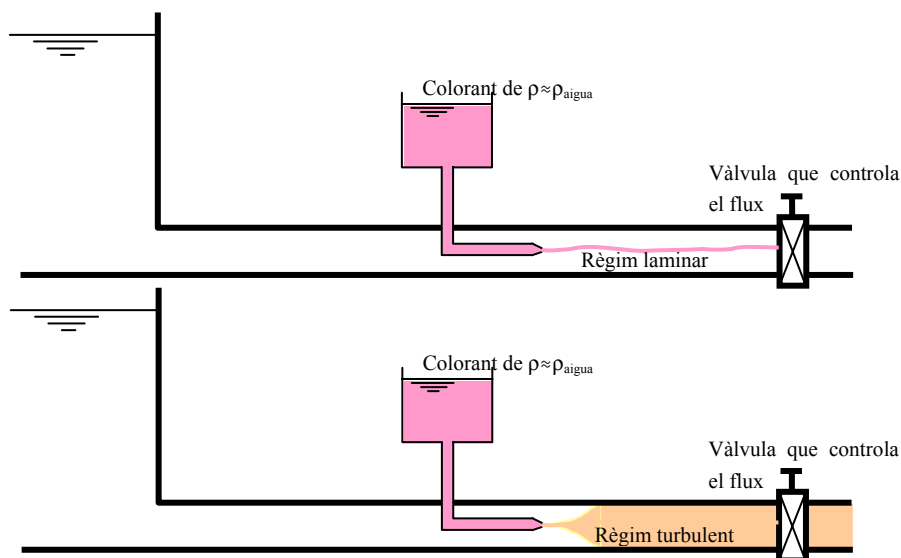


Figura 3.12. Esquema de la instal·lació per dur a terme l'experiència de Reynolds.

En obrir la vàlvula i iniciar-se el moviment, per a valors prou baixos de la velocitat el colorant que s'incorpora al conducte principal es comporta com un filament que avança dins de la canonada, sense mesclar-se amb l'aigua. Quan s'obre més la vàlvula, la velocitat del flux augmenta i el colorant es comença a mesclar dins de l'aigua. Els dos comportaments caracteritzen el *règim laminar* i el *règim turbulent* respectivament.

Reynolds va caracteritzar els experiments que va realitzar a partir de la velocitat mitjana del flux, el diàmetre de la canonada i la viscositat del fluid, i va establir el paràmetre que actualment es coneix com amb el nom de *nombre de Reynolds*:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad (3.67)$$

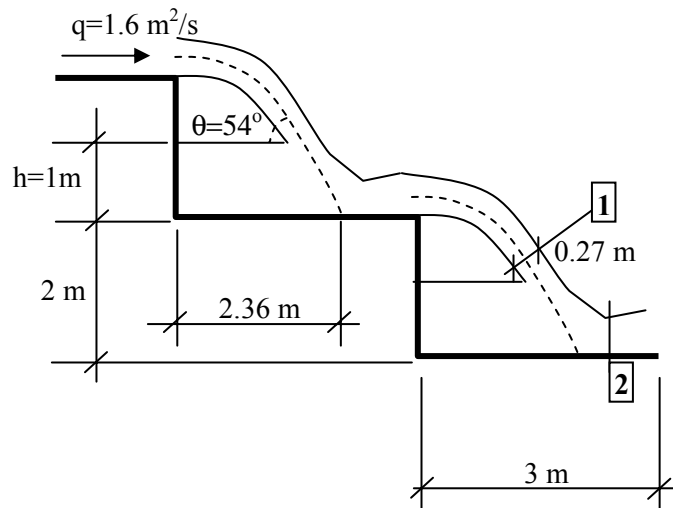
on:

- v : és la velocitat del flux. En el cas d'una canonada o un canal se sol prendre la velocitat mitjana.
- L : és una longitud que caracteritza el moviment. En el cas d'una canonada amb un flux a pressió (secció plena) es pren el diàmetre i , en el cas d'un flux en làmina lliure (en rius o canals), es pren el calat.
- ν : és la viscositat cinemàtica del fluid. En el cas de l'aigua en condicions normals de pressió i temperatura, val $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

El nombre de Reynolds caracteritza conceptualment el quocient entre les forces d'inèrcia i les forces viscoses que actuen sobre el fluid i permet distingir els règims descrits. Així, per a valors més petits de 2000 a 3000, el flux que es dona en qualsevol cas és laminar, mentre que valors més grans provoquen un règim turbulent. En canvi, en valors dins d'aquest interval el règim laminar o turbulent s'estableix depenent de l'estat de tranquil·lització del flux en el dipòsit de capçalera. És a dir, el procés de canvi de règim laminar a turbulent, o viceversa, és força inestable, i per aquest motiu no es pot donar un valor crític exacte per damunt o per sota del qual el règim tingui una categoria o altra.

3.6 Exercicis proposats

1. Raoneu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:
 - En un fluid incompressible en moviment permanent la potència del flux que travessa una secció determinada d'un conducte és igual al producte del cabal que circula per l'energia mecànica per unitat de pes, partit pel pes específic del fluid.
 - El principi de conservació de la quantitat de moviment proporciona, com a màxim, tres equacions.
 - El trinomi de Bernoulli és conseqüència de la segona llei de Newton.
 - En el trinomi de Bernoulli, hi intervé la viscositat del fluid.
 - En el trinomi de Bernoulli, no hi intervé la tensió superficial.
 - El trinomi de Bernoulli és aplicable a un fluid en repòs.
 - Si no hi ha cap bomba hidràulica en el traçat d'una canonada, la potència del flux al seu interior disminueix en la direcció i en el sentit del moviment.
 - La potència d'un flux no depèn de la pressió.
 - Un volum de control pot variar la seva forma i magnitud en el temps.
 - En un tub de flux, en moviment permanent i fluid incompressible, la suma dels termes del trinomi de Bernoulli permet conèixer l'energia mecànica per unitat de pes del flux en una determinada secció d'anàlisi, mesurada des d'un pla horitzontal de referència.
 - Les equacions de l'energia i de la quantitat de moviment es dedueixen ambdues de la 2^a llei de Newton. Per aquest motiu, en general, qualsevol de les dues pot ser aplicada en la solució d'un problema determinat.
2. Es pretén construir una font a la plaça Major d'un municipi. La font consisteix en un sortidor superior que vessa el cabal cap a una estructura formada per dos graons de 3 m de longitud de petja i 2 m d'altura de contrapetja, seguint una vella idea dels tècnics municipals. Se'n descobreix l'antic projecte del qual es destaquen, principalment, les conclusions següents:



- Per condicionaments estètics, per reduir el soroll de l'aigua en l'abocament i a fi d'evitar esquitxades excessives que podrien ser molestes als vianants, es recomana disposar d'un matalàs d'aigua, aigües amunt del punt d'incidència del doll, no inferior a 1m d'altura ($h \geq 1$ m).
- Per aconseguir aquest matalàs es requereix un cabal específic $q = 1.60 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ i en aquestes circumstàncies, una vegada assolit el règim permanent, s'observa que no hi ha pràcticament intercanvi de cabal entre el doll incident i el matalàs aigües amunt. A més, s'observa que la velocitat de sortida aigües avall del doll incident (secció 2) és aproximadament igual a la d'arribada (secció 1).
- En les condicions fixades en les dues conclusions anteriors, el doll incident presenta un angle $\theta = 54^\circ$ amb l'horitzontal; mostra un gruix d' $y_i = 0.27\text{m}$; incideix contra la petja a uns 2.36 m de la contrapetja, i exerceix una força total contra aquesta petja estimada en 782 kp/m.
- Tot l'estudi s'ha desenvolupat assegurant un bon aireig de la zona tancada entre la contrapetja, el matalàs i el doll d'aigua, i és important per a una bon comportament assegurar una ventilació adequada d'aquesta zona en el prototip.

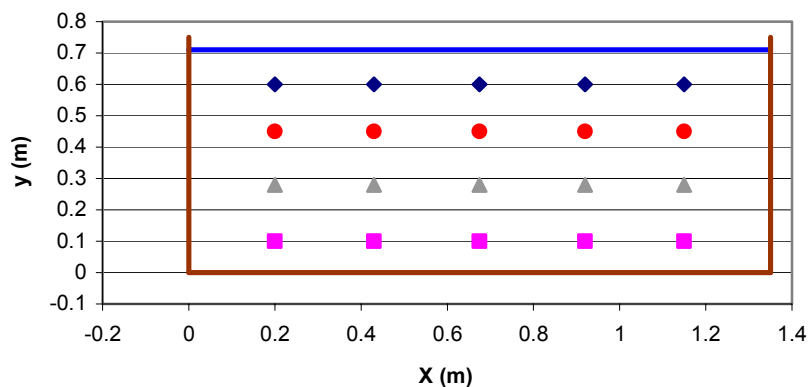
Es pot defensar la bondat d'aquest estudi a partir de la informació subministrada en aquestes conclusions?

Observació: en qualsevol cas es pot suposar que:

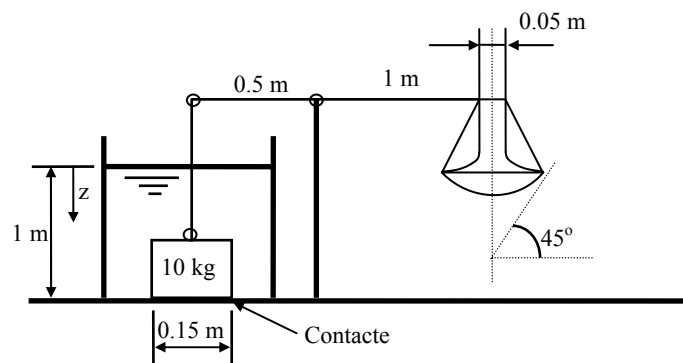
- A les seccions 1 i 2, el moviment és paral·lel.
 - A les proximitats de la paret de la contrapetja, l'aigua es troba pràcticament en repòs.
3. Per una canonada de 200 mm de diàmetre, hi circula aigua ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) a pressió. Quin tipus de règim (laminar o turbulent) s'hi estableix si hi circula un cabal de 100 l/s, 10 l/s, 1 l/s o 0.1 l/s. Raoneu, en vistes dels resultat, quin règim creieu que es dona més habitualment en el flux en canonades en l'àmbit de l'enginyeria civil.

4. A la taula següent es mostren els punts de mesurament de la velocitat (en m/s) amb molinet en un canal de secció rectangular d'ample 1.35 m. Determineu-ne la velocitat mitjana, el cabal circulant i els coeficients de Coriolis i Boussinesq.

		X						
		0	0.2	0.43	0.675	0.92	1.15	1.35
y	0.71	0	0.390	0.235	0.200	0.368	0.289	0
	0.60	0	0.390	0.243	0.209	0.368	0.289	0
	0.45	0	0.287	0.183	0.225	0.254	0.093	0
	0.28	0	0.141	0.143	0.157	0.168	0.053	0
	0.10	0	0.142	0.083	0.098	0.091	0.071	0
	0	0	0	0	0	0	0	0



5. Determineu la velocitat del doll d'aigua per iniciar l'aixecament de la pesa cúbica de 15 cm de costat en els casos:
- $\rho = \rho_{\text{aigua}}$ i el contacte és llis.
 - $\rho = \rho_{\text{aigua}}$ i el contacte és rugós.
 - $\rho = (1000 + 200 \cdot z) \text{ kg/m}^3$ i el contacte és rugós.



6. El desguàs d'una conducció es realitza a través d'un tub difusor de diàmetre linealment creixent en el sentit del moviment, amb diàmetres als seus extrems $\phi_1 = 1.5 \text{ m}$ i $\phi_2 = 2.8 \text{ m}$.

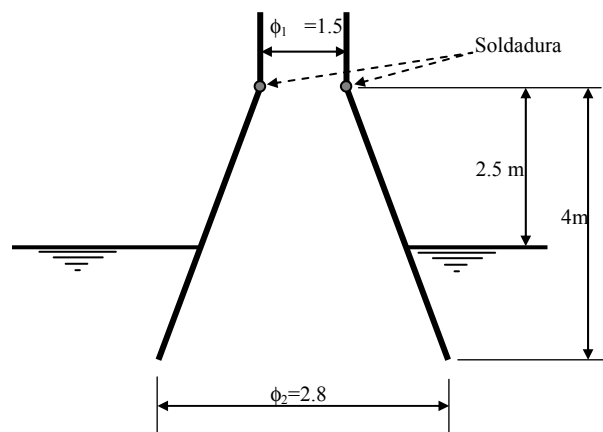
La longitud del difusor és de 4 m i el seu extrem més aigües avall es troba submergit 1.5 m . Si el cabal circulant és $12.37 \text{ m}^3/\text{s}$ i la pèrdua d'energia al difusor es pot determinar a partir de:

$$\Delta h = 0.23 \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

Calculeu la força que ha de resistir la soldadura que uneix el difusor amb la canonada. Ateses les característiques del problema no es poden negligir les forces de pes.

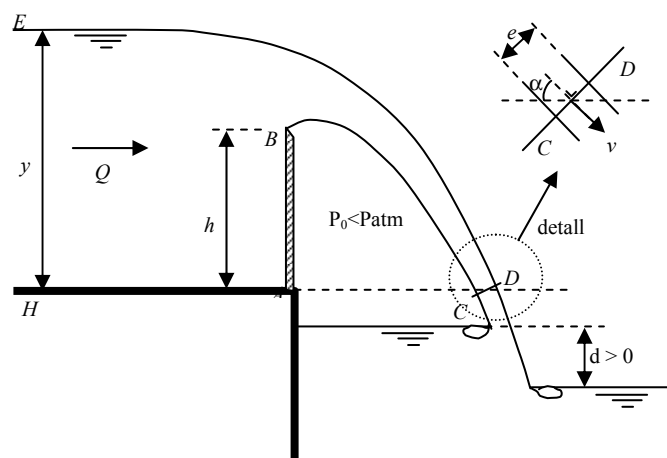
Nota: El volum d'un tronc de con circular recte de radis ϕ_1 , ϕ_2 i altura h és:

$$V = \frac{1}{12} \pi h (\phi_1^2 + \phi_1 \phi_2 + \phi_2^2)$$



7. La figura mostra un vessament d'un cabal Q sobre una paret vertical AB . A les seccions EH i CD s'admet l'existència d'una distribució uniforme de velocitats. Determineu la component horitzontal de la resultant de totes les forces exercides sobre la paret AB , segons la densitat (ρ), el pes específic (γ), el calat (y), el cabal (Q), l'angle (α) i el gruix d'aigua (e).

Es consideren negligibles els esforços tangencials sobre la solera HA . Tampoc no cal tenir en compte la resultant de les pressions exercides a la secció CD . Se suposa que la paret AB té d'ample la unitat (en la direcció normal al paper). Cal adonar-se que, com que la làmina vessant arrossega aire, l'espai tancat sota la làmina es troba a una pressió inferior a la pressió atmosfèrica.



Observació: se suggereix considerar el volum de control delimitat pel contorn $ABCDEH$.

4 Introducció al moviment en làmina lliure

4.1 Característiques principals i comparació amb el moviment a pressió

Com és ben sabut, hi ha dos grans sistemes per transportar qualsevol fluid i, en particular, l'aigua: a pressió en canonades, o en làmina lliure en canals oberts, ja siguin naturals o artificials. La diferència principal entre ambdós es troba en el fet que, en el cas del transport en canals, hi ha una superfície lliure que es troba sotmesa a la pressió atmosfèrica, mentre que en el transport a pressió el fluid omple completament el conducte i es troba sotmès a la pressió global del sistema

A la figura 4.1 i la figura 4.2 es comparen les definicions geomètriques de les variables hidràuliques que s'estableixen en un flux a pressió (esquerra) i un flux en làmina lliure (dreta). Aquestes diferències, tot i que semblen trivials, acaben fent que sigui, en general, més difícil resoldre qüestions en làmina lliure que a pressió.

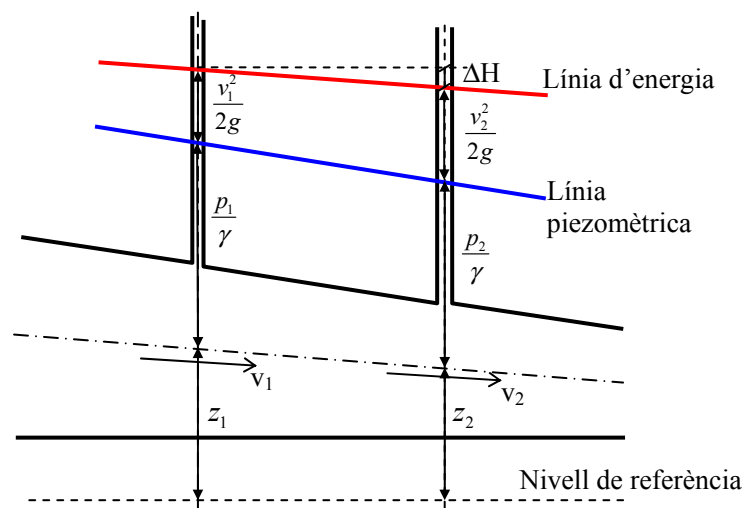


Figura 4.1 Definició de les variables hidràuliques en un flux a pressió.

Això és així, perquè es comprèn que, en el cas de flux en làmina lliure, el calat (y), el cabal (Q) i el pendent motriu (I) són interdependents entre si. És a dir, en general, la posició de la superfície lliure pot canviar amb el temps i l'espai, i això introdueix una de les dificultats principals del càlcul, que és que l'àrea i el perímetre mullats a qualsevol secció poden variar d'una secció a una altra i en el temps. Si a això s'afegeix que les seccions, en general, poden mostrar qualsevol geometria, des d'una geometria regular ben definida (com seria el cas de canals prismàtics) fins a geometries irregulars que fins i tot poden canviar en el temps (com és el cas de corrents naturals), es comprèn encara més la dificultat de l'estudi del flux en làmina lliure.

En canvi, si el flux és a pressió, la secció transversal és fixa i ve definida per la secció transversal del conducte. Això fa que en qualsevol secció l'àrea i el perímetre mullats siguin constants.

Com es veurà més endavant, la rugositat d'un canal obert és més difícil de determinar, sobretot en lleres naturals, ja que acaba depenent del calat. Sens dubte, això acaba introduint més incertesa que en fluxos a pressió (tot i la incertesa que significa la determinació de la rugositat absoluta d'una canonada).

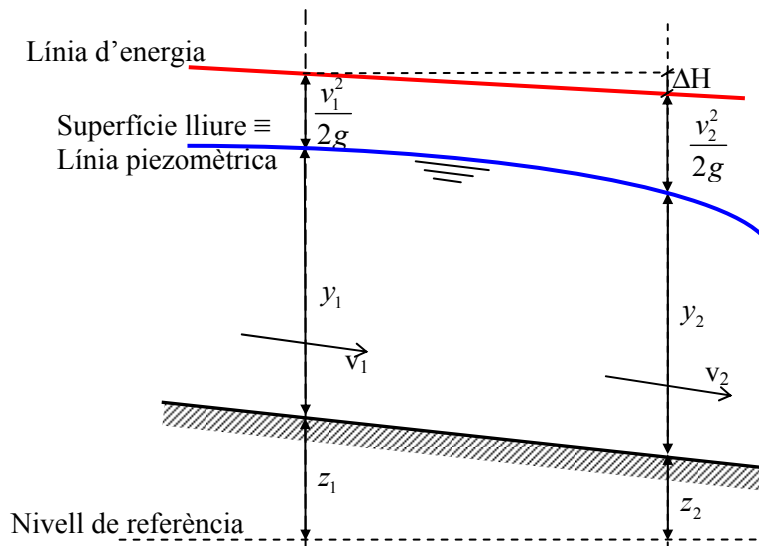


Figura 4.2 Definició de les variables hidràuliques en un flux en làmina lliure.

4.2 Tipus de llera. Classificació

En el transport d'aigua en làmina lliure, en general, es diferencia entre el que es realitza de manera natural, per les lleres de rius, rieres, torrents, estuaris de marea, etc., i el que es realitza d'una manera artificial, és a dir, en conduccions dissenyades i construïdes per la mà de l'home.

Així, les característiques geomètriques irregulars pel que fa als pendents, a les seccions transversals, a les rugositats dels contorns que tenen les lleres naturals, provoquen unes propietats hidràuliques també irregulars que caracteritzen precisament aquests fluxos d'aigua. Determinar-ne les característiques hidràuliques és important per tal d'aconseguir el millor disseny possible d'aquestes lleres quan es vol resoldre els problemes habituals d'anàlisi de riscos d'inundació, prevenció de danys per episodis extrems, etc. Per a això, cal tenir bons coneixements d'hidràulica, hidrologia, geomorfologia, transport de sediments, etc.

Pel que fa als canals artificials, construïts sobre el propi terreny natural i dissenyats expressament per aconseguir determinats objectius, com poden ser canals per a la navegació o de rec, canals de derivació de centrals hidroelèctriques, etc., presenten en general unes dimensions, uns pendents, unes rugositats condicionades pel material d'execució que els confereixen unes característiques hidràuliques molt determinades, com es veurà al llarg d'aquest capítol. Aquests canals, per una mera idea de simplicitat de disseny i construcció, solen mantenir la secció transversal constant al llarg del seu traçat, amb formes geomètriques comunes (rectangles, trapezis, semicercles, etc.) o, en cas contrari, si presenten algun canvi de secció, ho fan en trams molt concrets i ben definits. Els trams que mantenen la secció constant s'anomenen *prismàtics*. S'entén que aquesta és una propietat que no es dona en lleres naturals en les quals no hi hagi hagut intervenció de la mà de l'home.

4.3 Tipus de flux

Segons si les variables hidràuliques (calats i velocitats) del flux en làmina lliure varien d'acord amb el temps i/o la posició de la secció que s'està analitzant, es pot establir la classificació següent:

- A. Règim permanent: les seves variables hidràuliques no varien amb el temps. Per la seva banda, depenent de si aquestes varien longitudinalment al llarg del riu o del canal que s'analitzi, es pot definir:
- Règim uniforme: el calat, la distribució de velocitats i la velocitat mitjana són constants al llarg del moviment. Es comprova que, perquè es doni, cal imposar la condició de canal prismàtic.
 - Règim variat: els calats i les velocitats del flux varien al llarg del moviment, però ho fan de manera constant al llarg del temps. En aquest cas, es poden introduir els conceptes de:
 - a) Règim gradualment variat, en el qual el perfil de calats al llarg del moviment presenta unes curvatures moderades i, per tant, la variació de la velocitat al llarg del moviment és suau.
 - b) Règim ràpidament variat, en què els calats i, per tant, les velocitats canvien de manera sobtada en distàncies comparativament curtes (fenòmens locals).
- B. Règim no permanent: es defineix per oposició al règim permanent, de manera que les variables hidràuliques poden presentar variacions al llarg del temps. Es pot subclassificar en:
- Règim uniforme no permanent: la superfície de l'aigua fluctua amb el temps, però es manté sempre paral·lela a la superfície del canal. És una condició pràcticament impossible que es doni; per aquest motiu, el terme *uniforme* s'usa bàsicament per descriure el règim permanent.
 - Règim variat no permanent o variable: igual que abans, es defineix per contraposició al règim variat permanent. Es pot classificar en:
 - a) Règim gradualment variable: equival al que s'ha dit per al règim permanent gradualment variat, però afegint-hi que varia al llarg del temps.
 - b) Règim ràpidament variable: com abans, equival al règim permanent ràpidament variat, però tenint en compte que en aquest cas hi ha variació amb el temps.

4.4 Distribució de velocitats a una secció

L'existència d'una superfície lliure, combinada amb el fregament del fluid amb els contorns del canal, provoca que la distribució de velocitats en una secció transversal no sigui uniforme. Aquesta velocitat val zero en els contorns (condició d'adherència perfecta) i creix fins a assolir un valor màxim, que es dona normalment a una profunditat que pot variar entre el 5% i el 25% del calat, depenent de factors com (Chow, 1994):

- La geometria de la secció transversal, tal com es mostra a l'exemple de la figura 4.3. La forma de la secció condiona la distribució de velocitats en aspectes com la simetria, l'ample, la curvatura, etc.

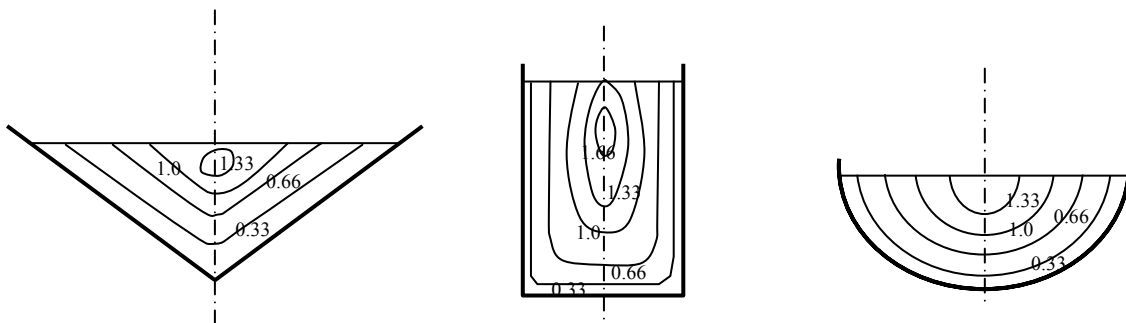


Figura 4.3 Distribució de la velocitat segons la geometria de la secció transversal.

- La rugositat del canal. Fa que la distribució vertical de velocitats mostri, en general, una curvatura més gran com més gran és aquesta, tal com s'esquematitza a la figura 4.4.

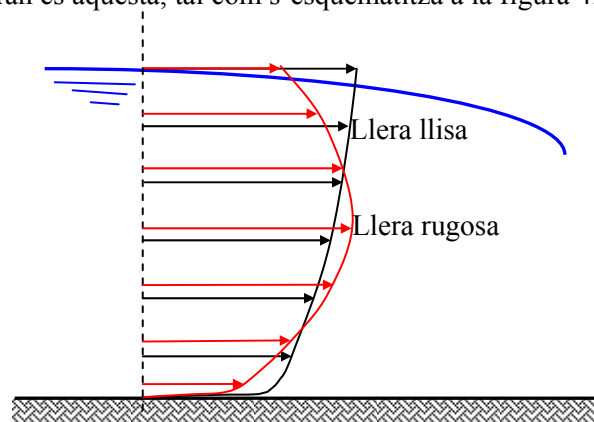


Figura 4.4 Distribució de la velocitat segons la rugositat de la secció.

- L'existència de corbes. Fa que la velocitat s'incrementi del costat extern per l'acció de les forces centrífugues, tal com s'esquematitza a la figura 4.5.

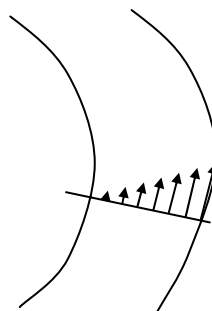


Figura 4.5 Distribució de la velocitat segons l'alineació del traçat.

De fet, a la realitat, tot això és encara més complex. El flux en un canal prismàtic recte és realment tridimensional i es produeix un moviment en espiral, malgrat que a una determinada secció la component de velocitat transversal sovint és negligible comparada amb la component longitudinal (Chow, 1994). Tot i així, petites perturbacions a l'entrada del canal, que són normalment inevitables, són suficients per causar una zona amb nivells més alts en un dels marges. Aquest moviment espiral és el que permet igualar esforços tallants a tots dos costats del canal. Malgrat tot, a la pràctica s'ignora aquest moviment espiral en canals prismàtics rectes, tot i que en canals amb corbes pronunciades cal que se'l tingui en compte en el disseny, perquè pot ser important.

4.4.1 Canals oberts amples

Quan la distribució de la velocitat a la zona central d'una secció determinada d'un canal és aproximadament molt igual a la distribució que tindria en un canal rectangular d'ample infinit, aleshores s'entén que els caixers del canal no influeixen en la velocitat de les partícules d'aigua que es trobin a la zona central de la secció.

A la pràctica, s'ha comprovat, que aquestes condicions s'assoleixen quan la relació entre l'ample de la secció i el calat és:

$$B \geq 10 \cdot y \quad (4.1)$$

4.4.2 Coeficients de distribució de velocitats

Quan s'han introduït tant el principi de conservació de la quantitat de moviment com el Trinomi de Bernoulli, s'imposa que la distribució de velocitats en una secció transversal és pràcticament uniforme. En tots dos casos, quan no es pot suposar l'esmentada uniformitat de la distribució de velocitats, cal introduir uns coeficients correctors que tinguin en compte la distribució no uniforme. Són, suposant règim permanent, el coeficient de Boussinesq (β) en el cas del principi de conservació de la quantitat de moviment i el coeficient de Coriolis (α) en el cas del trinomi de Bernoulli.

El coeficient de Coriolis corregeix el terme corresponent a l'energia cinètica per unitat de pes ($v^2/2g$). Es dona la particularitat que, en general, en un canal obert l'altura d'energia de velocitat és més gran que $v^2/2g$ estimada amb la velocitat mitjana. Així, el terme corregit queda:

$$\alpha \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad \text{on} \quad \alpha = \frac{\int v^3 \cdot dA}{v^3 \cdot A} \approx \frac{\sum v^3 \cdot \Delta A}{v^3 \cdot A} \quad (4.2)$$

on α és el coeficient de Coriolis que val normalment entre 1.03 i 1.36 per a canals prismàtics aproximadament rectes. En general, α sol ser alt per canals petits i baix per a corrents grans amb calats considerables.

Com ja s'ha esmentat, una distribució no uniforme de velocitats també influeix en el càlcul de la quantitat de moviment; en aquest cas, es corregeix fent:

$$\rho \cdot Q \cdot \Delta(\beta v), \quad \text{on} \quad \beta = \frac{\int v^2 \cdot dA}{v^2 \cdot A} \approx \frac{\sum v^2 \cdot \Delta A}{v^2 \cdot A} \quad (4.3)$$

on β és el coeficient de Boussinesq, que val entre 1.01 i 1.12 per a canals prismàtics aproximadament rectes.

Cal tenir en compte que α i β sempre són una mica més grans que 1 (Chanson, 2004; Chow, 1994). Es dona el cas que si $\alpha=1$ i $\beta=1$, això significa que la distribució de velocitats és estrictament uniforme a través de la secció d'un canal. Per exemple, aigües amunt de sobreexidors o prop d'obstruccions o irregularitats, s'hi han arribat a mesurar $\alpha > 2.0$. Com és obvi, en aquestes geometries és necessari mesurar directament els perfils de velocitats. D'altra banda, es pot dir que α i β solen augmentar amb el pendent del canal.

És important ser conscient que, en canals de secció transversal regular i alineament pràcticament recte, l'efecte de la distribució no uniforme de velocitats, tant en el terme cinètic $v^2/2g$ com en el terme $\Sigma \rho Q v$, és petit comparat amb d'altres incerteses del càlcul. Per aquest motiu, se sol prendre, en general, que $\alpha=1$ i $\beta=1$

4.5 Distribució de la pressió a una secció recta

La pressió en un punt de la secció transversal es mesura amb l'altura de la columna d'aigua que s'assoleix en un piezòmetre instal·lat al punt en qüestió, tal com s'esquematitza a la figura 4.6. En aquest piezòmetre, l'aigua puja des del punt de mesura fins a la línia piezomètrica, que, com ja s'ha comentat, en un flux en làmina lliure coincideix amb superfície de l'aigua. Si succeeix això, vol dir que la pressió a qualsevol punt de la secció és proporcional a la profunditat del flux per sota de la superfície lliure (on, òbviament, la constant de proporcionalitat és precisament γ_{fluid}). Aquesta pressió, com és ben sabut, és la pressió hidrostàtica corresponent a aquella profunditat.

Aplicar la llei hidrostàtica de distribució de pressions a la secció transversal del canal significa, implícitament, que els filaments del flux no tenen cap component significativa d'acceleració en el pla de la secció transversal o, dit d'una altra manera, que les línies de corrent no tenen prou curvatura ni divergència. És el que s'anomena *flux paral·lel*.

En qualsevol cas, atenent la classificació dels possibles tipus de flux en làmina lliure (apartat 4.3), es pot considerar que, tant en el cas de règim uniforme com en el règim gradualment variat, el flux és paral·lel. En el cas de règim gradualment variat, es pot considerar que les variacions del calat al llarg del canal són suaus i, per tant, les línies de corrent no presenten curvatura ni divergència significativa.

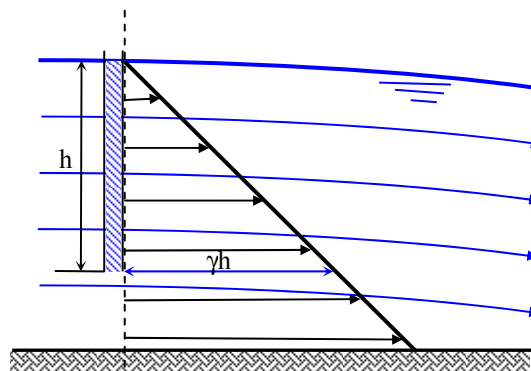


Figura 4.6 Distribució de pressions hidrostàtiques en un flux en làmina lliure.

Quan la curvatura de les línies de corrent és significativa, es produeix l'anomenat com *flux curvilini*. Aquest provoca acceleracions (o forces centrífuges), perpendiculars a la direcció del flux, apreciables. En aquest cas, la distribució de pressions s'aparta de la hidrostàtica, com s'esquematitza a la figura 4.7.

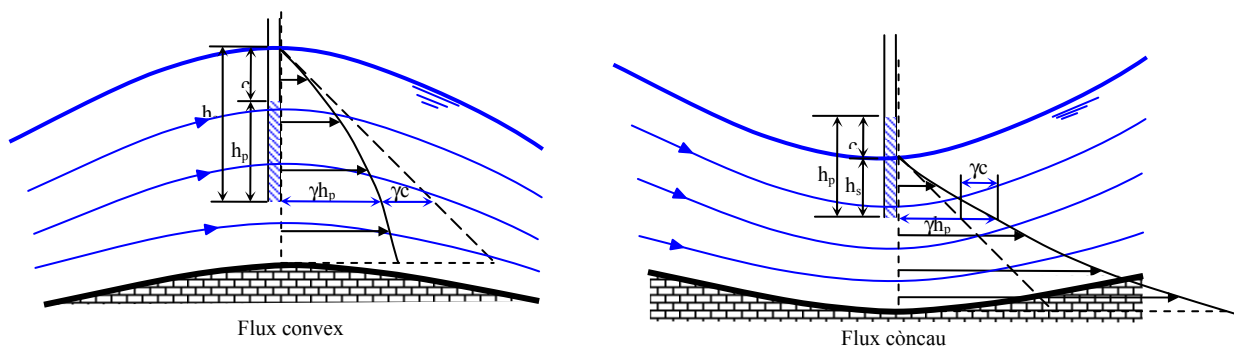


Figura 4.7 Distribució de pressions en un flux curvilini en làmina lliure.

En cas que el flux sigui sobre un contorn còncau, les forces centrífugues apunten cap avall, de manera que es provoca un reforçament de la força de la gravetat. Això implica que la pressió resultant sobre qualsevol punt de la vertical de la secció és més gran que la pressió hidrostàtica d'un flux paral·lel. Si, en canvi, el flux es dona sobre un contorn convex, les forces centrífugues tendeixen a allunyar-se'n, i això provoca un afebliment de l'acció de la gravetat, que es tradueix en una distribució de pressions més petita que la hidrostàtica.

Els perfils curvilinis complexos que, a efectes de disseny, requereixin conèixer les distribucions de pressions que hi ha en ells, cal que siguin calculats pel mètode de les xarxes de flux o a partir d'experiències en model reduït.

Resumint, doncs, si el flux és ràpidament variat no s'aplica de manera estricta la llei hidrostàtica de distribució de pressions, fet que en dificulta, d'alguna manera, el càlcul. En canvi, l'efecte de la curvatura de les línies de corrent és negligible quan el flux és paral·lel i gradualment variat.

4.5.1 Efecte del pendent a la distribució de pressions

Cal estudiar, finalment, quin és l'efecte del pendent en la distribució de pressions a una secció. Per fer-ho, cal analitzar un canal d'ample unitari de pendent θ , que s'esquematitza a la figura 4.8:

Si es té en compte que el pes (W) de l'element de gruix diferencial ds és:

$$W = \gamma \cdot y' \cdot ds_x \Rightarrow W = \gamma \cdot y' \cdot \cos \theta \cdot ds \quad (4.4)$$

Aleshores, la seva component perpendicular a la llera (W_n) serà:

$$W_n = \gamma \cdot y' \cdot \cos^2 \theta \cdot ds \quad (4.5)$$

Amb aquest valor es pot estimar la pressió que hi ha a qualsevol punt D de la secció transversal que s'estigui estudiant. Aquesta pressió ha de coincidir amb el pes de la columna d'aigua que tingui per sobre; per tant, valdrà:

$$p' = \frac{\gamma \cdot y' \cdot \cos^2 \theta \cdot ds}{ds} \Rightarrow p' = \gamma \cdot y' \cdot \cos^2 \theta \quad (4.6)$$

Per tant la columna d'aigua corresponent (h') es pot escriure, de manera indiferent, com:

$$h' = y' \cdot \cos^2 \theta \quad (4.7)$$

o com:

$$h' = d' \cdot \cos \theta \quad (4.8)$$

que correspon, en qualsevol cas, a la distància des de la superfície lliure fins al punt (D) en qüestió, mesurada en la direcció perpendicular a la solera. Les expressions (4.7) i (4.8), implícitament, corresponen a la llei de pressió hidrostàtica d'un flux paral·lel. En conclusió, la càrrega de pressió sobre el punt B de la solera (figura 4.8) es pot obtenir a partir de qualsevol de les expressions següents:

$$\left(\frac{p}{\gamma} \right)_B = y' \cdot \cos^2 \theta \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{p}{\gamma} \right)_B = d' \cdot \cos \theta \quad (4.10)$$

Qualsevol llera natural o artificial es considera de gran pendent i, per tant, cal introduir l'efecte del pendent en la distribució de pressions, quan l'angle que forma amb l'horitzontal θ és més gran de 6° , que correspon aproximadament a un angle 1v:10h¹³.

En canvi, si l'angle en qüestió θ és més petit d'aquests 6° o el que és el mateix, més petit que 1v:10h, aleshores el $\cos\theta \approx \cos^2\theta \approx 1$ i les expressions (4.9) i (4.10) coincideixen. Aquest és el cas habitual que es dona en canals i rius (sobretot en la part intermèdia i baixa). En aquests casos, es pot ignorar la correcció de la pressió per efecte del pendent.

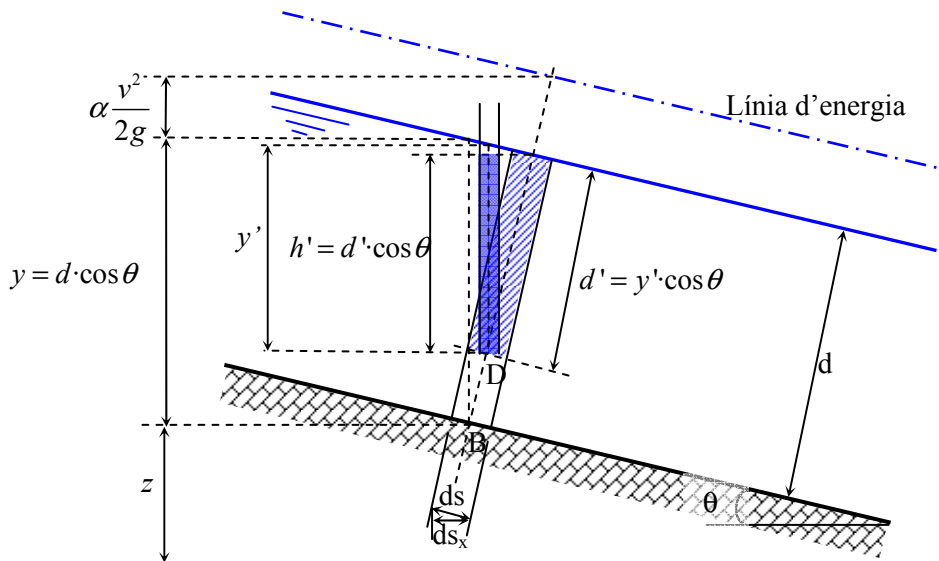


Figura 4.8 Distribució de pressions en un flux paral·lel en un canal de gran pendent.

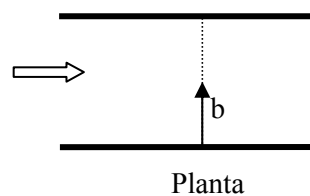
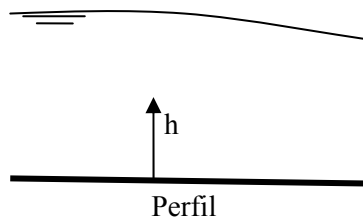
4.6 Exercicis proposats

1. Discuti si les preguntes següents són vertaderes o falses:
 - En un flux en làmina lliure, la distribució de velocitats en una secció depèn de la geometria de la secció, però pràcticament no depèn de la rugositat del contorn.
 - Un flux en làmina lliure, que pugui presentar calats diferents al llarg del canal, però amb curvatures moderades, rep el nom de *flux gradualment variat*.
 - En un flux en làmina lliure, la distribució de velocitats en una secció depèn de la geometria de la secció, però pràcticament no depèn de la rugositat del contorn.
 - En un flux en làmina lliure, en el qual en una secció qualsevol s'introdueix un piezòmetre, l'aigua sempre hi aconsegueix el nivell al qual es troba la superfície lliure.
 - En un flux en làmina lliure, si les línies de corrent no tenen curvatura ni divergència pronunciada (flux aproximadament paral·lel), es pot suposar distribució hidrostàtica de pressions.
 - El flux en un canal obert és uniforme quan les característiques del corrent, com el calat, la velocitat mitjana o la distribució de velocitats en una secció, no canvien al llarg del canal en la direcció del flux.

¹³ En el cas de pendents molt pronunciats, la velocitat del flux és també molt elevada. En aquests casos, es poden donar fenòmens d'entrada d'aire en el flux, que provoquen que volum del flux s'infla, és a dir, es crea una emulsió aire-aigua que fa que si la pressió s'estima com a (4.9) doni un valor significativament més gran que el que realment s'estigui donant (ja que $\gamma_{\text{emulsió}} < \gamma_{\text{aigua}}$). Cal anar amb compte, doncs, en aquests casos.

- La condició de la pregunta anterior només es compleix en canals prismàtics amb rugositat constant i a més, en zones prou allunyades d'estructures de transició o de perturbacions del corrent.
 - Les forces de tensió superficial no influeixen en el comportament hidràulic d'un riu.
 - En l'estudi del moviment de l'aigua en un canal normalment només es consideren les forces de pes, inèrcia, pressió i fricció.
 - En un canal en moviment uniforme les pèrdues d'energia total són iguals a la pèrdua d'energia potencial.
 - En un canals el coeficient de Coriolis mai no pot valer 1.
 - En un canal d'ample molt superior al calat, es pot considerar que el radi hidràulic és pràcticament igual al calat.
 - Normalment, la velocitat màxima en un riu es presenta a la superfície lliure.
2. En un canal de secció rectangular de 0.60 m d'ample es mesura la distribució de la velocitat (m/s) que es mostra a la taula, quan el calat és igual a 0.544m. Determinar-ne el coeficient de Coriolis (α) i el de Boussinesq (β).

	b=0.06m	b=0.18m	b=0.30m	b=0.42m	b=0.54m
h=0.05m	0.580	0.642	0.717	0.639	0.583
h=0.10m	0.580	0.628	0.710	0.639	0.580
h=0.20m	0.580	0.635	0.691	0.632	0.580
h=0.30m	0.557	0.580	0.649	0.628	0.538
h=0.40m	0.519	0.587	0.673	0.673	0.552
h=0.50m	0.500	0.630	0.769	0.704	0.573



3. En un canal de secció rectangular d'ample B s'ha mesurat un calat d'1m. Discutiu a partir de quin ample B es pot acceptar l'aproximació $R_h \approx y$. Discutiu-ho també per a un calat de 2m.

5 Moviment permanent uniforme en làmina lliure

5.1 Equacions del moviment

El moviment permanent i uniforme es caracteritza bàsicament pel fet que el cabal, els calats, les àrees mullades i les velocitats es mantenen constants al llarg del temps i al llarg del canal.

Si el calat es manté constant, s'entén que la superfície lliure de l'aigua es manté paral·lela al fons del canal i, si a aquest fet se li afegeix la constància de la velocitat¹⁴, es conclou que la línia d'energia és també paral·lela a les altres dues. Això només s'aconsegueix si la secció transversal es manté també constant (canal prismàtic).

Com ja s'ha comentat anteriorment, el flux uniforme no permanent a la pràctica no existeix. De fet, en corrents naturals (rius, rieres, torrents, etc.) és estrany fins i tot l'uniforme i permanent, pel fet que en aquests corrents no és possible mantenir el caràcter prismàtic de les seccions.

També és interessant comentar que el règim uniforme tampoc no es dona en fluxos amb velocitats elevades, ja que en aquest cas la superfície lliure es torna inestable per l'entrada i arrossegament d'aire.

5.1.1 Establiment del flux uniforme

Quan s'estableix el flux d'aigua en un canal, aquest es troba amb alguna resistència pel fregament amb els contorns, a mesura que avança aigües avall. Aquesta resistència s'oposa a la component gravitacional que actua en la direcció del moviment.

Així, el règim uniforme s'assoleix quan la resistència al moviment, caracteritzada per la fricció del flux amb el contorn, s'igualava amb la component en la direcció del moviment del pes del fluid.

Tenint en compte que la resistència al moviment pel fregament amb el contorn depèn de la velocitat, quan els altres factors físics del canal es poden considerar constants es pot descriure, de manera conceptual, el procés d'assoliment del règim uniforme: en els estadis inicials del moviment en un canal prismàtic, la velocitat del flux no es troba totalment desenvolupada; en aquest moment, la força de resistència al moviment per fricció amb el contorn és més petita que el component del pes en la direcció del moviment. Això produeix una resultant neta no nul·la que es tradueix en una acceleració del flux en aquell entorn. En incrementar-se la velocitat també augmenta la força de fricció fins al moment en què aquesta s'igualava amb les forces gravitatòries en la direcció del moviment. Aquest és el moment en què es considera que s'ha establert el règim uniforme.

¹⁴ Que la velocitat sigui constant es pot interpretar com que la velocitat mitjana del flux és constant. En rigor, vol dir que és constant a qualsevol punt de la secció del canal dins del tram de règim uniforme. És a dir, la distribució de v a través de la secció del canal no s'altera a tot el tram en règim uniforme.

Per definició, el tram de canal prismàtic requerit perquè s'acabi assolint el règim uniforme es diu *zona transitòria* i correspon a una zona de flux variat –existència d'acceleració convectiva. D'aquesta manera, en un canal s'assoleix règim uniforme si la seva longitud és més gran que la longitud necessària de la zona transitòria.

5.1.2 Equacions del moviment

La velocitat mitjana del flux uniforme en canals s'expressa per l'expressió (3.1) coneguda com a equació del flux uniforme:

$$v = C \cdot R_h^a \cdot I^b \quad (5.1)$$

on, en una determinada secció:

- v és la velocitat mitjana.
- R_h és el radi hidràulic.
- I és el pendent de la línia d'energia, que, en tractar-se de règim uniforme, coincideix amb el pendent geomètric del canal i amb el pendent de la superfície lliure.
- a i b són exponents d'ajust.
- C és el factor de resistència del flux que és funció de la velocitat, el radi hidràulic, la rugositat, la viscositat del propi fluid, etc.

A la bibliografia, s'hi poden trobar un gran nombre d'equacions del flux uniforme. Les equacions més conegudes i més comunament aplicades són l'equació de Chézy i l'equació de Manning.

5.2 Avaluació de les pèrdues contínues d'energia

5.2.1 Fórmula de Chézy (1769)

Aquesta equació fou proposada per Antoine Chézy (1717–1798) l'any 1768, quan treballava en el disseny i la construcció de la xarxa de canals d'abastament d'aigua de la ciutat de París. L'equació és:

$$v = C \cdot \sqrt{R_h \cdot I} \quad (5.2)$$

De fet, l'expressió es pot deduir analíticament. La força, per unitat d'àrea de la llera que s'oposa al moviment del corrent, és proporcional a la velocitat al quadrat, de manera que si es considera que la superfície de contacte de la llera amb el fluid es pot estimar com el producte entre el perímetre mullat (p_m) i la longitud del tram d'estudi (L), queda:

$$F_f = K \cdot v^2 \cdot p_m \cdot L \quad (5.3)$$

D'altra banda, la component efectiva del pes del fluid en la direcció del moviment és:

$$F_G = \gamma \cdot A \cdot L \cdot \sin \theta \Rightarrow F_G = \gamma \cdot A \cdot L \cdot I \quad (5.4)$$

on θ és l'angle que forma la solera del canal amb l'horitzontal i s'ha imposat que $\sin \theta$ és igual al pendent motriu, ja que s'està analitzant el règim uniforme. En aquestes circumstàncies, la força de fregament amb el contorn ha de coincidir amb el component del pes en la direcció del moviment (expressions (5.3) i (5.4)).

Aleshores:

$$F_f = F_G \Rightarrow K \cdot v^2 \cdot p_m \cdot L = \gamma \cdot A \cdot L \cdot I \quad (5.5)$$

Si es defineix el radi hidràulic (R_h) com:

$$R_h = \frac{A}{P_m} \quad (5.6)$$

i s'estableix el factor de resistència de Chézy (C) com la constant següent:

$$C = \sqrt{\frac{\gamma}{K}} \quad (5.7)$$

resulta l'equació de Chézy que s'ha plantejat inicialment (5.2):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{K} \cdot \frac{A}{P_m} \cdot I} = C \sqrt{R_h \cdot I} \quad (5.8)$$

El factor de resistència de Chézy es pot determinar a partir de dues expressions empíriques diferents, que depenen del radi hidràulic i del material del canal:

Expressió de Bazin:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{K_B}{\sqrt{R_h}}} \quad (5.9)$$

Els valors de K_B es poden obtenir de la següent taula 5.1 segons el material del canal:

Taula 5.1. Valors de la constant de Bazin segons el material (Font: Lencastre, 1998).

K_B ($m^{1/2}$)	Material
0.06	Canals de formigó ben allisat.
0.46	Canals de formigó revocats parcialment, amb juntes prominents i aigua poc neta, i amb una mica de vegetació.
1.75	Canals de terra amb males condicions de manteniment, amb vegetació al fons i als marges.

Expressió de Kutter:

$$C = \frac{100}{1 + \frac{K_K}{\sqrt{R_h}}} \quad (5.10)$$

Per la seva banda, els valors més habituals de K_K es poden veure a la taula 5.2:

Taula 5.2. Valors típics de la constant de Kutter segons el material (Font: Lencastre, 1998).

K_K ($m^{1/2}$)	Material
0.15	Canal de formigó ben llis, secció rectangular
0.75	Canals de maçoneria normal amb sediments en el fons
de 1.75 a 2.00	Canals de terra en males condicions de conservació, amb vegetació; cursos d'aigua naturals amb llera de terra

5.2.2 Fórmula de Manning. Coeficient de rugositat

Expressió empírica deguda a Robert Manning (1816 - 1897) que va ser publicada el 1889. Es dona la circumstància que existeix un conflicte nacional sobre l'autoria d'aquesta fórmula, ja que els francesos afirmen que P. G. Gauckler ja l'havia publicat el 1867; per aquest motiu, aquesta mateixa expressió és coneguda com de Gauckler–Manning, o de Manning–Gauckler segons el país en el qual s'escriu. A fi de simplificar en endavant, i sense ànim de crear cap conflicte internacional, aquesta equació s'anomena equació o fórmula de Manning.

$$v = \frac{R_h^{2/3} \cdot I^{1/2}}{n} \quad (5.11)$$

Aquesta fórmula es basa en dades experimentals i està verificada amb nombroses observacions, sempre en el cas de règim turbulent rugós. Lògicament, en els casos en que es pugui aplicar, el pendent motriu estimat a partir de la fórmula de Manning i l'estimat a partir de la fórmula de Chézy han de coincidir. Per aquest motiu, es pot determinar la relació que ha d'existir entre els respectius factors de resistència n i C :

$$I_{Manning} = I_{Chezy} \Rightarrow \frac{n \cdot v}{R_h^{2/3}} = \frac{v}{C \cdot R_h^{1/2}} \Rightarrow C = \frac{R_h^{5/6}}{n} \quad (5.12)$$

Exercici

Determineu el calat que defineix el règim uniforme en un canal prismàtic de formigó ($n \approx 0.015$) de secció rectangular de 4 m d'ample, amb un pendent d'1 mil·lèsima ($i = 0.001$) i que transporta un cabal de 3 m³/s.

La condició de règim uniforme obliga a imposar que el pendent motriu coincideixi amb el pendent geomètric del canal. Es pot apreciar que cal resoldre una equació no lineal amb una incògnita. Per tant:

$$I = i \Rightarrow 0.001 = \frac{0.015^2 \cdot \left(\frac{3}{4 \cdot y_0}\right)^2}{\left(\frac{4 \cdot y_0}{2 \cdot y_0 + 4}\right)^{5/3}} \Rightarrow y_0 = 0.597 \text{ m} \quad (5.13)$$

Si no es disposa d'una eina numèrica per a la seva resolució, es pot obtenir de manera molt senzilla fent unes poques iteracions, com es mostra a la taula següent.

Taula 5.3. Procés iteratiu per a la resolució de l'equació (5.13).

y (m)	v(y) (m/s)	R _h (y) (m)	$I = \frac{n^2 \cdot v^2}{R_h^{4/3}}$	
1.000	0.750	0.667	0.00022	<0.001
0.500	1.500	0.400	0.00172	>0.001
0.600	1.250	0.462	0.00099	<0.001
0.595	1.261	0.459	0.00101	>0.001
0.597	1.256	0.460	0.00100	=0.001

Observeu que si es tempteja un calat que condueix a un pendent motriu més petit que el que es busca, 0.001 en aquest cas, cal continuar temptejant un calat inferior que doni un pendent motriu superior al primer. Segons aquest criteri, cal anar iterant fins a obtenir un valor prou aproximat al buscat.

La determinació del coeficient de Manning (n) en lleres naturals o artificials és un dels punts crítics en els càlculs en làmina lliure. Si es compara amb el cas d'un flux a pressió, la determinació de la rugositat absoluta en una canonada, si bé no és senzilla, en aquest cas sí que es més assumible perquè una canonada és un producte industrial que ha de tenir una qualitat controlada i per tant un diàmetre i una rugositat coneguts.

En el cas de flux en làmina lliure, una de les complicacions principals de l'anàlisi del règim uniforme, i del flux en làmina lliure en general, és determinar el coeficient de fricció (coeficient de Manning, si s'utilitza aquesta formulació). Això és així per diversos factors, com el fet que en les construccions *in situ* solen haver-hi petits errors i imprecisions, ja que una obra de fàbrica *in situ* no es construeix en les mateixes condicions de control dels processos industrials. També hi pot influir el fet de treballar a la intempèrie, que hi pot introduir petites alteracions, o fins i tot s'hi poden trobar lleus defectes provocats per la manca de manteniment de la instal·lació. A aquestes complicacions es pot afegir que el canal es pot executar en altres materials (excavat en roca, membranes asfàltiques, etc.) que potser tenen més incerteses sobre l'estat final d'acabat.

Ja en el límit, si el que cal és analitzar un curs natural d'aigua (riu, torrent, etc.), es comprèn que la irregularitat geomètrica, diferents graus de cobertura vegetal, els usos del sòl, la geomorfologia del terreny, etc., hi introdueixen una casuística inescapable que complica, encara més, l'anàlisi de la rugositat de la llera.

Totes aquestes diferents textures, qualitats, irregularitats, etc., esmentades, cal traduir-les i resumir-les en un coeficient de fricció (n). En últim terme, aquesta és la dificultat explícita que s'ha estat comentant.

Això fa que, en general, dos tècnics amb poca experiència és probable que fixin diferents coeficients n en una mateixa llera. Per aquest motiu, és convenient donar alguns criteris, mínimament objectius, en vista a determinar correctament la rugositat. Per fer-ho, cal tenir un coneixement bàsic del problema per reduir el rang d'incertesa, i això es pot aconseguir si s'entenen els factors que afecten aquest coeficient.

a Factors que afecten n

Qualsevol coeficient de rugositat, en particular el coeficient de Manning, depèn de molts factors, que el fan, a la pràctica, força difícil d'ajustar amb precisió. Aquesta dificultat és doble perquè la majoria d'aquests factors estan relacionats entre si, de manera que la variació d'un n afecta els altres. A Chow (1994) es pot trobar una descripció més detallada, de la qual aquí s'extreu un resum.

Rugositat superficial. Està relacionada amb la mida i la forma dels grans del material que constitueix el perímetre mullat, de manera que, quant més gruixuts són els grans del material, més gran és el coeficient n . És un dels factors principals, tot i que no l'únic.

Vegetació. De fet, es pot considerar una classe de rugositat superficial. La presència de vegetació redueix la capacitat del canal segons la seva altura, densitat, distribució o tipus. S'han mesurat increments del coeficient de Manning d'entre +0.033 i +0.055 en un any de creixement de la vegetació en lleres naturals.

Irregularitat del canal. Irregularitats en el perímetre mullat i variacions en la secció al llarg del canal provoquen canvis en el coeficient n . Per exemple, l'existència de barres de sorra, ones de sorra, crestes i depressions a la llera del canal pot provocar un increment de l'ordre de 0.005, si aquests canvis són molt sobtats.

Alineament del canal. L'existència de corbes suaus en el canal amb radis de curvatura grans no afecta el coeficient de Manning n . En canvi, corbes brusques (p. ex. meandres) provoquen l'augment de n així, cada 20° de curvatura en 330 m corresponen, aproximadament, a un increment del coeficient de Manning de l'ordre de 0.001. Tot i això, les variacions de n no solen ser més grans que 0.002 o 0.003. En general, el més segur és considerar un increment $\Delta n \approx 0.002$, en el cas de canals petits de qualsevol material amb corbes pronunciades. En canvi, l'existència de meandres en rius pot provocar increments Δn del 30%.

Sedimentació i socavacions. Que es produeixi un fenomen o l'altre depèn de la naturalesa del material i de l'energia del flux. Un llit de sorra o grava s'erosiona més uniformement que un d'argiles, o bé l'existència de barres de sorra o ondulacions (dipòsits irregulars) provoca augments del coeficient n . L'energia que s'esmerça per erosionar i arrossegar el material al llarg de la llera (en suspensió o a salts) provoca un augment del coeficient de Manning aparent. Tot i aquest efecte, a mitjà o llarg termini, un procés de sedimentació en el temps pot canviar un canal molt irregular en un de relativament uniforme, i això es tradueix en una reducció del coeficient n . El contrari pot passar en processos de socavació. De tota manera, tots aquests fenòmens no són importants si progressen de manera uniforme.

Obstruccions. L'existència de troncs d'arbres, material flotant, o la presència de piles de ponts, es tradueixen en un augment del coeficient n , que depèn de la naturalesa de l'obstrucció, la forma, el nombre i la distribució.

Mida i forma del canal. No hi ha cap prova definitiva que demostrï que la mida i la forma del canal siguin factors importants, però sí que és un fet que variacions en el R_h provoquen variacions de n segons la condició del canal.

Nivell d'aigua i cabal. En general, es constaten disminucions del coeficient de Manning quan el calat o el cabal augmenten. Si el calat disminueix, les irregularitats del fons queden més exposades i els seus efectes són més pronunciats. En canvi, si el calat augmenta i els marges del canal són molt rugosos (p. ex. quan hi ha molta vegetació), això es tradueix en un augment global del coeficient n del canal. Si el cabal augmenta considerablement, el flux pot superar els marges i inundar les planes d'inundació laterals. Cal tenir en compte que habitualment les planes d'inundació mostren coeficients de rugositat més grans que els de la llera central. En el cas particular dels conductes circulars, el coeficient de fricció n del conducte parcialment ple és més gran que el del conducte completament ple, tot i que funcionant encara en làmina lliure.

Canvis estacionals. Són deguts al creixement estacional de plantes aquàtiques, herbes, matolls, etc.

Material en suspensió i càrrega de la llera. El seu transport consumeix energia i provoca pèrdues d'energia addicional, fet que es tradueix en un augment aparent de la rugositat del canal.

b Determinació del coeficient de rugositat de Manning

En la bibliografia d'hidràulica de canals, es poden trobar diferents propostes per a la determinació del coeficient de rugositat de Manning. Totes elles, en bona mesura, passen per examinar i familiaritzar-se amb l'aparença d'alguns canals comuns (naturals o artificials), de coeficient de Manning conegut, que el fixen per comparació amb aquests.

Hi ha alguns mètodes que pretenen fixar-lo mitjançant procediments analítics, basats en la comparació de les distribucions de velocitats teòriques i les mesurades a la secció transversal. De tota manera, val a dir que totes elles, en major o menor grau, acaben tenint una component de subjectivitat que és la que dificulta l'ajust precís del coeficient. A continuació se'n descriuen breument les més comunes.

b.1 Determinació indirecta mitjançant mesures de camp

En un canal prismàtic, que tingui algun tram funcionant en règim uniforme, si es mesura el calat en aquest tram i, a més es coneixen el cabal, el pendent del canal i la geometria de la secció (àrea i perímetre mullats), es pot obtenir de manera indirecta el valor del coeficient de Manning per aplicació de la fórmula (5.11). En honor a la veritat, val a dir, que no és gaire freqüent disposar d'un tram de canal amb les condicions que es requereixen perquè es desenvolupi un règim uniforme, i fins i tot es pot dir que és pràcticament impossible en rius. Per tant, a la pràctica, el mètode descrit no és tan útil com es preveia a priori.

Aquests problemes es poden resoldre quan s'introdueix, en els propers capítols, el flux permanent gradualment variat. En aquest cas, es mostra el procediment explícit per a la mesura indirecta del coeficient de Manning a partir de les mesures de camp. Així, a totes les variables esmentades al paràgraf anterior cal afegir la mesura de la distribució del perfil de velocitats en les seccions que s'estudiïn, per tal d'estimar-ne el coeficient de Coriolis. La mesura d'aquest perfil és tant més necessària quant més irregular sigui la secció.

b.2 Determinació per comparació amb catàlegs de fotografies

L'any 1967, H. H. Barnes enginyer de l'US Geological Survey, va publicar un estudi d'un gran nombre de rius dels Estats Units, en el qual resumia la determinació dels respectius coeficients de Manning amb l'ajut de mesures de camp, que s'han descrit al segon paràgraf de l'apartat anterior. Aquest estudi mostra rius amb coeficients de Manning que varien de 0.024 a 0.075, i el va completar amb un catàleg exhaustiu de fotografies de cada cas analitzat. D'aquesta manera, en qualsevol estudi de qualsevol tram fluvial, per comparació d'aquest amb alguna de les fotografies del catàleg, es pot determinar el coeficient de rugositat de Manning.

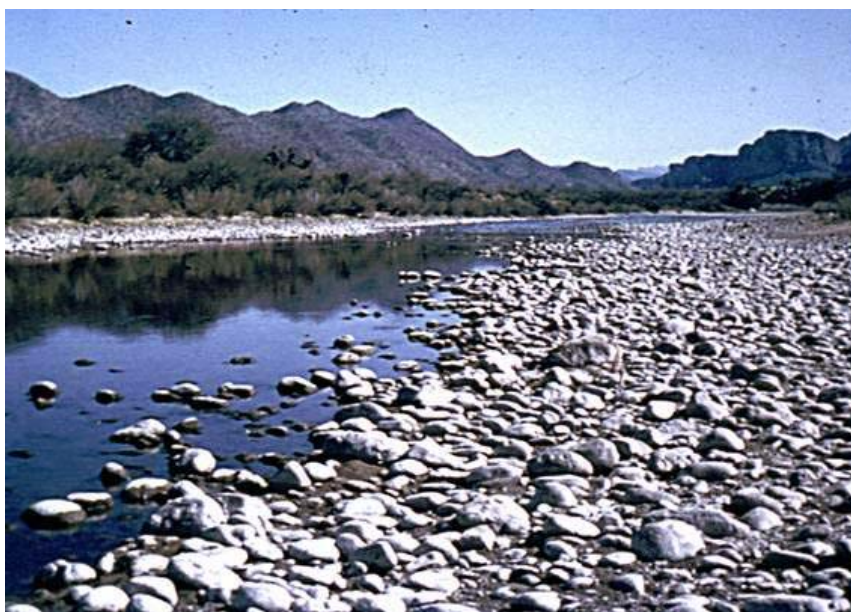


Figura 5.1 Imatge de Salt River sota Stewart Mountain Dam (Arizona). Coeficient de Manning determinat: $n=0.033$ (Barnes, 1967).



Figura 5.2 Imatge de Catherine Creek a prop de Union (Oregon). Coeficient de Manning determinat: $n=0.043$ (Barnes, 1967).

Com a exemple, es mostren un parell de fotografies de Barnes (1967). A Chow (1994) o French (1988), es pot obtenir un resum del mateix catàleg de fotografies. A l'adreça electrònica <http://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/> es pot veure el document esmentat en versió electrònica. També, en un altre format, es pot trobar a l'adreça que es detalla a continuació: <http://www.engr.utk.edu/hydraulics/openchannels/cover.htm>.

b.3 Determinació mitjançant fórmules polinòmiques

A fi de tenir en compte bona part dels factors que s'ha descrit (anterior apartat a) que influeixen en la variació del coeficient, es planteja el càlcul de n descomponent-lo en una sèrie de valors que tinguin en compte aquests factors.

L'expressió bàsica per a l'obtenció del coeficient de fricció de Manning és:

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \cdot m_5 \quad (5.14)$$

on:

- n_0 és un valor de partida, que només té en compte el material (taula 5.4). Es podria definir com la microrrugositat o rugositat de gra.
- n_1 pretén reproduir l'efecte de les irregularitats superficials (com, per exemple, canals artificials amb juntes, etc.).
- n_2 representa les possibles variacions a la secció.
- n_3 permet tenir en compte l'existència d'obstruccions al flux.
- n_4 és un factor que permet tenir en compte l'existència de vegetació a la secció.
- m_5 és un indicador de la curvatura en planta del traçat del canal o riu.

A <http://199.79.179.19/OLPFiles/FHWA/009468.pdf>, es pot trobar la versió electrònica d'Arcement i Schneider (1984), on es descriu amb tot detall, entre d'altres, aquesta metodologia. També se'n pot trobar un resum a Chow (1994) o a Puertas i Sánchez-Juny (2001).

La decisió dins de cada coeficient de la diferent casuística que es pot trobar (i. e. poca - mitjana - alta, lleu - moderat - sever, etc.) introdueix el grau de subjectivitat que acaba dificultant l'aplicació d'aquest mètode.

Taula 5.4 Valors dels coeficients per a l'ajust polinòmic (5.14) del coeficient de rugositat de Manning. (Font: Chow, 1994).

Coeficient	Casuística	Valor
n_0 Material	Terra	0.020
	Excavat en roca	0.025
	Grava fina	0.024
	Grava gruixuda	0.028
n_1 Irregularitats	Llis	0
	Lleu	0.005
	Moderat	0.01
	Sever	0.02
n_2 Variacions de secció	Graduals	0
	Ocasionalment brusques	0.005
	Freqüentment brusques	0.01–0.015
n_3 Obstruccions	Irrellevants	0
	Infreqüents	0.01–0.015
	Freqüents	0.02–0.03
	Contínues	0.04–0.06
n_4 Vegetació	Poca	0.05–0.01
	Mitjana	0.01–0.025
	Alta	0.025–0.05
	Molt alta	0.05–0.1
m_5 Curvatura, meandres	Baixa	1.00
	Mitjana	1.15
	Alta	1.30

b.4 Determinació mitjançant l'ús de taules

Les taules de coeficients de Manning tenen estimacions per a diferents tipus de canals i de lleres naturals. Se sol donar una valor típic dins d'un possible rang de variació. A Chow (1994), French (1988) o a Lencastre (1998), s'hi poden trobar reculls d'aquestes taules. A continuació, es mostra una d'aquestes taules com a exemple, resumida per Chow (1994).

Taula 5.5 Valors típics dels coeficients de Manning. (Font: Chow, 1994).

Material	$n_{\text{mínim}}$	$n_{\text{mitjà}}$	$n_{\text{màxim}}$
Metall llis pintat	0.012	0.013	0.017
Acer corrugat	0.021	0.025	0.030
Formigó llis	0.011	0.013	0.015
Gunita	0.016	0.019	0.020
Terra, net i recent	0.016	0.018	0.020
Terra, amb vegetació	0.022	0.027	0.033
Excavat en roca	0.035	0.040	0.050
Rierols nets	0.025	0.030	0.033
Rierols amb còdols	0.035	0.045	0.055
Rius de muntanya	0.040	0.050	0.070

Taula 5.5 Valors típics dels coeficients de Manning. (Font: Chow, 1994).

Material	$n_{\text{mínim}}$	$n_{\text{mitjà}}$	$n_{\text{màxim}}$
Planes d'inundació			
Amb herba	0.030	0.035	0.050
Amb cultius baixos	0.030	0.040	0.050
Amb arbres	0.110	0.150	0.200
Grans rius	0.035	0.050	0.100

5.3 Exercicis proposats

- Discutiu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:
 - En un flux en làmina lliure, la condició *pendent geomètric* = *pendent motriu* només es pot donar en les condicions de règim uniforme.
 - En règim uniforme, les pèrdues d'energia, respecte a un pla horitzontal, són totalment compensades pel descens de cota de fons del canal.
 - En un riu, en condicions naturals no es pot assolir un règim uniforme.
 - El coeficient de rugositat de Manning en una llera natural (riu) canvia al llarg de l'any.
 - En un riu amb vegetació a la llera, el coeficient de rugositat de Manning disminueix en augmentar el cabal.
 - El flux en un canal obert és uniforme quan les característiques del corrent, com el calat, la velocitat mitjana o la distribució de velocitats en una secció, no canvien al llarg del canal en la direcció del flux.
 - La condició de la pregunta anterior només es compleix en canals prismàtics amb rugositat constant i a més, en zones prou allunyades d'estructures de transició o de pertorbacions del corrent.
 - El coeficient de Manning té dimensions de $s^2/m^{2/3}$.
 - En un canal de pendent 0.256‰ de secció rectangular de 2 m d'ample, i 0.016 de coeficient de rugositat de Manning, pel qual circula un cabal d'1.26 m³/s, el calat normal és igual a 1 m.

En un canal de secció rectangular de 3 m d'ample i pendent de 0.192‰ i coeficient de rugositat de Manning $n = 0.015$, s'hi ha mesurat un règim uniforme que val aproximadament 2.0 m. En aquestes condicions (veure tres preguntes següents):

 - El cabal circulant és 15.8 m³/s.
 - La velocitat aproximada del flux és 2.63 m/s.
 - El pendent motriu és 0.000192.
 - El coeficient de Manning d'una secció, en general, depèn del calat.
 - El coeficient de Manning té dimensions de $[L]^{-1/3} \cdot [T]$.
- Discutiu l'equivalència entre el coeficient de rugositat de Manning (n), el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach (f) i el factor de resistència de Chézy (C).
- En un canal prismàtic de secció rectangular de 3m d'ample, prou llarg, s'hi ha mesurat un calat uniforme $y_0=2$ m. Si el pendent geomètric del calat és de l'1‰ i el cabal aforat en el calat de 7 m³/s, determineu el coeficient de rugositat de Manning (n).

6 Energia específica

6.1 Concepte d'energia específica

A la figura 2.11, s'esquematitzava com influïa el pendent en la relació entre la pressió hidrostàtica en una secció i el calat en aquesta. En general, l'altura total d'energia (H) de la secció que conté un punt situat en una determinada línia de corrent es pot escriure com:

$$H = z_A + d_A \cdot \cos \theta + \frac{v_A^2}{2g} \quad (6.1)$$

En qualsevol fluid en moviment en un canal, cada línia de corrent té una altura de velocitat diferent a causa de la distribució no uniforme que es té en fluxos reals. De tota manera, si el flux és gradualment variat, amb fins pràctics es pot suposar que les altures d'energia de velocitat (per unitat de pes) en qualsevol punt de la secció són iguals i es pot corregir l'error que s'hi introdueix, degut a la no-uniformitat real de la velocitat a la secció, usant el coeficient de Coriolis (α).

$$H = z + d \cdot \cos \theta + \alpha \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (6.2)$$

Si es fa el balanç entre dues seccions (1 i 2), el principi de conservació d'energia en fluxos paral·lels o gradualment variats (trinomi de Bernoulli) permet escriure:

$$z_1 + d_1 \cdot \cos \theta + \alpha_1 \cdot \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + d_2 \cdot \cos \theta + \alpha_2 \cdot \frac{v_2^2}{2g} + h_f \quad (6.3)$$

on h_f és l'energia dissipada entre les seccions 1 i 2.

En aquest punt es pot introduir el concepte d'energia específica com:

$$E = d \cdot \cos \theta + \alpha \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (6.4)$$

Tenint en compte que el més habitual és treballar en canals que presentin pendents baixos, es pot considerar que $\cos \theta \approx 1$ i, si per altra banda s'accepta, com a simplificació, que la distribució de velocitats a la secció és pràcticament uniforme ($\alpha \approx 1$). El balanç d'energia queda:

$$z_1 + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_f \quad (6.5)$$

I la definició d'energia específica:

$$E = y + \frac{v^2}{2g} \quad (6.6)$$

6.2 Relació energia específica-calat per a una secció i un cabal donats.

Si s'escriu l'energia específica en funció del Q, atès que $v=Q/A$, resulta:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} \quad (6.7)$$

Així, si es coneix el cabal, es pot analitzar com varia l'energia específica quan varia el calat en el canal. L'equació (6.7) depèn, en el seu segon sumand, del quadrat de l'àrea, que al seu torn depèn del calat. A la figura 6.1 es mostra la forma gràfica d'aquesta equació.

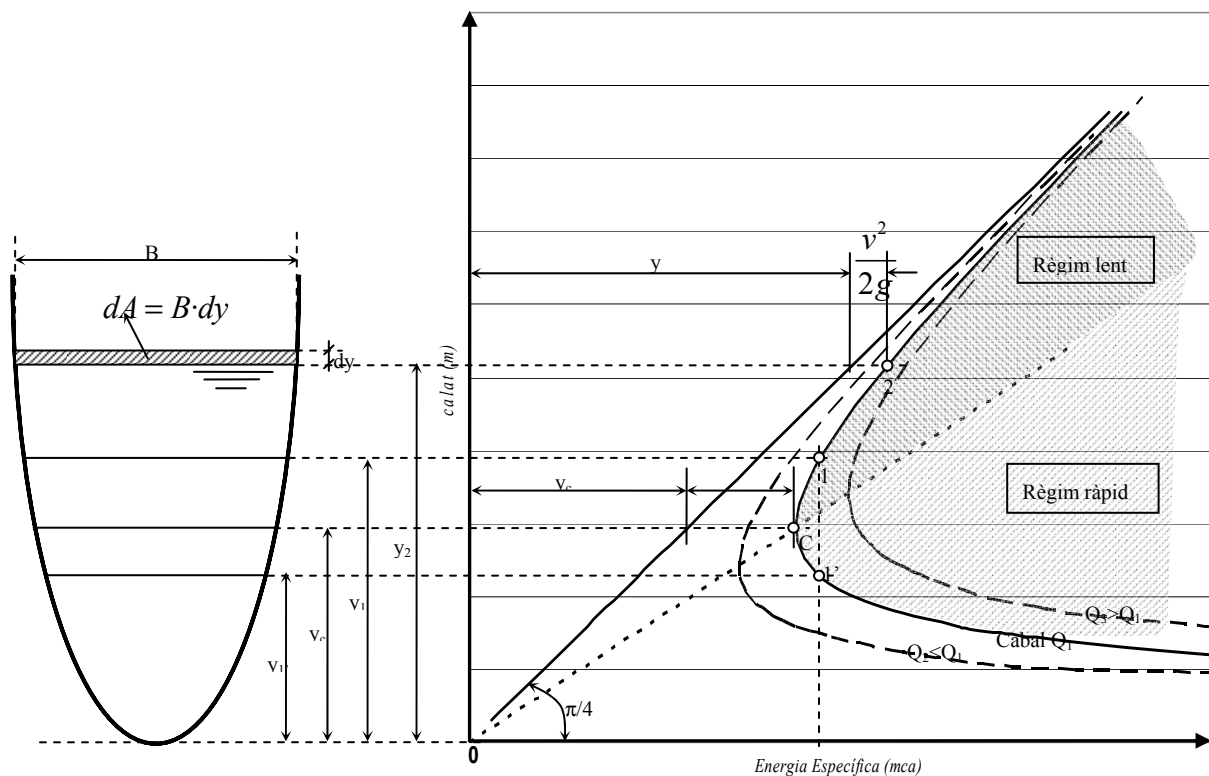


Figura 6.1 Variació de l'energia específica a un canal, en règim gradualment variat, per un cabal donat.

La corba en qüestió té dues rames, la que queda per damunt del punt C i la que en queda per sota:

- Per sota del punt C, la corba és asimptòtica a l'eix horitzontal cap a la dreta. Com que es considera que el cabal és constant, i tenint en compte que a mesura que s'apropa a l'eix horitzontal cap a la dreta el calat tendeix a 0, aleshores l'àrea mullada també hi tendeix. Per tant, queda:

$$\lim_{y \rightarrow 0} E = \lim_{y \rightarrow 0} \left(y + \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = \infty \quad (6.8)$$

- Per sobre del punt C, és asimptòtica a la bisectriu del primer quadrant, cap amunt i a la dreta. En aquest cas, per determinar l'asimptota ($y=b+m \cdot x$), cal trobar el pendent (m) i el terme independent (b) de la recta que la defineix¹⁵, fent els límits que es mostren a (6.9) i (6.10):

$$m = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{dE}{dy} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \left(-\frac{2}{A^3} \right) \cdot \frac{dA}{dy} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \left(-\frac{2}{A^3} \right) \cdot B \right) \Rightarrow m = 1 \quad (6.9)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(y + \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} - (y + b) \right) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (6.10)$$

És interessant esmentar que, en el cas que el flux no sigui gradualment variat (p. ex. en canals amb pendents elevats), la corba d'energia específica, per a un cabal donat, no és asimptòtica a la bisectriu del primer quadrant, tal com s'acaba de veure. Seguint tot el desenvolupament anterior (expressions (6.9) i (6.10)), es comprèn que això és degut a la necessitat de corregir el terme cinètic amb el coeficient de Coriolis i el terme corresponent a l'energia de pressió pel cosinus de l'angle amb l'horitzontal (expressió (6.4)).

Les tendències asimptòtiques demostrades apunten l'existència d'un mínim local d'energia específica (primera derivada nul·la):

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{A^3(y)} \cdot \frac{dA(y)}{dy} \right) = 0 \quad (6.11)$$

Analitzant l'element diferencial, a la secció representada a la figura 6.1 es pot deduir que:

$$\frac{dA}{dy} = B \quad (6.12)$$

de manera que de les dues anteriors expressions es pot escriure que:

$$\frac{Q^2}{g \cdot A^3(y)} B = 1 \quad (6.13)$$

A partir d'aquesta expressió, es defineix el paràmetre:

$$Fr^2 = \frac{v^2}{g \cdot \frac{A}{B}} \quad (6.14)$$

que es coneix com el *nombre de Froude* (Fr). Aquest és un paràmetre adimensional que dona idea de les condicions del flux en làmina lliure, de manera que de (6.13), es pot concloure que el nombre de Froude és igual a la unitat quan s'assoleix el mínim d'energia específica. Aquesta situació rep el nom de *règim crític*.

$$\frac{v^2}{g \cdot \frac{A}{B}} = 1 \Rightarrow Fr^2 = 1 \text{ Règim crític} \quad (6.15)$$

¹⁵ Una recta asimptòtica a una funció $E=f(y)$ és una recta d'equació $E=my+b$, on el pendent m ha de coincidir amb el pendent de la funció $f(y)$ quan $y \rightarrow \infty$, i el terme independent b ha de complir que $f(y)-(my+b)=0$ també quan $y \rightarrow \infty$, ja que és el moment en què ambdós (funció i asimptota) acaben tallant-se.

6.2.1 Discussió

A la vista del que s'ha plantejat fins ara es poden extraure les conclusions següents (Puertas i Sánchez-Juny, 2001):

- Donats un canal i un cabal determinats, existeixen infinits valors del calat, amb els quals aquest cabal pot ser-hi transportat. Cada calat dóna lloc a una energia específica i , en particular, si es dóna règim permanent i uniforme, totes les seccions tenen la mateixa energia específica (es manté invariable).
- Existeix una energia específica mínima que permet transportar un cert cabal a un canal determinat. Aquesta es dóna quan el règim és crític (calat crític). És interessant matisar que, amb una energia específica menor que aquesta mínima, no és físicament possible transportar el cabal esmentat per aquell canal.
- És molt important no confondre el concepte d'energia específica mínima amb el concepte de mínima despesa energètica. Com és ben sabut, la despesa energètica augmenta quan ho fa la velocitat, de manera que, donats un cabal i un canal, si s'aconsegueix reduir la velocitat, es fa a canvi d'augmentar el calat, cosa que dóna una despesa energètica menor, però una energia específica més gran (vegeu la definició (6.6)).
- Per a qualsevol valor de l'energia específica més gran que la mínima, hi existeixen dos possibles calats (y_1 i y_1' de la figura 6.1) per a una mateixa energia específica. Aquests calats solen anomenar-se a la bibliografia (Chow, 1994; French, 1988, etc.) *calats alterns*. L'un, $y_1 > y_c$, correspon a l'anomenat *règim lent o subcrític* i, a més, analitzant la definició del nombre de Froude (6.15), es comprova que dóna $Fr < 1$. L'altre, $y_1' < y_c$, correspon a l'anomenat *règim ràpid o supercrític*, i també es comprova que dóna $Fr > 1$. El règim lent basa la seva energia en el calat, mentre que el règim ràpid la basa en la velocitat del flux. A l'apartat 6.4.2 es discuteix com, per a un canal donat, si es coneix el cabal circulant, depenent de la relació entre el calat (y) existent a una secció i el calat crític (y_c) corresponent a aquell canal i cabal ($y > y_c$, $y < y_c$), el flux és lent ($Fr < 1$) o ràpid ($Fr > 1$), respectivament.

6.3 Relació cabal – calat per a una secció i una energia específica donades

Es tracta, en aquest cas, d'analitzar la mateixa definició de l'energia específica que abans (expressions (6.6) i (6.7)), però estudiant com varia el calat en variar el cabal circulant, quan es fixa l'energia específica disponible en una secció. L'expressió que s'ha d'analitzar queda:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} \Rightarrow Q = A \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{E - y} \quad (6.16)$$

A la figura 6.2 es pot veure la forma d'aquesta corba i la seva relació amb la corba estudiada a l'apartat 6.2, és a dir, la corba que explica com varia el calat en variar l'energia específica, per a un cabal circulant donat.

Fent la primera derivada de l'expressió (6.16), queda:

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \Rightarrow \sqrt{2g} \left[\frac{dA(y)}{dy} \cdot \sqrt{E - y} - A(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{E - y}} \right] = 0 \Rightarrow 2B \cdot (E - y) - A = 0 \quad (6.17)$$

I, com que de l'equació (6.7) es pot escriure:

$$E - y = \frac{Q^2}{A^2(y) \cdot 2g} \quad (6.18)$$

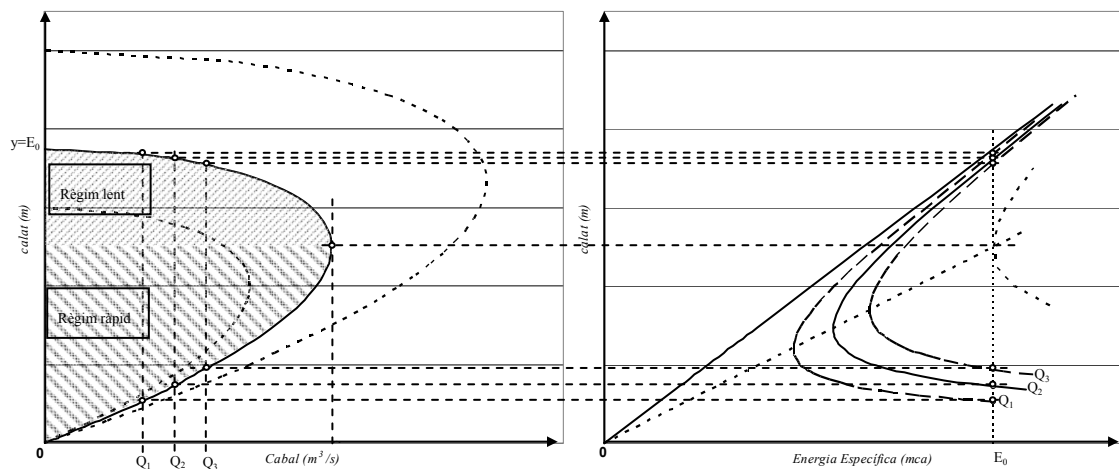


Figura 6.2 Relació cabal-calat en una secció d'un canal, en règim gradualment variat, per a una energia específica donada. Comparació amb la variació de l'energia per a un cabal donat.

aleshores, (6.17) queda:

$$\frac{2 \cdot B \cdot Q^2}{A^2 \cdot 2g} - A = 0 \Rightarrow \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{1}{g \cdot \frac{A}{B}} = 1 \Rightarrow \quad (6.19)$$

que coincideix amb l'expressió (6.15) deduïda a l'apartat anterior:

$$\frac{v^2}{g \cdot \frac{A}{B}} = Fr^2 = 1 \quad (6.20)$$

És a dir, novament es constata l'existència d'un extrem local del cabal; en aquest cas, un màxim, per una energia específica donada, quan $Fr=1$. És interessant adonar-se que la corba en qüestió no és simètrica, depenent la seva asimetria de la geometria de la secció, com es comprova en el següent exemple.

Exercici

Determinar el valor de l'energia específica corresponent al règim crític, en un canal prismàtic de secció rectangular d'ample B .

Tenint en compte que l'àrea mullada en una secció rectangular val:

$$A(y) = B \cdot y \quad (6.21)$$

i que en el cas de règim crític el nombre de Froude val 1, de (6.19), resulta:

$$\frac{Q^2}{(B \cdot y_c)^2} \cdot \frac{1}{g \cdot \frac{B \cdot y_c}{B}} = 1 \Rightarrow \frac{Q^2}{g \cdot B^2 \cdot y_c^3} = 1 \Rightarrow y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}} \quad (6.22)$$

on es pot introduir el concepte de cabal específic (q), com el cabal que circula per unitat d'ample de la secció, és a dir:

$$q = \frac{Q}{B} \quad (6.23)$$

D'aquí es dedueix l'expressió més comunament utilitzada per determinar el calat crític en una secció rectangular en funció del cabal:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (6.24)$$

Amb aquest resultat es pot calcular quina és l'energia específica corresponent:

$$E_c = y_c + \frac{Q^2}{B^2 \cdot y_c^2} \cdot \frac{1}{2g} \Rightarrow E_c = y_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y_c^2} \cdot \frac{Q^2}{B^2 \cdot g} \quad (6.25)$$

Substituint per l'expressió (6.24), resulta:

$$E_c = y_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_c^3}{y_c^2} \Rightarrow E_c = \frac{3}{2} y_c \quad (6.26)$$

Per tant, si la secció és rectangular, la corba que dona la variació en un canal, del cabal en funció del calat per a una energia específica donada, queda dividida exactament en la proporció esmentada a (6.26), tal com s'esquematitza a la figura 6.3. A la mateixa figura es mostra com, en el cas de la corba de variació de l'energia específica en funció del calat per un cabal donat, de la relació (6.26) es desprèn que els punts d'energia mínima (règim crític) corresponents a cada cabal (cadascuna de les corbes de la família definida) han d'estar alineats amb una recta que passa per l'origen i té un pendent $3/2$.

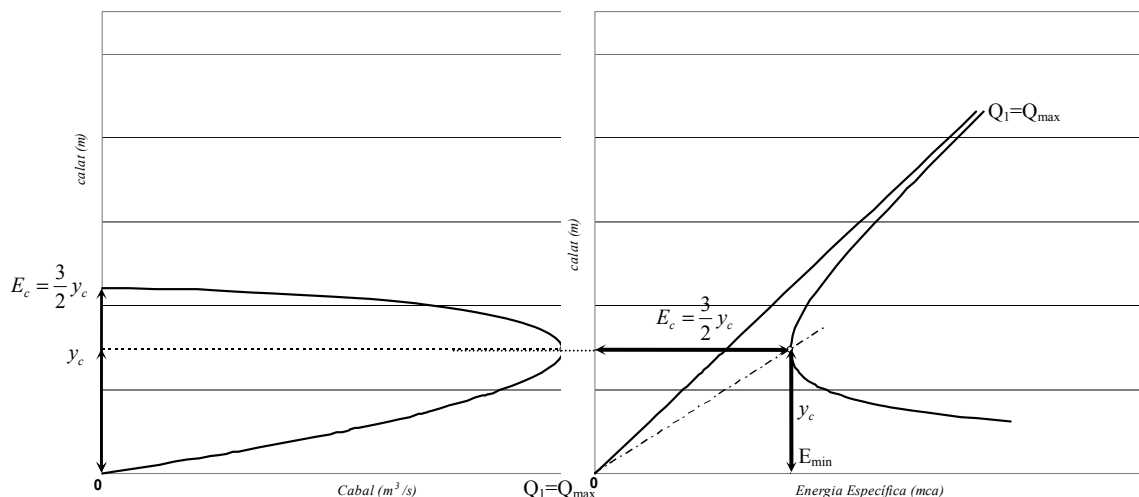


Figura 6.3 Relacions pròpies dels canals prismàtics de secció rectangular.

6.3.1 Discussió

Igualment, a la vista del que s'ha plantejat fins ara, es poden extreure les conclusions següents:

- Conegut el canal i fixada l'energia específica d'un determinat flux existeixen infinits calats possibles, cadascun associat a un cabal diferent, en què cada calat s'estableix per a un cabal determinat.
- Com es comprova a la figura 6.2, si es talla la corba d'energia específica-calat, per a un cabal donat, per exemple Q_1 , Q_2 o Q_3 , amb una recta $E=E_0$, se n'obtenen els mateixos punts que tallant la corba cabal-calat, per l'energia específica constant i igual a E_0 , amb les rectes verticals, respectivament, per Q_1 , Q_2 o Q_3 .
- Quan $Fr=1$, l'energia específica és mínima i el cabal transportat és el màxim possible. Per tant, es podria pensar que el més idoni seria dissenyar el funcionament hidràulic de qualsevol flux en làmina lliure, de manera que a totes les seccions $Fr=1$. Res més lluny de la realitat. Es dona la particularitat que aquesta condició induïx el flux a una inestabilitat elevada, com es detalla més endavant.
- Dit d'una altra manera: donat un canal concret i donada una energia específica, no es pot transportar un cabal més gran que el corresponent al règim crític ($Fr=1$). Qualsevol cabal superior a aquest, per ser transportat en el canal en qüestió, requereix una energia específica també més gran.

6.4 Règim crític. Règim lent i ràpid. Propagació d'una pertorbació

Tal com s'ha introduït als apartats anteriors, el règim crític és aquell en el qual el cabal circula amb la mínima energia específica. Aquest cabal coincideix amb el màxim que és possible que s'estableixi per a aquell canal amb l'energia esmentada. Aquest règim s'ha definit com el règim crític, i s'ha pogut demostrar, per tots dos casos, que en aquesta situació el paràmetre adimensional

$$Fr^2 = \frac{v^2}{g \cdot \frac{A}{B}} \quad (6.27)$$

que rep el nom de nombre de Froude, val:

$$Fr^2 = 1 \quad (6.28)$$

Per simplificar, i tenint en compte que dimensionalment

$$\frac{A(y)}{B} = \frac{[L]^2}{[L]} = [L] \quad (6.29)$$

és una longitud característica dins del flux (p. ex. en canals rectangulars és igual al calat). Aleshores, el nombre de Froude es pot dir que, multiplicant numerador i denominador per $\rho \cdot L^2$, correspon al quocient entre forces d'inèrcia i forces gravitatòries que actuen sobre el flux:

$$Fr^2 = \frac{v^2}{g \cdot L} = \frac{\rho \cdot L^2 \cdot v^2}{\rho \cdot g \cdot L^3} = \frac{F_{inèrcia}}{F_{gravitatòries}} \quad (6.30)$$

En particular, tenint en compte que s'ha establert que en règim crític $Fr=1$, aleshores aquest règim es caracteritza pel fet que les forces d'inèrcia s'igualen a les gravitatòries.

Tenint tot això en compte i suposant, per simplificar (sense perdre generalitat), que es treballa en un canal rectangular o, a manca d'aquest, en una secció prou ampla, és vàlid:

$$\frac{A(y)}{B} = y \quad (6.31)$$

El nombre de Froude es pot escriure aleshores:

$$Fr^2 = \frac{v^2}{g \cdot y} \quad (6.32)$$

És obvi que si aquest paràmetre és adimensional, i al numerador es troba la velocitat mitjana del flux, aleshores el denominador, també ha de representar una velocitat, que es coneix com la *celeritat d'ona de pertorbació gravitatòria*.

$$c = \sqrt{g \cdot y} \quad (6.33)$$

6.4.1 Celeritat d'ona d'una pertorbació gravitatòria

A Chaudry (1993) s'analitza la celeritat amb què es mouen les ones de pertorbació gravitatòria en un canal. A continuació es mostra un resum d'aquesta anàlisi, que pot trobar-se també a Puertas i Sánchez-Juny (2001).

La idea parteix d'estudiar què és el que passa en una bassa circular d'aigua quan s'hi llença un petit objecte sòlid al centre. El sòlid genera un tren d'ones que, sortint des del centre va progressant cap a la vora. Aquest tren és degut, com s'explica a Puertas i Sánchez-Juny (2001), a "la pertorbació que la irrupció de la pedra ha generat sobre les condicions hidrostàtiques". Aquesta pertorbació és precisament la que es coneix com a *pertorbació gravitatòria*, i la velocitat amb què es propaga el seu front, com la *celeritat de l'ona de pertorbació gravitatòria*.

La pertorbació generada es transmet en totes les direccions i es forma la imatge, tan característica, d'un tren d'ones concèntriques al voltant del punt d'impacte amb l'aigua i que se n'allunyen. Si aquesta pertorbació es provoca en una bassa allargada (amb l'aigua amb velocitat aturada), la celeritat de l'ona transmet la informació en tots dos sentits.

A la figura 6.4 es mostra un front d'ona que s'està desplaçant amb una celeritat c , en un flux ara amb una velocitat mitjana v , en un canal donat. En aquest esquema, el front d'ona s'està desplaçant respecte d'un observador fix, amb una velocitat aparent:

$$v_w = c + v \quad (6.34)$$

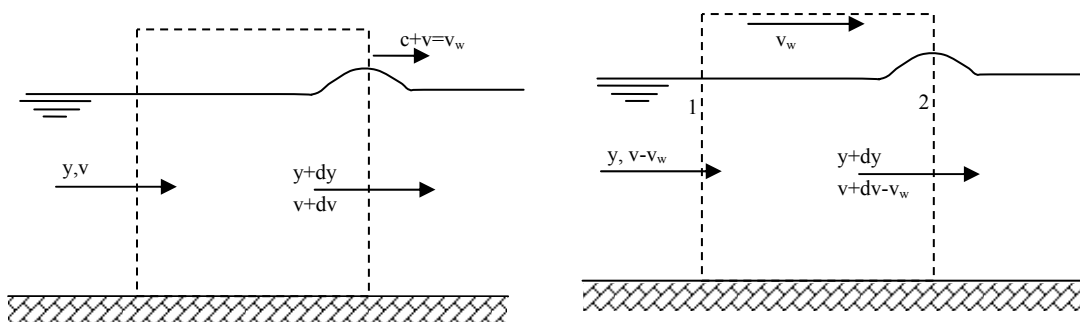


Figura 6.4 Front d'ona que es mou amb una celeritat c , en un canal amb un flux amb una velocitat mitjana v , vist per un observador fix a l'espai (esquerra) i per un observador que es mou amb el front d'ona (dreta).

Una de les hipòtesis bàsiques és admetre que c i v són constants. Aquesta hipòtesi és acceptable si es compleixen les condicions de flux permanent gradualment variat en un tram relativament curt. Així, qualsevol observador que es desplaci amb l'ona, amb una velocitat constant v_w , el que veu és el volum de control de l'esquerra de la figura 6.4 fix en la seva posició i unes velocitats de l'aigua respecte d'aquest observador que es descriuen a la dreta de la mateixa figura.

Acceptant que el canal és horitzontal i rectangular (per simplificar), amb aquest nou esquema es poden analitzar els esforços externs al volum de control, que corresponen a les pressions:

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot y^2 \quad i \quad F_2 = -\frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot (y + dy)^2 \quad (6.35)$$

D'altra banda, la variació de la quantitat de moviment per unitat d'ample és:

$$\rho \cdot Q \cdot \Delta v = \rho \cdot [y \cdot (v - v_w)] \cdot [(v + dv - v_w) - (v - v_w)] = \rho \cdot y \cdot (v - v_w) \cdot dv \quad (6.36)$$

de manera que, imposant el principi de la conservació de quantitat de moviment en un fluid incompressible en règim permanent, resulta:

$$\frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot (y^2 - (y + dy)^2) = \rho \cdot y \cdot (v - v_w) \cdot dv \quad (6.37)$$

En aquesta expressió es poden negligir els termes de segon ordre (dy^2), i queda, després de simplificar mínimament:

$$-g \cdot dy = (v - v_w) \cdot dv \quad (6.38)$$

D'altra banda, es pot escriure també l'equació de continuïtat:

$$y \cdot (v - v_w) = (y + dy) \cdot (v + dv - v_w) \quad (6.39)$$

on, una altra vegada, negligint els termes de segon ordre, resulta:

$$y dv + dy(v - v_w) = 0 \quad (6.40)$$

Finalment, combinant aquesta expressió amb l'obtinguda a (6.38), resulta:

$$(v - v_w)^2 = gy \quad (6.41)$$

és a dir:

$$v_w = v \pm \sqrt{gy} \quad (6.42)$$

Però, cal recordar que s'havia definit la velocitat v_w de l'observador a (6.34) i, per tant, queda:

$$c = \pm \sqrt{gy} \quad (6.43)$$

que és el que es volia comprovar.

6.4.2 Discussió

Seguint amb l'exemple de la pedra que es llença al canal, quan entra a l'aigua que s'està movent en el canal es produeix una pertorbació de la superfície lliure: l'aigua amb més energia hidrostàtica (a la cresta) genera un desequilibri que provoca un moviment oscil·latori i un desplaçament del front. Si l'aigua en aquest canal s'està movent amb una velocitat mitjana v , la velocitat del front d'ona respecte d'un observador extern ve donada per l'expressió (6.42). En aquesta expressió, ambdós signes representen els fronts que van, l'un en el sentit del moviment i l'altre en sentit contrari.

Exercici

Determineu en un canal qualsevol, que tingui un calat mig d'1 m, les velocitats aparents amb què es desplaça aigües amunt i aigües avall un front d'ona generat en llençar-hi una pedra a l'aigua, en funció de la velocitat del flux.

En un canal amb un calat mitjà d'1 m, la celeritat amb la qual es propaga una ona de pertorbació gravitatòria és:

$$c = \pm\sqrt{gy} \approx 3.1 \text{ m/s} \quad (6.44)$$

Aleshores, les velocitats aparents en qüestió, que vénen donades per l'expressió (6.42), són:

Taula 6.1. Velocitats aparents amb què es propaga una ona de pertorbació gravitatòria, en un flux amb una velocitat mitjana v , i calat d'1 m, respecte un observador fix.

$v(\text{m/s})$	$v_w^+(\text{m/s})$	$v_w^-(\text{m/s})$	$Fr(-)$
0	3.1	-3.1	0
1	4.1	-2.1	0.32
2	5.1	-1.1	0.64
3	6.1	-0.1	0.97
3.1	6.2	0	1
4	7.1	0.9	1.29
5	8.1	1.9	1.61

De la taula 6.1, que il·lustra l'exercici anterior, es pot entendre que, si $v < c$, les ones es poden propagar tant aigües avall com aigües amunt. Es pot apreciar com això succeeix mentre els nombres de Froude siguin menors que 1. Quan $v > c$, aleshores només es dona propagació de la informació aigües avall, i es verifica que el nombre de Froude és més gran que 1.

Traslladats aquests raonaments a l'exemple de la pedra que ha servit de punt de partida, es comprèn que, si es llença la pedra al canal de l'exercici anterior quan per aquest circula aigua a 2 m/s, aleshores l'efecte del llançament es propaga tant aigües avall com amunt, mentre que si la velocitat de l'aigua fos de 5 m/s, aleshores la pròpia velocitat del flux arrossegaria aigües avall l'efecte que fa la pedra quan entra a l'aigua, i no es podria desplaçar aigües amunt. A Puertas i Sánchez-Juny (2001) es fa una descripció física més detallada d'aquest fenomen.

A l'apartat 0 ja s'ha definit que, si un calat (y) en un canal rectangular és més gran que el calat crític (y_c), es diu que el règim és lent o subcrític. En aquest cas, es verifica que:

$$Fr^2 = \frac{v_{lent}^2}{g \cdot y_{lent}} < \frac{v_c^2}{g \cdot y_c} = 1, \text{ ja que } v_{lent} < v_c \text{ i } y_{lent} > y_c \Rightarrow F_{inercia} < F_{gravitatories} \quad (6.45)$$

A 6.4.1 s'ha demostrat que:

$$\sqrt{g \cdot y} = c \quad (6.46)$$

és la celeritat de petites ones gravitacionals que es poden donar a aigües poc profundes en canals, com a resultat de qualsevol canvi momentani en la profunditat local de l'aigua. Un d'aquests canvis pot ser degut a pertorbacions o obstacles al canal que provoquen un augment o una disminució del calat (p. ex. l'impacte d'una pedra en llençar-la a un canal); aquestes pertorbacions creen ones que exerceixen el seu pes sobre la resta del flux.

En règim lent, una ona gravitacional com aquesta es pot propagar tant aigües amunt com aigües avall.

Igualment s'havia definit que, si un calat (y) en un canal rectangular és més petit que el calat crític (y_c), aleshores es diu que el règim és ràpid o supercrític. De manera que, contràriament a (6.45), ara resulta:

$$Fr^2 = \frac{v_{\text{rapid}}^2}{g \cdot y_{\text{rapid}}} > \frac{v_c^2}{g \cdot y_c} = 1 \quad , ja \quad que \quad v_{\text{rapid}} > v_c \quad i \quad y_{\text{rapid}} < y_c \Rightarrow F_{\text{inercia}} > F_{\text{gravitatories}} \quad (6.47)$$

Ja s'ha discutit que en règim ràpid una ona gravitacional no es pot propagar aigües amunt, i només ho fa aigües avall.

Aquest és el criteri bàsic per distingir tots dos règims.

6.5 Concepte de secció de control

En hidràulica de canals, s'anomena *controlar el flux* al fet d'establir una condició definitiva del flux a un canal això és, establir una relació definitiva, si pot ser biunívoca, entre y i Q . Més concretament, Chanson (2004) defineix la secció de control en un canal com aquella secció on es donen les condicions de règim crític. Val a dir que els conceptes de "control" i "secció de control" se solen usar com a sinònims.

Així, encara que sembli redundant, es diu que la secció on s'assoleix el control del flux s'anomena *secció de control*. És, per tant, una secció adequada per ubicar-hi estacions d'aforament de cabals. En aquestes estacions, les relacions entre el calat i el cabal circulant s'anomenen *corbes d'aforament*.

Tal com s'acaba de citar, i també s'havia vist en els anteriors apartats 6.2 i 6.3, el flux en règim crític (expressió (6.15)) permet establir l'esmentada relació biunívoca entre el calat i el cabal circulant, relació que és independent de n i d'altres circumstàncies no controlades.

La localització de les seccions de control a un canal prismàtic està governada per l'estat del flux que depèn del pendent (i), de la secció del canal i del cabal circulant. Així, si el règim és lent, les seccions de control s'han de trobar sempre aigües avall, ja que aquestes poden afectar el flux aigües amunt. Mentre que si el règim és ràpid, s'han de trobar aigües amunt, perquè en aquest cas afecten el flux aigües avall.

6.6 Exercicis proposats

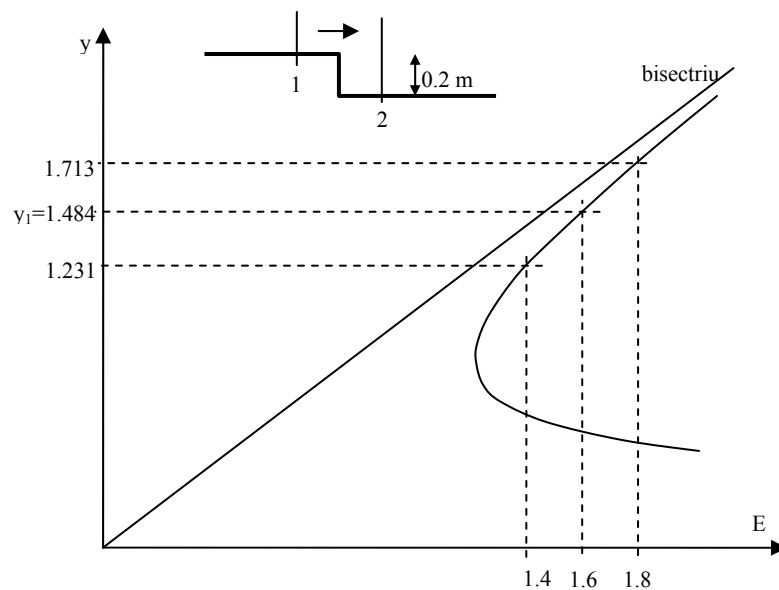
1. Discutiu si les preguntes següents són vertaderes o falses:
 - L'energia específica no depèn de l'energia potencial.

- En un canal prismàtic, la derivada del calat respecte de l'abscissa només depèn del pendent de la solera, del pendent motriu i del nombre de Froude.
- En un flux en làmina lliure, quant més gran sigui el nombre de Reynolds més gran que 1 és el nombre de Froude.
- El nombre de Froude a una secció d'un canal, per a un cabal constant, és sempre creixent amb el calat.
- En règim turbulent rugós, les pèrdues d'energia en una conducció a làmina lliure no depenen de la viscositat.
- Una secció en la qual es forma un règim crític és una secció de control.
- Una secció on es dona un canvi de pendent en el sentit del moviment, de major a menor, serveix de secció de control.
- En una secció en la qual es forma un règim crític, per definició, les forces d'inèrcia s'igualen amb les gravitatòries.
- En analitzar la variació de l'energia específica segons el calat en un canal, es constata l'existència d'un calat pel qual l'energia específica és màxima. Aquest calat correspon al règim crític.
- Per a una energia específica donada en un canal, en analitzar la variació del calat per diferents cabals circulants, es constata que existeix un calat pel qual el cabal circulant és màxim.
- El cabal citat de la pregunta anterior és l'idoni per al disseny en canals, ja que és el que permet una capacitat màxima de desguàs.
- Quant més ample és un canal, més petit és el calat crític corresponent a un cabal determinat.

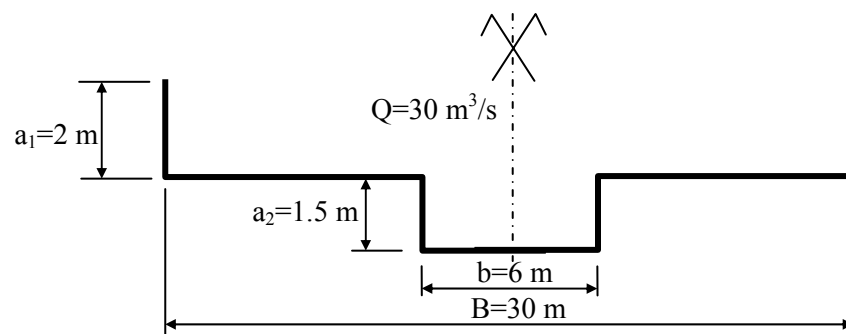
En un canal prismàtic de secció rectangular de 5 m d'ample, pendent de 0.1% i coeficient de rugositat de Manning de 0.020, pel qual hi circulen 10 m³/s d'aigua: (vegeu les 5 qüestions següents)

- Si el pendent fos de l'1%, tindria un calat crític més alt.
 - Si el coeficient de Manning fos més alt, tindria un calat uniforme més alt.
 - L'energia específica corresponent al règim crític val 1.112 m.
 - Un calat d'1.177 m té un nombre de Froude $Fr=0.5$.
 - Si el nombre de Froude assoleix $Fr=4$, li correspon una energia de velocitat molt més gran que l'energia de pressió.
2. Les set qüestions següents es refereixen al gràfic de la figura. Discutiï si són vertaderes o falses. Aquesta corba d'energia específica en funció del cabal, per a un cabal donat, correspon a un canal de secció rectangular de 2 m d'ample que presenta una caiguda de 0.20 m en el sentit del moviment. Negligint qualsevol pèrdua de càrrega entre 1 i 2:
- El cabal circulat Q és aproximadament 4.48 m³/s.
 - El calat a la secció 1 ($y_1=1.484$ m) donat a la figura no és possible, ja que en tractar-se d'una caiguda hauria de ser el calat crític.

- El calat a la secció 2 és $y_2=1.231$.
- El calat crític és $y_c=0.80$ m.
- L'energia específica corresponent al calat crític és $E_c=1.2mca$.
- Si el canal té un coeficient de Manning de 0.013 i el calat d'1.713 m correspongués al règim uniforme, aleshores el pendent del canal seria 7.1‰.
- La corba d'energia específica per al mateix cabal, corresponent a un canal de 3m d'ample, quedaria a l'esquerra de la corba dibuixada a la figura.



3. Representeu gràficament la corba de calat - energia específica per a un cabal donat de $3 \text{ m}^3/\text{s}$ en un canal prismàtic de secció rectangular de 2.5 m d'ample, pendent geomètric 0.001 i coeficient de Manning 0.015. Discutiu la dependència de la corba amb el coeficient de Manning, el pendent, l'ample del canal i el cabal.
4. Determineu, amb l'ajut d'un full de càlcul, la corba calat - energia específica de la secció de la figura, per a un cabal donat de $50 \text{ m}^3/\text{s}$.



7 Ressalt hidràulic. Dissipació d'energia

7.1 Descripció del fenomen

El ressalt hidràulic és un fenomen local que es produeix en un flux en làmina lliure que es dona quan, per a determinats condicionaments hidràulics tant aigües amunt com avall, es produeix un canvi de règim ràpid (supercrític) a règim lent (subcrític). Si el règim és permanent, es tracta d'una ona estacionària que es caracteritza per la important dissipació d'energia que es produeix en el flux. D'aquesta definició es dedueix que es manifesta amb un canvi sobtat (fenomen local) del calat, que passa, en el sentit del moviment, d'un nivell baix a un nivell alt.

Sovint succeeix en un canal aigües avall d'una comporta lliscant de regulació (desguàs sota comporta), en la part d'aigües avall d'un sobreexidor o en canvis bruscs de pendent (d'elevats pendents a més suaus).

Si la variació en el calat és petita, l'aigua no puja de manera brusca, sinó que hi passa a través d'una sèrie d'ondulacions que van disminuint gradualment de mida, es coneix aquest cas com a *ressalt ondulant*. Per contra, si el canvi en la profunditat és gran (*ressalt estable*), s'hi involucra una important pèrdua d'energia, que permet mantenir el remolí que es crea localment (figura 7.1). És a dir, aigües avall del ressalt el contingut d'energia és significativament menor que abans d'ell.

$$E_1 > E_2 \Rightarrow \Delta E = E_1 - E_2 \quad (7.1)$$

Es fa servir la notació següent:

- E_1 : és l'energia específica abans del ressalt.
- E_2 : és l'energia específica després del ressalt.

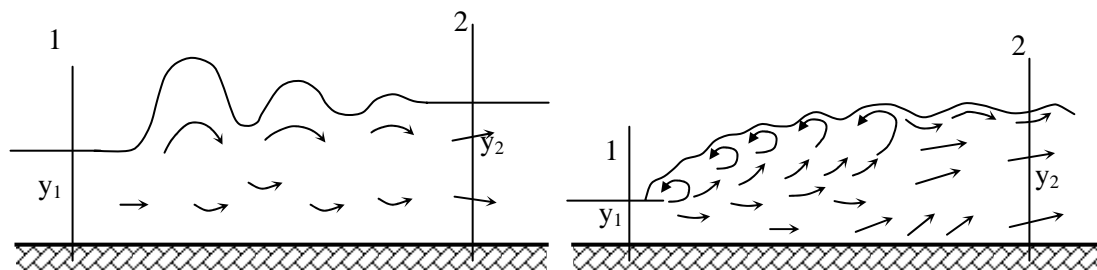


Figura 7.1 Esquema d'un ressalt ondulant i d'un ressalt estable.

7.2 Ressalt hidràulic en canals de secció rectangular.

Per definició, s'anomenen calats conjugats al parell de calats aigües amunt i avall del ressalt, o calat inicial i final, respectivament.

7.2.1 Definició de força específica

Si s'aplica el principi de conservació de la quantitat de moviment en la direcció del flux, a un tram sensiblement horitzontal ($\theta \approx 0$) i curt d'un canal prismàtic, es poden tenir en compte les simplificacions següents:

6. Si el tram de canal considerat és curt, es poden negligir els efectes de la fricció amb els contorns.
7. Si el tram es considera pràcticament horitzontal, es pot negligir la component del pes de l'aigua en la direcció del moviment.
8. I, finalment, si el canal se suposa prismàtic, aleshores s'accepta la hipòtesi de distribució de velocitats aproximadament uniforme, per la qual cosa els coeficients de Boussinesq a cada secció es poden considerar $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$

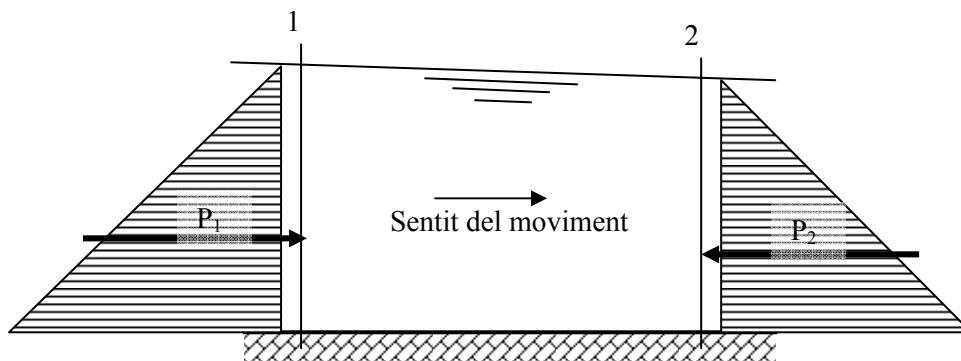


Figura 7.2 Esquema de les accions que actuen en un volum de control definit per dues seccions 1 i 2 properes, en un canal prismàtic i un tram pràcticament horitzontal.

Amb tot, resulta:

$$\rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1) = P_1 - P_2 \quad (7.2)$$

on P_1 i P_2 són les forces hidrostàtiques a banda i banda del volum de control, que valen

$$P_i = \gamma \cdot \bar{z}_i \cdot A_i \quad (7.3)$$

essent \bar{z} la distància al centre de gravetat de les respectives àrees mullades A_i per sota de la superfície lliure. Substituint la relació (7.3) a l'equació (7.2) i escrivint-la segons la velocitat mitjana a cada secció ($v_i = Q/A_i$):

$$\frac{Q^2}{g \cdot A_1} + \bar{z}_1 \cdot A_1 = \frac{Q^2}{g \cdot A_2} + \bar{z}_2 \cdot A_2 \quad (7.4)$$

igualtat que és vàlida a qualsevol secció del canal que es consideri. Per tant es pot escriure:

$$F = \frac{Q^2}{g \cdot A} + \bar{z} \cdot A \quad (7.5)$$

que rep el nom de *força específica*, on el primer sumand correspon a la quantitat de moviment del flux a través d'una secció transversal A , per unitat de temps i unitat de pes, i el segon sumand representa la força per unitat de pes d'aigua o, el que és geomètricament equivalent, el moment estàtic de primer ordre respecte de la superfície lliure.

Donats la geometria del canal i el cabal circulat, es pot analitzar com varia la força específica segons el calat, per a un cabal donat. Es comprova, en aquest cas, que les dues rames que mostra la forma parabòlica de la corba són:

- Rama CM_2 : és asimptòtica a l'eix horitzontal i cap a la dreta.¹⁶
- Rama CM_1 : augmenta cap amunt i indefinidament cap a la dreta (no té cap asimptota).¹⁷

Així, amb aquesta forma, una mateixa força específica es pot donar en dos possibles calats, l'un en règim lent i l'altre en règim ràpid. Es comprova que aquests dos calats són, precisament, els calats inicial i final del ressalt, que reben el nom de *calats conjugats*:

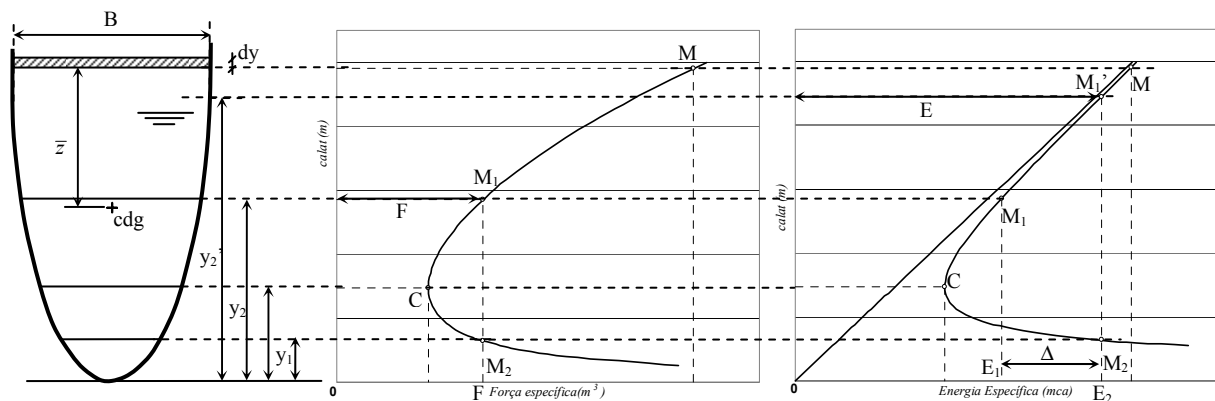


Figura 7.3 Variació de la força específica segons el calat per a un cabal i un canal donats. Comparació amb la corba d'energia específica.

Si es busca el valor del mínim de la corba de força específica:

$$\frac{dF}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{Q^2}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dA}{dy} + \frac{d(\bar{z} \cdot A)}{dy} = 0 \quad (7.6)$$

Si el calat (y) varia en una quantitat dy , aleshores la quantitat $(\bar{z} \cdot A)$ canvia en:

$$\Delta(\bar{z} \cdot A) = \left[A \cdot (\bar{z} + dy) + B \cdot \frac{(dy)^2}{2} \right] - \bar{z} \cdot A \quad (7.7)$$

on cadascun dels termes que es troba entre parèntesis és:

- $A \cdot (\bar{z} + dy)$: moment estàtic de primer ordre per a la variació del braç estàtic de l'àrea A .

¹⁶ Quan el calat tendeix a zero, la força específica tendeix a infinit.

¹⁷ Quan el calat tendeix a infinit, la força específica i la derivada de la força específica respecte del calat també tendeixen a infinit.

– $B \cdot \frac{(dy)^2}{2}$: moment estàtic de primer ordre per a la variació de l'àrea A

Aquests dos termes representen l'increment del moment estàtic de primer ordre, prenent com a origen la superfície lliure. negligint $(dy)^2$, queda:

$$\frac{d(\bar{z} \cdot A)}{dy} \approx A \cdot \frac{dy}{dy} = A \quad (7.8)$$

Per tant, finalment, tenint en compte que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dF}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{Q^2}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dA}{dy} + A = 0 \\ \frac{dA}{dy} = B \\ v = \frac{Q}{A} \end{array} \right\} -\frac{v^2}{g} \cdot B + A = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{g} = \frac{A}{B} \Rightarrow \quad (7.9)$$

d'on resulta una expressió que ha de començar a ser familiar:

$$\Rightarrow \frac{v^2}{g \cdot \frac{A}{B}} = 1 = Fr \quad (7.10)$$

Efectivament, coincideix amb el criteri de règim crític que ja s'ha deduït anteriorment. Per tant, es conclou que la mínima força específica es dona per al calat crític (i viceversa). I igual com es deia que, per a una mateixa energia específica E_1 , existien dos calats (alterns), un per a cada règim, també per a una mateixa força específica F_1 existeixen dos calats (conjugats), també un per a cada règim. Per exemple, considerant que en ambdues corbes (figura 7.3) els nivells més baixos (y_1) són iguals (punts M_1), en aquest cas les dues corbes indiquen conjuntament que $y_2 < y_2'$ sempre. I, a més, la corba d'energia específica mostra que E_2 (energia específica per y_2) $<$ E_2' (energia específica per y_2') que és igual que E_1 .

És a dir, perquè F_1 sigui constant, el calat ha de canviar de y_1 a y_2 , a costa de perdre energia $E_2 - E_1 = \Delta E$.

De tota manera, cal adonar-se que els raonaments que s'ha fet fins ara s'han establert a partir de l'anàlisi d'un volum de control totalment genèric, definit a la figura 7.2. En aquest volum de control, en cap moment no s'ha imposat el fet que entre les seccions 1 i 2 es produeixi un ressalt. Tot i això, a partir de la conclusió observada al paràgraf anterior, i atès que el flux cal que s'estableixi de la secció de més energia a la de menys energia, necessàriament es dedueix, de l'observació de la figura 7.3, que el calat en règim ràpid (y_1) és el que ha de ser el corresponent a la secció d'aigües amunt i el calat en règim lent (y_2), el corresponent a la d'aigües avall. I, per tant, en aquestes condicions, necessàriament entre 1 i 2 s'ha de produir un canvi de règim de ràpid a lent, que té associada una dissipació d'energia ΔE , és a dir, s'ha de produir un ressalt. Per tant, y_1 i y_2 són calats conjugats.

Cas particular. Si el canal és rectangular, i es poden considerar negligibles les forces de fricció externes i el pes efectiu de l'aigua¹⁸, aleshores es poden considerar iguals la força específica abans i després del ressalt:

¹⁸ Es pot acceptar aquesta hipòtesi sempre que el pendent del canal sigui molt petit i que el tram d'estudi (entre la secció abans i després del ressalt) sigui relativament curt.

$$\frac{Q^2}{g \cdot A_1} + \bar{z}_1 \cdot A_1 = \frac{Q^2}{g \cdot A_2} + \bar{z}_2 \cdot A_2 \quad (7.11)$$

essent B l'ample del canal rectangular

$$\begin{aligned} Q &= v_1 \cdot A_1 & i & Q = v_2 \cdot A_2 \\ A_1 &= B \cdot y_1 & i & A_2 = B \cdot y_2 \\ \bar{z}_1 &= \frac{y_1}{2} & i & \bar{z}_2 = \frac{y_2}{2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot y_1}} \quad (7.13)$$

Si se substitueix convenientment a (7.11) i s'escriu l'expressió que en resulta en funció de Fr_1^2 i de y_2/y_1 , queda:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 - (2 \cdot Fr_1^2 + 1) \cdot \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 2 \cdot Fr_1^2 = 0 \Rightarrow \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right) - 2 \cdot Fr_1^2\right] \cdot \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) = 0 \Rightarrow \quad (7.14)$$

Aquesta equació es verifica quan qualsevol dels dos factors sigui nul. És a dir, quan:

$$\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) = 0 \Rightarrow y_2 = y_1 \quad (7.15)$$

o bé quan:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2 \cdot Fr_1^2 = 0 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1\right) \quad (7.16)$$

Per tant, si la secció és rectangular, la força específica es conserva en dos casos: quan els calats amunt i avall coincideixin (règim uniforme) o quan siguin diferents però compleixin l'equació (7.16).

Cal adonar-se que en els calats que compleixen aquesta darrera equació, si el calat aigües amunt (y_1) és un règim ràpid necessàriament el d'aigües avall (y_2) ha de correspondre a un règim lent.¹⁹

¹⁹ Només cal tenir en compte que, essent les seccions 1 (aigües amunt) i 2 (aigües avall) les definides a la figura 7.2, igual que s'ha pogut escriure la fórmula de Belanger com:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right)$$

també es pot escriure:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1\right)$$

I, per tant, es pot obtenir fàcilment la relació entre els respectius nombres de Froude:

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right) = \frac{2}{\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1} \Rightarrow \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right) \left(\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1\right) = 4$$

De manera que, si a la secció 1 aigües amunt li correspon un règim ràpid, és a dir, $Fr_1^2 > 1$, aleshores:

$$\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 > 2$$

I, per tant:

Tal com ja s'ha dit anteriorment, els calats que relaciona l'equació (7.16) y_2 i y_1 són precisament els calats conjugats (inicial i final, respectivament) del ressalt. Aquesta es coneix com la fórmula de Belanger dels calats conjugats en seccions rectangulars de canals prismàtics. Cal fer notar que, si a la figura 7.2 es canvia l'ordre de les seccions i aleshores la secció 1 passa a ser la secció aigües avall i la 2 la secció aigües amunt, l'expressió indicada continua essent igualment vàlida.

7.2.2 Longitud del ressalt

S'accepta, en general, que la longitud (L) d'un ressalt s'ha de definir com la distància mesurada entre la secció d'inici i la secció immediatament aigües avall, on acaba la zona d'agitació turbulenta.

Es pot considerar que:

$$L \approx k \cdot (y_2 - y_1), \text{ amb } k = 4 \div 6.5 \quad (7.17)$$

on k és un paràmetre que depèn de la geometria del canal:

- Si el canal és rectangular $k=4...6.5$, que a efectes pràctics se sol prendre $k \approx 6$.

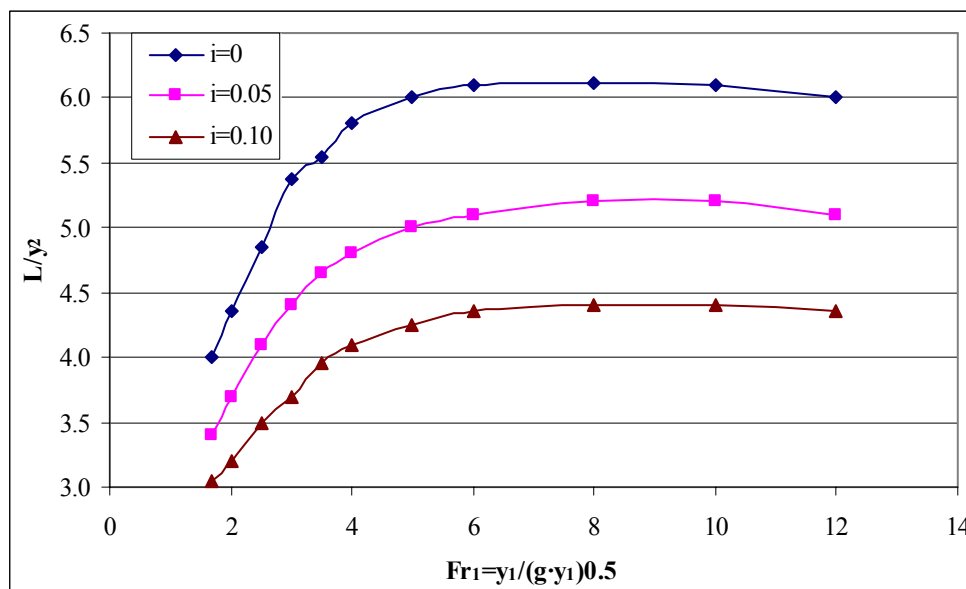


Figura 7.4 Longitud del ressalt hidràulic en un canal rectangular horitzontal. (Font: US Bureau of Reclamation, 1974).

Hi ha d'altres estimacions per al cas de canal rectangular, com es pot veure a la figura 7.4. És una corba adimensional que, segons el pendent (i) del canal, depèn del nombre de Froude a la secció del règim ràpid i dóna el valor de la longitud del ressalt adimensionalitzat amb el calat a la zona de règim lent.

$$2(\sqrt{1+8Fr_2^2} - 1) < 4$$

que condueix directament a la conclusió que necessàriament

$$Fr_2^2 < 1$$

El flux a la secció 2, aigües avall, ha de ser subcrític, tal com es volia comprovar.

- Si el canal és de secció trapezoidal, k depèn del talús dels costats inclinats de la secció:

Taula 2. Coeficient k (equació (7.17)) per determinar la longitud dels ressalls en un canal trapezoidal, en funció del talús m de la secció (1 v:m h).

Talús m	0	0.5	0.75	1	1.25	1.5
k	5	7.9	9.2	10.6	12.6	15

Com que la longitud resultant d'un ressalt és petita, per comparació de la longitud total del canal se sol acceptar, a efectes generals, que el ressalt es produeix com una sobre-elevació sobtada del nivell d'aigua.

7.2.3 Pèrdua d'energia

Com s'ha pogut veure a la figura 7.3, la dissipació d'energia és un fenomen inherent en un ressalt. Si es considera, per simplificar, un canal prismàtic de secció rectangular, i de pendent petit en un tram prou curt, es pot determinar explícitament l'energia que es dissipa.

Escrivint el valor de l'energia a cada secció immediatament aigües amunt i avall del ressalt, es té que:

$$E_1 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$E_2 = y_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$
(7.18)

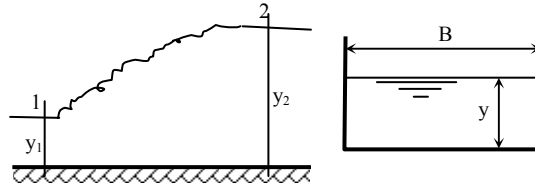


Figura 7.5 Esquema d'un ressalt en un canal de secció rectangular i pendent petit.

Així, es pot determinar la variació d'energia ΔE , reescriuint la velocitat segons el cabal i l'àrea mullada de la secció:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = y_1 - y_2 + \frac{Q^2}{2gB^2} \left(\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} \right)$$
(7.19)

A continuació, cal imposar que y_1 i y_2 són calats conjugats en un ressalt hidràulic i, per tant, que s'hi conserva la força específica entre ambdues seccions:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{Q^2}{g \cdot B \cdot y_1} + \frac{y_1}{2} \cdot B \cdot y_1 = \frac{Q^2}{g \cdot B \cdot y_2} + \frac{y_2}{2} \cdot B \cdot y_2$$
(7.20)

que es pot reordenar de la manera següent

$$\frac{Q^2}{g \cdot B} \left(\frac{y_2 - y_1}{y_1 \cdot y_2} \right) = \frac{B \cdot y_2^2}{2} - \frac{B \cdot y_1^2}{2}$$
(7.21)

$$\frac{Q^2}{g \cdot B} \left(\frac{y_2 - y_1}{y_1 \cdot y_2} \right) = \frac{B}{2} (y_2 - y_1) (y_2 + y_1) \quad (7.22)$$

$$\frac{Q^2}{g \cdot B} = \frac{B}{2} (y_2 + y_1) \cdot y_1 \cdot y_2 \quad (7.23)$$

Substituint aquesta darrera expressió (7.23) a la (7.19), queda:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = y_1 - y_2 + \frac{1}{2B} \left(\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} \right) \cdot \frac{B}{2} (y_2 + y_1) \cdot y_1 \cdot y_2 \quad (7.24)$$

que es pot simplificar i desenvolupar de la manera següent:

$$\Delta E = y_1 - y_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{y_1^2 \cdot y_2^2} \right) (y_2 + y_1) \cdot y_1 \cdot y_2 \quad (7.25)$$

$$\Delta E = y_1 - y_2 + \frac{1}{4 y_1 \cdot y_2} (y_2^2 - y_1^2) (y_2 + y_1) \quad (7.26)$$

$$\Delta E = \frac{4 y_1^2 y_2 - 4 y_1 y_2^2 + y_2^3 - y_2 y_1^2 + y_1 y_2^2 - y_1^3}{4 y_1 \cdot y_2} \quad (7.27)$$

I, finalment, resulta:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 \cdot y_1 \cdot y_2} \quad (7.28)$$

7.3 Diferents tipus de ressalt. Ressalt hidràulic lliure i submergit

7.3.1 Tipus de ressalt

A Chow (1994) es presenta una classificació interessant dels ressalls hidràulics segons el nombre de Froude en la seva secció en règim ràpid. A continuació se'n mostra un resum:

A) $1 < Fr_1 < 1.7$: *ressalt ondulant*

Es caracteritza per l'existència d'ondulacions permanents, però no s'aprecia cap mena de trencament en la continuïtat de l'aigua. No s'hi forma escuma ni entrada d'aire.

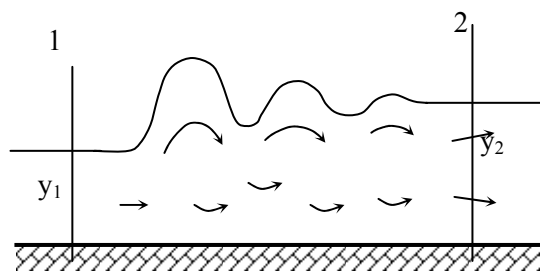


Figura 7.6. Esquema d'un ressalt ondulant.

B) $1.7 < Fr_1 < 2.5$: *ressalt dèbil*

En aquest cas s'observa la presència de petits remolins sobre la superfície del ressalt. Aigües avall, però, la superfície s'aprecia uniforme. En un ressalt com aquest la pèrdua d'energia es baixa.

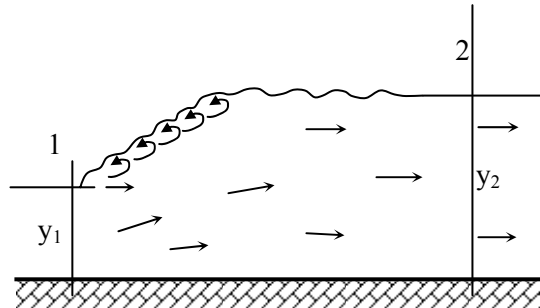


Figura 7.7. Esquema d'un ressalt dèbil.

C) $2.5 < Fr_1 < 4.5$: *ressalt oscil·lant*

La superfície lliure, aigües avall del ressalt, presenta oscil·lacions de període irregular que poden viatjar al llarg del canal fins i tot algun quilòmetre.

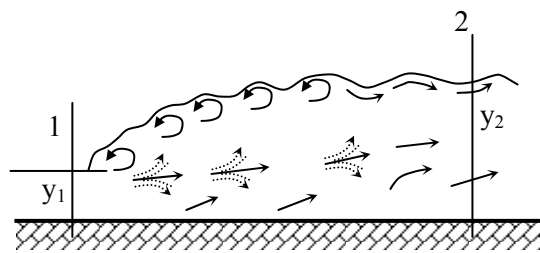


Figura 7.8. Esquema d'un ressalt oscil·lant.

D) $4.5 < Fr_1 < 9.0$: *ressalt estable*

Aquesta és la situació ideal per dissipar energia (en general, entre el 45% i el 70% de la inicial). Es caracteritza per la formació d'un gran vòrtex i pel fet que aigües avall (en la zona de règim lent) la làmina d'aigua és prou estable.

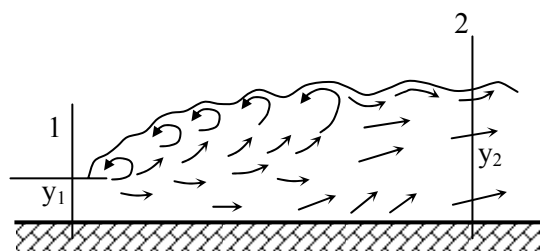


Figura 7.9. Esquema d'un ressalt estable.

E) $9.0 < Fr_1$: *ressalt fort*

Aparentment, és molt semblant a l'anterior, però en aquest cas és més inestable, perquè es generen més ondulacions aigües avall, essent l'aspecte força caòtic. La dissipació d'energia és propera al 85% de la inicial.

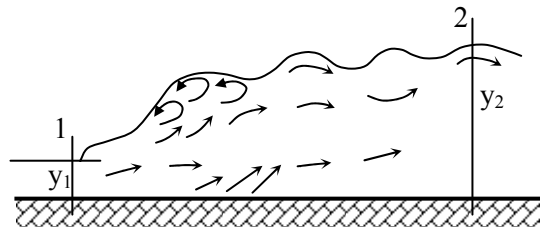


Figura 7.10. Esquema d'un ressalt fort.

Exercici

A continuació es compara l'energia que es dissipa en un ressalt corresponent a cadascun dels casos anteriors. Sense perdre generalitat de la comparació, se suposa canal prismàtic de secció rectangular de 2 m d'ample i pendent petit. El cabal circulat és de $2 \text{ m}^3/\text{s}$. S'obvia la manera com s'aconsegueix la formació del règim ràpid aigües amunt, i s'analitzen els casos següents, on els calats corresponents al règim ràpid són: 0.22 m, 0.26 m, 0.32 m, 0.38 m, 0.48 m, 0.54 m, 0.64 m i 0.74 m.

Taula 3. Caracterització hidràulica dels ressalts analitzats.

y_1 (m)	v_1 (m/s)	E_1 (mca)	Fr_1 (-)	y_2 (m)	ΔE (mca)	$\%E_{\text{dissipada}}$	
0.22	13.64	9.70	9.28	2.78	6.86	70.72	Ressalt fort
0.26	11.54	7.05	7.22	2.53	4.44	63.08	Ressalt estable
0.32	9.38	4.80	5.29	2.24	2.47	51.43	Ressalt estable
0.38	7.89	3.56	4.09	2.02	1.43	40.15	Ressalt oscil·lant
0.48	6.25	2.47	2.88	1.73	0.59	23.79	Ressalt oscil·lant
0.54	5.56	2.11	2.41	1.59	0.34	16.06	Ressalt dèbil
0.64	4.69	1.76	1.87	1.40	0.12	7.03	Ressalt dèbil
0.74	4.05	1.58	1.50	1.25	0.04	2.24	Ressalt ondulant

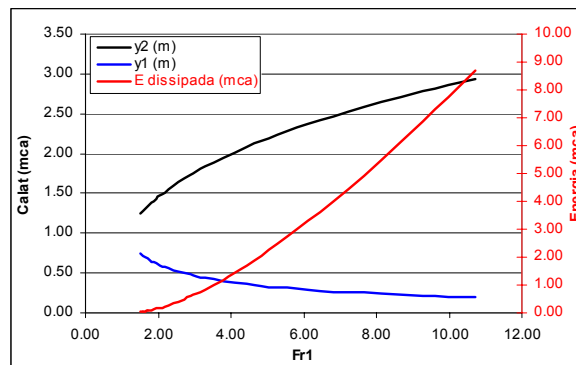


Figura 7.11. Comparació dels calats conjugats enfront del nombre de Froude amb l'energia dissipada en el ressalt.

7.3.2 Ressalt submergit o negat

En règim permanent, l'exemple més típic de ressalt submergit es produeix en un desguàs sota comporta (figura 7.12) quan el flux, aigües avall d'aquesta, imposa a la sortida un calat superior al conjugat del règim ràpid. L'ofegament del ressalt provoca que el doll d'aigua que surt sota la comporta queda submergit sota una massa d'aigua que no mostra un moviment preferent en cap direcció i una agitació elevada. D'aquesta manera, el flux queda dividit en una part inferior on l'aigua està en moviment, i una part superior, on l'aigua hi està pràcticament estancada.

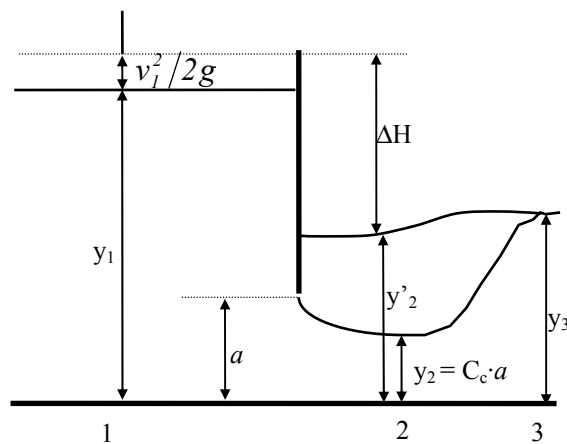


Figura 7.12 Esquema típic d'un desguàs sota comporta submergit pel nivell d'aigües avall.

Com a primera aproximació, es pot analitzar el flux que s'hi estableix, considerant les simplificacions següents (notació usada a la figura 7.12):

- El flux a la sortida de la comporta té una velocitat efectiva corresponent al calat y_2 però, en canvi, la càrrega de pressió és deguda al calat y_2' .
- L'energia que es dissipa es considera deguda fonamentalment a l'expansió que es produeix entre y_2 i y_3 . Tot i que es produeix alguna pèrdua de càrrega entre 1 i 2, aquesta se suposa negligible comparada amb l'anterior.

Per tant, amb tot això es pot plantejar la igualtat de quantitat de moviment entre les seccions 2 i 3:

$$\frac{q^2}{g \cdot y_2} + \frac{y_2'^2}{2} = \frac{q^2}{g \cdot y_3} + \frac{y_3^2}{2} \quad (7.29)$$

de manera que, si es divideix tot per y_3^2 , es pot obtenir l'expressió següent, que dona la relació de submergència de la comporta:

$$\frac{y_2'}{y_3} = \left[1 + 2 \cdot Fr_3^2 \cdot \left(1 - \frac{y_3}{y_2} \right) \right]^{1/2} \quad (7.30)$$

Cal fer notar que, per les condicions de partida que s'han imposat, el calat y_3 és més gran que el calat y_2 i, a més, les condicions a la secció 3 són de règim subcrític; per tant, en qualsevol cas:

$$2 \cdot Fr_3^2 \cdot \left(1 - \frac{y_3}{y_2} \right) < 0 \quad (7.31)$$

Així doncs, l'expressió (7.30) té solució només en el cas que:

$$Fr_3^2 > \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{y_3}{y_2} - 1 \right)} \quad (7.32)$$

I, a més, aquesta solució dona sempre que $y_2' < y_3$. Com és obvi, el cas límit en el qual $y_2' = y_3$ correspon al cas de desguàs lliure i aleshores l'equació (7.30) coincideix amb la fórmula de Belanger.

Per acabar d'entendre com l'ofegament del desguàs de la comporta n'afecta el funcionament, cal analitzar el funcionament del pas de l'aigua sota una comporta, que s'analitza al capítol 7.

7.4 Ressalt en canals de secció no rectangular

No existeix una expressió anàloga a la de Belanger per als canals no rectangulars. En aquests casos, cal anar al punt de partida i plantejar l'equació de conservació de la quantitat de moviment o, el que és el mateix, la conservació de la força específica (igualtat (7.4)), que, suposant negligible el pes de l'aigua en la direcció del moviment i la longitud del ressalt poc significativa, es pot resoldre, numèricament, en diverses iteracions.

Exercici

A la secció trapezoidal de la figura 7.13, per on circula un cabal de $10 \text{ m}^3/\text{s}$, es dona un ressalt hidràulic. Si se sap que el calat corresponent al règim ràpid és igual a 0.5 m , es demana determinar-ne el calat conjugat, com també l'energia que s'hi dissipa.

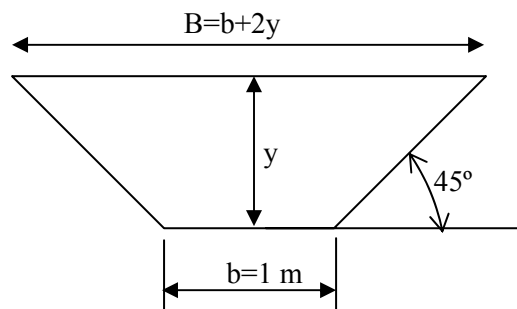


Figura 7.13 Esquema de la secció trapezoidal.

L'exercici, per determinar els calats conjugats, es resol plantejant l'equació d'igualtat de forces específiques (definició (7.5)) entre abans i després del ressalt:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{Q^2}{g \cdot A_1} + \bar{z}_1 \cdot A_1 = \frac{Q^2}{g \cdot A_2} + \bar{z}_2 \cdot A_2 \quad (7.33)$$

Tot el primer terme d'aquesta expressió és conegut, mentre que del segon es coneix tot menys el calat corresponent al règim lent. Per tant, resulta una equació no lineal amb una sola incògnita, que cal resoldre convenientment.

Es necessita conèixer l'àrea del trapezi, com també la profunditat a la qual es troba el seu centre de gravetat:

$$A_i = \frac{b + B_i}{2} \cdot y_i \quad i = 1, 2 \quad (7.34)$$

$$\bar{z}_i = y_i - \frac{y_i}{3} \frac{b + 2B_i}{b + B_i} \quad i = 1, 2 \quad (7.35)$$

Per tant, en aquestes condicions, si $y_1 = 0.5 \text{ m}$, i la secció ve definida tal com es descriu a la figura 7.13, resulta que:

$$B_1 = 2 \text{ m} \quad (7.36)$$

$$A_1 = 0.75 \text{ m}^2 \quad (7.37)$$

$$\bar{z}_1 = 0.222 \text{ m} \quad (7.38)$$

I, per tant, si el cabal circulat és $10 \text{ m}^3/\text{s}$, la velocitat a l'inici del ressalt val:

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = 13.33 \text{ m/s} \quad (7.39)$$

I el nombre de Froude corresponent al règim ràpid és:

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \frac{A_1}{B_1}}} = 6.95 \quad (7.40)$$

tractant-se d'un ressalt estable. En aquestes condicions, l'energia i la força específica abans del ressalt valen, respectivament:

$$E_1 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 0.5 + \frac{13.33^2}{2g} = 9.561 \text{ m} \quad (7.41)$$

$$F_1 = \frac{Q^2}{g \cdot A_1} + \bar{z}_1 \cdot A_1 = \frac{10^2}{g \cdot 0.75} + 0.222 \cdot 0.75 = 13.758 \text{ m}^3 \quad (7.42)$$

Escrivint la igualtat de forces específiques abans i després del ressalt segons el calat en règim lent, resulta:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow 13.758 = \frac{10^2}{g \cdot A_2(y_2)} + \bar{z}_2(y_2) \cdot A_2(y_2) \quad (7.43)$$

$$A_2 = (1 + y_2) \cdot y_2 \quad (7.44)$$

$$\bar{z}_2 = y_2 - \frac{y_2}{6} \frac{3 + 4y_2}{1 + y_2} \quad (7.45)$$

que queda finalment:

$$13.758 = \frac{100}{g \cdot (1 + y_2) \cdot y_2} + y_2^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} y_2 \right) \quad (7.46)$$

En resoldre-la dona:

$$y_2 = 2.948 \text{ m} \quad (7.47)$$

i queda una energia, un cop s'ha produït el ressalt, de:

$$E_2 = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} = 2.948 + \frac{0.859^2}{2g} = 2.985 \text{ m} \quad (7.48)$$

que representa una dissipació d'energia del 68.8 %.

7.5 Exercicis proposats

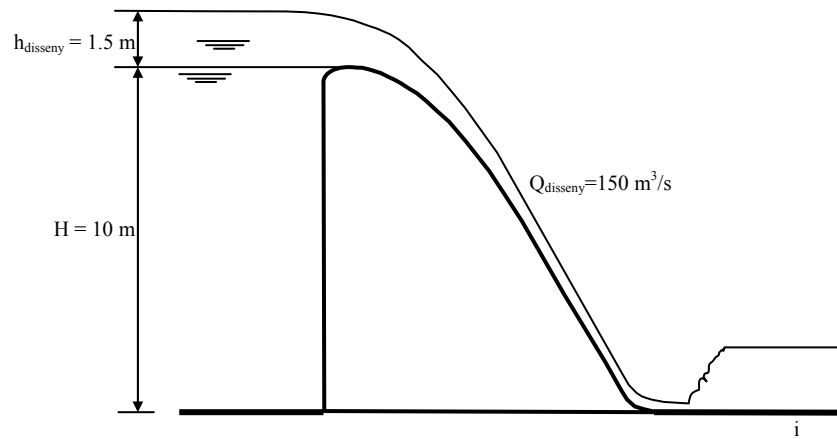
1. Discutir si les següents afirmacions son verdaderes o falses:
 - Com més gran sigui el nombre de Froude a la zona de règim ràpid, més gran és la dissipació d'energia en un ressalt hidràulic.
 - En un riu en condicions naturals no es pot produir un ressalt hidràulic.
 - En un ressalt hidràulic, quant més gran és la diferència de calats entre el règim ràpid i el lent, més gran és la dissipació d'energia que s'hi dona.
 - En un canal, es pot passar de règim lent a règim ràpid en el sentit del moviment gràcies a l'existència del ressalt hidràulic.
 - La localització d'un ressalt depèn de la rugositat del canal o riu.
 - En el desguàs sota comporta, si és lliure, segur que es troba en règim ràpid.
 - Una de les hipòtesis bàsiques que s'han d'acceptar per obtenir la fórmula de Belanger és que les distribucions de pressió a les seccions d'estudi són hidrostàtiques.
 - Una condició imprescindible perquè es produeixi un ressalt en un canal és que hi hagi alguna secció en règim crític.
 - El ressalt hidràulic sempre provoca una pèrdua d'energia.
 - En determinades circumstàncies, el ressalt hidràulic permet passar de règim lent a ràpid.
 - Aigües avall d'un desguàs amb comporta sempre es produeix un ressalt.

1. Un assut de 10 m d'altura i ample $B = 25$ m forma en la seva cresta un perfil estricte, de manera que usa el seu propi cos per evacuar els cabals excedents que hi arriben. El màxim cabal que es preveu que hi circuli per sobre és de $150 \text{ m}^3/\text{s}$. En aquestes condicions, s'estima que la càrrega (energia mecànica per unitat de pes) que es disposa aigües amunt de l'assut és d'1.5 mca (mesurat per sobre de la cresta) i que sobre l'assut el flux experimenta una pèrdua d'energia donada per:

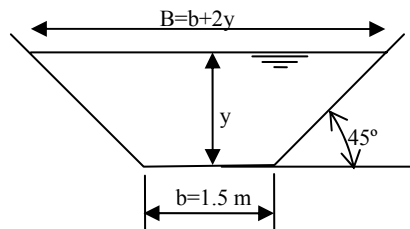
$$0.15 \frac{v_{peu}^2}{2g}$$

Tenint en compte que es vol controlar el vessament sobre l'assut prenent les mesures oportunes per provocar un ressalt hidràulic just al costat del seu peu, i considerant que aigües avall de l'assut es pretén endegar una gran longitud de riu, que es pot prendre de secció rectangular d'ample igual al de l'assut i amb una rugositat donada per un coeficient de Manning $n = 0.025$:

- a. Determineu quina és l'energia que es dissipa en el ressalt.
- b. Calculeu quin és el pendent (i) que cal donar a l'endegament per tal de provocar que es formi un ressalt hidràulic just al peu de l'assut.



2. A la secció trapezoidal de la figura, hi circula un cabal de $15 \text{ m}^3/\text{s}$, i es dona un ressalt hidràulic. El calat corresponent al règim lent és igual a 0.5 m . Es demana que en determineu el calat conjugat, com també l'energia que s'hi dissipa.



8 Moviment gradualment variat

8.1 Equació del moviment

8.1.1 Hipòtesis bàsiques

A continuació, s'analitza el flux gradualment variat en un canal prismàtic. És a dir, la situació en la qual les característiques hidràuliques del moviment no varien en el temps però sí que ho fan, de manera gradual, al llarg del canal. En resum, les característiques principals del flux que s'analitza són:

- Règim permanent, és a dir, independent del temps.
- Línies de corrent paral·leles, de manera que es pot acceptar que la distribució de pressions, a qualsevol secció del canal, és hidrostàtica.

Amb tot, les hipòtesis principals que cal plantejar per a la determinació de l'equació del moviment permanent gradualment variat en un canal són:

- La pèrdua de càrrega per unitat de longitud en una secció és la mateixa que per a un flux uniforme que tingui la mateixa velocitat i el radi hidràulic de la secció. O, dit d'una altra manera, l'equació del flux uniforme es pot emprar per avaluar-ne el pendent motriu (I).

Aquesta és una hipòtesi bàsica, que mai no s'ha acabat de confirmar ni experimentalment ni teòrica, però s'ha comprovat que els errors que pot implicar acceptar-la són petits comparats amb altres incerteses del problema (p. ex., la determinació acurada del coeficient de rugositat de Manning, n).

- El pendent del canal és petit. Aquesta hipòtesi du com a conseqüència que:
 - La profunditat mesurada en la direcció vertical o en la normal al fons coincideixen.
 - El factor corrector de la pressió és $\cos^2 \theta \approx 1$.
 - No es produeixen fenòmens d'entrada d'aire i, per tant, el pes específic de l'aigua es manté constant i, en general, de valor $\gamma \approx 9810 \text{ N/m}^3$.
- El canal és prismàtic (alineament i forma constants).
- La distribució de la velocitat a una secció és fixa i, per tant els coeficients de Coriolis (α) i Boussinesq (β) són constants.
- El coeficient de Manning (n) és independent del calat i constant a través i al llarg del tram de canal considerat.

8.1.2 Equació dinàmica del flux gradualment variat

Considerant les hipòtesis anteriors, l'energia per unitat de pes per sobre del nivell de referència en una secció determinada es pot escriure com:

$$H = z + y + \alpha \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (8.1)$$

Considerant que l'eix horitzontal (x) coincideix amb el fons del canal, es pot fer la derivada de (3.1) en aquesta direcció (respecte de l'eix x). Resulta:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \alpha \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (8.2)$$

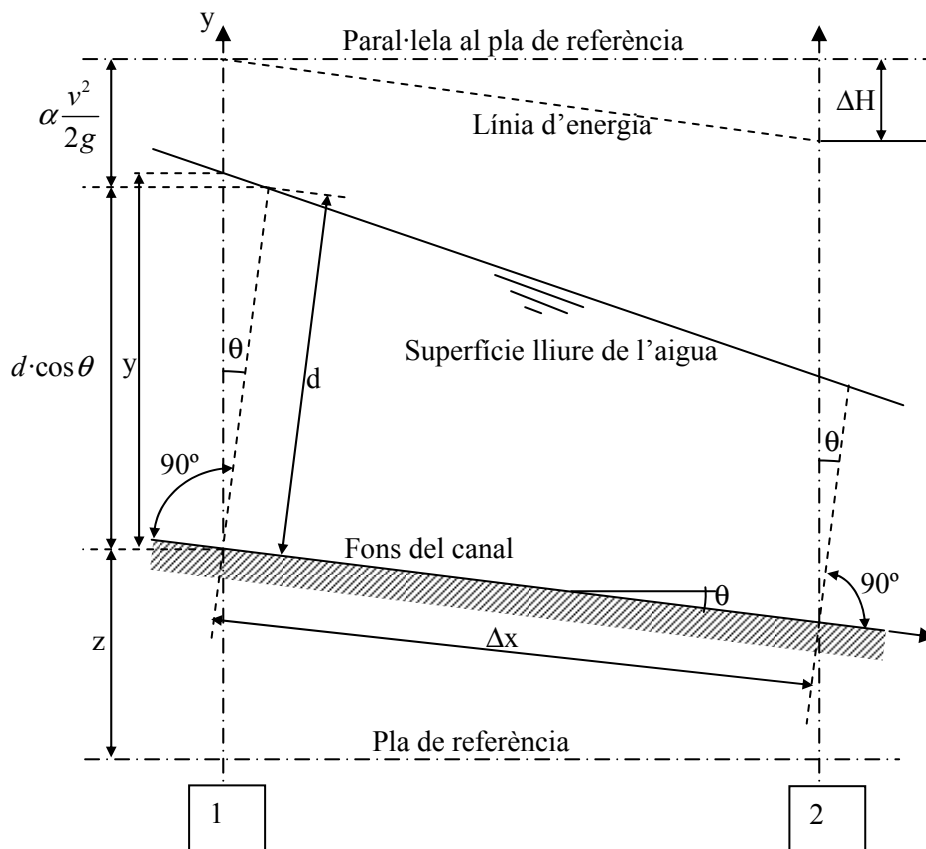


Figura 8.1 Esquema del volum de control definit per dues seccions qualssevol 1 i 2 properes, en un canal prismàtic de pendent θ .

S'hi observa que tant la cota del fons de la secció (z) com l'energia total per unitat de pes (H) disminueixen quan avança x ; per tant:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= -I \\ \frac{dz}{dx} &= -i \end{aligned} \quad (8.3)$$

De manera que (8.2) es pot escriure de la manera següent:

$$-I = -i + \frac{dy}{dx} + \alpha \cdot \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{A^2} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \quad (8.4)$$

on, reordenant termes, queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - I}{1 + \alpha \cdot \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{A^2} \right)} \quad (8.5)$$

i ja que:

$$\alpha \cdot \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{A^2} \right) = \alpha \cdot \frac{Q^2}{2g} \cdot \left(-\frac{2}{A^3} \right) \cdot B = -\alpha \cdot \frac{v^2}{g \frac{A}{B}} \quad (8.6)$$

Si addicionalment es considera que la distribució de velocitats en la secció d'estudi, és aproximadament uniforme ($\alpha \approx 1$), aleshores:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - I}{1 - Fr^2} \quad (8.7)$$

És l'anomenada equació de les corbes de rabeig, vàlida per al cas de moviment gradualment variat, distribució hidrostàtica de pressions, distribució uniforme de velocitats, canal prismàtic i pendents (θ) petits. Es tracta d'una equació diferencial ordinària de primer ordre i no lineal. És necessària, per tant, una condició de contorn en alguna secció del canal (capítol 3 apartat 4):

- Si el règim és lent, la condició de contorn cal que es trobi a l'extrem aigües avall. En tal cas, l'equació s'integra aigües amunt.
- Si el règim és ràpid, la condició de contorn ha trobar-se a l'extrem aigües amunt, i integrar-se aigües avall.
- Si el règim és crític, s'hi aprecien problemes numèrics ja que, en tal cas, el denominador s'anul·la ($1 - Fr^2 = 0$), i això dóna idea de la inestabilitat que presenta aquest règim a la naturalesa.

8.2 Corbes de rabeig en un canal prismàtic

Les possibles relacions entre calat normal (y_0) i calat crític (y_c) permeten establir diferents tipologies dels canals, que condueixen a comportaments hidràulics significativament diferents:

- $y_0 > y_c$. El règim uniforme correspon a valors del nombre de Froude menors que u (règim lent). Per definició, aquests canals s'anomenen *canals de pendent moderat*, que donen lloc a les corbes de rabeig de tipus M (*mild* en anglès).
- $y_0 = y_c$. En aquest cas, el règim uniforme coincideix amb el règim crític. Per definició, aquests s'anomenen *canals de pendent crític*, que donen lloc a les corbes de rabeig de tipus C.
- $y_0 < y_c$. El règim uniforme correspon a règim ràpid. Per definició, s'anomenen *canals de pendent fort*, que donen lloc a les corbes de rabeig tipus S (de l'anglès, *steep*).

Aquests tres tipus de canals responen estrictament a la relació existent entre calat normal (y_0) i calat crític (y_c). És interessant adonar-se que el calat normal depèn de la geometria del canal (secció i pendent), el cabal i la rugositat, mentre que el calat crític ho fa de la secció i el cabal. Això fa que, en un mateix canal (donats la secció, el pendent i la rugositat), en funció del cabal circulat pugui arribar a ser de tipus M, C o S. Per altra banda, existeixen dos tipus més de canals que s'estableixen segons el valor del pendent del canal, és a dir, per a condicions bàsicament geomètriques, que es caracteritzen pel fet que el calat uniforme no hi està definit:

- $y_0 \rightarrow \infty$. El règim uniforme no existeix. Es pot donar en el cas de canals de pendent nul, i donen lloc a les corbes de rabeig de tipus H.
- $y_0 \rightarrow \infty$. El mateix cas es pot donar quan hi ha pendent advers, que dóna lloc a les corbes de rabeig de tipus A. Val a dir que, un petit tram de canal amb pendent advers és possible, tot i que el flux no pot mantenir-se en canals molt llargs.

Amb tot això, les línies paral·leles a una distància del fons y_0 i y_c , divideixen l'espai en tres zones:

- Zona 1: per sobre de la línia superior.
- Zona 2: entre les dues línies.
- Zona 3: per sota de la línia inferior i fins a la solera del canal.

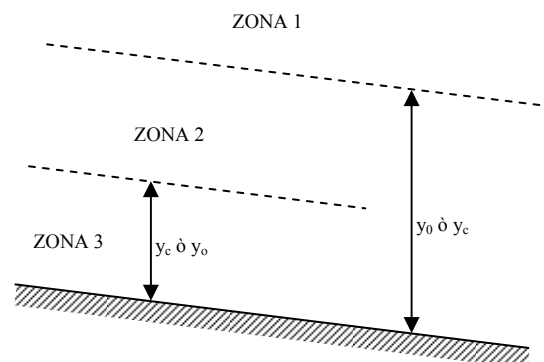


Figura 8.2 Zones en què queda dividit el semiespai per damunt de la solera d'un canal prismàtic.

Per tant, existeixen únicament 13 possibles corbes de rabeig com a solucions de l'equació (8.7) dins de cada regió, resultat de les combinacions possibles de les tres zones amb les tipologies M, S, C, H i A: M1, M2, M3, S1, S2, S3, C1, C2, C3, H2, H3, A2 i A3.

Exercici

En el cas d'un canal prismàtic de secció rectangular d'ample B i coeficient de Manning n estudieu, en funció del cabal circulat, el tipus de canal M, S o C.

Sense perdre generalitat, per a una major simplicitat dels càlculs es planteja el cas d'un canal prismàtic de secció rectangular d'ample B , coeficient de Manning n i pendent geomètric i . Es vol analitzar quan el canal és tipus de M o de tipus S en funció del cabal circulat.

Si s'escriu la fórmula de Manning per obtenir el calat uniforme, en funció del cabal, es té que:

$$i = \frac{n^2 \cdot Q^2}{\left(\frac{B \cdot y_0}{B + 2y_0} \right)^{\frac{4}{3}} B^2 \cdot y_0^2} \quad (8.8)$$

Fixat el cabal Q , la rugositat n i l'ample de canal B , si s'imposa que el calat uniforme (y_0) coincideixi amb el calat crític (y_c), el pendent resultant és el pendent crític que defineix els canals de tipus C. En aquest cas, imposant que el calat uniforme sigui igual al calat crític:

$$y_0 = y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}} \quad (8.9)$$

resulta:

$$i_c = \frac{n^2 \cdot Q^2}{\left(\frac{B \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}}}{B + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}}} \right)^{\frac{4}{3}} B^2 \cdot \left(\frac{Q^2}{B^2 \cdot g} \right)^{\frac{2}{3}}} \quad (8.10)$$

Amb aquesta expressió en un canal donat, és a dir, coneguts l'ample B i el seu coeficient de Manning, es pot calcular el pendent crític associat a cada possible cabal circulant. En els gràfics anteriors (figura 8.3) es poden veure les corbes que defineixen com varia el pendent crític en funció del cabal. De manera genèrica, s'hi aprecia que cada pendent crític es pot donar per dos possibles cabals, fet que provoca l'existència d'un pendent crític mínim relatiu. S'han comparat dues situacions diferents:

- 1) Coeficient de fregament de Manning constant (i , en aquest cas, igual a $n = 0.015$) i ample del canal variable. En aquest cas, s'observa que quant més ample és la secció el valor del mínim pendent crític tendeix a ser menor, alhora que a aquest pendent mínim li correspon un cabal, també, cada cop més gran. Igualment s'hi observen uns encreuaments entre cada corba que fan que, per a cabals inferiors als encreuaments esmentats, el mateix cabal estigui associat a pendents crítics més petits quant més petita sigui la secció i , al contrari, per a cabals majors a aquells en què les corbes es tallen.
- 2) Ample constant (i , en aquest cas, igual a $B = 5$ m) i coeficient de Manning variable. En aquest escenari s'aprecia que, per a cabals constants, menors coeficients de Manning s'associen a menors pendents crítics, i el cabal corresponent al mínim pendent crític és, en cada cas, pràcticament constant.

Essent el pendent geomètric del canal, per exemple $i=0.0044$ (tal com s'il·lustra a la figura 8.3), on $i > (i_c)_{\text{mínim}}$ (en el cas que es mostra, $(i_c)_{\text{mínim}}=0.00344$ al qual li correspon un cabal aproximadament de $12 \text{ m}^3/\text{s}$), un cabal entre 1.885 i $55.28 \text{ m}^3/\text{s}$, el tipus de canal és S. És així ja que el pendent crític corresponent a qualsevol cabal dins d'aquest interval és inferior al pendent geomètric. Per a cabals inferiors a 1.885 o superiors a 55.28 és un canal M, ja que en aquests casos els pendents crítics associats són més grans que el geomètric. A més, com que el pendent de 0.00344 és el menor pendent crític associat al canal de 5 m d'ample i coeficient de Manning 0.015 , per a qualsevol pendent més petit d'aquest valor el canal sempre és M, per a qualsevol cabal.

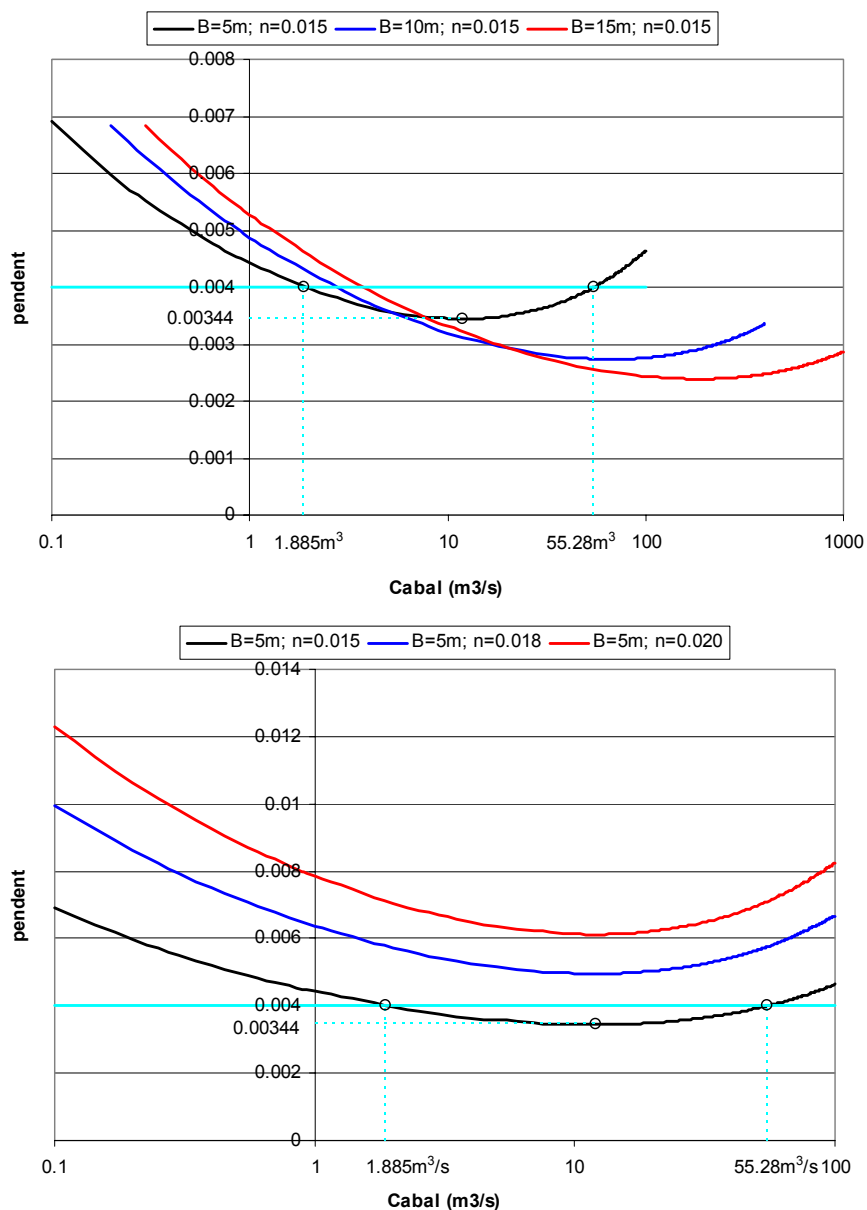


Figura 8.3 Relació entre el pendent crític en un canal prismàtic de secció rectangular d'ample B i coeficient de Manning n en funció del cabal circular.

8.2.1 Corbes M

En un canal M, per definició, s'ha de donar que el calat uniforme sigui més gran que el crític ($y_0 > y_c$), d'on, analitzant la fórmula de Manning, s'observa que el pendent geomètric del canal (i) necessàriament ha de ser menor que el corresponent pendent crític ($i < i_c$) que és aquell que faria que, per a aquella mateixa secció i cabal, ambdós calats (uniforme i crític) coincidissin.

D'altra banda, en el cas de règim uniforme s'ha establert que el pendent motriu corresponent al règim uniforme (I_0) ha de coincidir amb el pendent geomètric del canal (i) ($I_0 = i$). Per tant, per exemple, a la zona 1 d'un canal M, com que es dona que $y > y_0$, aleshores $v < v_0$ i, per tant, $I < I_0$. De manera anàloga es raona per a les zones 2 i 3.

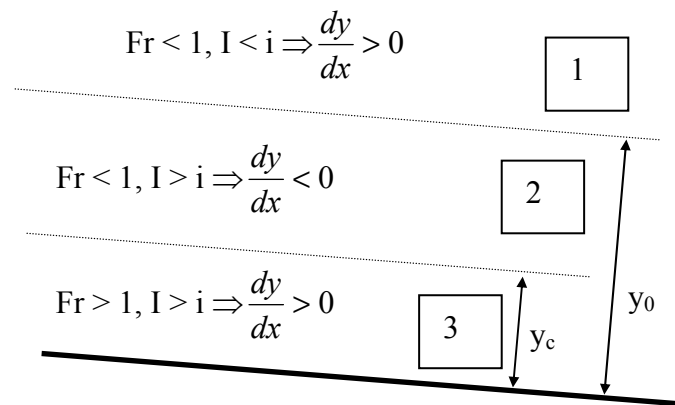


Figura 8.4 Caracterització de les diferents regions que es defineixen en un canal M.

Segons el criteri de signes establert per les abscisses x (veure figura 7.2), $x_2 > x_1$, aleshores, a fi d'entendre els signes de la derivada dy/dx , també cal tenir en compte que:

- Quan $y_1 = y_2$, aleshores la làmina d'aigua és paral·lela a la solera, és a dir el pendent de la làmina lliure coincideix amb el pendent geomètric del canal, i es dona que:

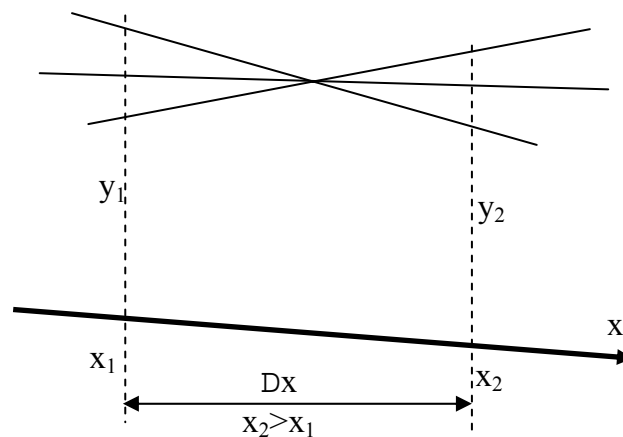
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \text{Pendent de la làmina lliure} = i \quad (8.11)$$

- Si $y_1 > y_2$, aleshores la làmina d'aigua disminueix aigües avall, és a dir el pendent de la làmina lliure és més gran que el pendent geomètric del canal, i aleshores:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{dx} < 0 \Rightarrow \text{Pendent de la làmina lliure} > i \quad (8.12)$$

- Si $y_1 < y_2$, aleshores la làmina d'aigua puja aigües avall, és a dir, el pendent de la làmina lliure és més petit que el pendent geomètric del canal:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow \text{Pendent de la làmina lliure} < i \quad (8.13)$$

Figura 8.5 Consideracions sobre els signes de la derivada dy/dx .

Corba M1. A la figura 8.4 es mostra que a la zona 1 $dy/dx > 0$, és a dir, que augmenta el calat (y) amb l'abscissa (x). Aleshores:

- En el límit, el calat com a molt pot valer: $y \rightarrow \infty$ en aquest cas $v \rightarrow 0$ i, per tant, també $Fr \rightarrow 0$ i $I \rightarrow 0$. Imposant això a l'equació (8.7) es dedueix²⁰:

$$\text{Quan } y \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{dy}{dx} \rightarrow i \Rightarrow \text{El calat } y \text{ tendeix a ser horitzontal.} \quad (8.14)$$

I, com que a la zona 1 la làmina d'aigua ha d'anar disminuint aigües amunt ($dy/dx > 0$), només pot fer-ho, en el límit, fins a y_0 .

- Quan $y \rightarrow y_0$, aleshores $I \rightarrow i$, i imposant-ho a (8.7) s'obté:

$$\text{Quan } y \rightarrow y_0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{El calat } y \text{ tendeix a ser paral·lel a la solera.} \quad (8.15)$$

Aquesta corba és el perfil típic de la làmina d'aigua aigües amunt de la cua d'un embassament. Des del punt de vista pràctic, és un dels perfils més importants.

Corba M2. En aquest cas, dins de la zona 2 s'ha vist que $dy/dx < 0$ (figura 8.4), que significa que el calat ha de disminuir amb l'abscissa. En aquest cas:

- Si $y \rightarrow y_0$, aleshores $I \rightarrow i$ que imposant-ho a (8.7) condueix a (8.15), és a dir, en aquest cas la corba M2 tendeix al règim uniforme en el seu extrem aigües amunt. Per tant, el calat ha d'anar disminuint aigües avall i només pot fer-ho, en el límit, fins a y_c .
- Quan $y \rightarrow y_c$, aleshores el nombre de Froude $Fr \rightarrow 1$, d'on analitzant (8.7) s'obté que:

$$\text{Quan } y \rightarrow y_c \Rightarrow \frac{dy}{dx} \rightarrow \infty \Rightarrow \text{El calat tendeix a ser perpendicular al canal.} \quad (8.16)$$

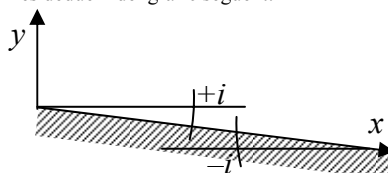
Per tant, la corba M2 tendeix, en el seu extrem aigües avall, a ser perpendicular a la solera i a la línia de y_c .

Aquesta corba correspon al perfil de la làmina d'aigua en un canal prismàtic que arriba a un embassament, on el nivell de la l'aigua es troba per sota de y_c , o entre y_c i y_0 .

Corba M3. Dins de la zona 3 a la figura 8.4 s'ha justificat que $dy/dx > 0$ i, per tant, que és una corba que augmenta el calat quan augmenta l'abscissa (aigües avall):

- Si $y \rightarrow y_c$, aleshores $Fr \rightarrow 1$ i, per tant, de (8.7) s'arriba a la mateixa conclusió que (8.16), i per tant es conclou que la corba M3 tendeix a ser perpendicular a la solera i a la línia de y_c .

²⁰ L'expressió (8.3) és la definició del criteri de signes emprat, de manera que si $dz/dx = -i$, quan s'escriu que $dy/dx \rightarrow i$, significa que la làmina d'aigua tendeix a l'horitzontal, tal com es dedueix del gràfic següent:



- A l'altre extrem, quan $y \rightarrow 0$ implica que $Fr \rightarrow \infty$ i $I \rightarrow \infty$, que de (8.7) es dedueix que:

$$\text{Quan } y \rightarrow y_c \Rightarrow \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{indeterminació} \quad (8.17)$$

L'extrem teòric aigües amunt intercepta el fons del canal ($y \rightarrow 0$) i, per tant, $v \rightarrow \infty$. En aquest extrem, la corba M3 teòricament no existeix.

Aquest és el perfil que es dona sota una comporta quan l'obertura d'aquesta és menor que el valor del calat crític.

8.2.2 Corbes S

Un canal S s'ha definit com aquell on $y_0 < y_c$ de manera que, analitzant la fórmula de Manning, s'observa que $i > i_c$.

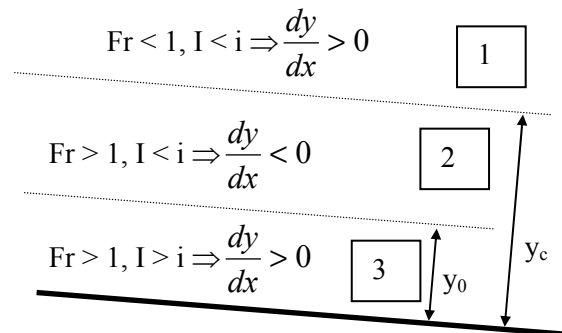


Figura 8.6 Caracterització de les diferents regions que es defineixen en un canal S.

Corba S1. En la zona 1 a la figura 8.6 es justifica que $dy/dx > 0$, és a dir el calat augmenta aigües avall (amb l'abscissa):

- Quan $y \rightarrow y_c$, aleshores $Fr \rightarrow 1$, que condueix l'equació del flux gradualment variat (8.7) a la conclusió obtinguda a (8.16). De manera que les corbes S1 tendeixen a ser perpendiculars a la solera i a la línia de y_c .
- En canvi, quan $y \rightarrow \infty$, la $v \rightarrow 0$ i, per tant, $Fr \rightarrow 0$ i $I \rightarrow 0$, de manera que s'arriba al resultat obtingut a (8.14). Això vol dir que la làmina d'aigua tendeix a posar-se horitzontal.

Corba S2. Dins de la zona 2, la figura 8.6 mostra que $dy/dx < 0$, de manera que aquestes corbes disminuiran el calat amb l'abscissa.

- Si $y \rightarrow y_c$, s'entén que $Fr \rightarrow 1$, de manera que, igual que abans, s'arriba a la conclusió de (8.16). Així resulta que la corba S2 tendeix a ser perpendicular a la solera i a la línia de y_c .
- Quan $y \rightarrow y_0$, s'arriba a que $I \rightarrow i$, i es pot concloure (8.15). Per tant, resulta que, en aquest cas, la làmina d'aigua tendeix a posar-se paral·lela a la solera.

Corba S3. A la zona 3 s'ha comprovat que $dy/dx > 0$ (figura 8.6), i es justificant que el calat augmenta aigües avall. Aleshores:

- Quan $y \rightarrow y_0$, s'obté que $I \rightarrow i$, i de l'equació (8.7) es conclou (8.15). Això vol dir que, en una corba S3, el perfil de la làmina d'aigua tendeix a posar-se paral·lela a la solera.

- Si $y \rightarrow 0$ condueix a $Fr \rightarrow \infty$ i $I \rightarrow \infty$, de manera que s'arriba a (8.17). Que, com ja s'ha dit, és una indeterminació. Així, l'extrem teòric aigües amunt intercepta el fons del canal de manera que la corba S3 en aquest extrem teòricament no existeix, perquè $y \rightarrow 0$ i, per tant, $v \rightarrow \infty$.

8.2.3 Corbes C

Aquest és un cas particular, ja que cal que es doni que $y_0 = y_c$, que només s'aconsegueix quan el pendent geomètric del canal (i) coincideix amb el corresponent pendent crític, que és aquell que fa que, per a la mateixa secció i cabal, ambdós calats coincideixin, és a dir: $i = i_c$.

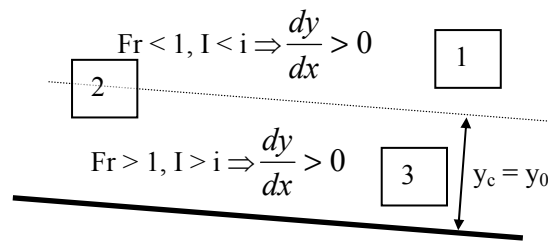


Figura 8.7 Caracterització de les diferents regions que es defineixen en un canal C.

Corba C1. A la zona 1 de la figura 8.7 es desprèn que $dy/dx > 0$, és a dir, el calat augmenta amb l'abscissa (aigües avall). Aleshores, pot succeir en els casos extrems que:

- $y \rightarrow y_c \equiv y_0$, ja que en aquest cas $I \rightarrow i_c$, això condueix l'equació (8.7) a la indeterminació següent:

$$\text{Quan } y \rightarrow y_c \Rightarrow \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow \text{indeterminació} \quad (8.18)$$

- $y \rightarrow \infty$, de manera que $v \rightarrow 0$ i per tant $Fr \rightarrow 0$ i $I \rightarrow 0$ que fa que (8.7) tendeixi a l'expressió (8.14). Això vol dir que la làmina d'aigua tendeix a ser horitzontal.

Corba C2. La zona 2 es redueix a una línia paral·lela a la solera, a una distància igual al calat crític que, com ja s'ha dit, coincideix amb l'uniforme. És un flux totalment inestable que cal evitar.

Corba C3. Corresponent a la zona 3 en la qual $dy/dx > 0$ i, per tant, el calat també ha d'augmentar amb l'abscissa. Aleshores, en el límit, es pot donar que:

- $y \rightarrow 0$, que es tradueix, com ja s'ha vist, que $Fr \rightarrow \infty$ i $I \rightarrow \infty$ i condueix (8.7) a la indeterminació (8.17).
- I, d'altra banda, $y \rightarrow y_c \equiv y_0$, que condueix a l'altra indeterminació (8.18).

8.2.4 Corbes H

Corba H1. La corba corresponent a la zona 1 no existeix ja que si el pendent del canal és nul es comprova que el calat uniforme $y_0 \rightarrow \infty$.

Corba H2. Si que existeix, en canvi, a la zona 2. Fàcilment es verifica que cal que es compleixi que $dy/dx < 0$ i, per tant, el calat ha de disminuir aigües avall. Aleshores, els casos extrems corresponen a:

- $y \rightarrow y_0 \rightarrow \infty$, que condueix que el pendent motriu $I \rightarrow i \rightarrow 0$ i, per tant, (8.7) tendeix a les conclusions vistes tant a (8.14) com a (8.15), que en aquest cas són equivalents. Per tant, la corba H2 tendeix, aigües amunt, a l'horizontal.
- En canvi, si $y \rightarrow y_c$, aleshores $Fr \rightarrow 1$, que es tradueix en l'expressió analitzada a (8.16). Per tant, H2 tendeix, al seu extrem aigües avall, a ser perpendicular a la solera i a la línia de y_c .

Corba H3. És una corba idèntica a M3.

8.2.5 Corbes A

Corba A1. Igual que en el cas de la corba H1, aquesta tipologia de corbes no existeix, ja que y_0 , en aquest cas, no és real.

Corba A2. És una corba idèntica a H2.

Corba A3. És una corba idèntica a H3.

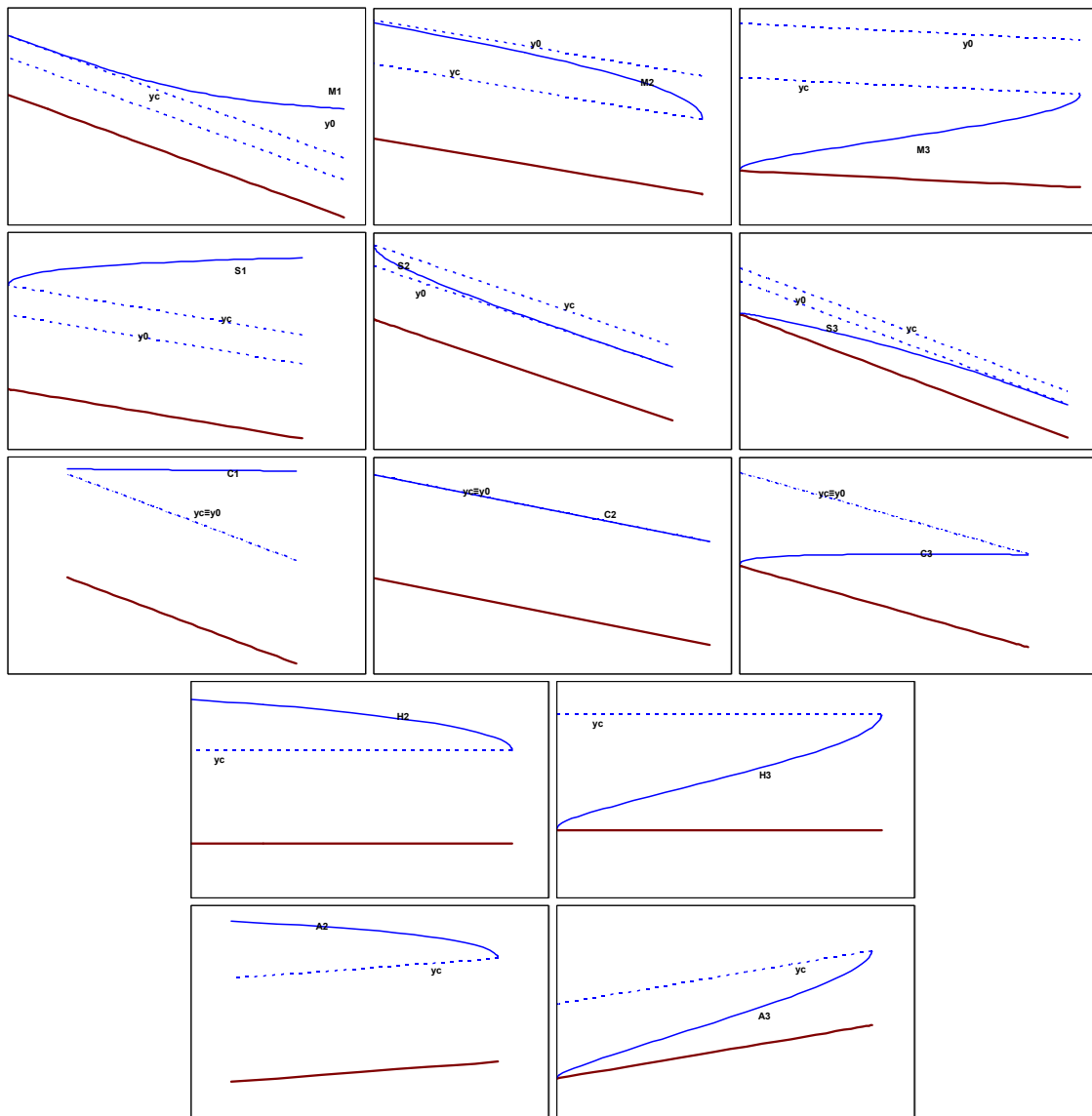


Figura 8.8 Possibles corbes de rabeig en un canal en funció del tipus de canal.

8.3 Càlcul de les corbes de rabeig

8.3.1 Mètode d'integració gràfica

Siguin dues seccions d'abscisses x_1 i x_2 i calats y_1 i y_2 . La distància al llarg del canal entre elles és:

$$x = x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{dy} dy \quad (8.19)$$

Si es suposen valors per al calat (y) i es calculen els valors corresponents de dx/dy , que correspon a l'invers de (8.7), equació dinàmica del flux gradualment variat, el valor de x és l'àrea ombrejada formada per la corba, l'eix i les ordenades de dx/dy corresponents a y_1 i y_2 , tal com s'aprecia a la figura 8.9.

Aquest mètode es mostra adequat per al càlcul del perfil de la làmina d'aigua en canals prismàtics i no prismàtics de qualsevol forma i pendent. És un procediment senzill i fàcil de seguir, sobretot en canals prismàtics, tot i que pot presentar problemes en el cas de càlcul en lleres naturals (i no prismàtics en general).

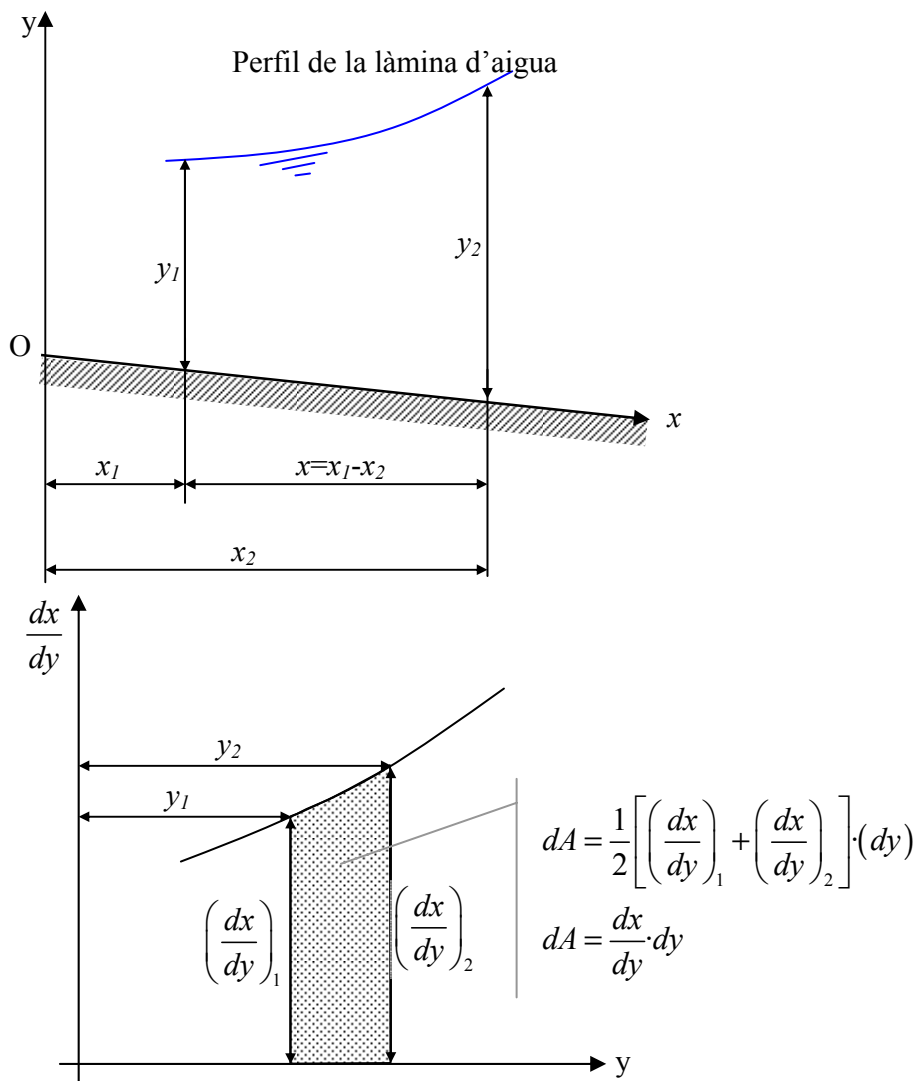


Figura 8.9 Possibles corbes de rabeig en un canal en funció del tipus de canal.

8.3.2 Mètode pas a pas (*step method*)

Donades dues seccions contigües en un canal prismàtic distants entre elles Δx , tal com s'esquematitza a la figura 8.10, entre elles es pot plantejar el balanç d'energia a partir del trinomi de Bernoulli, i en resulta:

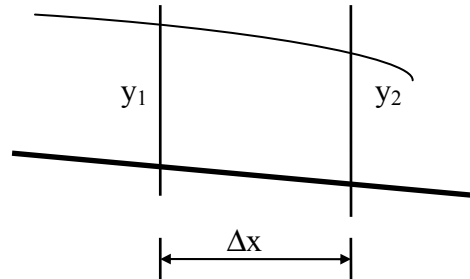


Figura 8.10 Nomenclatura típica de les seccions de càlcul d'una corba de rabeig.

$$z_1 + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12} \quad (8.20)$$

on ΔH_{12} correspon al terme de pèrdues d'energia repartides, que s'hauria d'escriure:

$$\Delta H_{12} = I_{12} \cdot \Delta x = \frac{\bar{v}_{12}^2 \cdot \bar{n}_{12}^2}{R_{h12}^{4/3}} \cdot \Delta x \quad (8.21)$$

Com que només es coneix el comportament hidràulic de les seccions en què s'ha discretitzat el canal (figura 8.10), una manera explícita d'escriure els valors representatius tant de la velocitat com del coeficient de Manning, com del radi hidràulic del tram comprès entre les seccions 1 i 2, és fer-ho a partir de la mitjana dels valors corresponents al pendent motriu a cadascuna de les dues seccions. La mitjana que s'utilitza comunament és l'aritmètica (expressió (8.22)), tot i que en alguns casos pot ser adequada la geomètrica o fins i tot l'armònica.

$$\Delta H_{12} = I_{12} \cdot \Delta x = \frac{I_1 + I_2}{2} \cdot \Delta x \quad (8.22)$$

A partir d'aquí, si, per exemple, la condició de contorn a la secció 1 (y_1) és coneguda, i es pretén calcular el perfil de la superfície lliure aigües avall, cal procedir de la manera següent: suposat conegut el calat d'aigua a la secció 1 (y_1) es considera un valor y_2^* a partir del qual es pot determinar l'àrea mullada corresponent $A_2(y_2^*)$ i, amb ella, la velocitat mitjana $v_2(y_2^*)$ i el seu radi hidràulic $R_{h2}(y_2^*)$. Així, se'n pot determinar el seu pendent motriu $I_2(y_2^*)$ i, òbviament, les pèrdues d'energia repartides, $\Delta H_{12}(y_2^*)$, amb l'expressió (8.22). Substituint a (8.20) es pot analitzar si ambdós membres de la igualtat són iguals. En cas afirmatiu, ja s'ha acabat el procés en cas contrari cal procedir amb una nova iteració. El problema és determinar un nou valor de y_2 per poder continuar amb el procés iteratiu.

En general, sigui quina sigui la condició de contorn coneguda, l'expressió (8.20) es pot escriure:

$$H(y_1) = H(y_2) + \varepsilon \cdot \Delta H_{12}(y_2) \quad (8.23)$$

on:

- si el règim és ràpid, $\varepsilon = 1$ i l'extrem 1 és l'extrem aigües amunt, i

- si el règim és lent, $\varepsilon = -1$ si l'extrem 1 és l'extrem aigües avall.

Si es suposa un valor inicial $y_2 = y_2^*$, es pot calcular $H(y_2^*)$ i $\Delta H_{12}(y_2^*)$; d'aquesta manera, en general, s'obté:

$$H \neq H(y_2^*) + \varepsilon \cdot \Delta H_{12}(y_2^*) \quad (8.24)$$

Ara cal determinar l'increment Δy_2 que permeti que:

$$H = H(y_2^* + \Delta y_2) + \varepsilon \cdot \Delta H_{12}(y_2^* + \Delta y_2) \quad (8.25)$$

Desenvolupant en sèrie de Taylor fins al primer ordre:

$$H \approx H(y_2^*) + \frac{dH}{dy_2} \cdot \Delta y_2 + \varepsilon \cdot \Delta H_{12}(y_2^*) + \varepsilon \cdot \frac{d\Delta H_{12}}{dy_2} \cdot \Delta y_2 \quad (8.26)$$

Si es coneix el valor de les dues derivades de l'expressió (8.25), es pot determinar l'increment Δy_2 ²¹:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(z + y + \frac{v^2}{2g} \right) = 0 + 1 + \frac{1}{g} \cdot v \cdot \frac{dv}{dy} = 1 + \frac{v}{g} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{Q}{A} \right) = \\ &= 1 + \frac{Q \cdot v}{g} \cdot \left(-\frac{1}{A^2} \cdot \frac{dA}{dy} \right) = 1 - \frac{Q \cdot v}{g} \cdot \frac{B}{A^2} = \\ &= 1 - \frac{v^2}{g \cdot \frac{A}{B}} = 1 - Fr^2 \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta H}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{I_1 + I_2}{2} \cdot \Delta x \right) = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{dI_2}{dy} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{n^2}{R_h^{4/3}} \right) = \\ &= \frac{\Delta x \cdot Q^2 \cdot n^2}{2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{A^2 \cdot R_h^{4/3}} \right) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Cal notar que aquesta expressió depèn de la geometria de la secció.

a Cas de canal prismàtic rectangular i molt ample

En un canal prismàtic rectangular i molt ample, es compleix que²²:

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{B \cdot y}{B + 2 \cdot y} \approx y \quad (8.29)$$

²¹ Observació: en endavant, a tot arreu hi hauria d'haver el subíndex 2, però no es posa per comoditat.

²² Suggeriment: intenteu fer el mateix desenvolupament en el cas d'una secció no rectangular molt ampla (p. ex., circular, triangular, rectangular molt ampla, etc.) i vegeu quines complicacions apareixen en el desenvolupament.

Aleshores:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta H}{dy} &= \frac{\Delta x \cdot Q^2 \cdot n^2}{2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{A^2 \cdot R_h^{4/3}} \right) = \frac{\Delta x \cdot Q^2 \cdot n^2}{2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{B^2 \cdot y^2 \cdot y^{4/3}} \right) = \\
 &= \frac{\Delta x \cdot Q^2 \cdot n^2}{2 \cdot B^2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y^{10/3}} \right) = -\frac{10}{3} \cdot \frac{\Delta x \cdot Q^2 \cdot n^2}{2 \cdot B^2} \cdot \frac{1}{y^{13/3}} = \\
 &= -\frac{5}{3} \cdot \Delta x \cdot \frac{Q^2 \cdot n^2}{(B \cdot y)^2 \cdot y^{4/3}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{5}{3} \cdot \Delta x \cdot I \cdot \frac{1}{y} \\
 &= -\frac{5}{3} \cdot \Delta x \cdot I \cdot \frac{1}{R_h}
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Aleshores, en aquest cas, s'obté:

$$\Delta y_2 = \frac{H(y_1) - (H(y_2^*) + \varepsilon \cdot \Delta H_{12}(y_2^*))}{1 - (Fr(y_2^*))^2 - \varepsilon \cdot \frac{5}{3} \cdot \Delta x \cdot \frac{I(y_2^*)}{R_h(y_2^*)}} \tag{8.31}$$

I així es va iterant fins que l'increment Δy_2 sigui menor que un determinat criteri de convergència que s'esculli. Només queda plantejar com fixar la llavor inicial y_2^* corresponent a la primera de totes les iteracions. De l'equació (8.7) del flux gradualment variat es pot estimar la llavor per a la primera aproximació:

$$y_2^* = y_1 + \frac{i - I}{1 - Fr^2} \cdot \Delta x \tag{8.32}$$

Exercici

Determineu el perfil de la làmina d'aigua en un canal prismàtic de secció rectangular d'ample 50 m, pendent 0.01%, pel qual circulen 100 m³/s, si a l'extrem d'aigües avall se sap que el calat és d'1.5 m, essent el coeficient de rugositat de Manning 0.015.

Es pretén integrar el perfil de la làmina d'aigua aplicant l'esquema desenvolupat, vàlid per a una secció rectangular molt ampla. El canal que es presenta a l'enunciat es caracteritza per:

Calat uniforme $y_0 = 1.993$ m, que li correspon un nombre de Froude, $Fr = 0.227$, i un calat crític $y_c = 0.742$ m. Per tant, es tracta d'un canal de tipus M, que té una tendència natural a funcionar en règim lent, essent per tant la variable $\varepsilon = -1$ (expressió (8.23)) i el calat d'1.5 m la condició de contorn per iniciar el càlcul de la superfície lliure.

Taula 8.1. Caracterització hidràulica de la secció de l'extrem aigües avall.

y_l (m)	z_l (m)	A_l (m ²)	v_l (m/s)	$v_l^2/2g$ (mca)	Fr_l	P_l (m)	Rh_l (m)	I_l	H_l (m)
1.5	0	75.00	1.333	0.0906	0.348	53.00	1.415	$2.518 \cdot 10^{-4}$	1.591

A la taula 8.1 es presenten les principals variables hidràuliques que caracteritzen la secció de l'extrem aigües avall, i que han de servir per començar el procés d'integració del perfil de la làmina d'aigua.

Es considera una discretització de 10 m; per tant, s'està en disposició de calcular el calat de la primera secció (situada a 10 m aigües amunt de la condició de contorn). Per fer-ho, cal una llavor inicial que es determina a partir de la aproximació obtinguda a (8.32):

$$y_2^* = y_1 + \frac{i - I_f}{1 - Fr^2} \cdot \Delta x = 1.5 + \frac{0.0001 - 0.000252}{1 - 0.348} \cdot 10 = 1.498 \text{ m} \quad (8.33)$$

que implica els valors següents de les principals variables hidràuliques:

Taula 8.2 Caracterització hidràulica de la primera secció de càlcul a partir de la llavor inicial.

y_2 (m)	z_2 (m)	A_2 (m ²)	v_2 (m/s)	$v_2^2/2g$ (mca)	Fr_2	P_2 (m)	Rh_2 (m)	I_2	H_2 (m)
1.498	10^{-3}	74.91	1.335	0.0908	0.348	53.00	1.414	$2.527 \cdot 10^{-4}$	1.590

El pendent motriu mitjà entre ambdues seccions és:

$$I_{12} = \frac{2.518 \cdot 10^{-4} + 2.527 \cdot 10^{-4}}{2} = 2.522 \cdot 10^{-4} \quad (8.34)$$

D'aquesta manera, les pèrdues d'energia entre ambdues seccions es poden estimar fent:

$$\Delta H_{12} = \Delta x \cdot I_{12} = 10 \cdot 2.522 \cdot 10^{-4} = 2.522 \cdot 10^{-3} \text{ mca} \quad (8.35)$$

que és la variable que faltava per determinar la correcció Δy a la llavor inicial a partir de l'expressió (8.31):

$$\Delta y_2 = \frac{H(y_1) - (H(y_2^*) - \Delta H_{12}(y_2^*))}{1 - (Fr(y_2^*))^2 + \frac{5}{3} \cdot \Delta x \cdot \frac{I_f(y_2^*)}{R_h(y_2^*)}} = \frac{1.591 - 1.590 + 2.522 \cdot 10^{-3}}{1 - 0.348^2 + \frac{5}{3} \cdot 10 \cdot \frac{2.522 \cdot 10^{-4}}{1.414}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta y_2 = 0.00345 \text{ m} \quad (8.36)$$

Per tant, cal una segona iteració per determinar el calat a la secció 2, situada a 10 m de la condició de contorn, amb un valor $y_2 = 1.498 + 0.00345 = 1.50145 \text{ m}$. Amb aquest nou valor, els valors de les respectives variables hidràuliques són:

Taula 8.3 Caracterització hidràulica de la primera secció de càlcul en la segona iteració.

y_2 (m)	z_2 (m)	A_2 (m ²)	v_2 (m/s)	$v_2^2/2g$ (mca)	Fr_2	P_2 (m)	Rh_2 (m)	I_2	H_2 (m)
1.501	10^{-3}	75.05	1.332	0.0904	0.347	53.00	1.417	$2.508 \cdot 10^{-4}$	1.593

De manera que, el pendent motriu mitjà entre ambdues seccions és:

$$I_{12} = \frac{2.518 \cdot 10^{-4} + 2.508 \cdot 10^{-4}}{2} = 2.513 \cdot 10^{-4} \quad (8.37)$$

I així, les pèrdues d'energia entre ambdues seccions s'estimaran com abans, fent:

$$\Delta H_{12} = \Delta x \cdot I_{12} = 10 \cdot 2.513 \cdot 10^{-4} = 2.513 \cdot 10^{-3} \text{ mca} \quad (8.38)$$

que condueix a una correcció del calat:

$$\Delta y_2 = \frac{1.591 - 1.593 + 2.513 \cdot 10^{-3}}{1 - 0.347^2 + \frac{5}{3} \cdot 10 \cdot \frac{2.513 \cdot 10^{-4}}{1.417}} \Rightarrow \Delta y_2 = 0.00000 \text{ m} \quad (8.39)$$

I, per tant, es pot considerar que ja s'ha convergít i, per tant, el calat estimat és $y_2 = 1.501 \text{ m}$.

Aleshores, cal procedir iterativament aigües amunt, estimant el calat a la secció situada 10 m amunt de l'anterior (20 m aigües amunt de la considerada com a condició de contorn). D'aquesta manera, la que abans era secció 2 passa a ser ara secció 1, i cal continuar amb una nova llavor inicial:

$$y_2^* = y_1 + \frac{i - I_f}{1 - Fr^2} \cdot \Delta x = 1.501 + \frac{0.0001 - 2.508 \cdot 10^{-4}}{1 - 0.347} \cdot 10 = 1.499 \text{ m} \quad (8.40)$$

i procedir com s'ha fet per la secció anterior.

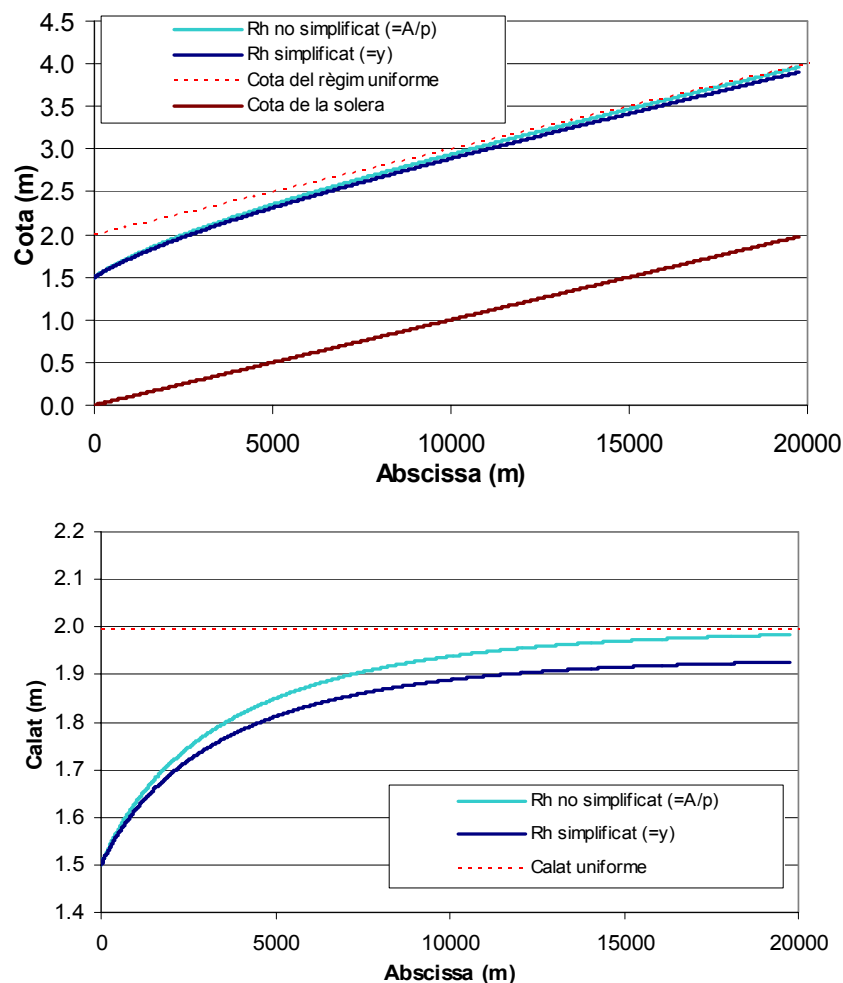


Figura 8.11 Comparació dels diferents perfils de la làmina (cotes i calats) d'aigua determinats per diferents mètodes de càlcul.

D'aquesta manera, s'arriba al perfil de la làmina d'aigua que es mostra a la figura 8.11. En ella es presenten les cotes de la làmina d'aigua, com també el gràfic corresponent únicament al calat, on s'observen amb una mica més detall les diferències. S'hi comparen les dues corbes corresponents a l'aplicació del procediment iteratiu que s'ha descrit fa un moment, amb l'única diferència de l'estimació del radi hidràulic: l'un calculat amb l'aproximació aplicable a seccions molt amples ($R_h \approx y$) i l'altre estimant el radi hidràulic segons la seva definició ($R_h = A/p$). S'hi aprecien, en qualsevol cas, diferències molt petites, tot i que en el cas en que es calcula el radi hidràulic a partir de la simplificació corresponent a seccions amples sembla que li costa més que les altres dues a tendir al règim uniforme, si bé les diferències són, en aquest cas, inferiors als 6 cm, i són més grans quant més gran és el calat. Això és així perquè com més gran és el calat l'aproximació $R_h \approx y$ és menys precisa.

8.3.3 Càlcul invers

El mètode pas a pas permet l'aplicació en sentit invers. En el mètode presentat, la discretització s'estableix sobre les distàncies entre seccions (Δx). Si en canvi, la discretització es realitza sobre els calats (Δy) es té que:

$$z_i + y_i + \frac{v^2(y_i)}{2g} = z_{i+1} + y_{i+1} + \frac{v^2(y_{i+1})}{2g} + I(y_i, y_{i+1}) \cdot \Delta x_{i+1} \quad (8.41)$$

on ara, y_i i y_{i+1} són coneguts i, per tant, $v(y_i)$ i $I(y_i, y_{i+1})$ també ho són, de manera que resulta una senzilla equació lineal amb una sola incògnita Δx_{i+1} , que representa la distància entre les dues seccions a les quals es donin els calats coneguts y_i i y_{i+1} .

Considerar una discretització Δy constant condueix a l'estimació de distàncies (Δx_{i+1}) entre dues seccions, que resulta tant més gran quant més propers siguin els calats a l'uniforme (tram de corba de rabeig amb menys curvatura) i tant més petit quant més propers siguin els calats al crític (tram de corba de rabeig amb més curvatura).

En canals prismàtics i de geometria senzilla (per exemple, rectangular o trapezoïdal), aquest procediment és particularment senzill d'aplicar amb el simple ús d'un full de càlcul. De tota manera, cal ser conscients, també, que per aplicar aquest mètode cal tenir molt clar quin perfil de la làmina d'aigua s'ha de donar en el canal per tal de definir l'interval de variació dels calats on discretitzar, o si cal establir algun interval on refinar la discretització. També s'ha de dir que aquest mètode de càlcul és difícil d'automatitzar quan es donen combinacions de pendents diferents al llarg del canal.

8.4 Determinació del coeficient de Manning de manera indirecta

Tot el que s'ha plantejat fins ara dona una eina per estimar el coeficient de Manning d'un flux en làmina lliure de manera indirecta. Coneguda la geometria de la llera (prismàtica o no) i el cabal circulat, la idea és mesurar els calats en un tram concret en el qual es pugui assegurar que el flux és gradualment variat. També cal mesurar la distribució del perfil de velocitats en les seccions que s'estudiïn, per tal d'estimar-ne el coeficient de Coriolis. El mesurament d'aquest perfil és tant més necessari quant més irregular sigui la secció.

Amb aquesta informació, a partir de qualsevol model numèric, per temptejos es pot determinar el coeficient de Manning que fa que s'ajusti millor el càlcul numèric de la làmina d'aigua en les mesures de camp realitzades.

8.5 Condicions de contorn a considerar en les corbes de rabeig. Localització del ressalt

8.5.1 Canal prismàtic amb pendent constant

Aquest cas correspon a tot el que s'ha vist a l'apartat 8.2, referent a l'anàlisi de les corbes de rabeig en un canal prismàtic.

8.5.2 Canal prismàtic amb un canvi de pendent

És equivalent a dos canals prismàtics units l'un a continuació de l'altre, amb la mateixa secció transversal però amb diferents pendents. A la figura 8.12 se'n mostren alguns casos a tall d'exemple. Per entrar-hi amb més detall, es suggereix analitzar totes les combinacions possibles que es poden donar d'acord amb totes les tipologies de canals.

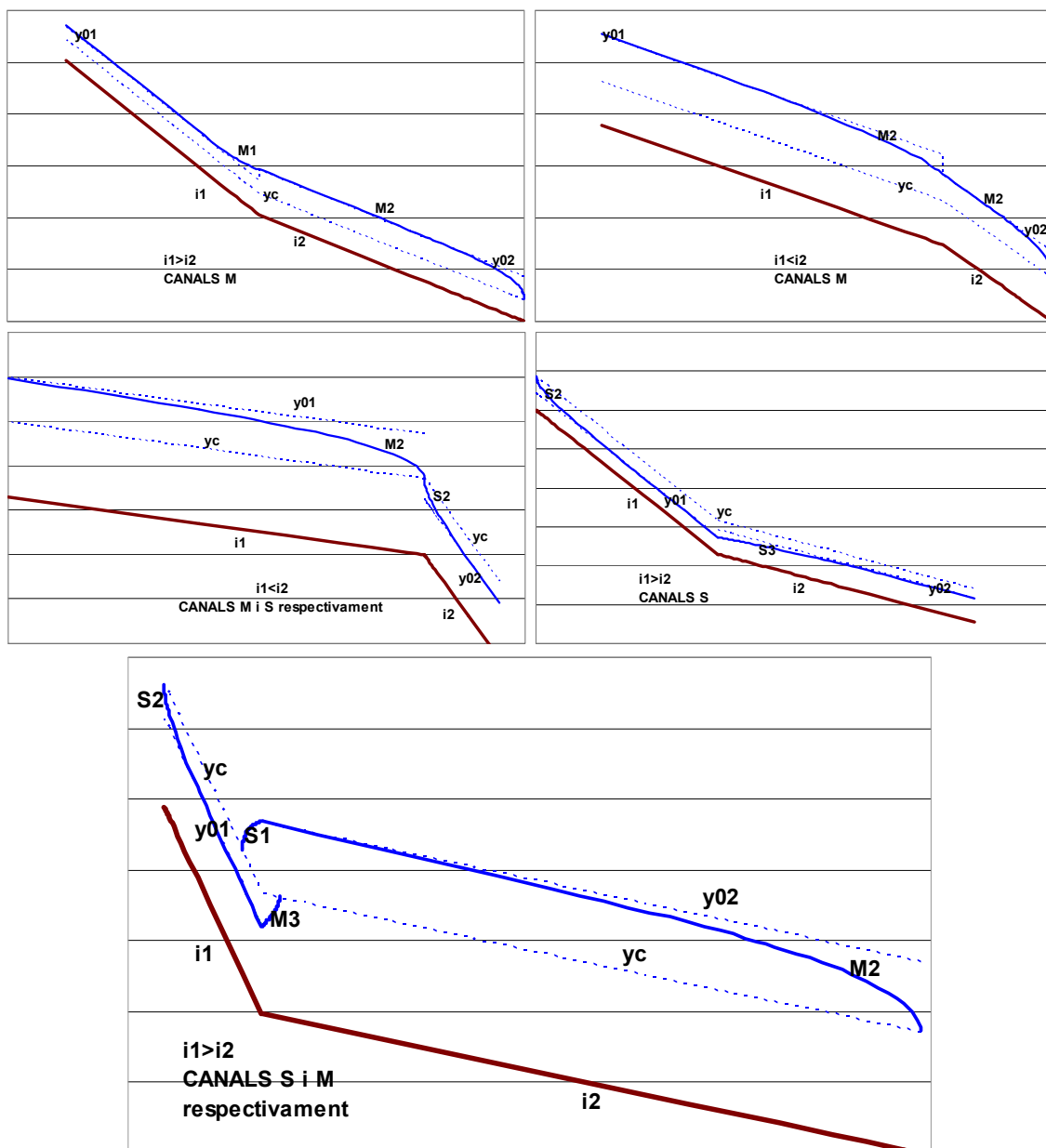


Figura 8.12 Diferents casos corresponents a un canal prismàtic amb un canvi de pendent.

En el cas d'un canal M aigües amunt i d'un canal S avall (figura 8.12), la compatibilitat entre ambdós canals s'estableix a partir de la formació d'un règim crític (secció de control) en la secció de canvi de pendent. En aquest cas, el perfil a prop de la profunditat crítica no es pot predir amb precisió amb la teoria del flux gradualment variat, ja que en general el flux és ràpidament variat.

Quan els canals són molt llargs s'hi pot establir flux uniforme, aigües amunt o avall, depenent de si el canal tendeix a mostrar règim lent (canal M) o ràpid (canal S), respectivament.

El cas d'un canal de tipus S aigües amunt i d'un de tipus M aigües avall es caracteritza pel fet que de manera natural aigües amunt el règim tendeix a ser ràpid, i lent en el tram aigües avall. D'aquesta manera, l'única possibilitat per compatibilitzar ambdós règims és amb la formació d'un ressalt hidràulic. El ressalt pot succeir al canal d'aigües amunt (S) o al d'aigües avall (M), depenent del pendent dels dos canals i de les condicions de contorn amunt i avall. A l'exemple que es mostra a la figura 8.12, s'hi aprecia, a l'entorn de la secció de canvi de pendent, una regió on l'equació del balanç d'energia té dues solucions: una en règim lent (el règim uniforme que ve del canal M –suposat prou llarg– entra dins el canal S i es forma una corba S1) i una altra en règim ràpid (el règim uniforme que arriba del canal S –suposat prou llarg– entra dins el canal M i es forma una corba M3); en tots dos casos (corba S1 i M3), acaben a l'entorn del règim crític. Com és obvi, el perfil de la làmina d'aigua és únic i, per tant, només hi pot haver una solució; això vol dir que cal ubicar el ressalt hidràulic convenientment. Per fer-ho, cal analitzar els valors dels calats conjugats dels respectius calats uniformes que corresponen al canal S o M, per veure en quin cas (un i només un) és compatible amb la corba de rabeig S1 o M³, respectivament. A l'apartat 0, s'analitza amb detall com ubicar el ressalt hidràulic.

8.5.3 Canal prismàtic amb més d'un canvi de pendent

La casuística es multiplica quan hi ha més de dos trams amb pendents diferents. Es podria esquematitzar un procediment per tal d'estudiar els perfils de la làmina d'aigua, de la manera següent:

1. Dibuixar el perfil del canal que es vol estudiar, amb tots els seus diferents trams, amb l'escala vertical exagerada.
2. Calcular el calat uniforme per a cada tram i representar-lo.
3. Calcular el calat crític per a cada tram i dibuixar-lo.
4. Localitzar-ne totes les possibles seccions de control, és a dir, qualsevol secció a la qual el calat sigui conegut a priori (uniforme, crític o qualsevol altre calat conegut). Es trobaran diversos tipus de seccions de control²³:
 - Secció de control aigües amunt, en un canal S, igual al calat crític (y_c). En aquest cas correspon també a una condició de contorn.
 - Secció de control aigües amunt, en un canal M igual al calat uniforme (y_0). No serveix com a condició de contorn.
 - Secció de control aigües avall, en un canal S igual al calat uniforme (y_0). No és una condició de contorn.
 - Secció de control aigües avall, en un canal M igual al calat crític (y_c). Pot servir de condició de contorn.

²³ No confondre secció de control amb condició de contorn.

- Secció de control artificial que es forma en estructures com sobreexidors de preses o assuts, o comportes que donen una obertura coneguda.
5. Unir les profunditats a les seccions de control amb un perfil continu, d'acord amb els perfils coneguts de les corbes de rabeig.

8.5.4 Localització del ressalt

Anàliticament, el ressalt hidràulic en canals rectangulars es pot ubicar usant la fórmula de Belanger. També cal tenir en compte que, per a un càlcul més exacte de la posició es pot considerar la seva longitud.

La localització del ressalt s'il·lustra de manera gràfica amb un parell d'exemples:

Exercici

Se suposa un canal prismàtic, format per dos trams de pendents diferents, segons els quals aigües amunt del canvi de pendent és un canal S i avall M. També se suposa que ambdós són prou llargs perquè acabi formant-se un flux uniforme. Es proposa determinar la ubicació del ressalt, per compatibilitzar ambdós trams.

A la figura 8.13 es mostra gràficament el procés per acabar determinant la ubicació del ressalt. S'hi pot apreciar que s'ha determinat la corba de calats conjugats corresponents als règims uniformes, tant del tram en règim ràpid (amunt del canvi de pendent) com del tram en règim lent (avall del canvi de pendent). Observeu que en el tram de canal M, no hi ha intersecció entre la corba M3 i la corba corresponent de calats conjugats; això indica que el ressalt, en aquest cas, es troba ubicat en el canal S. La localització correspon al punt d'intersecció de la corba S1 amb la de calats conjugats pertinent.

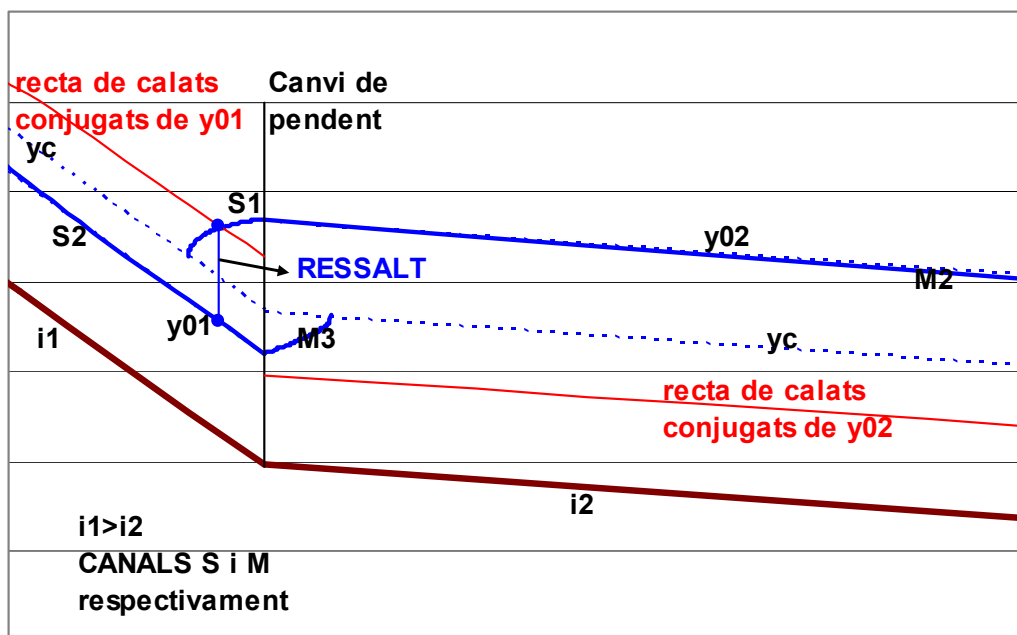


Figura 8.13 Localització del ressalt en un canal amb un canvi de pendent de canal S a M.

Exercici

Un canal prismàtic de tipus M, prou llarg, està controlat a l'extrem aigües amunt per un desguàs sota comporta, a la sortida de la qual es forma un règim ràpid. Es proposa determinar la localització del ressalt hidràulic que compatibilitzi el règim ràpid amb el règim lent controlat des del seu extrem aigües avall.

La teoria del flux gradualment variat permet afirmar que a la sortida de la comporta es forma una corba M3. Per altra banda, i ja que el canal és prismàtic i prou llarg, des d'aigües avall el flux acaba formant a l'entorn de la comporta un règim uniforme, sigui quina sigui la corba en règim lent que es formés (M1 o M2).

A la figura 8.14 es mostra el procés seguit per la localització del ressalt. Així, en aquest cas s'il·lustra l'obtenció de la corba de calats conjugats corresponent a la corba M3. La intersecció d'aquesta corba amb el perfil de la làmina d'aigua del règim lent (règim uniforme) determina la ubicació del ressalt, si se'n negligeix la longitud²⁴.

Si augmentés el calat corresponent al règim lent, a l'entorn de la comporta, el ressalt es mouria aigües amunt i podria arribar a ofegar-se.

Si la comporta es tanqués (augmenta l'energia de velocitat a la sortida), el ressalt es mouria aigües avall.

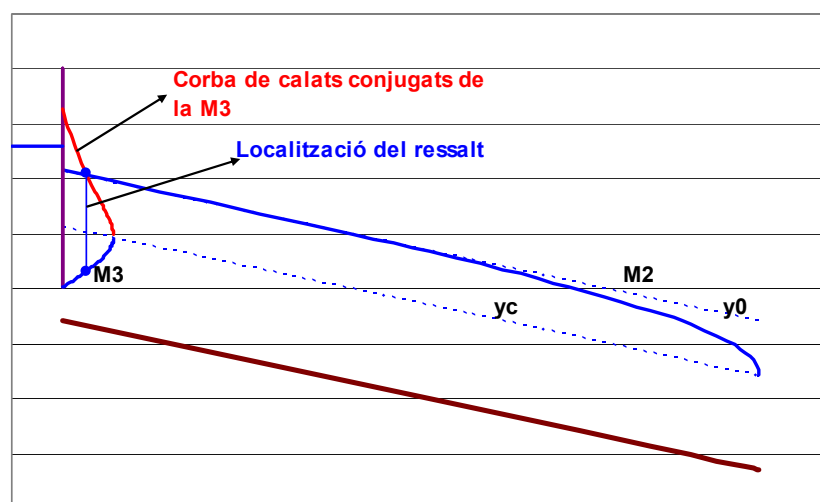


Figura 8.14 Localització del ressalt aigües avall d'un desguàs sota comporta.

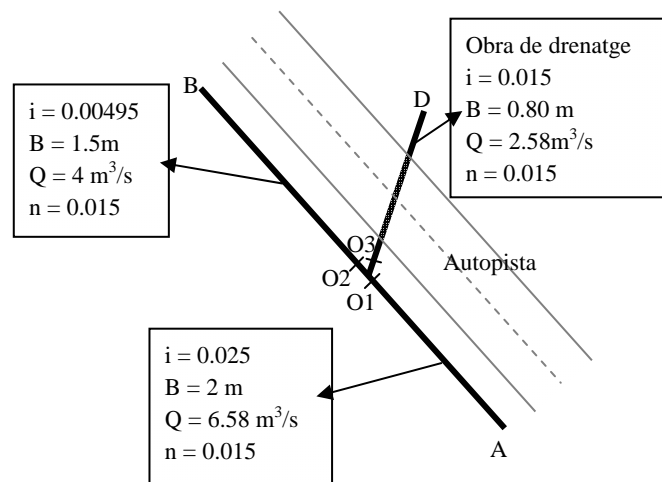
8.6 Exercicis proposats

1. Discuti si les afirmacions següents són vertaderes o falses:
 - En un canal prismàtic de tipus S, la tendència natural és a funcionar en règim ràpid.
 - En un canal prismàtic de tipus S, només es dona règim ràpid.

²⁴ Si calgués considerar la longitud del ressalt (L), la ubicació es determina a partir de la translació de vector L , de la posició inicialment trobada.

- L'equació dinàmica del flux gradualment variat o equació de les corbes de rabeig només es pot utilitzar en trams prismàtics. En canals no prismàtics o rius no es pot utilitzar i cal recórrer a l'aplicació del mètode pas a pas.
- Per poder aplicar l'*step method* (mètode pas a pas), cal que el pendent es mantingui constant.
- Només existeixen dues corbes de rabeig H, totes elles en règim lent.
- La corba de rabeig M3 té la condició de contorn aigües avall.
- La corba de rabeig M2 disminueix els seus calats en el sentit del moviment.
- En un canal prismàtic donat, fixat el cabal, és possible el pas d'una corba M2 a una S3 (en el sentit del moviment), només si en la secció de canvi de corba també hi ha un canvi de pendent.
- En un canal prismàtic, un ressalt hidràulic només és possible si es passa del canal de tipus S al canal de tipus M.
- L'existència d'una corba H3 (aigües amunt) i una altra H2 (aigües avall) implica l'aparició d'un ressalt.
- Donades la secció, el pendent i la rugositat d'un determinat canal prismàtic, en funció del cabal circulat pot ser de tipus M o S.
- Donades la secció, el pendent i la rugositat d'un determinat canal prismàtic, en funció del cabal circulat pot ser de tipus M o C.
- Donades la secció, el pendent i la rugositat d'un determinat canal prismàtic, en funció del cabal circulat pot ser de tipus M o H.
- Un canal prismàtic de tipus M, de prou longitud, segur que presenta alguna secció en la qual es desenvolupi un règim crític.
- La corba de rabeig S3 és l'única corba en règim ràpid que presenta règim crític aigües avall.
- La corba de rabeig M2 disminueix la velocitat aigües avall.
- Un flux d'aigua en làmina lliure en un tram de riu o canal en contrapendent no és possible que vagi en règim ràpid.
- En un canal prismàtic de pendent horitzontal, les corbes H2 són monòtones decreixents en el sentit del moviment.
- En un canal prismàtic de pendent moderat, les corbes M1 són monòtones decreixents en el sentit del moviment.
- En un canal prismàtic de pendent pronunciat (S), un desguàs amb comporta mai no es pot ofegar.
- Un mateix canal prismàtic pot ser tipus S o C en funció del cabal que hi circuli.
- En un canal prismàtic de pendent moderat, si en algun tram la velocitat augmenta aigües avall, això significa que la corba de rabeig que s'ha format és sens dubte una M2.

- En un canal prismàtic de pendent moderat, si en algun tram la velocitat hi disminueix aigües avall, això significa que la corba de rabeig que s'ha format és sens dubte una M1.
2. El canal de drenatge (AB) de formigó ($n = 0.015$) situat al costat d'una autopista presenta un canvi de pendent en el punt O i passa, en el sentit del flux, d'un pendent $i_{BO} = 0.00495$ a $i_{OA} = 0.025$. En el mateix punt O, el canal presenta un canvi de secció i passa, en el sentit del flux, d'una secció rectangular d'ample $B_{BO} = 1.5$ m a $B_{OA} = 2.0$ m.



Finalment, també en el punt O, s'hi incorpora una obra de drenatge que travessa l'autopista amb un calaix rectangular d'ample $B_{DO} = 0.80$ m, amb un pendent $i_{DO} = 0.015$.

S'ha comprovat que, amb un cabal de 4 m³/s en el tram BO i incorporant-s'hi per a l'obra de drenatge un cabal de 2.58 m³/s, es produeix un ressalt hidràulic a l'obra de drenatge immediatament amunt (O3) de la incorporació.

En aquestes condicions, indiqueu les corbes de rabeig que es formaran en el canal AB i l'obra de drenatge, caracteritzant els calats que es donaran en el punt O (en concret, O1, O2 i O3). Considereu negligibles les pèrdues de càrrega localitzades en el punt O, i que els trams BO i OA són molt llargs.

3. En un canal de secció prismàtica rectangular (ample B) sense singularitats en planta ni en alçat i coeficient de rugositat n , pendent constant i , i que transporta un cabal Q , determineu en quines condicions es produeix el pas de règim lent a ràpid.
4. Un canal prismàtic de secció rectangular té un ample $B=2.5$ m, longitud = 1000 m, pendent geomètric $i=0.001$ i coeficient de fregament de Manning $n = 0.015$. Amb l'ajut d'un full de càlcul es demana determinar el perfil de la làmina d'aigua sabent que l'extrem aigües avall ve condicionat per un vessament lliure, aplicant el mètode de pas a pas invers.
5. Un riu presenta un endegament sensiblement prismàtic i molt ample (el radi hidràulic es pot considerar igual al calat). El pendent és $i = 8 \cdot 10^{-3}$ i el coeficient de rugositat de Manning (n) pot variar depenent de la vegetació i del grau de manteniment de la llera, encara que sempre és superior o igual a 0.03. El màxim cabal específic previst en el projecte de l'endegament és $q = 20$ m²/s. És possible que, per a uns valors de q i n , l'endegament pugui presentar comportament de tipus M i per a uns altres de tipus S?

6. En un canal prismàtic de secció rectangular d'ample $B=2.5$ i coeficient de Manning $n=0.015$, es produeix un canvi de pendent de 0.008 a 0.005 en el mateix sentit del moviment. Si pel canal circula un cabal de $10\text{m}^3/\text{s}$, i tots dos trams són molt llargs, es demana:
- Discutiu quin és el perfil de la làmina d'aigua al voltant del tram on es produeix el canvi de pendent. Es produirà un ressalt?
 - En cas que es produeixi un ressalt, discutiu on es dona exactament, al tram dependent 0.008 o al de 0.005 .

9 Moviment ràpidament variat. Transicions

9.1 Introducció

En el flux ràpidament variat, el canvi de la curvatura de la superfície lliure de l'aigua és tan sobtada que el flux pràcticament es trenca; això implica l'existència d'una alta turbulència i agitació, que és una característica pròpia d'aquests tipus de fluxos (p. ex.: ressalt hidràulic).

Característiques dels moviments ràpidament variables en làmina lliure:

- La curvatura de les línies de corrent és molt pronunciada; això fa que no s'hi pugui acceptar el comportament hidrostàtic de les pressions.
- La variació ràpida del flux se sol donar en un tram curt de canal, en què l'efecte de la fricció amb el contorn és negligible, en la majoria del casos, per comparació de l'energia que es dissipa per la pròpia variació local. Aquesta és una de les diferències més remarcables amb el flux gradualment variat.
- Quan es dona flux ràpidament variat per l'efecte d'una estructura de transició sobtada (per exemple, contraccions, eixamplaments o sobrelevacions a la solera), les característiques físiques del flux vénen fixades, fonamentalment, per la geometria del contorn i també per les característiques del flux aigües amunt i avall de la transició.
- Canvis sobtats en l'àrea mullada en un flux ràpidament variat provoquen que els coeficients de distribució de velocitat (α i β) siguin més grans que u (>1) i no és senzill determinar-los amb precisió.
- Se solen donar zones de separació del contorn, remolins i corrents secundaris que compliquen el patró del flux i distorsionen la distribució real de v . És a dir, el flux es troba confinat per aquestes zones de separació i no pas pels contorns sòlids. Aquests fenòmens provoquen pèrdues de càrrega localitzades que són difícilment estimables.

9.2 Modificació de l'ample d'un canal de secció rectangular.

A la figura 9.1 es mostra un esquema en planta d'una transició brusca de secció. Es pot suposar que la distància entre les seccions 1 i 2 és prou curta per poder considerar que:

- Les pèrdues d'energia per fregament entre ambdues són negligibles i
- Les cotes de fons pràcticament no varien ($z_1 \approx z_2$).

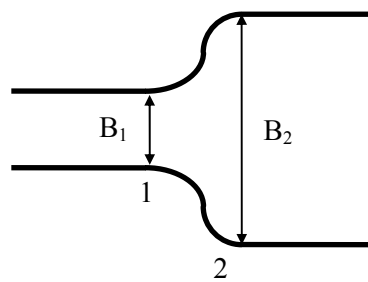


Figura 9.1 Esquema en planta d'una transició brusca de secció. Dependent de la relació entre B_1 i B_2 , es tracta d'una contracció o d'un eixamplament.

Aleshores, si la variació geomètrica no provoca grans pèrdues de càrrega localitzades, es pot escriure que:

$$H_1 \approx H_2 \Rightarrow z_1 + E_1 \approx z_2 + E_2 \Rightarrow E_1 \approx E_2 \quad (9.1)$$

Si la secció és rectangular, l'energia específica es pot plantejar com:

$$E = y + \frac{Q^2}{B^2 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot g} = y + \frac{q^2}{y^2 \cdot 2 \cdot g} \quad (9.2)$$

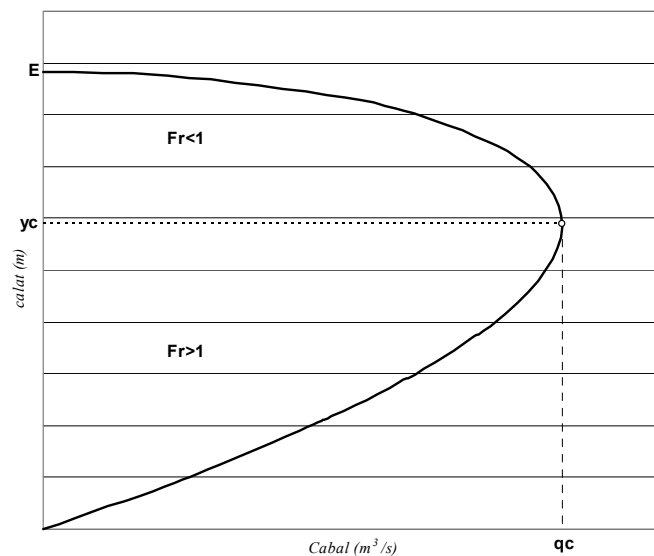


Figura 9.2 Corba calat – cabal específic per a una energia específica donada.

on s'ha definit el cabal específic com

$$q = Q/\bar{B} \quad (9.3)$$

essent:

$$\bar{B} = \frac{A(y)}{y} \quad (9.4)$$

l'ample mitjà de la secció, que només en el cas de seccions rectangulars és una constant. Així, per a una energia específica E donada, es pot representar la corba calat–cabal específic ($y-q$), que té la mateixa forma que la corba calat – cabal ($y-Q$), que ja s'ha estudiat al capítol 6.

9.2.1 Eixamplament brusc. Anàlisi amb corbes $y-q$

En el cas d'un eixamplament sobtat, el canal passa d'un ample B_1 a un B_2 , essent $B_1 < B_2$ i, per tant, es dona que el cabal específic passa de q_1 a q_2 , amb $q_1 > q_2$. Si es poden negligir les pèrdues d'energia, tant repartides com localitzades, es pot suposar que l'energia específica entre 1 i 2 es manté pràcticament constant. La forma del perfil de la superfície lliure depèn del flux d'aproximació a l'eixamplament.

a Flux d'aproximació en règim lent

En aquest cas, tal com es mostra a la figura 9.3, es produeix un augment del calat entre 1 i 2.

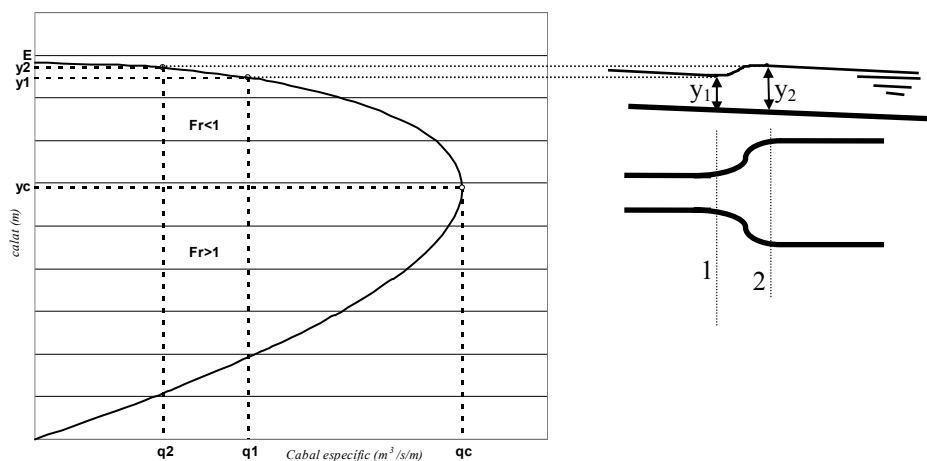


Figura 9.3 Anàlisi d'un eixamplament brusc, amb el flux d'aproximació en règim ràpid, a partir de la corba calat–cabal específic per a una energia específica donada.

Un aixecament de la làmina d'aigua quan es passa a una secció més ampla sembla, si més no, que va contra el que es podria esperar. Sense ànim de complicar-ho, cal dir que realment no és ben bé així. Si el tram més ample és prou llarg, en règim lent, el flux arribaria a la secció 2 amb un règim uniforme que és més baix que el corresponent a la secció 1. És a dir, globalment el comportament del tram més ample sí que es comporta com indica el sentit comú. Aquest és el que es podria anomenar l'efecte induït des d'aigües avall, i que es torna a discutir a l'apartat 9.2.2.c.

b Flux d'aproximació en règim ràpid

Es provoca una disminució del calat 1 a 2, tal com s'esquematitza a la figura 9.4.

Val a dir que no es pot estudiar el perfil de la làmina d'aigua entre 1 i 2. L'únic que es pot estimar són els calats y_1 i y_2 , però no la forma de la superfície que els uneix.

De manera anàloga al que s'ha comentat en el cas de l'aproximació en règim lent, en aquest cas l'efecte local de l'eixamplament sí que té el comportament esperat, de disminució de nivells cap a la secció més ampla.

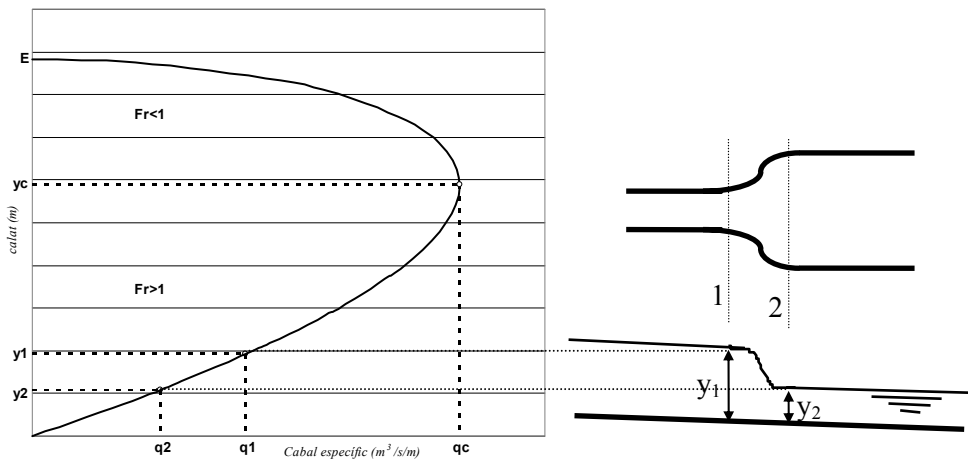


Figura 9.4 Anàlisi d'un eixamplament brusca, amb el flux d'aproximació en règim ràpid, a partir de la corba calat-cabal específic per a una energia específica donada.

9.2.2 Contracció brusca

a Anàlisi amb corbes $y-E$

A continuació s'analitzen els fenòmens hidràulics que es donen en una contracció brusca. Tot seguit es presenten els raonaments sobre la base de les corbes de calat en front de l'energia específica per a un cabal específic donat, per donar una visió alternativa del problema.

a) Aproximació a la contracció en flux subcrític

Observant el diagrama d'energia específica de la figura 9.5, representat per diferents cabals específics, al punt P de la corba de cabal específic q_1 li correspon un calat y_1 , essent la seva energia específica E_1 .

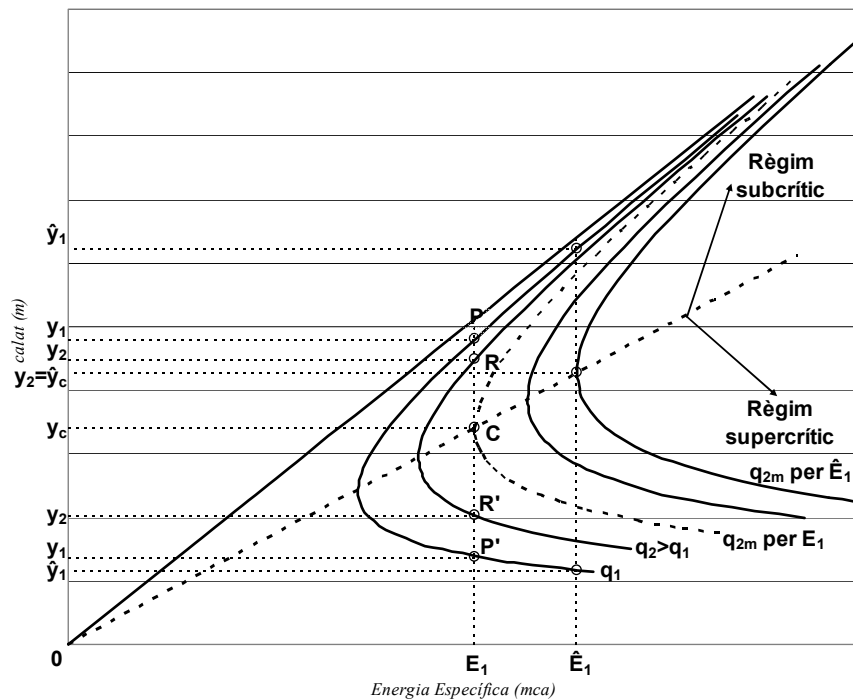


Figura 9.5 Anàlisi d'una contracció brusca a partir de la corba calat-energia específica per a un cabal específic donat, quan el cabal específic $q_2 > q_c$.

Ja que a la secció 2 s'assumeix com a correcta l'aproximació que l'energia específica es manté constant²⁵ ($E_2 = E_1$) i ja que el cabal específic augmenta ($q_1 < q_2$), el punt P de la figura 9.5, ha de baixar fins al punt R a la corba corresponent al cabal específic q_2 , és a dir, en una contracció sobtada quan el règim d'aproximació és lent es produeix una reducció en el calat ($y_2 < y_1$).

Si l'ample B_2 fos més petit que el que provoca el cabal específic q_2 , discutit al paràgraf anterior, resulta un cabal específic q_2 encara més gran i, com a conseqüència, el calat y_2 necessàriament és encara més petit. Això és així fins a un cas límit en el qual l'ample de la secció 2 (B_2) acabés essent igual a un cert valor mínim (B_{2m}), pel qual amb l'energia específica E_1 circuli un cabal específic q_{2m} , que correspon al màxim cabal específic que pot circular a través de la secció d'ample B_{2m} amb l'energia específica fixada E_1 . En aquest cas, es comprova que el calat y_2 ha de coincidir amb el calat crític y_c . En aquest cas, suposat el canal de secció rectangular, s'ha de complir que:

$$E_1 = E_c = y_c + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot B_{2m}^2 \cdot y_c^2} \quad (9.5)$$

En un canal de secció rectangular, s'ha comprovat que (exercici resolt en l'apartat 3 del capítol 6):

$$y_c = \frac{2}{3} \cdot E_c \quad (9.6)$$

I, per tant, s'ha de verificar:

$$y_2 = y_c = \frac{2}{3} \cdot E_c = \frac{2}{3} \cdot E_1 \quad (9.7)$$

Recordant que el calat crític en una secció rectangular és:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B_{2m}^2 \cdot g}} \quad (9.8)$$

acaba resultant que l'ample B_{2m} es pot estimar a partir del calat crític, fent:

$$B_{2m} = \sqrt{\frac{Q^2}{g \cdot y_c^3}} \quad (9.9)$$

O, de forma alternativa, en funció de l'energia específica a 1:

$$B_{2m} = \sqrt{\frac{27 \cdot Q^2}{8 \cdot g \cdot E_1^3}} \quad (9.10)$$

Si l'ample de la secció 2 fos $B_2 < B_{2m}$, s'acaba de veure que el cabal específic corresponent q_2 és més gran que el màxim cabal específic consistent amb E_1 i, per tant, el flux no és físicament possible amb les condicions existents aigües amunt. En aquest cas, el calat aigües amunt (y_1) necessàriament ha d'augmentar fins a \hat{y}_1 , o dit d'una altra manera, l'energia específica ha de canviar:

²⁵ Es fa la hipòtesi que les pèrdues d'energia a la contracció (entre 1 i 2) són negligibles. Si bé això és acceptable pel que fa a les pèrdues d'energia per fregament amb el contorn, ja que la distància entre 1 i 2 es considera prou petita, en la realitat en general hi existeixen unes pèrdues d'energia localitzades que fan que aquesta hipòtesi no sigui totalment certa; de qualsevol manera, el fet d'acceptar-la simplifica els raonaments hidràulics que es realitzen i no els invalida.

$$\hat{E}_1 = \hat{y}_1 + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot (B_1^2 \cdot \hat{y}_1^2)} \quad (9.11)$$

que és una energia suficient per provocar el calat crític a 2. Si la secció és rectangular, resulta:

$$y_2 = \hat{y}_c = \frac{2}{3} \cdot \hat{E}_1 \quad (9.12)$$

b) Aproximació en flux supercrític

Si el calat d'aproximació a la contracció (y_1) correspon a un règim ràpid, una reducció de l'ample del canal provoca un augment del calat y_2 .

Així, a la mateixa figura 9.5 s'aprecien els punts P' , corresponent al calat y_1 i R' , al calat y_2 , de manera que si l'ample B_2 va disminuint el punt R' necessàriament es va movent cap amunt en la seva vertical, fins al límit que s'ha vist abans, en el qual B_2 coincideix amb B_{2m} , cas en el qual el calat esdevé crític $y_2 = y_c$. Si l'ample es fa encara més petit i $B_2 < B_{2m}$, es provoca la reducció del calat aigües amunt fins a y_1' , de manera que E_1 cal que augmenti fins a \hat{E}_1 .

A l'apartat b següent es detalla el fet que aquesta reducció fins al calat \hat{y}_1 en general és molt difícil d'aconseguir i, fins i tot, en alguns casos és impossible. Igualment, s'hi mostra l'anàlisi alternativa d'aquest cas, que permet introduir l'ús de les corbes calat enfront del cabal específic per a una energia específica donada.

b Anàlisi amb corbes y - q

El canal passa d'un ample B_1 a B_2 , essent $B_1 > B_2$ i, per tant, el cabal específic passa de q_1 a q_2 , amb $q_1 < q_2$. La forma del perfil de la superfície lliure, a més de dependre de la geometria de la contracció, depèn també del flux d'aproximació a la secció d'entrada.

a) Flux d'aproximació en règim ràpid

Cas A: $q_2 < q_c$. El cabal específic a la secció més estreta és inferior al màxim cabal específic possible en aquella secció, que correspon al cabal específic corresponent al règim crític. A la següent figura 9.6 es justifica gràficament que en aquest cas es provoca un augment de calat aigües avall.

Cas B: $q_2 > q_c$. Aquest cas es produeix quan l'ample de la secció més estreta (aigües avall) és inferior a l'ample que provocaria la formació del cabal específic corresponent al règim crític, màxim cabal específic possible en aquella secció.

$$B_2 < B_c = \frac{Q}{q_c} \quad (9.13)$$

La corba y - q (figura 9.7) indica que l'energia específica E_1 que té l'aigua a la secció 1 no és suficient per travessar la secció 2 més estreta. Perquè es pugui produir el pas d'aquell cabal a través de la secció esmentada, és necessari que se'n modifiquin les condicions hidràuliques aigües amunt del canal, és a dir, és necessari que es modifiqui la corba y - q que defineix aquest flux.

Aquesta modificació ha de provocar, tal com s'esquematitza a la figura 9.7, un augment a l'energia específica E_1 disponible a la secció 1, fins a \hat{E}_1 . D'aquesta manera, a la secció 2 hi ha d'aparèixer necessàriament un calat $y_2 = y_c$ i, per tant:

$$E_2 = E_c = 1.5 \cdot y_c = \hat{E}_1 \quad (9.14)$$

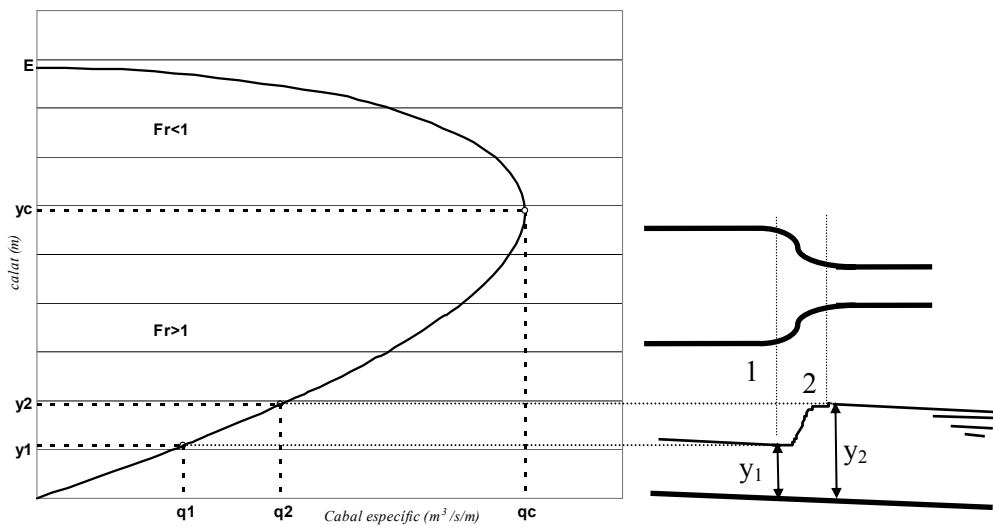


Figura 9.6 Anàlisi d'una contracció brusca, amb el flux d'aproximació en règim ràpid, a partir de la corba calat-cabal específic per a una energia específica donada, quan el cabal específic $q_2 < q_c$.

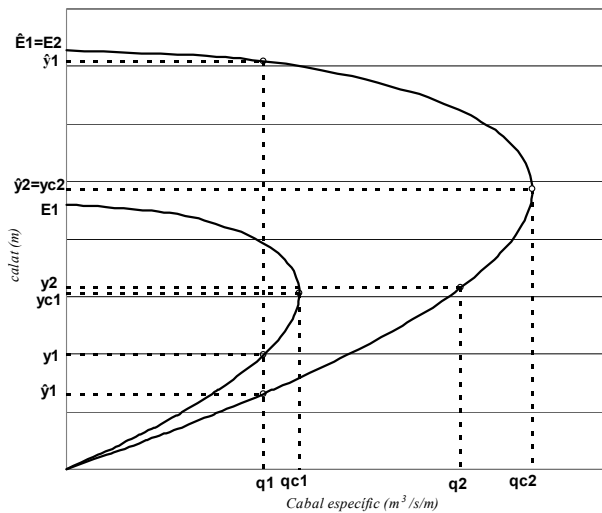


Figura 9.7 Anàlisi d'una contracció brusca, amb el flux d'aproximació en règim ràpid, a partir de la corba calat-cabal específic per a una energia específica donada, quan el cabal específic $q_2 > q_c$.

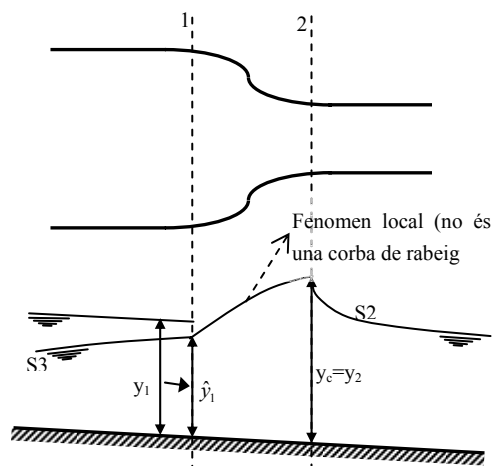


Figura 9.8. Possible modificació de les condicions hidràuliques a la secció que permeti passar per la contracció de 2, essent el flux d'aproximació en règim ràpid, sense que es produeixi canvi de règim.

Per aconseguir augmentar l'energia específica en una secció en règim ràpid, es comprèn que d'alguna manera s'ha d'aconseguir que el calat y_1 hi disminueixi. Aquest nou valor \hat{y}_1 s'obté resolent l'equació:

$$\hat{E}_1 = \hat{y}_1 + \frac{Q^2}{B_1^2 \cdot \hat{y}_1^2 \cdot 2 \cdot g} \quad (9.15)$$

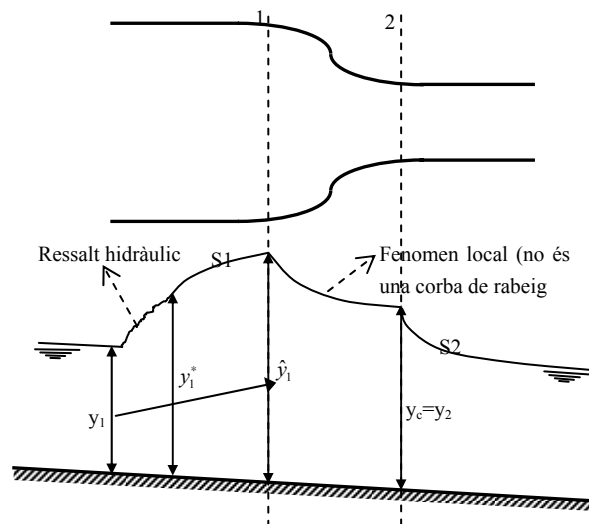


Figura 9.9 Possible modificació de les condicions hidràuliques a la secció que permeti passar per la contracció de 2, essent el flux d'aproximació en règim ràpid, mitjançant la formació d'un ressalt hidràulic.

Com que es parteix del fet que el règim és ràpid, aquest menor calat \hat{y}_1 només s'aconsegueix si a l'extrem aigües amunt del canal hi ha algun mecanisme que permeti modificar la condició de contorn i, així, arribar amb una certa corba de rabeig a la secció 1 amb el calat \hat{y}_1 , tal com s'esquematitza a la figura 9.8. Cal adonar-se que això, en general, és molt difícil d'aconseguir i, fins i tot, pot ser impossible, ja que en cas que el canal aigües amunt de la contracció sigui prou llarg, s'arriba a la secció 1 sempre amb un règim uniforme, sigui quina sigui la condició de contorn aigües amunt d'aquest canal. En tal cas, perquè l'aigua hi acabí circulant, s'ha de formar un ressalt que permeti passar a règim lent a 1 amb l'energia citada \hat{E}_1 . Com és ben sabut, l'equació (9.15) té també una solució en règim lent, que és la que es produeix en aquest cas. Així el nou calat en règim lent \hat{y}_1 ha de ser compatible amb les condicions d'aquest flux (gràcies a la corba de rabeig adequada) amb el calat immediatament aigües avall del ressalt (figura 9.9).

c Efecte induït des d'aigües avall

Cal adonar-se que, si el tram aigües avall és de pendent moderat (M), l'efecte local que s'acaba d'analitzar és un component més del fenomen que cal afegir a l'efecte que s'indueix des d'aigües avall. Val a dir que l'efecte local i l'efecte induït des d'aigües avall es donen alhora, de manera que els fenòmens locals que s'han esmentat fins aquí no es poden observar perquè queden diluïts en els que procedeixen des d'aigües avall (Puertas i Sánchez-Juny 2001). Només cal adonar-se que no hi ha cap corba de rabeig de tipus M, en règim lent, que al seu extrem aigües amunt formi un règim crític. En tot cas, s'hi troba un calat uniforme (si és prou llarg) o més gran. L'energia específica que es disposa a l'entorn de la secció on, com s'ha discutit en els apartats anteriors, es forma règim crític, és més petita que la que li correspon pel calat induït des d'avall (calat uniforme si el canal és prismàtic i prou llarg). Per tant, el calat amb què s'hi arriba té prou energia per ofegar el règim crític, raó per la qual a la realitat es donen uns calats més elevats que els discutits fins ara. A Puertas i Sánchez-Juny. (2001) es discuteix aquest fenomen amb tot detall.

9.2.3 Canal Venturi

En una contracció, el règim és crític si l'ample és menor o igual a un determinat ample B_c ; això li confereix unes característiques idònies per desenvolupar un mecanisme de mesura del cabal. Sobre la base d'aquest concepte es defineix el canal Venturi.

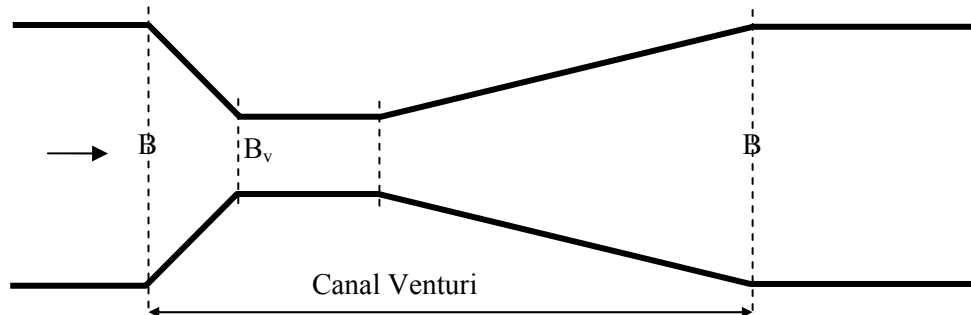


Figura 9.10 Vista en planta típica d'un canal Venturi. Es caracteritza per la contracció brusca amb què es troba el flux en la qual es forma un règim crític.

A partir de la relació corresponent al règim crític ($Fr=1$), i assumint implícitament que no hi ha pèrdues d'energia ni repartides ni localitzades, es pot escriure una relació biunívoca entre el cabal circulant i el calat crític, que es pot mesurar en el canal. Per tant, acceptant que la contracció és suficient per assegurar la formació d'un règim crític:

$$y_c = \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{2B}\right)^2 \cdot \frac{1}{g}} \quad (9.16)$$

I així es pot escriure el següent balanç d'energia entre les seccions aigües amunt i aigües avall de la contracció. Cal ser conscients que en aquesta última el règim que apareix és crític:

$$y_1 + \frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{2B}\right)^2 \cdot \frac{1}{g}} \quad (9.17)$$

Si la velocitat d'aproximació es pot negligir, resulta

$$Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \cdot B_2 \cdot \sqrt{g} \cdot y_1^{3/2} \quad \text{o} \quad Q = 0.544 \cdot B_2 \cdot \sqrt{g} \cdot y_1^3 \quad (9.18)$$

expressió a partir de la qual s'observa que, mesurant el calat d'aproximació y_1 a la contracció, es pot estimar el cabal circulant. Per aplicar amb més precisió aquests elements d'aforament de canals, es poden tenir en compte tant la velocitat d'aproximació com les pèrdues d'energia, i en resulta una expressió equivalent a la (9.18), amb l'aparició d'uns factors correctors. Un desenvolupament més detallat pot estudiar-se a Sotelo (1995).

9.3 Modificació de l'ample d'un canal de secció arbitrària

L'energia específica, si la secció no és rectangular tal com s'ha estat analitzant fins ara, continua essent una funció que depèn del calat:

$$E = y + \frac{Q^2}{A^2(y)} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \quad (9.19)$$

Si, a més, la conducció no és prismàtica, l'energia específica E continua essent la mateixa, tot i que l'ample mitjà ($\bar{B}(y)$) varia amb el calat y , per tant, el cabal específic crític q_c pot variar d'una secció a l'altra.

Per tant, cal fer l'anàlisi d'aquesta situació a partir de les corbes $y-Q$, imposant que els cabals es mantenen constants quan es passa a través de la contracció o eixamplament ($Q_1 = Q_2$), i així donar els calats corresponents sobre la mateixa vertical.

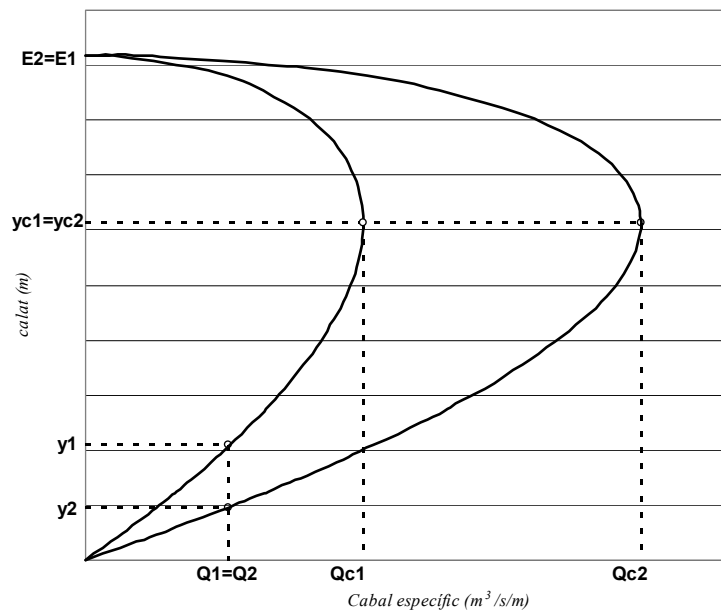


Figura 9.11 Anàlisi de contraccions o eixamplaments amb les corbes calat-cabal per a una energia específica donada, en el cas de seccions arbitràries.

9.4 Modificació de la cota de la solera

Sigui en aquest cas un canal horitzontal, d'ample B , que transporta un cabal Q , amb un calat y_1 en una determinada secció 1. En una secció 2, molt propera, hi ha una elevació brusca de solera d'altura Δz , tal com s'esquematitza a la figura 9.13. Si les seccions 1 i 2 es poden suposar molt properes, es consideren negligibles les pèrdues per fregament. També es negligeixen les pèrdues localitzades.

9.4.1 Aproximació en règim subcrític

Si el règim d'aproximació a la secció 1 és en règim lent, s'ha de verificar que:

$$z_1 + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (9.20)$$

essent $z_2 = z_1 + \Delta z$

aleshores:

$$E_1 = E_2 + \Delta z \quad \text{o} \quad E_2 = E_1 - \Delta z \quad (9.21)$$

Si es parteix del fet que el calat a la secció 1 y_1 és en règim lent, aleshores a la secció 2 y_2 ha de disminuir, a causa de la disminució de l'energia específica. Així, si la superfície d'aigua corresponent a la secció 1 és P , ha de disminuir fins a R a la secció 2.

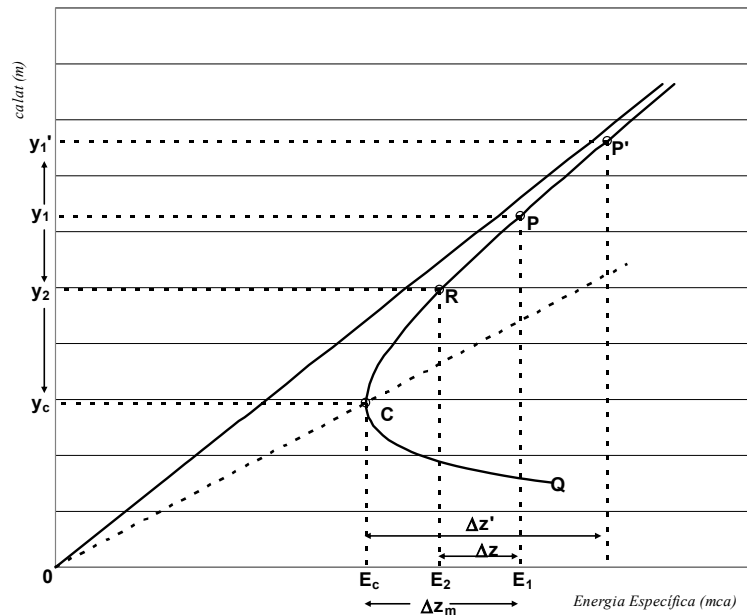


Figura 9.12 Cas d'una sobreelevació de la solera a partir de les corbes calat-energia específica. Aproximació en règim subcrític.

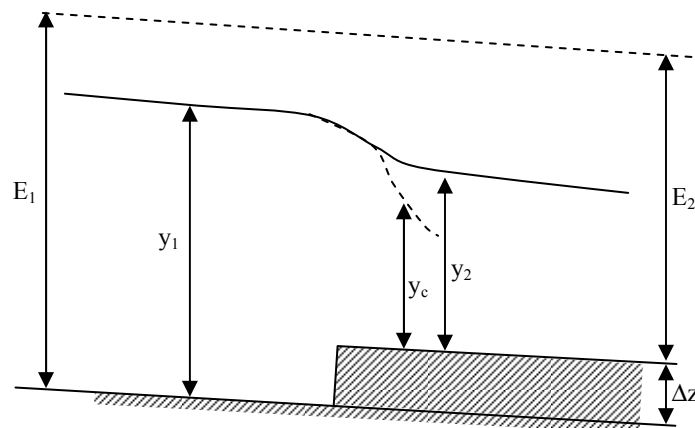


Figura 9.13 Esquema típic d'una sobreelevació de la solera.

El calat y_2 ve donat per:

$$E_2 = y_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = y_2 + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot B^2 \cdot y_2^2} \quad (9.22)$$

A la figura 9.12 s'aprecia que, si la sobreelevació Δz és més gran, el calat y_2 ha de disminuir. El mínim calat que es pot trobar a la secció 2 correspon al punt C, que no és cap altre que el règim crític. En aquest punt:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_m \text{ i, per tant, } y_2 = y_c \text{ i } E_2 = E_c \\ E_1 - \Delta z_m &= E_2 = E_c = y_c + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot B^2 \cdot y_c^2} \end{aligned} \quad (9.23)$$

Si la sobreelevació $\Delta z > \Delta z_m$ al diagrama de la figura 9.12, s'hi observa que el flux no és possible per l'energia E_1 donada, de manera que el calat a la secció immediatament amunt de la sobreelevació, y_1 , ha d'augmentar, fins a y_1' , per provocar l'augment d'energia específica a la secció 1 fins al valor E_1' :

$$E_1' = y_1' + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot B^2 \cdot y_1'^2} \quad \text{amb} \quad E_1' > E_1 \quad (9.24)$$

A la secció 2 el flux continua corresponent a la mínima energia específica (condició de calat crític):

$$E_1 - \Delta z_m = E_2 = E_c = y_c + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot B^2 \cdot y_c^2} \quad (9.25)$$

Resumint, analitzant diferents altures de la sobrelevació (Δz) entre per 0 i Δz_m , es dona que, si el calat d'aproximació a la secció immediatament aigües amunt (y_1) es manté constant, aleshores el calat en la secció immediatament aigües avall (y_2) disminueix a mesura que augmenta Δz i assoleix un mínim valor ($y_2 = y_c$) quan la sobrelevació és la màxima possible ($\Delta z = \Delta z_m$).

En el cas que la sobrelevació (Δz) sigui més gran que Δz_m , aleshores el calat y_1 d'aproximació aigües amunt ha d'augmentar necessàriament fins a y_1' , per aconseguir que l'energia específica també augmenti. En canvi, el calat y_2 aigües avall roman constant i igual al crític ($y_2 = y_c$).

9.4.2 Aproximació en règim supercrític

Si el calat y_1 d'aproximació a la sobrelevació és en règim supercrític, el calat a la secció immediatament aigües avall ha d'augmentar per la reducció de l'energia específica que l'elevació introdueix.

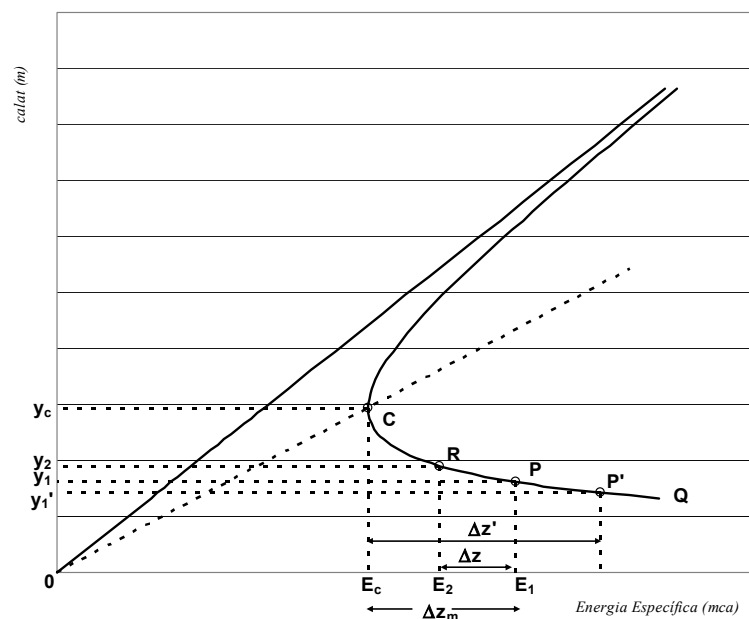


Figura 9.14 Cas d'una sobrelevació de la solera a partir de les corbes calat – energia específica. Aproximació en règim supercrític.

A la figura 9.14 s'aprecia que l'energia corresponent al punt P té associada, en règim ràpid, un calat y_1 i ha de canviar fins a l'energia del punt R, que li correspon el calat y_2 .

En el límit, quan la sobrelevació (Δz) sigui igual a Δz_m , es provoca que a la secció 2 el calat y_2 passi a ser crític, y_c , i, per tant, que l'energia a 2, $E_2 = E_c$, igual com passava en el cas de l'aproximació en règim subcrític.

A la figura 9.14 s'aprecia que quan $\Delta z > \Delta z_m$, el valor de la diferència $E_1 - \Delta z < E_c$, fet que condueix a un flux físicament impossible per tant, necessàriament s'ha d'ajustar, per ell mateix, per arribar a 2 amb la mínima energia possible corresponent a aquell cabal que faci possible el flux. Aquesta energia no és cap altra que la corresponent al règim crític (E_c) i, per tant, això obliga que les condicions del flux aigües amunt de la sobreelevació hagin de canviar d'acord amb això. D'aquesta manera, el que es produeix generalment és un ressalt hidràulic.

9.5 Disseny de transicions en el tipus de secció en règim lent

Les transicions s'han de plantejar tan suaument com sigui possible, per tal d'aconseguir una bona distribució de la velocitat al final de la transició. Cal tenir en compte que, en general, és important poder estimar tant les pèrdues d'energia com el perfil de la transició.

És interessant tenir clar que en fluxos que es contrauen, les pèrdues d'energia localitzades són més petites que en fluxos que s'expandeixen.

9.5.1 Contraccions

En una contracció en un flux en làmina lliure, un cop superada la reducció de secció, per raó de la inèrcia del fluid, el flux es continua contraient i es forma el fenomen d'una vena contracta²⁶. A l'apartat 9.3 del capítol 12 (flux a pressió) es descriu el flux per mitjà d'una contracció, de manera generalitzable al que passa en làmina lliure. En aquest punt el flux passa a expandir-se immediatament buscant la readaptació al contorn del canal aigües avall.

Experiments en contraccions amb vèrtexs vius o arrodonits indiquen que les pèrdues es poden estimar fent:

$$\Delta H = \lambda \cdot \frac{v_2^2}{2g} \quad (9.26)$$

on v_2 és la velocitat en la secció més estreta (avall de la contracció) i λ és el coeficient de pèrdues localitzades, que és funció de l'ample de la contracció, del calat que es doni en aquella secció i de l'existència d'arestes vives, o no, en la contracció. A la taula 9.1 es donen alguns valors representatius dels coeficients de pèrdues de càrrega localitzades en contraccions, amb la condició que s'eviti una estrangulació excessiva més enllà de la que provoca la formació d'un règim crític aigües avall.

Taula 9.1 Valors representatius del coeficient de pèrdues de càrrega localitzada en una contracció brusca en làmina lliure.

Tipus de contracció	λ
Sobrada	0.10
Transició lineal que formen 30° amb l'eix del canal	0.06
Transició cilíndrica	0.06
Transició el·líptica	0.06

9.5.2 Expansions brusques

La figura 9.15 mostra el flux en una expansió brusca, en un canal rectangular de pendent nul. Es consideren les seccions 1, aigües amunt de l'eixamplament; 2, immediatament aigües avall del canvi de secció, i 3, aigües avall en la zona eixamplada. Es pot derivar una expressió per estimar les pèrdues d'energia si es considera que:

²⁶El calat a la secció de la contracció pot disminuir més del que indicarien les corbes d' E - y per causa de la inèrcia del flux. És el calat corresponent al que en hidràulica clàssica s'anomena "vena contracta".

1. Els calats entre la secció 1 i la secció 2, immediatament aigües amunt i avall de l'eixamplament, es poden suposar aproximadament iguals ($y_1 = y_2$).
2. L'energia específica entre les seccions 1 i 2 és conserva ($E_1 = E_2$).
3. La quantitat de moviment entre les seccions 2 i 3 es conserva ($M_2 = M_3$).
4. La fricció amb el contorn es pot negligir.
5. El nombre de Froude a la secció 1, Fr_1 , és prou petit per negligir Fr_1^4 i les potències superiors.

I s'obindrà:

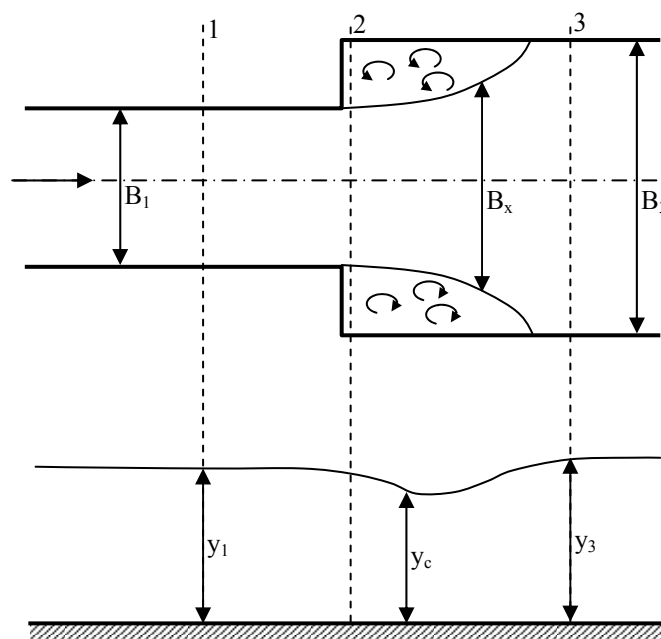


Figura 9.15 Esquema d'un eixamplament de secció.

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{B_1}{B_2}\right)^2 \left[1 + \frac{2 \cdot Fr_1^2 \cdot \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^3}{\left(1 - \frac{B_1}{B_2}\right)} \right] \quad (9.27)$$

El terme entre claudàtors, és negligible si $Fr_1 < 0.5$, i si $B_2/B_1 > 1.5$, aleshores l'equació es redueix a l'expressió obtinguda en conductes tancats (apartat 9.2 del capítol 12):

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{B_1}{B_2}\right)^2 \quad \text{fórmula de Borda} \quad (9.28)$$

Aquesta equació ha estat contrastada al laboratori i ha resultat acceptable per a la seva utilització. Altres experiències s'han fet amb relacions B_2/B_1 entre 1.33 i 2.0, i n'han resultat uns valors de les pèrdues d'energia entre 1.6 i 4.0 vegades les estimades per l'expressió anterior.

9.5.3 Expansions graduals

Per tal de minimitzar les pèrdues de càrrega localitzades en aquests canvis de secció, com també per assegurar una bona distribució de la velocitat un cop superada l'expansió, es recomana un disseny suficientment gradual de la transició d'una secció a l'altra.

La longitud recomanada de la transició varia entre $2 \cdot (B_2 - B_1)$ i $2.5 \cdot (B_2 - B_1)$.

Mitra va obtenir²⁷ l'expressió que dona com ha de variar l'ample (B) de la secció amb la distància (x) des del començament de l'expansió.

$$B_x = \frac{B_1 \cdot B_2 \cdot L}{B_2 \cdot L - (B_2 - B_1) \cdot x} \quad (9.29)$$

Aquesta expressió descriu una expansió hiperbòlica i l'experiència assegura que funciona prou bé.

9.6 Alteració del flux produït per les piles d'un pont

Sovint en cursos d'aigua les contraccions i expansions es donen de forma encadenada, primer una contracció i tot seguit una expansió que recupera l'ample inicial. És el cas de fluxos a través de les piles d'un pont. L'interès principal es presenta en analitzar la sobreelevació de la làmina, aigües amunt del pont, deguda a la seva presència.

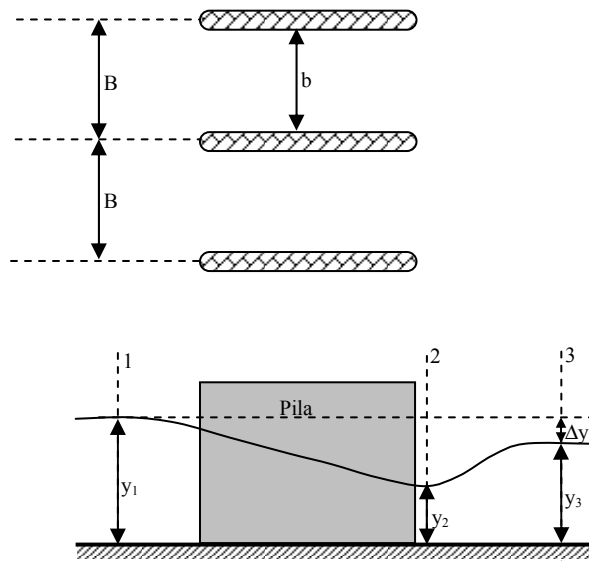


Figura 9.16 Esquema del flux a través de les piles d'un pont.

Generalment, l'acció del flux sobre les piles del pont és petita, comparada amb les altres forces que hi poden actuar. El flux a través de les obertures entre piles es pot analitzar mitjançant les equacions de continuïtat, energia i quantitat de moviment.

A la figura 9.16 es mostra el flux a través les obertures, amb una aproximació en règim lent, que és el més habitual en aquests casos. L'equació de quantitat de moviment entre les seccions 1 i 3 definides a la figura 9.16 esmentada és:

²⁷ Per obtenir aquesta expressió es va assumir que el calat i la variació de la velocitat (dv/dx) havien de mantenir-se més o menys constants al llarg de la transició

$$\left(\frac{\rho \cdot g \cdot y_1^2}{2} - \frac{\rho \cdot g \cdot y_3^2}{2}\right) \cdot B - C_D \cdot b \cdot y_3 \cdot \rho \cdot v_3^2 = \rho \cdot v_3 \cdot y_3 \cdot B \cdot (v_3 - v_1) \quad (9.30)$$

on C_D és el coeficient d'arrossegament de la pila. Aleshores:

$$(y_1 - y_3)(y_1 + y_3) - C_D \cdot \left(\frac{b}{B}\right) \cdot y_3 \cdot \frac{v_3^2}{g} = \frac{2 \cdot v_3 \cdot y_3 \cdot (v_3 - v_1)}{g} \quad (9.31)$$

ja que per continuïtat $v_1 \cdot y_1 = v_3 \cdot y_3$, anomenant $(y_1 - y_3) = \Delta y$, i simplificant queda:

$$\Delta y \cdot (2 \cdot y_3 + \Delta y) = C_D \cdot \frac{b}{B} \cdot y_3 \cdot \frac{v_3^2}{g} + \frac{2 \cdot v_3^2 \cdot y_3}{g} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{y_3}}\right) \quad (9.32)$$

essent $Fr_3 = \frac{v_3}{\sqrt{g \cdot y_3}}$. Obviant el terme $\left(\frac{\Delta y}{y_3}\right)^3$ perquè és petit i simplificant:

$$\left(\frac{\Delta y}{y_3}\right) = \frac{A + \sqrt{A^2 + 12 \cdot C_D \cdot \left(\frac{b}{B}\right) \cdot Fr_3^2}}{6} \quad (9.33)$$

on:

$$A = \left(C_D \cdot \frac{b}{B} + 2\right) \cdot Fr_3^2 - 2 \quad (9.34)$$

Les condicions a la secció 3 es poden suposar conegudes, ja que, en règim lent, vénen determinades per una condició de contorn aigües avall; per tant, les equacions anteriors es poden resoldre per obtenir Δy , sempre que el coeficient C_D sigui conegut.

S'han estudiat les variacions de C_D en funció de la relació b/B , per a determinades formes de piles. Aquests estudis s'han restringit a fluxos d'aproximació sense gradients de velocitat apreciables. El coeficient de desguàs C_D es veu afectat per la distribució de velocitat d'aproximació en aquest cas, els resultats dels estudis citats no són aplicables, de manera que si no es coneix C_D , l'ús d'aquestes equacions es complica molt.

Experiments en fluxos a través de piles de ponts, fets per Yarnell, han donat com a resultat la fórmula empírica següent:

$$\frac{\Delta y}{y_3} = K \cdot Fr_3^2 \cdot (K + 5 \cdot Fr_3^2 - 0.6) \cdot (\alpha + 15 \cdot \alpha^4) \quad (9.35)$$

on $\alpha = 1 - \frac{b}{B}$ i K és funció de la forma de la pila. Els valors més habituals de K es resumeixen a la taula 9.1.

El valor de $\Delta y/y_3$ pot ser, com a màxim, d'un 10% a un 15% diferent del que dona per l'equació de Yarnell, quan la relació entre la longitud i l'amplada de la pila augmenta per sobre de 13.

Taula 9.2. Variació de K amb la forma de la pila, per a piles amb relacions llarg-ample iguala a 4.

Forma de la pila	K
Nas i cua semicirculars	0.9
Nas i cua formats per dues corbes circulars, cadascuna de radi igual a 2 vegades l'ample de la pila i cadascuna tangent a la cara de la pila	0.9
Piles semicirculars bessones amb un diafragma de connexió	0.95
Piles semicirculars bessones sense diafragma de connexió	1.05
Nas i cua en triangle rectangle	1.05
Nas i cua quadrats	1.25

També cal tenir en compte que l'equació de Yarnell només és vàlida si la contracció no provoca un règim crític a la secció 2. La contracció que causa règim crític es pot obtenir aplicant l'equació de conservació de quantitat de moviment, entre les seccions 2 i 3, i considerant que el calat a la secció 2 és crític.

Si es pot suposar constant l'energia entre les seccions 1 i 2 la contracció límit és (French, 1988):

$$\sigma_{Limit} = \left[\frac{27 \cdot Fr_1^2}{(2 + Fr_1^2)^3} \right]^{1/2} \quad (9.36)$$

Si és entre 2 i 3 que es pot suposar constant, la contracció limitant és (French, 1988):

$$\sigma_{Limit} = \frac{\left(2 + \frac{1}{\sigma_{Limit}}\right)^3 \cdot Fr_3^4}{(1 + 2 \cdot Fr_3^2)^3} \quad \text{on } \sigma = 1 - \alpha \quad (9.37)$$

Henderson (1966) va recomanar directament l'equació (9.37) perquè no depèn de la suposició de la conservació de l'energia i, a més, les variables independents que hi apareixen són conegudes a priori.

Un bon disseny hidràulic de la distribució de les piles d'un pont és aquell en què la contracció que crea no provoca condicions crítiques. En aquest cas, com ja s'ha dit, l'equació de Yarnell es pot aplicar. D'altra banda, és interessant tenir en compte que les pèrdues d'energia degudes a les piles poden ser estimades calculant la diferència d'energies (trinomi de Bernoulli) entre les seccions 1 i 3, energies que es poden calcular fàcilment ja que els calats i les velocitats a aquestes seccions són coneguts, gràcies a l'equació de Yarnell.

9.7 Exercicis proposats

1. Discuti si les afirmacions següents són vertaderes o falses:
 - En un flux en làmina lliure, l'existència d'una singularitat (estretament, eixamplament, discontinuïtat en la solera, etc.) origina una pèrdua de càrrega localitzada i una alteració en la làmina lliure.
 - En un flux en làmina lliure l'existència d'una singularitat (estretament, eixamplament, discontinuïtat en la solera, etc.) origina la formació d'un règim variable.

- Un canal prismàtic de pendent constant, pel qual circula un cabal donat Q , si presenta un eixamplament bruscat i l'aproximació a la singularitat és en règim ràpid, el calat disminueix, també bruscat, en el sentit del moviment.
 - Un canal prismàtic de pendent constant, pel qual circula un cabal donat Q , si presenta una contracció brusca i l'aproximació a la singularitat és en règim lent, el calat disminueix en qualsevol cas, també bruscat, en el sentit del moviment.
 - Com a primera aproximació, és correcte considerar que l'energia específica es conserva entre les dues seccions immediatament aigües amunt i avall d'un estretament o d'un eixamplament.
 - Com a primera aproximació, és correcte considerar que l'energia específica es conserva entre les dues seccions immediatament aigües amunt i avall d'una elevació de solera.
 - En una contracció de secció en règim ràpid, localment, la làmina d'aigua tendeix a pujar.
 - En un eixamplament de secció brusca, les pèrdues de càrrega localitzades són més grans que en una contracció brusca.
 - En una contracció de secció en règim ràpid, localment, la làmina d'aigua tendeix a pujar.
 - En una contracció brusca que uneix dos canals prismàtics de tipus S, el pas a través de la contracció es fa en règim lent.
 - En una contracció brusca que uneix dos canals prismàtics de tipus M, el pas a través de la contracció implica la formació d'un règim crític.
 - Una sobreelevació brusca de solera en règim lent provoca, en el sentit del moviment, una disminució local del calat.
 - Si l'aproximació a un eixamplament bruscat de secció es produeix en règim lent, es provoca, localment, una disminució del calat.
2. Un canal de secció rectangular de pendent geomètric $i = 0.001$ i coeficient de rugositat de Manning $n = 0.015$, transporta un cabal de $10 \text{ m}^3/\text{s}$. En una determinada secció, i de manera sobtada ($\lambda = 0.1$), passa d'un ample $B_1 = 3 \text{ m}$ a un ample $B_2 = 2 \text{ m}$ en el sentit del moviment. Determineu el perfil de la làmina d'aigua i la pèrdua local d'energia en la contracció.
 3. Un canal de secció rectangular de pendent geomètric $i = 0.001$ i coeficient de rugositat de Manning $n = 0.015$, transporta un cabal de $10 \text{ m}^3/\text{s}$. En una determinada secció i de manera sobtada, passa d'un ample $B_1 = 2 \text{ m}$ a un ample $B_2 = 3 \text{ m}$ en el sentit del moviment. Determineu el perfil de la làmina d'aigua i la pèrdua local d'energia en la contracció.

10 Moviment ràpidament variat. Desguassos i sobreexidors. Aforaments en làmina lliure

10.1 Introducció

El concepte de desguassar, entès com l'acció de treure l'aigua d'un lloc on està empantanada o aturada, s'aconsegueix d'una manera natural des d'un orifici situat per sota de la superfície lliure. Més concretament, si es vol buidar completament aquest recinte, el forat s'ha de situar al seu fons. Hidràulicament, l'orifici funciona a pressió.

D'altra banda, el concepte de sobreexir du associada la imatge d'un recipient ple a vessar, que deixa escapar per damunt les seves vores una quantitat de líquid quan el volum de líquid augmenta pels motius que siguin. Per tant, en aquest cas se sobreentén un funcionament en làmina lliure a diferència de l'anterior. Aquest és el matís hidràulic bàsic que els diferenciarà.

Ambdues idees es poden comparar amb el concepte de vessar, entès com el fenomen que es produeix quan un fluid surt del recipient que la conté. Així doncs, com s'han establert en els conceptes esmentats, es pot distingir entre:

- Desguàs: estructura hidràulica que permet les sortides de cabals que es produeix en càrrega per l'acció d'un gradient de pressió.
- Sobreexidor: estructura hidràulica que permet les sortides de cabals que es produeix per l'acció gravitatòria, en làmina lliure.

Tot i que, com ja s'ha indicat, el concepte de vessador, segons la seva definició gramatical, es podria relacionar amb qualsevol dels dos casos anteriors, implícitament, se sol usar relacionant-lo més amb el funcionament en làmina lliure d'un sobreexidor, bàsicament per la imatge molt gràfica d'un recipient ple a vessar d'un determinat líquid.

Amb tot, es pretén obtenir la relació entre el cabal vessat a la sortida de l'estructura i les condicions amunt (és a dir, l'acció gravitatòria, l'existència d'un gradient de pressions o la geometria). Aquesta relació permet determinar el cabal circulat, acció coneguda com a *aforament*:

$$Q = f(\Delta p, g, L) \quad (10.1)$$

10.2 Desguassos a pressió. Coeficients de contracció i desguàs

Sigui un recipient ple d'un líquid, que té al seu contorn un orifici de petites dimensions²⁸, de qualsevol forma i secció transversal A . En aquest cas, es pretén determinar el cabal (Q) que es pot desguassar per l'orifici.

²⁸ En aquest cas, el concepte "petites dimensions" es refereix a un orifici petit, per comparació de la profunditat (H) d'aigua en el dipòsit.

Es fa la suposició que el dipòsit és de dimensions molt grans o dit d'una altra manera que el nivell d'aigua (H) és constant.

Per la seva banda, les parets de l'orifici han de formar una aresta esmolada. Això dona un funcionament hidràulic molt concret: les partícules de líquid a la proximitat de l'orifici tendeixen a moure's en direcció al centre d'aquest; per efecte de la inèrcia, l'entrada al forat provoca una contracció del doll d'aigua que assoleix la mínima secció transversal en la secció 2. Aquesta es coneix, en la literatura, amb el terme llatí de *vena contracta*, que té una superfície (A_c) que és més petita que la de l'obertura del dipòsit ($A_c < A$).

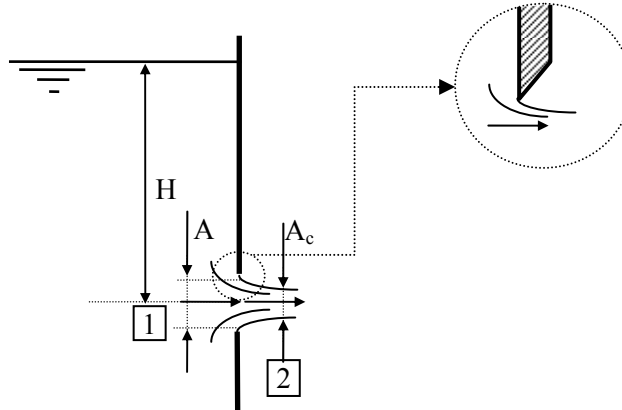


Figura 10.1 Esquema del desguàs d'un dipòsit a través d'un orifici.

Suposat un pla de referència que passi pel centre de gravetat de l'orifici i fent la suposició²⁹ que a la vena contracta la velocitat de les partícules és pràcticament uniforme i de valor mitjà v , i que la pressió hi val pràcticament la pressió atmosfèrica; es pot escriure el balanç del trinomi de Bernoulli entre les seccions de 1 i 2 de la figura 10.1:

$$H = \frac{v^2}{2g} \quad (10.2)$$

on s'ha obviat el possible desnivell entre els centres de gravetat de l'orifici i de la vena contracta. Aleshores:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (10.3)$$

Aquesta és l'equació de Torricelli, segons la qual la velocitat del flux a la sortida del forat segueix una llei parabòlica amb la profunditat aigües amunt del forat. Aquest valor de la velocitat es calcula a partir de la profunditat mitjana de l'orifici, que correspon a la profunditat del seu centre de gravetat. A l'entrada de l'orifici hi ha una acceleració convectiva en el flux, de manera que la velocitat de les partícules aigües amunt d'aquest punt són més petites i aigües avall més grans. La màxima velocitat s'assoleix a la secció del doll, on la secció transversal es fa mínima (*vena contracta*); a partir d'aquesta, es recupera en part el diàmetre del doll.

La fórmula de Torricelli (expressió (10.3)) és tant més vàlida quant més petita sigui la dimensió transversal de l'orifici per comparació de la seva profunditat H . Tant és així que, en general, els resultats obtinguts de (10.3) concorden amb els resultats experimentals només si es corregeixen amb un coeficient C_v , que s'anomena *coeficient de velocitat*:

²⁹ Es comprova experimentalment que és una hipòtesi prou acceptable.

$$v = C_v \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1} \quad (10.4)$$

Aquest C_v és adimensional i molt proper a 1, i només es pot obtenir experimentalment. Corregeix l'error de no considerar en els raonaments fets fins ara ni les pèrdues de càrrega localitzades ni els coeficients de Coriolis (α_1 i α_2) a les seccions 1 i 2.

A partir de la velocitat mitjana obtinguda, es pot determinar el cabal total, si s'estima l'àrea de la vena contracta, ja que aquesta es pot calcular en funció de la de l'orifici, amb l'ajut d'un coeficient C_c de contracció:

$$A_c = C_c \cdot A \quad (10.5)$$

Aleshores, el cabal evacuat per l'orifici és:

$$Q = C_c \cdot C_v \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (10.6)$$

Aquesta expressió se sol escriure definint el coeficient de desguàs C_d com:

$$C_d = C_c \cdot C_v \quad (10.7)$$

de manera que el cabal es calcula amb l'equació general d'un orifici de paret prima:

$$Q = C_d \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (10.8)$$

És important recordar que, en tot aquest desenvolupament, s'ha assumit que:

- Sobre la superfície lliure del doll que surt a través de l'orifici la pressió és l'atmosfèrica.
- La velocitat d'aproximació a l'orifici és negligible.
- La contracció és completa, és a dir, la distància de l'orifici a les parets laterals i al fons és gran³⁰.
- Com a resultat dels punts anteriors, la càrrega hidràulica disponible (H) coincideix amb el desnivell entre la superfície lliure i el centre de gravetat de l'orifici.

Si la càrrega h és molt gran comparada amb la mida de l'orifici, aleshores la càrrega disponible correspon a la columna d'aigua h . En aquest cas, l'energia de velocitat de l'aproximació a l'orifici és negligible.

Quan h no sigui més gran que 4 ó 5 vegades l'energia de velocitat, aleshores:

$$H_1 = h + \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{on} \quad h = \frac{\Delta p}{\gamma} \quad (10.9)$$

A mesura que l'orifici es fa més gran, la velocitat a l'extrem superior del doll (I) tendeix a ser diferent de la de l'extrem inferior (II) (figura 10.2). En aquest cas, la velocitat en el doll varia depenent de la cota z . Si s'analitza la línia de corrent AB de figura 10.2 (dreta), on A és un punt a una distància genèrica z sobre el pla de referència, es té que:

³⁰ Normalment es considera prou gran si aquesta distància és superior a 3 vegades la mida més gran del forat (p. ex., el costat més llarg en orificis de secció rectangular).

$$\begin{aligned} C_d &= 0.60 \\ C_c &= 0.605 \quad \text{per } Re > 10^5 \\ C_v &= 0.99 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Aquests valors experimentals es pot comprovar que compleixen prou acceptablement les relacions (10.7) i (10.14).

En el cas d'orificis de secció rectangular, els coeficients C_d , C_c i C_v són pràcticament els mateixos que els indicats a (10.15).

En qualsevol cas, els coeficients C_d , C_c i C_v han estat obtinguts assegurant que la contracció del flux és completa. Aquesta està garantida si la distància entre els extrems de l'orifici i els contorns del recipient són més grans que tres vegades el seu diàmetre, si és circular, o tres vegades la seva longitud menor, si és de secció rectangular.

10.3 Desguàs sota comportes verticals i radials. Desguàs lliure i submergit

Una comporta és una placa mòbil, plana o corba, que en pujar o baixar permet graduar l'altura de l'orifici que va deixant. Aquest control de l'altura permet controlar el cabal que deixa passar.

L'orifici es forma entre la solera del canal i l'extrem inferior de la comporta. El seu ample sol coincidir amb el del canal, de manera que el flux es pot suposar bidimensional.

Hi ha diversos factors que influeixen en la determinació del cabal desguassat sota la comporta:

- La contracció i el fregament amb la solera que es donen quan el flux passa sota la comporta, produeixen una pèrdua de càrrega Δh_r que en general no és negligible.
- La influència de l'energia cinètica ($v_1^2/2g$) del flux d'aproximació a la comporta, es manifesta tant més gran com menor és la relació entre el nivell aigües amunt i l'obertura de la comporta (y_1/a).

10.3.1 Desguàs sota comporta lliure

Es considera el cas general d'una comporta plana amb una inclinació θ^0 respecte de l'horitzontal i un ample B , tal com s'observa a la figura inferior dreta de la figura 10.3.

Val a dir que la inclinació de la comporta és θ^0 , equivalent a la de la tangent en el llavi de la comporta radial, i una comporta vertical el cas particular en què $\theta^0 = 90^\circ$.

Si es planteja el balanç del trinomi de Bernoulli entre la secció 1 (amunt de la comporta) i la 2 (secció de la vena contracta):

$$H = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = C_c \cdot a + \frac{v_2^2}{2g} \quad (10.16)$$

I d'altra banda, s'analitza l'equació de continuïtat entre 1 i 2:

$$v_1 = \frac{C_c \cdot a}{y_1} \cdot v_2 \quad (10.17)$$

Substituint (10.17) en (10.16) resulta:

$$y_1 + \left(\frac{C_c \cdot a}{y_1}\right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} = C_c \cdot a + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_2^2}{2g} = \frac{y_1 - C_c \cdot a}{1 - \left(\frac{C_c \cdot a}{y_1}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{C_c \cdot a}{y_1}\right) \cdot y_1}{\left(1 + \frac{C_c \cdot a}{y_1}\right) \left(1 - \frac{C_c \cdot a}{y_1}\right)} \quad (10.18)$$

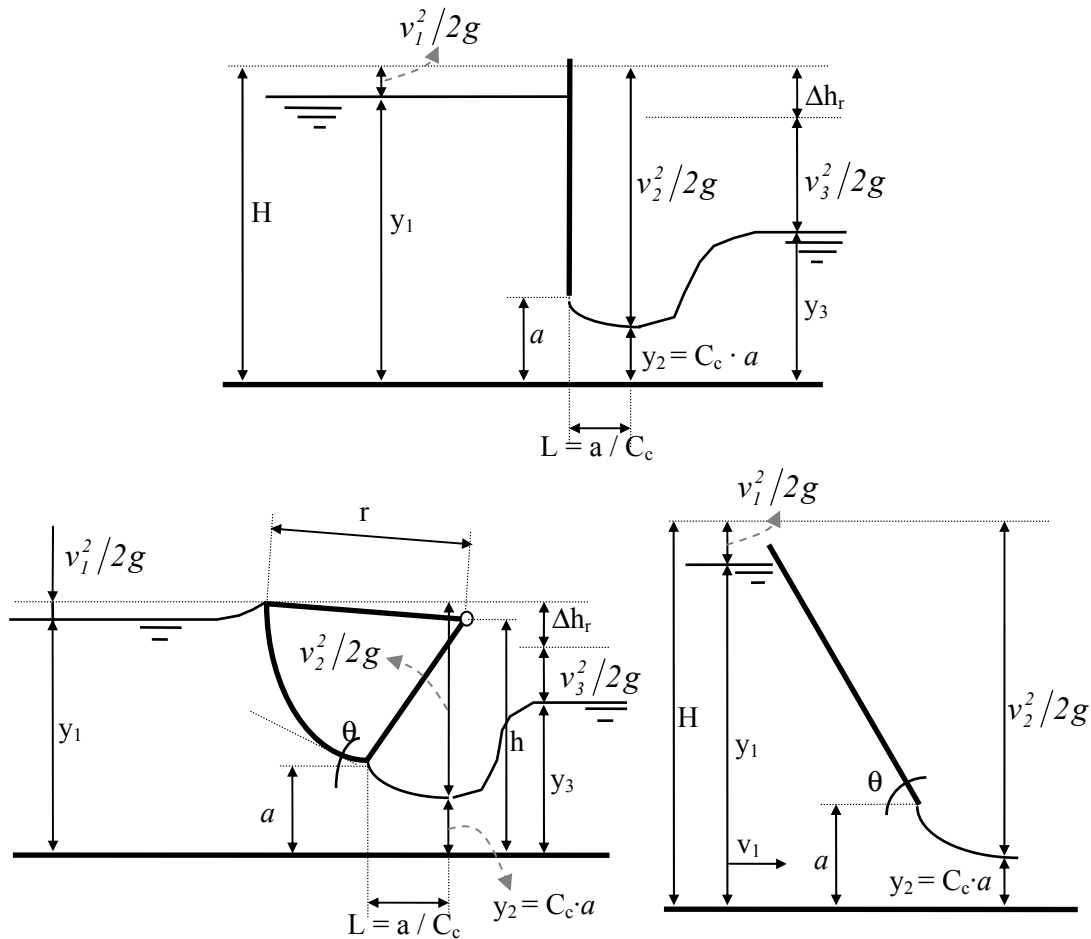


Figura 10.3 Esquema de diferents tipologies de comportes amb el desguàs sota ella.

Per tant, la velocitat mitjana real a la secció de la vena contracta es pot escriure:

$$v_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1 + \frac{C_c \cdot a}{y_1}}} \cdot \sqrt{2g \cdot y_1} \quad (10.19)$$

on C_v és el coeficient de velocitat. Per tant, el cabal és:

$$Q = \frac{C_v \cdot C_c \cdot B \cdot a}{\sqrt{1 + \frac{C_c \cdot a}{y_1}}} \cdot \sqrt{2g \cdot y_1} \Rightarrow \quad (10.20)$$

que se simplifica fent:

$$Q = C_d \cdot B \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot y_1} \quad (10.21)$$

on

$$C_d = \frac{C_v \cdot C_c}{\sqrt{1 + \frac{C_c \cdot a}{y_1}}} \quad (10.22)$$

Observeu que a partir de la substitució de (10.17) a (10.16), apareix el terme $\sqrt{1 + \frac{C_c \cdot a}{y_1}}$, de manera que aquest justifica l'ús del nivell aigües amunt de la comporta (y_1), en comptes de l'energia per unitat de pes en aquella mateixa secció (H_1).

L'obtenció estricta del coeficient de desguàs C_d passa sempre per l'experimentació ja que, com ja s'ha dit anteriorment, en aquest desenvolupament s'han obviat les pèrdues de càrrega i, a més, no s'ha establert tampoc com estimar el coeficient de velocitat C_v .

La dificultat d'estimar adequadament els coeficients C_v , C_c i C_d , és que tots tres depenen de la geometria i del nombre de Reynolds. Encara més, tots tres coeficients són molt sensibles al grau d'agudeses del llavi esmolat de la comporta i als diferents desenvolupaments de la capa límit a partir del pla de la comporta. Aquesta dificultat ha fet, per tant, que els estudis realitzats per diversos investigadors no presentin una gran coincidència en els resultats. A Sotelo (1995), Lencastre (1998) o Naudascher (2001) es poden trobar col·leccions d'àbac que permeten l'obtenció del coeficient de desguàs.

De qualsevol manera, existeixen diverses aproximacions empíriques al C_v . Una de les més emprades, per la seva simplicitat, és deguda a Knapp i és vàlida per a comportes inclinades un angle θ° , encara que també és vàlida per a comportes radials, on θ° és la inclinació de la tangent al llavi inferior de la comporta (Sotelo, 1995).

$$C_v = 0.960 + \left(0.14535 \cdot \frac{\theta^\circ}{90^\circ} - 0.0475 \right) \cdot \frac{a}{y_1} \quad (10.23)$$

on l'angle θ és en graus sexagesimals

Té com a límit superior, lògicament, $C_v = 1$, que s'assoleix quan $a/y_1 = 0.408$ en el cas de comportes planes verticals ($\theta^\circ = 90^\circ$). També en aquest cas el coeficient de contracció C_c , a efectes pràctics, mostra petites variacions al voltant de 0.62, per a qualsevol relació de y_1/a . En canvi, en comportes planes inclinades un angle θ amb l'horitzontal, o radials en què la sortida formi el mateix angle θ , el coeficient de contracció augmenta quan augmenta l'angle, i es pot estimar amb una bona aproximació a partir de l'expressió experimental:

$$C_c = 1 - 0.75 \left(\frac{\theta^\circ}{90} \right) + 0.36 \left(\frac{\theta^\circ}{90} \right)^2 \quad (10.24)$$

Per tant, amb les equacions (10.22), (10.23) i (10.24) es pot determinar el coeficient de desguàs teòric, en funció de l'angle de la inclinació de la comporta i de la relació entre el nivell d'aigües amunt seu (y_1) i l'obertura de la comporta (a), quan el desguàs és lliure. Experimentalment, el coeficient C_d ha estat obtingut en comportes verticals que funcionen en condicions de desguàs lliure; els seus valors es mostren a la figura 10.6. Es pot comprovar que els valors teòrics que s'indiquen a figura 10.4 són inferiors als experimentals entre un 3 i un 5%, cosa que valida el plantejament realitzat.

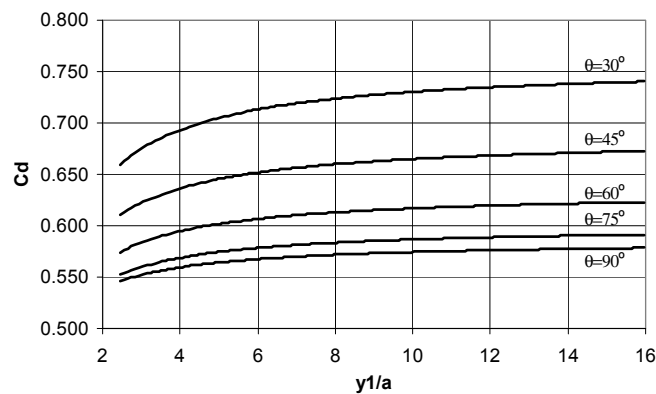


Figura 10.4 Coeficient de desguàs teòric obtingut de les equacions (10.22), (10.23) i (10.24), en el cas d'una comporta plana inclinada amb desguàs lliure.

Exercici

Determineu el cabal que surt sota una comporta vertical d'ample 5 m, amb una obertura de 0.5 m si el calat immediatament amunt de la comporta és de 3 m, i les condicions de pendent i rugositat amunt de la comporta permeten assegurar que el desguàs és totalment lliure (no submergit). Es proposa, igualment, obtenir el valor del calat a la vena contracta.

Segons els valors fixats a l'enunciat, es té que: $y_1/a = 3/0.5 = 6$

De la figura 10.6 es pot obtenir, en condicions de desguàs lliure, un coeficient $C_d = 0.585$. I, per tant, el cabal sota la comporta:

$$Q = 0.585 \cdot 5 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{2g \cdot 3} = 11.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

El calat y_2 a la vena contracta es pot determinar calculant prèviament el coeficient de velocitat C_v de l'expressió (10.23):

$$C_v = 0.960 + \left(0.14535 \cdot \frac{90}{90} - 0.0475 \right) \cdot \frac{0.5}{3} = 0.976$$

i, a partir d'ell i del valor determinat del coeficient de desguàs $C_d=0.585$, obtenir el coeficient de contracció C_c a partir de l'equació (10.22):

$$0.585 = \frac{0.976 \cdot C_c}{\sqrt{1 + \frac{C_c}{6}}} \Rightarrow C_c = 0.63$$

i, per tant, el calat a la vena contracta a la sortida de la comporta:

$$y_2 = C_c \cdot a = 0.63 \cdot 0.50 \Rightarrow y_2 = 0.315 \text{ m}$$

10.3.2 Desguàs sota comporta submergit

A l'apartat 3.2 del capítol 7 (Ressalt hidràulic) s'han discutit les característiques hidràuliques del ressalt submergit a la sortida d'una desguàs sota comporta.

A partir de les mateixes hipòtesis³¹ plantejades en aquell apartat es pot analitzar la influència del ressalt submergit en el desguàs sota la comporta, que per extensió també queda submergida.

Per tant, es pot plantejar el balanç d'energia entre les seccions immediatament aigües amunt (1) i aigües avall (2) de la comporta, com també la conservació de la quantitat de moviment entre 2 i 3.

D'aquestes equacions s'estima que el cabal circulant sota la comporta es pot determinar usant la mateixa equació (10.21), on ara el coeficient de desguàs C_d es veu reduït significativament respecte de la situació de desguàs lliure. Els valors de C_d s'han estimat experimentalment i es mostren en el cas de comportes planes o radials a la figura 10.6 i la figura 10.7, respectivament.

D'altra banda, acceptant que a la secció 2 es troba la vena contracta ($y_2 = C_c \cdot a$), aleshores la solució simultània de les equacions d'energia i de momentum condueix al resultat teòric del coeficient de desguàs C_d de l'equació (10.22). Si aquest resultat (considerant $C_c = 0.6$) es compara amb el valor experimental presentat a la figura 10.6 per $y_3/a = 5$, s'obté que el teòric és entre el 3 i el 5% més gran que l'experimental, la qual cosa confirma la validesa de la teoria de Sotelo (1995).

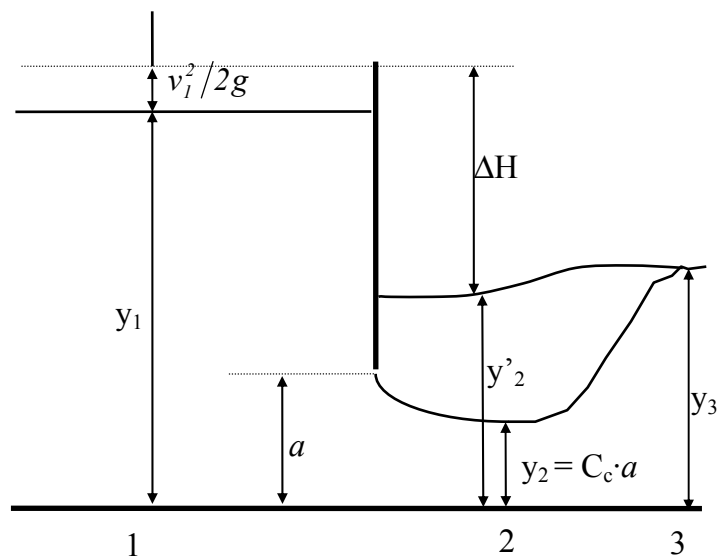


Figura 10.5 Esquema típic d'un desguàs sota comporta submergit pel nivell d'aigües avall.

10.3.3 C_d i C_c en comportes planes:

El gràfic següent és una bona estimació pel coeficient de desguàs C_d , per diferents y_1/a , considerant el possible desguàs lliure o submergit.

Combinant diferents C_d per desguàs lliure, amb els C_v de la fórmula (10.23), s'obtenen els valors corresponents a C_c , i aïllant a l'equació (10.22) obtinguda abans resulten uns valors pràcticament constants. Així, en comportes planes verticals, en general s'accepta prendre un valor $C_c = 0.62$ per a qualsevol relació a/y_1 , fins i tot desguàs ofegat.

En comportes planes verticals, quan $y_1/a < 1.35$, el doll es desenganxa des del canto de la comporta i es produeix l'entrada d'aire a l'interior, que invalida tot el plantejament analític anterior (Sotelo, 1995).

³¹ 1. El flux a la sortida de la comporta té una velocitat efectiva corresponent al calat y_2 però, en canvi, la càrrega de pressió es considera deguda al calat y'_2 .

2. L'energia que es dissipa és deguda fonamentalment, a l'expansió que es produeix entre y_2 i y_3 .

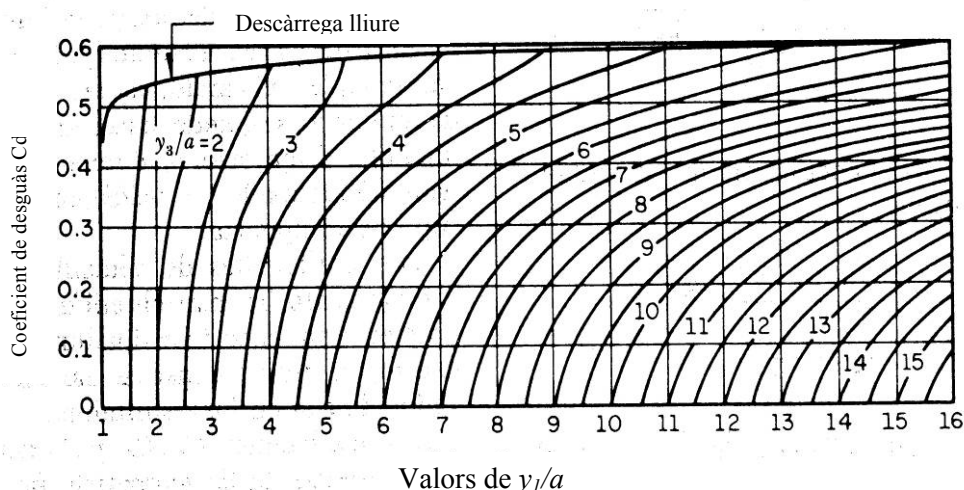


Figura 10.6 Coeficient de desguàs d'una comporta plana vertical segons les experiències de Cofré i Buchheister (Sotelo, 1995).

Exercici

Determineu la reducció que experimenta el cabal que surt sota una comporta vertical de l'exercici anterior (exercici 10.1) de 5 m d'ample, amb una obertura de 0.5 m i amb un calat immediatament aigües amunt de la comporta de 3 m, si les condicions de pendent i rugositat aigües avall de la comporta permeten assegurar que el desguàs és submergit, amb un calat aigües avall de la zona d'ofegament d'uns 2.5 m.

En les condicions que imposa aquest enunciat es té que $y_1=3$ m $y_3=2.5$ m i, per tant, que

$$\frac{y_1}{a} = \frac{3}{0.5} = 6$$

$$\frac{y_3}{a} = \frac{2.5}{0.5} = 5$$

De manera que per determinar el coeficient de desguàs C_d de la comporta cal recórrer a l'àbac de la figura 10.6. S'obté que $C_d = 0.28$, que li correspon un cabal sota la comporta:

$$Q = 0.28 \cdot 5 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{2g \cdot 3} = 5.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

Amb aquest cabal s'obté a la secció 3 un nombre de Froude:

$$Fr_3^2 = \frac{q^2}{g \cdot y_3^3} = \frac{\left(\frac{5.4}{3}\right)^2}{g \cdot 2.5^3} = 0.021$$

valor que substituint-lo a l'expressió (29) del capítol 7 (Ressalt hidràulic) i considerant el calat y_2 de la vena contracta obtingut a l'exercici 10.1, dóna:

$$y'_2 = 2.5 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot 0.021 \cdot \left(1 - \frac{2.5}{0.315}\right)} = 2.10 \text{ m}$$

que correspon a un desguàs submergit, ja que és més gran que el de la vena contracta $y_2 = 0.315$ m però més petit que el de la secció 3 $y_3 = 2.5$ m.

10.3.4 C_d i C_c en comportes radials

Per determinar el coeficient de desguàs sota una comporta radial en condicions de funcionament lliure i submergit en funció de y_1/r , a/r , y_3/r per a cada valor de h/r , on h és l'altura de l'eix de la comporta, es poden fer servir els resultats de Toch que es presenten a Sotelo (1995).

L'autor de l'experiència, Toch, no va presentar els resultats corresponents al C_c . Es recomana calcular-los amb les fórmules (10.22), (10.23), i amb els valors de la figura 10.7, tenint en compte que:

$$\cos \theta = \frac{h}{r} - \frac{a}{r} \quad i \quad \frac{a}{y_1} = \frac{a/r}{y_1/r} \tag{10.25}$$

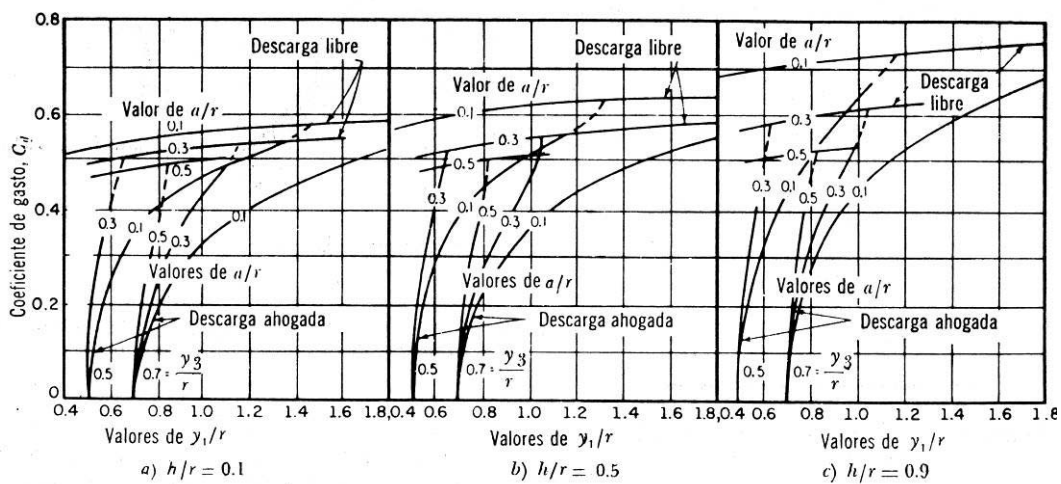


Figura 10.7 Coeficient de desguàs d'una comporta radial segons les experiències de Toch (Sotelo, 1995).

10.4 Sobreexidor de caiguda lliure. Descripció

Si existeix un graó en la solera del canal que provoca una caiguda en el sentit del moviment, quan el flux arriba a l'aresta externa del graó es forma una làmina d'aigua aïllada que abandona el graó. A mesura que el doll d'aigua avança en l'aire, s'hi aprecia que no hi ha cap canvi de signe en la curvatura de la superfície lliure fins que la làmina xoca contra la solera inferior del salt.

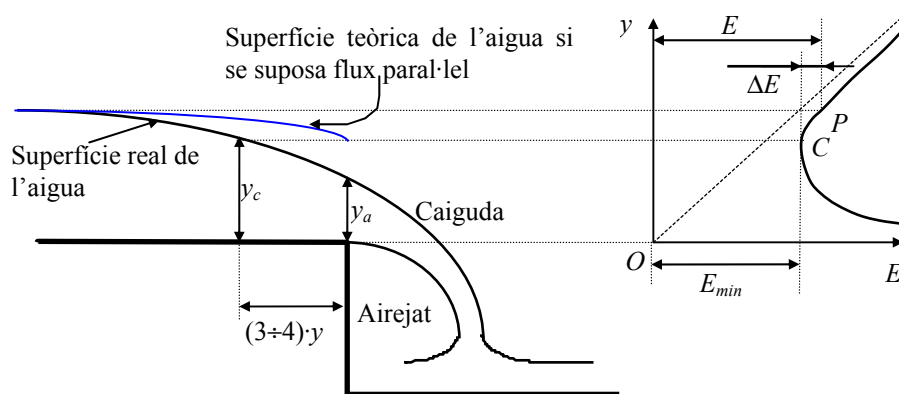


Figura 10.8 Caiguda lliure en un canal.

La figura 10.8 permet analitzar el fenomen: si no s'hi afegeix energia externa, la superfície de l'aigua busca sempre la posició de mínima energia, és a dir, el flux es readapta per trobar el menor contingut possible d'energia. Sigui E l'energia específica a una secció aigües amunt (punt P de la corba $E-y$); des d'aquest punt l'energia es va dissipant en el seu camí aigües avall fins a assolir el contingut mínim E_{min} ; per tant, l' E_{min} s'ha de donar a l'extrem de la caiguda, ja que el seu calat no pot ser menor que y_c , ja que una disminució del calat requereix un increment d'energia específica, fet impossible llevat que se'n subministri d'externa que la compensi. La corba teòrica de la làmina lliure es mostra en blau a la figura.

10.4.1 Localització de la secció de control

Les expressions per determinar el calat crític i les corbes $E-y$ es basen en el fet que el flux és paral·lel, i això és aplicable només si el flux és gradualment variat. A l'extrem de la caiguda, però, el flux té una curvatura pronunciada. Això significa que el raonament que s'ha fet anteriorment usant la corba $E-y$ que ha conduït a deduir que sobre l'aresta de la caiguda s'ha de donar un règim crític, no és del tot vàlid. En realitat, la secció a l'extrem de la caiguda presenta, efectivament, E_{min} però no correspon a y_c , tal i com es determinaria suposant flux paral·lel.

Observacions del funcionament real d'aquests fenòmens (Rouse, 1938) han determinat que, per a pendents petits el calat y_c que es calcularia per aplicació de la condició $Fr = 1$ és, aproximadament, 1.4 vegades el calat a l'extrem (y_a), i que es localitza entre $3y_c$ i $4y_c$ amunt de l'extrem de la caiguda. La superfície real de l'aigua es representa a la figura 10.8 amb línia contínua negra.

$$y_a = 0.715 \cdot y_c \quad (10.26)$$

De tota manera, cal ser molt conscients que, per al càlcul de les corbes de rabeig, tot això és negligible.

10.4.2 Utilització com a aforador

Aquests tipus d'estructures poden ser utilitzades com a aforador això és, per estimar el cabal circulant, aprofitant l'establiment del règim crític. El que es fa és mesurar el calat y_a a l'extrem de la caiguda, de manera que a partir de l'expressió (10.26) es pot determinar el calat crític y_c , i a partir d'aquest es pot obtenir el cabal circulant gràcies a la relació biunívoca que s'estableix entre aquest i el cabal (imposant $Fr=1$)

Perquè aquestes estructures funcionin adequadament cal assegurar que en el canal s'estableixi un règim lent, ja que en règim ràpid el que passa aigües avall no afecta per res aigües amunt, en particular la caiguda; així, en aquesta secció hi ha el calat que correspongui provocat per la condició de contorn existent a l'extrem amunt del canal. A la pràctica, en règim ràpid, a la secció extrem de la caiguda la làmina es deprimeix una mica, tot i que aquest és un fenomen negligible a efectes pràctics.

Exercici

Determineu el calat que es presenta a la secció final d'un canal horitzontal de secció rectangular d'ample B , on es troba una caiguda lliure. Per fer-ho, se suposa que en aquesta secció final la pressió al fons és nul·la i que la secció crítica es presenta a una certa distància x aigües amunt.

Si q és el cabal per unitat d'ample, l'equació de la quantitat de moviment entre les seccions 1 i 2 (suposant que la pressió a la secció 2 és l'atmosfèrica, és a dir, pressió relativa nul·la) condueix a la relació següent:

$$\frac{\gamma y_c^2}{2} = \frac{\gamma q}{g} (v_a - v_c)$$

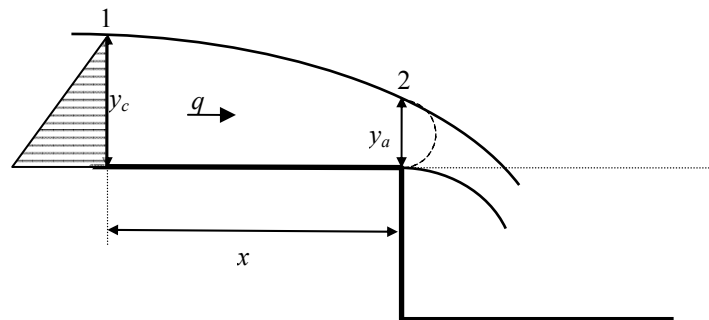


Figura 10.9 Calats al voltant d'una caiguda lliure.

I, a partir de l'equació de continuïtat:

$$q = v_c \cdot y_c = v_a \cdot y_a \Rightarrow \frac{v_a^2}{g} = \frac{v_c^2}{g} \cdot \frac{y_c^2}{y_a^2}$$

es pot escriure:

$$\frac{y_c^2}{2} + \frac{v_c^2}{g} \cdot y_c = \frac{v_a^2}{g} \cdot y_a \quad (a)$$

Com que a la secció 1, per hipòtesi, el règim és crític, el calat val:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \Rightarrow y_c = \frac{v_c^2}{g} = \frac{2}{3} \cdot E \quad (b)$$

que, substituint-ho a l'equació de continuïtat que s'ha mostrat abans, resulta:

$$\frac{v_a^2}{g} = \frac{v_c^2}{g} \cdot \frac{y_c^2}{y_a^2} \Rightarrow \frac{v_a^2}{g} = \frac{2}{3} E \frac{4 E^2}{9 y_a^2} \Rightarrow \frac{v_a^2}{g} = \frac{8 E^3}{27 y_a^2} \quad (c)$$

I, per tant, substituint els resultats anteriors (c) i (b) en (a):

$$\frac{4}{2 \cdot 9} \cdot E^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot E \right)^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{E^3}{y_a^2} \cdot y_a \Rightarrow y_a = \frac{4}{9} E \quad \text{o bé tenint en compte (b)} \quad y_a = \frac{2}{3} y_c$$

Tal com s'ha comentat anteriorment, Rouse va determinar experimentalment que $y_a = 0.715 \cdot y_c$, és a dir, un 7% més gran que el que s'ha determinat teòricament.

10.5 Sobreixidor de paret prima

10.5.1 Descripció. Utilització com a aforador

A continuació, s'analitza el desguàs en làmina lliure sobre una placa, que pot tenir qualsevol forma, però amb la condició que el contacte amb el doll que vessa sigui amb una arista aguda (paret prima o fina). Es tracta d'un dispositiu d'aforament habitual en laboratoris hidràulics i canals petits.

És el sobreexidor més simple. El líquid hi flueix formant dues superfícies lliures, anomenades *làmina inferior* i *superior*.

El punt o aresta del vessador en contacte amb la làmina d'aigua es diu *cresta del vessador*, i el desnivell entre la superfície lliure aigües amunt del sobreexidor i la cresta es diu *càrrega hidràulica* (h).

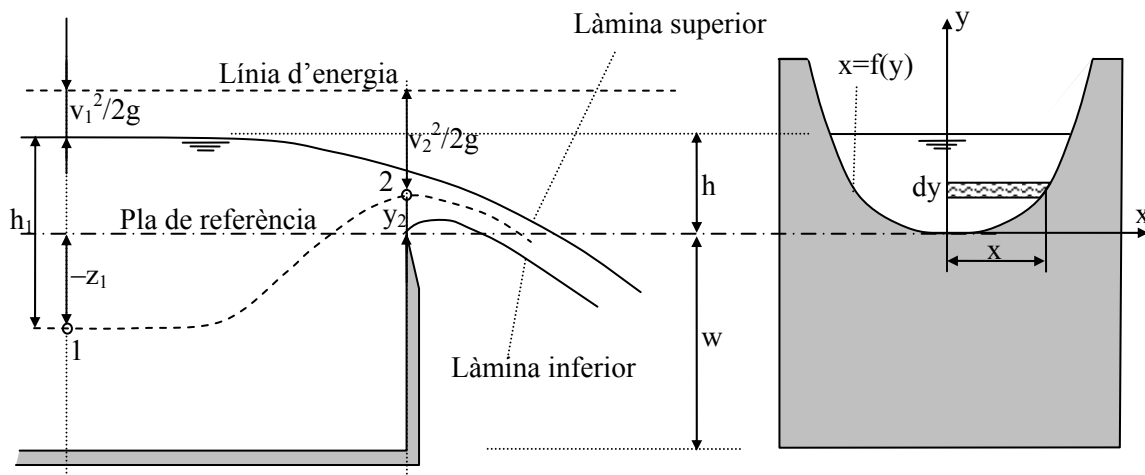


Figura 10.10 Esquema del desguàs sobre un sobreexidor de paret fina.

Si sigui un vessador de paret prima com el de la figura 10.10. S'hi defineixen les magnituds següents:

- w : altura de la cresta sobre la solera.
- h : desnivell entre la superfície lliure de l'aigua, amunt del vessador, i la cresta.
- v_l : velocitat mitjana d'arribada de l'aigua al vessador, suposada amb una distribució uniforme.

L'energia total per unitat de pes aigües amunt del sobreexidor, respecte de la cresta, val:

$$H = h + \frac{v_1^2}{2g} \quad (10.27)$$

En general, el perfil de les formes usals dels vessadors de paret prima es representa amb l'equació $x = f(y)$, que ha de ser coneguda.

Si s'analitza el balanç d'energia en una línia de corrent entre els punts 1 i 2 es pot escriure que:

$$-z_1 + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h + \frac{v_1^2}{2g} = y + \frac{v_2^2}{2g} \quad (10.28)$$

Quant més gran sigui l'altura del vessador (w) amb més motiu es pot negligir $v_1^2/2g$ en comparar-lo amb la càrrega h . D'aquesta manera, la velocitat en qualsevol punt 2 sobre la cresta de l'estructura val:

$$v = \sqrt{2g(h - y)} \quad (10.29)$$

Es pot determinar fàcilment el cabal que circula a través de l'element diferencial indicat a la figura 10.10:

$$dQ = 2 \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot x \cdot \sqrt{h-y} \cdot dy \quad (10.30)$$

on el coeficient de desguàs C_d considera l'efecte de la contracció de la làmina vessant. Integrant aquest valor sobre tota la vertical, resulta:

$$Q = 2 \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot \int_0^h x \cdot \sqrt{h-y} \cdot dy \quad (10.31)$$

Que és l'equació general del cabal a un vessador de paret prima, que és possible integrar si es coneix la geometria del vessador.

Recapitulant, cal recordar que per a aquesta deducció s'han considerat les hipòtesis següents (Sotelo, 1995):

- No es consideren pèrdues d'energia. Implícitament, es considera que es troben incloses al coeficient de desguàs C_d .
- En tots els punts de la secció sobre la cresta del sobreexidor, les velocitats tenen direcció horitzontal i una distribució parabòlica, donada per (10.29).
- La integració de la distribució de velocitats es realitza entre els límits 0 i h , i això és equivalent a dir que a sobre de la cresta del vessador el calat ha d'assolir l'altura h , fet que no és real, a causa de la contracció del flux. L'error que es pugui introduir per aquest motiu també quedarà corregit en considerar el coeficient de desguàs C_d .
- Quan s'ha aplicat el balanç de Bernoulli entre els punts 1 i 2 (expressió (10.28)), s'ha considerat una distribució hidrostàtica de pressions. Això se sol associar amb una distribució uniforme de velocitats per a tots els punts de les seccions 1 i 2. És interessant adonar-se que això entra en contradicció amb la distribució parabòlica de v que s'ha suposat.
- La distribució de pressions sobre la cresta del vessador pot suposar-se uniforme a tota la secció i igual a l'atmosfèrica (pressió relativa nul·la). El doll d'aigua que surt de la cresta del sobreexidor té, a les superfícies lliures que s'hi formen, superior i inferior, la pressió atmosfèrica. Si es pot acceptar una distribució hidrostàtica, tal com s'ha comentat a la hipòtesi anterior, l'única distribució que fa compatibles ambdues superfícies lliures és una distribució uniforme i igual a l'atmosfèrica en aquesta vertical, tal com s'esquemmatitza a la figura 10.11.

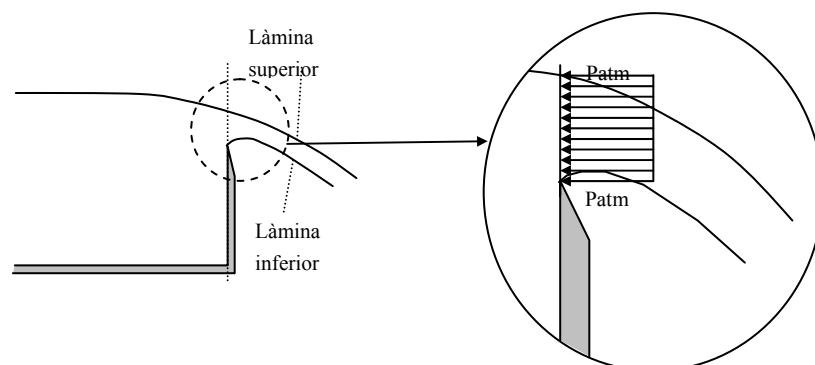


Figura 10.11 Distribució de pressions sobre la cresta del vessador.

Es comprova que el coeficient de desguàs depèn, en general, de la geometria del vessador i de la pròpia càrrega (h) sobre ell. Determinacions experimentals, en vessadors de paret prima de diverses geometries han obtingut valors sempre al voltant de 0.60.

10.5.2 Vessador de secció rectangular. Q desguassat amb contracció lateral i sense.

Quan la secció transversal del sobreexidor de llavi fi és rectangular, la relació $x = f(y)$ correspon a:

$$x = \frac{B}{2} \quad (10.32)$$

on B és la longitud de la cresta.

a Vessador rectangular sense contracció lateral

La longitud de la cresta B , en el cas que no hi hagi contracció lateral del doll, coincideix amb l'ample del canal.

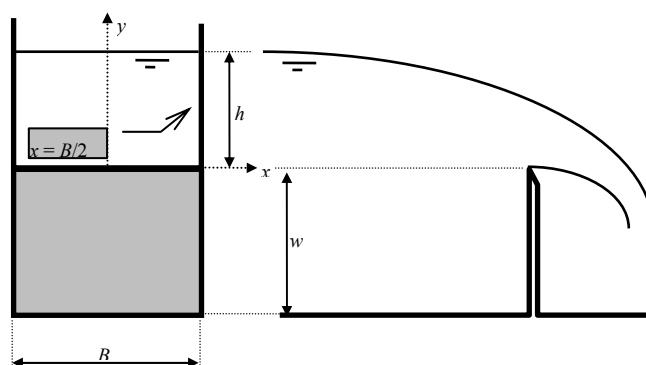


Figura 10.12. Esquema d'un vessador de llavi fi de secció rectangular, sense contracció lateral.

Tenint en compte (10.32), l'expressió (10.31) que s'ha obtingut abans queda:

$$Q = 2 \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot \int_0^h \frac{B}{2} \cdot \sqrt{h-y} \cdot dy \Rightarrow Q = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot B \cdot \left[(h-y)^{3/2} \right]_0^h \quad (10.33)$$

finalment resulta:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot B \cdot h^{3/2} \quad (10.34)$$

Aquesta és l'equació general per determinar el cabal en un vessador rectangular, en el qual l'energia de velocitat d'aproximació és prou petita per comparació de la càrrega (h) disponible sobre la cresta, és a dir, $v_1^2/2g \ll h$.

Existeixen diverses formulacions empíriques per obtenir C_d , que es poden trobar per exemple a Sotelo (1995), Naudascher (2001) o Lencastre (1998), entre d'altres. Una de les més simples és la fórmula de Rehbock:

$$C_d = \left(0.6035 + 0.0813 \cdot \left(\frac{h + 0.0011}{w} \right) \right) \cdot \left(1 + \frac{0.0011}{h} \right)^{3/2} \quad (10.35)$$

Totes les expressions empíriques de C_d tenen límits d'aplicació que s'han de respectar escrupolosament. Els límits d'aplicació de l'anterior fórmula de Rehbock són:

$$\left[\begin{array}{l} 0.01m \leq h \leq 0.80m \\ b \geq 0.30m \\ w \geq 0.06m \\ \frac{h}{w} \leq 1 \end{array} \right. \quad (10.36)$$

b Vessador rectangular amb contracció lateral

En aquest cas, el vessador rectangular té una longitud de cresta B , i està centrat a un canal d'ample b més gran que l'ample B del vessador. A la figura 10.13 s'esquematitza un vessador de llavi fi de secció rectangular amb contracció lateral.

El fet que el vessament no es realitza a tot l'ample del canal ($B < b$) fa que, en aquest cas, s'hi dona una contracció lateral similar a la que succeeix en orificis (apartat 0). Ara, per determinar l'equació general a fi d'estimar el cabal circulat cal utilitzar la càrrega total, inclosa l'energia de velocitat en l'aproximació al vessador:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot B \cdot \left(h + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} \Rightarrow Q = \frac{2}{3} \cdot C_d \cdot \left(1 + \frac{v_1^2}{2g \cdot h} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{2g} \cdot B \cdot h^{3/2} \Rightarrow \quad (10.37)$$

$$Q^2 = \kappa^2 \cdot 2g \cdot B^2 \cdot h^3 \quad (10.38)$$

essent

$$\kappa = \frac{2}{3} C_d \left(1 + \frac{v_1^2}{2g \cdot h} \right) \quad (10.39)$$

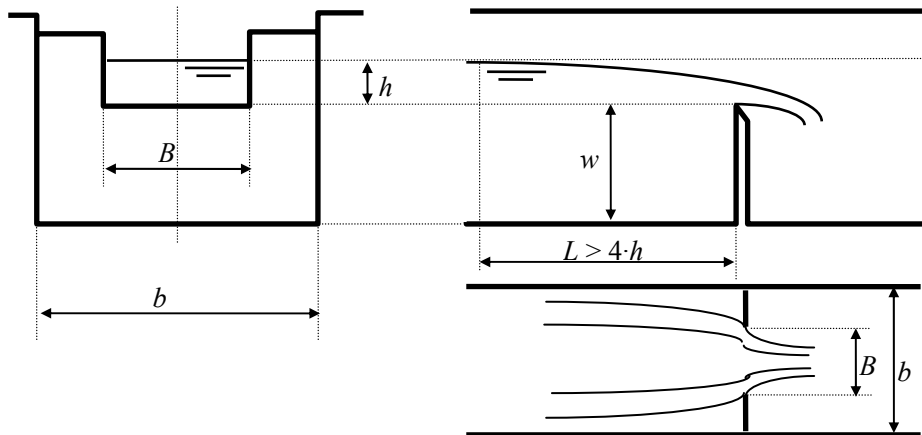


Figura 10.13. Esquema d'un vessador de llavi fi de secció rectangular, amb contracció lateral.

Desenvolupant el binomi κ , en sèrie de Taylor entorn de $v_1^2/2g = 0$, fins a primer ordre:

$$\left(1 + \frac{v_1^2}{2g \cdot h} \right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{v_1^2}{2g \cdot h} + \dots \quad (10.40)$$

Com que l'àrea de la secció 1 és $A_1 = b \cdot (h+w)$, es pot escriure que

$$\frac{v_1^2}{2g \cdot h} = \frac{Q^2}{2g \cdot b^2 \cdot (h+w)^2 \cdot h} \quad (10.41)$$

i, per tant, substituint-hi l'expressió (10.38):

$$\left(1 + \frac{v_1^2}{2g \cdot h}\right)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\kappa^2 \cdot 2g \cdot B^2 \cdot h^3}{2g \cdot b^2 \cdot (h+w)^2 \cdot h} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \kappa^2 \cdot \left(\frac{B}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{h+w}\right)^2 \quad (10.42)$$

Aleshores, l'equació general del cabal per a un vessador rectangular amb contracció lateral es pot escriure:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \kappa^2 \cdot \left(\frac{B}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right] \cdot B \cdot h^{3/2} \Rightarrow \quad (10.43)$$

o bé:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d^* \cdot B \cdot h^{3/2} \quad (10.44)$$

On ara C_d^* inclou els efectes de la contracció (b/B i w) i les característiques hidràuliques del flux d'aproximació. Es pot apreciar, doncs, que l'expressió obtinguda continua essent igualment vàlida per a un vessador de paret prima sense contracció lateral (cas $b = B$). En aquest últim cas, si no es pot negligir l'energia de velocitat del flux d'aproximació ($v_1^2/2g$), només cal reescriure (10.43) fent $b = B$.

c Recomanacions per als vessadors rectangulars

Per a un bon disseny d'un vessador de llavi fi de secció rectangular, amb contracció lateral o sense, es recomana tenir en compte els criteris següents (Sotelo, 1995):

- És imprescindible que la cresta sigui perfectament horitzontal.
- És necessari que la cresta estigui formada per un bisell d'ample inferior als 2 mm.
- L'alçada des del fons del canal (w) ha de ser més gran que dues vegades la càrrega sobre la cresta ($w > 2 \cdot h$) i en qualsevol cas és recomanable que sigui més gran que 0.30 m.
- Per a un bon funcionament, el pla del vessador ha de ser perpendicular al flux, i ha de tenir la cara aigües amunt vertical, plana i llisa.
- Hauria d'estar instal·lat al centre d'un canal recte, que tingui una longitud mínima $L_{min}=10 \cdot B$. essent B la longitud de la cresta, i una àrea mínima $A_{min}=8 \cdot B \cdot h$.
- Si és necessari fer el disseny amb contraccions laterals, cal que $(b-B)/2 > 0.30$ m.
- En cas contrari, es requereix una bona ventilació³² de la làmina vessant inferior.

³²Tot els raonaments suposen pressió atmosfèrica en tots els punts. A la regió entre la cara d'aigües avall del vessador i la làmina inferior, hi pot quedar aire atrapat. El doll d'aigua caient arrossega part d'aquest aire i el dissol en el propi flux. Això provoca una disminució de la pressió en aquesta regió, de manera que la pressió atmosfèrica exterior acaba essent significativament més gran que la pressió de l'interior. Així, el doll lliure acaba enganxant-se a la paret del vessador, fet que provoca una disminució del coeficient de

- La càrrega h sobre la cresta s'ha de mesurar a una distància (L) de la paret del vessador superior a quatre vegades la càrrega hidràulica sobre la cresta ($L > 4 \cdot h$). Això permet assegurar fer el mesurament en una zona on l'energia de velocitat de l'aproximació és negligible.
- Si la càrrega disponible (h) és petita, les forces de tensió superficial poden esdevenir més grans que les forces gravitatòries, cosa que provocaria un mal funcionament de l'estructura. Es recomana, per tant, $h > 0.11$ m.

10.5.3 Vessador triangular

Sigui una secció triangular simètrica respecte d'un eix vertical (y), amb un angle en el vèrtex θ . En aquest cas, el valor de $x = f(y)$ és

$$x = y \cdot \tan \frac{\theta}{2} \quad (10.45)$$

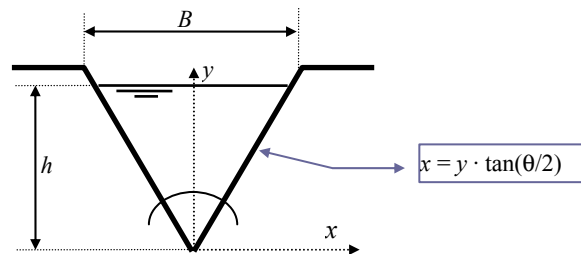


Figura 10.14. Esquema d'un vessador de paret fina de secció triangular.

D'aquesta manera, l'equació per determinar el cabal es pot escriure a partir de (10.31):

$$Q = 2 \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot \int_0^h \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{h-y} \cdot y \cdot dy \quad (10.46)$$

que es pot integrar fent la substitució $z=h-y$ i $dy=-dz$. En aquest cas, els límits d'integració queden; per $y=0$ la variable z val $z=h$, i per $y=h$ val, en canvi, $z=0$.

$$Q = -2 \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \int_h^0 z^{1/2} \cdot (h-z) \cdot dz - \frac{y_c}{h} \Rightarrow$$

$$Q = 2 \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left[\frac{2 \cdot h \cdot z^{3/2}}{3} - \frac{2}{5} \cdot z^{5/2} \right]_h^0 \quad (10.47)$$

Desfent el canvi de variable queda:

$$Q = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot C_d \cdot h^{5/2} \Rightarrow \quad (10.48)$$

que es pot escriure de manera més simplificada:

$$Q = C \cdot h^{5/2} \quad (10.49)$$

on el coeficient C depèn, en general, de θ , C_d i g . A Sotelo (1995) es poden trobar diverses relacions empíriques per determinar el coeficient de desguàs. Una de les més precises és la fórmula de Hegly, que és vàlida únicament en el cas de vèrtex en angle recte:

$$C_d = \left(0.5812 + \frac{0.00375}{h} \right) \cdot \left(1 + \left(\frac{h^2}{B \cdot (h+w)} \right)^2 \right) \quad (10.50)$$

vàlida en les condicions següents:

$$\left[\begin{array}{l} \theta = 90^\circ \\ 0.10 \text{ m} \leq h \leq 0.50 \text{ m} \\ w \text{ petites} \end{array} \right. \quad (10.51)$$

Més genèrica és la fórmula de Gourley i Crimp, que escriu el coeficient C de l'expressió (10.49):

$$C = \frac{1.32 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{h^{0.03}} \quad (10.52)$$

vàlida en els casos:

$$\left[\begin{array}{l} \theta = 45^\circ, 60^\circ \text{ i } 90^\circ \\ w \text{ grans} \end{array} \right. \quad (10.53)$$

a Recomanacions pels vessadors triangulars

Els vessadors triangulars es recomanen bàsicament per a cabals $Q < 30$ l/s i càrregues entre $6 \text{ cm} < h < 60 \text{ cm}$.

En general, és acceptat que la seva precisió és millor que la del rectangular per a cabals entre $0 < Q < 300$ l/s (Sotelo, 1995). Per a cabals més grans, es recomanen els vessadors rectangulars ja que el triangular és més sensible a qualsevol canvi en les condicions del canal, perquè requereix més exactitud en el mesurament de la càrrega hidràulica disponible, ja que el Q varia amb la potència 5/2.

10.5.4 Ofegament dels vessadors rectangulars i triangulars

L'ofegament es dona quan, aigües avall del vessador, el nivell d'aigua és més gran que la seva altura w . Per les geometries estudiades (rectangular i triangular), s'estima la reducció de la capacitat de desguàs del vessador a partir de la fórmula de Villemonte:

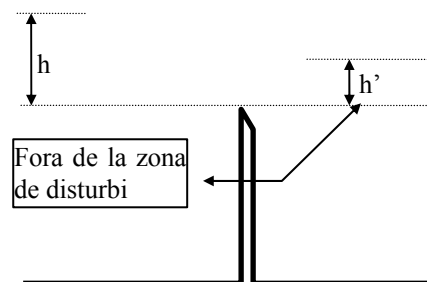


Figura 10.15. Esquema de l'ofegament d'un sobreeixidor de llavi fi.

$$Q = Q_1 \cdot (1 - S^n)^{0.385} \quad (10.54)$$

on:

- Q és el cabal del vessador amb descàrrega submergida.
- Q_1 és el cabal del mateix vessador amb la mateixa càrrega, en el supòsit de desguàs lliure.
- S és la relació d'ofegament, és a dir, la relació entre la càrrega avall i amunt de la cresta $S = h'/h$.
- n és l'exponent de la càrrega sobre la cresta en l'equació corresponent a Q_1 . Per tant, $n = 3/2$ per a vessadors rectangulars i $n = 5/2$ per vessadors triangulars.

10.6 Vessadors de paret gruixuda

10.6.1 Descripció. Utilització com a aforador

La idea general per al disseny d'un sobreexidor de paret gruixuda consisteix a augmentar el gruix (e) de la cresta d'un vessador rectangular sense contraccions laterals. El funcionament com a vessador de llavi fi o gruixut depèn de la relació existent entre el gruix (e) i la càrrega hidràulica disponible (h). Tal com s'esquematitza a la figura 10.16:

- Quan $e/h < 0.67$, el doll se separa de la cresta i aleshores funciona com un vessador de llavi fi.
- Quan $e/h > 0.67$, la làmina vessant s'adhereix a la cresta del vessador. En aquest cas, es presenten diferents comportaments depenent de l'altura w de la cresta sobre el fons del canal.

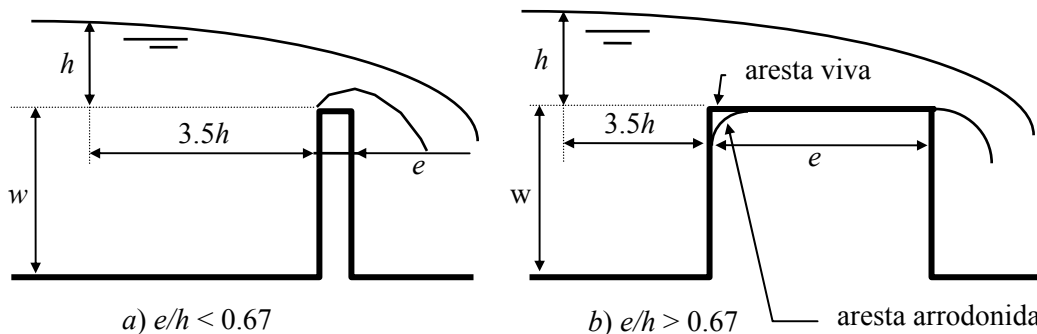


Figura 10.16. Vessador de paret gruixuda.

10.6.2 Q desguassat amb contracció lateral i sense. Influència de la viscositat, la tensió superficial i la geometria del vessador

En cas que $e/h > 0.67$ i el vessador sigui de secció transversal rectangular, el procediment més acceptat per obtenir el cabal circulant és el de Bazin. Es pot considerar l'expressió per a vessadors rectangulars de llavi fi, afectada d'un coeficient de reducció ε_1 :

$$Q = \varepsilon_1 \cdot C \cdot B \cdot h^{3/2} \quad (10.55)$$

on aquesta equació correspon a la d'un vessador de llavi fi de secció rectangular sense contraccions laterals en condicions de desguàs lliure (equació (10.34)), corregida pel coeficient ε_1 . Val a dir que en aquest cas C inclou el coeficient de desguàs (C_d) que es pot determinar, per exemple, usant la fórmula de Rehbock (expressió (10.35)). És a dir, comparant les equacions (10.34) i (10.55) s'entén que:

$$C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot C_d \quad (10.56)$$

El coeficient ε_1 es pot determinar usant les expressions empíriques següents:

- vàlida per a $e/h < 3$ i desguàs lliure:

$$\varepsilon_1 = 0.7 + \frac{0.185}{\frac{e}{h}} \quad (10.57)$$

- vàlida per a $3 < e/h < 10$ i desguàs lliure:

$$\varepsilon_1 = 0.75 + \frac{0.1}{\frac{e}{h}} \quad (10.58)$$

En aquest cas, sobre la plataforma s'arriba a desenvolupar un flux amb línies de corrent paral·lels i, per tant, distribució de pressions hidrostàtica.

Dependent de la relació entre e/h i w/h , existeixen diferents formes de funcionament, no només desguàs lliure. A la figura 10.17 es dona una eina més general per a la determinació dels coeficients ε_1 .

Si el desguàs funciona submergit, fet que es produeix força sovint en aquest tipus d'estructures, el coeficient de desguàs experimenta una reducció significativa a causa de la influència dels nivells d'aigua, aigües avall. Així, l'equació (10.55) per a la determinació del cabal en aquestes estructures s'ha d'afectar per un coeficient reductor (ε_2) que corregeix aquest efecte. El coeficient ε_2 s'obté de la figura 10.18, dependent de la relació $(h-h')/h$, on:

- h' és la diferència entre la cresta i el calat aigües avall, del vessador.
- h és la diferència entre la cresta i el calat prou allunyat, pel cap baix, a una distància de $3.5 \cdot h$, aigües amunt del vessador.

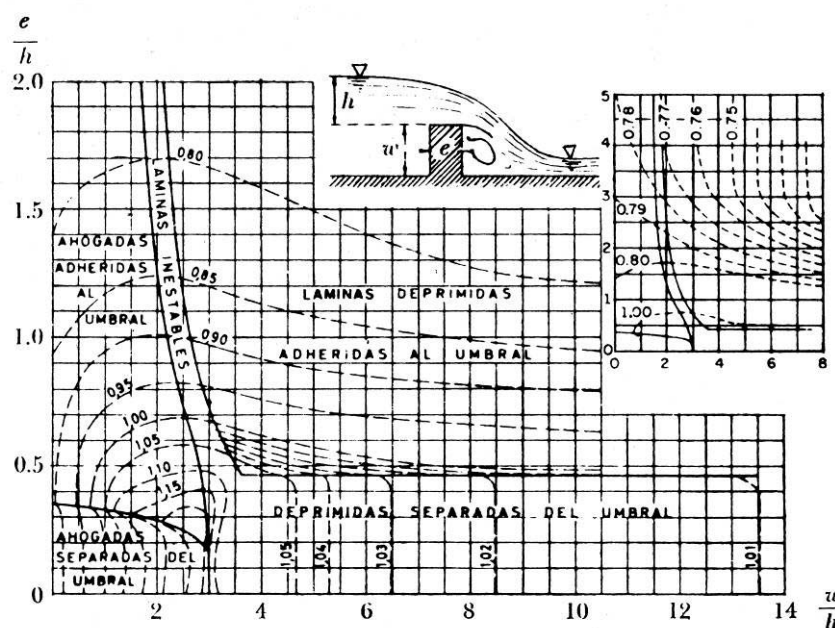


Figura 10.17. Gràfic per a la determinació del coeficient ε_1 en un vessador de paret gruixuda, funcionant amb desguàs lliure (Sotelo, 1995).

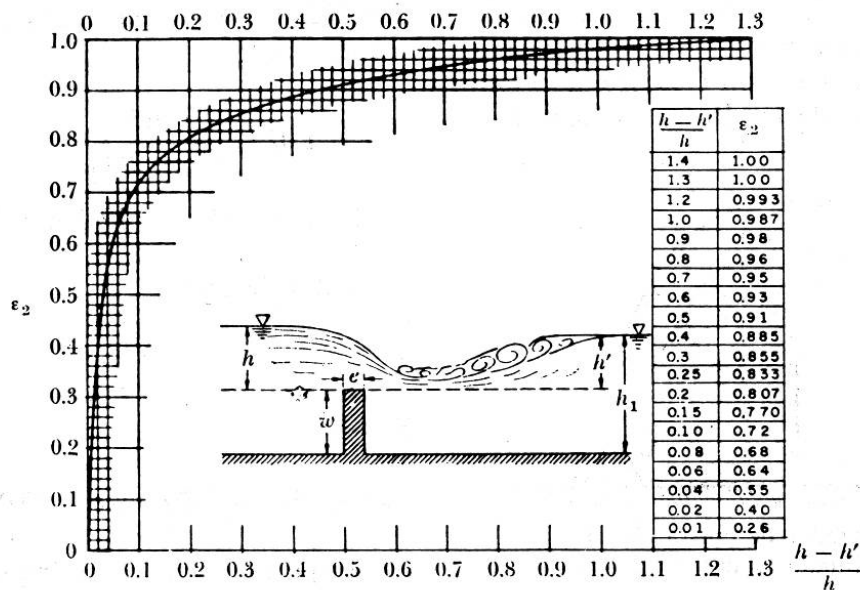


Figura 10.18. Gràfic per a la determinació del coeficient ϵ_2 en un vessador de paret gruixuda, funcionant amb desguàs lliure (Sotelo, 1995).

S’hi pot apreciar una influència escassa dels nivells aigües avall a partir de valors $h' > 0.5 \cdot h$.

Per determinar el coeficient de desguàs C , cal tenir en compte ara les pèrdues d’energia per fregament i d’entrada al vessador, ja que en general deixaran de ser negligibles. Si el gruix e és gran, existeixen fórmules que permeten considerar la fricció i l’arrodoniment, o no, de l’aresta a l’entrada. L’equació (10.59) correspon al cas d’aresta viva i, prenent $\lambda_e = 0$, al cas d’aresta arrodonida. Observeu que el fet d’arrodonir l’aresta pot compensar, d’alguna manera, les pèrdues per fricció sobre el vessador.

$$C = \frac{\left(1 + 0.26 \cdot \left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right) \cdot \sqrt{g}}{\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_e}{2} + 0.004 \cdot n\right)^{3/2}} \quad \text{amb} \quad n = \frac{e}{y_c} \quad (10.59)$$

En aquesta equació y_c és el calat crític i λ_e és un factor de fricció que depèn de la relació w/h , segons la següent taula 10.1:

Taula 10.1. Valors de λ_e de l’equació (10.59), segons Sotelo (1995).

$\frac{w}{y_c}$	≥ 3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0.25
$\frac{w}{h}$	≥ 2.04	1.78	1.48	1.19	0.91	0.67	0.314	0.162
λ_e	0.33	0.328	0.315	0.282	0.240	0.188	0.110	0.056

Com que el calat crític s’ha de calcular amb l’expressió:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot B^2}} \quad (10.60)$$

en què es desconeix Q . Això dona lloc a un procés iteratiu que, seguint el procediment que es descriu a Sotelo (1995), es pot simplificar si s'usen les notacions següents:

$$h = \varphi \cdot y_c \quad (10.61)$$

aleshores:

$$n = \varphi \frac{e}{h} \quad (10.62)$$

per al cas d'aresta viva, a la taula següent es mostren els valors de φ . Si l'aresta és arrodonida, aleshores $\varphi \approx 1.5$.

Taula 10.2 Valors de φ aplicables a l'equació (10.62), pel cas d'entrada amb l'aresta viva (Sotelo, 1995).

$\frac{h}{h+w}$	0.33	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
φ	1.71	1.68	1.65	1.62	1.60	1.56	1.53	1.52

Exercici

Determineu el cabal circulant sobre un vessador de llavi gruixut de gruix $e = 0.60$ m amb una alçada sobre la solera del canal $w = 1.0$ m en un canal d'ample $B = 1.50$ m, si la càrrega $h = 0.40$ m. Discutiu quin tipus de flux es dona en el vessador.

El vessador té una relació $e/h = 1.5$ i $w/h = 2.5$. Amb aquests valors de la figura 10.17 es pot obtenir el valor del coeficient ε_1 de l'equació (10.55), resultant $\varepsilon_1 = 0.82$.

El mateix valor ε_1 es pot determinar de l'expressió (10.57) doncs $e/h < 3$:

$$\varepsilon_1 = 0.7 + \frac{0.185}{1.5} = 0.823$$

A continuació, cal determinar el coeficient de desguàs C_d . De la fórmula de Rehbock (10.35), resulta

$$C_d = \left(0.6035 + 0.0813 \cdot \left(\frac{0.40 + 0.0011}{1} \right) \right) \left(1 + \frac{0.0011}{0.40} \right)^{3/2} = 0.639$$

Per tant:

$$Q = 0.823 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot 0.639 \cdot 1.5 \cdot 0.40^{3/2} \Rightarrow Q = 0.59 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la mateixa figura 10.17 es desprèn que, en les condicions donades ($e/h = 1.5$ i $w/h = 2.5$), el funcionament sobre el vessador és el d'un desguàs lliure, en què es forma una làmina deprimida que no se separa de la cresta.

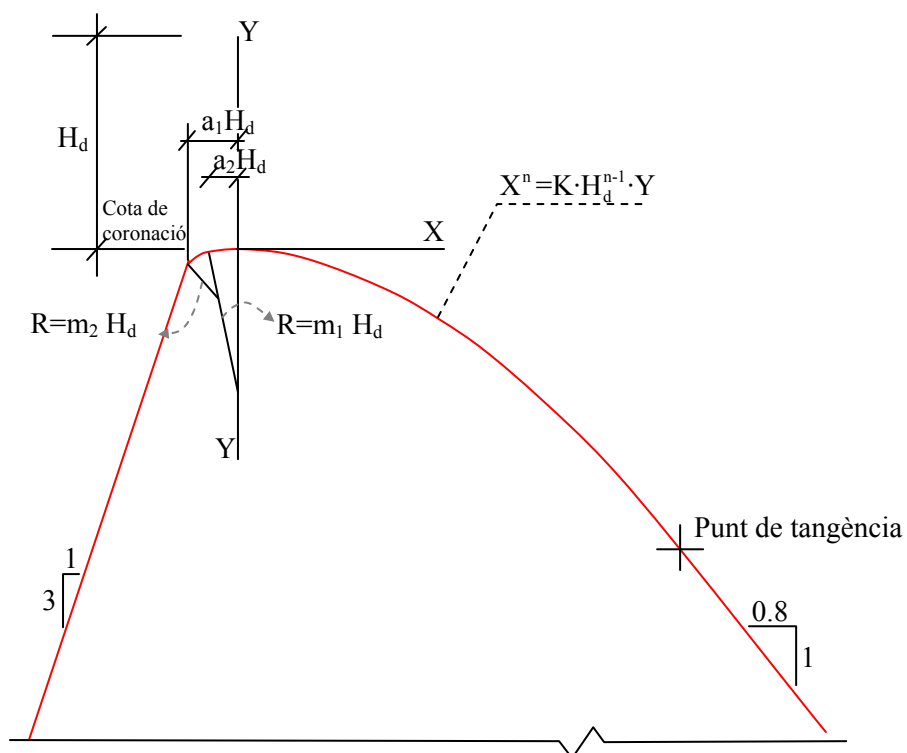
10.7 Vessadors de perfil estripte

10.7.1 Descripció. Cabal de disseny

El concepte principal que s'ha d'imposar en el disseny d'un vessador amb perfil estripte, per un cabal determinat, que s'anomena *cabal de disseny* o *de projecte*, és que el seu perfil sigui tal que per a aquest cabal la pressió al llarg de la seva solera sigui igual a l'atmosfèrica. Dit amb altres paraules, el perfil coincideix amb el perfil de la làmina inferior d'aigua del doll corresponent al cabal de projecte que passa per un vessador rectangular de llavi fi.

Definició de la corba del sobreexidor				
Pendent de la cara aigües amunt	K		N	
	Vertical	2.000	1.850	
3 en 1	1.936	1.836		
3 en 2	1.939	1.810		
3 en 3	1.873	1.776		

Pendent de la cara aigües amunt	a ₁	a ₂	m ₁	m ₂
	Vertical	0.282	0.175	0.50
3 en 1	0.237	0.139	0.68	0.21
3 en 2	0.214	0.115	0.48	0.22
3 en 3	0.119	0.119	0.45	-



Llavi del sobreexidor
Definició geomètrica

Figura 10.19 Sobreexidor de perfil estripte de tipus WES, Chow (1994).

El cabal de disseny (Q_d) produeix una càrrega (h_d), que és la càrrega de definició del perfil.

La figura 10.19 mostra un perfil estricte, que rep el nom de Waterways Experiment Station (WES), tal com ho recomana el Corps of Engineers (Chow, 1994).

La corba d'aforament es pot determinar usant:

$$Q = C \cdot B \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \quad (10.63)$$

Només hi cal ajustar el coeficient de desguàs, que normalment es fa de manera experimental, mitjançant l'estudi en un model reduït al laboratori.

10.7.2 Comportament hidràulic per cabals diferents al de projecte

Entre la càrrega hidràulica ($h_{disseny}$) disponible corresponent al cabal de projecte i la càrrega relativa al cas d'un vessament lliure (h_{llf}) del mateix ample (B) i cabal, en un vessador rectangular de llavi fi es verifica aproximadament:

$$h_{disseny} = 0.88 \cdot h_{llf} \quad (10.64)$$

Es constata que el coeficient de desguàs (C) per a un perfil estricte és creixent amb la càrrega. Això es tradueix en el següent:

- Per a un cabal més gran que el de projecte ($Q > Q_{disseny}$), la làmina líquida inferior tendeix a apartar-se del vessador de llavi fi, tot i que manté el contacte amb el perfil estricte. Això provoca que puguin desenvolupar-se pressions per sota de l'atmosfèrica sobre la solera del perfil. A més, la velocitat mitjana hi augmenta i també el coeficient de desguàs.

Si el cabal excedeix suficientment el cabal de projecte, es pot arribar a produir la separació del flux respecte de la solera del perfil estricte, amb un risc important que es produeixin problemes de cavitació.

- Per a un cabal inferior al de projecte ($Q < Q_{disseny}$), la làmina líquida inferior exerceix pressions superiors a l'atmosfèrica sobre la solera del vessador, i amb això coeficients de desguàs més baixos.

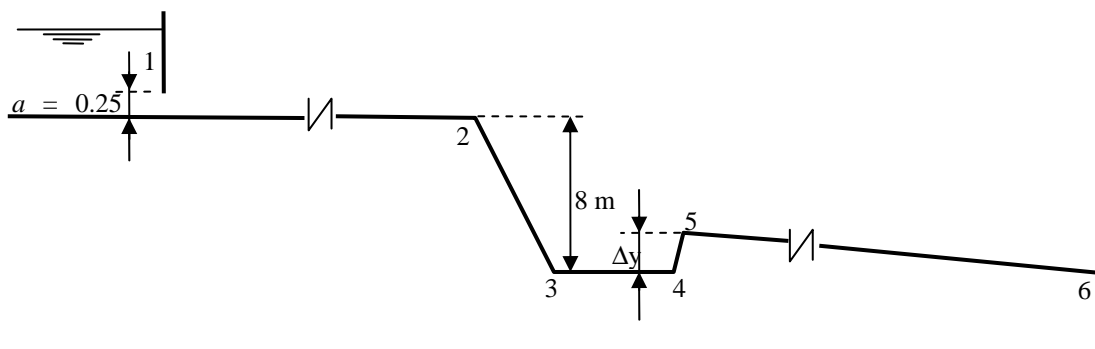
10.8 Exercicis proposats

1. Discutiu si les següents afirmacions són vertaderes o falses:

- En un sobreeixidor de llavi gruixut es produeix calat crític sempre que el nivell d'aigües avall sigui prou baix.
- Un sobreeixidor de llavi fi sempre és una secció de control.
- El valor del coeficient de contracció de la làmina d'aigua en un desguàs sota comporta és sempre menor que 1.
- En un vessament en caiguda lliure es forma sempre un règim crític a l'entorn de la secció immediatament aigües amunt de la caiguda.

- En un desguàs sota comporta el cabal que surt a través d'ella depèn únicament de la geometria del canal i de l'obertura de la comporta.
 - La velocitat d'aproximació del flux en un desguàs sota comporta pot condicionar-ne el cabal de desguàs.
 - El cabal en un sobreexidor de llavi fi de secció rectangular depèn de la sobreelevació a l'exponent $3/2$.
 - El cabal en un sobreexidor de perfil estricte de tipus Creager depèn de la sobreelevació a l'exponent $3/2$.
 - En un desguàs lliure sota comporta, a igual càrrega aigües amunt de la comporta, el coeficient de desguàs tendeix a augmentar a mesura que l'obertura es tanca.
 - Un vessador de llavi fi de secció rectangular és més adequat per a cabals petits que un de secció triangular.
 - El concepte bàsic per assegurar el bon funcionament d'un sobreexidor de paret gruixuda és que s'hi formi al damunt una secció de control.
 - Els sobreexidors de perfil estricte són bàsics per al disseny de preses de gravetat.
2. Un desguàs sota comporta controla el cabal que circula per un canal de formigó ($n = 0.015$) de secció rectangular de 2.5 m d'ample.

El canal consta d'un primer tram (1–2) de pendent $i = 0.0009$, al qual segueix una ràpida (2–3) cap a un vas esmorteïdor (3–4) de pendent horitzontal amb una sobreelevació de solera a la sortida (5). Aigües avall, segueix un tram (5–6) de pendent $i = 0.0225$, que acaba en una caiguda vertical (6).



Essent el cabal $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ i l'obertura inferior de la comporta $a = 0.25 \text{ m}$, amb un coeficient de contracció $C = 0.6$, determineu

- L'altura d'aigua amunt de la comporta, i també en les seccions 2, 3, 4, 5 i 6, caracteritzant les corbes de rabeig que s'hi formin.
- La sobreelevació mínima Δy que hi ha d'haver a la secció 5, per assegurar la formació d'un ressalt.

Suposeu que: es trams 1–2 i 5–6 són suficientment llargs; e tram 3–4 és prou curt com per assegurar que el ressalt s'inicia a l'entorn de la secció 3; i que les pèrdues d'energia entre 2 i 5 són nul·les, llevat les que es produeixin en el ressalt.

3. Un canal de formigó ($n = 0.015$), de secció rectangular i pendent 1%, presenta un sobreexidor lateral rectangular amb una cresta de llavi fi de longitud L . Aigües avall del sobreexidor, el canal té un ample d'1 m, i aigües amunt un ample d'1.4 m.

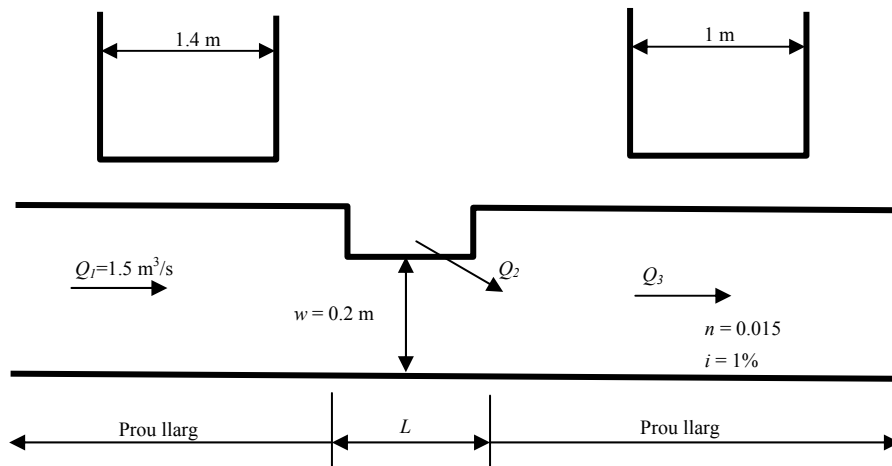
Si pel tram més aigües amunt circula un cabal d'1.5 m³/s, determineu la longitud del sobreexidor de llavi fi que permeti assegurar que la làmina d'aigua hi sigui pràcticament constant.

Prediguen quin és el perfil de la làmina d'aigua en el canal.

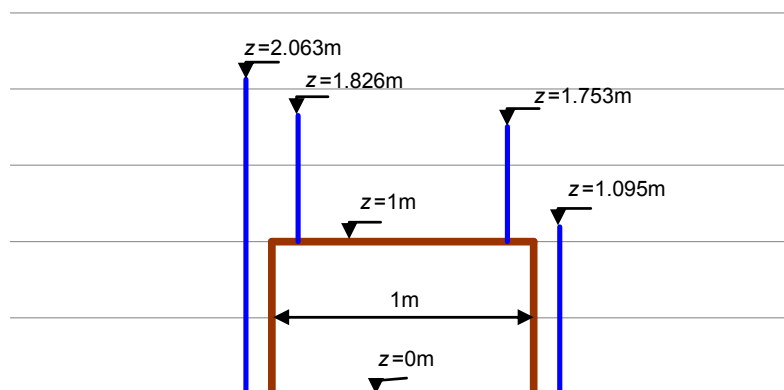
Avall i amunt del sobreexidor lateral es pot suposar que el canal és molt llarg.

Considereu que en el vessament lateral les pèrdues de càrrega són negligibles i que el coeficient de desguàs del sobreexidor és 0.6. L'equació d'un sobreexidor de llavi fi de secció rectangular és:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} C_d L h^{3/2}$$



4. En un canal prismàtic, de pendent 1.5%, de secció trapezoidal d'ample a la base de 2 m, talussos laterals a 45° i altura de 3 m, s'hi troba una sobreelevació sobtada de la solera d'1 m d'altura i 1 m de longitud. Determineu el cabal circulat i el coeficient de Manning sabent que aigües amunt i avall de la sobreelevació el canal és molt llarg i que entorn de la sobreelevació, s'han mesurat els següents calats:



11 Disseny de canals

11.1 Introducció

Per al disseny de la secció d'un canal prismàtic no erosionable (canals artificials revestits), els criteris més destacables que cal tenir en compte són: resistir l'erosió de manera satisfactòria; aconseguir el menor pendent motriu possible i definir la solució més econòmica i fàcilment construïble.

Hi ha una sèrie de factors que poden condicionar el disseny:

- Concepte de secció eficient
- Condicionaments constructius: classe de material amb el qual s'executa el cos del canal.
- Velocitats permissibles.
- Pendants.
- Resguards.

11.2 Eficiència d'una secció. Cas de secció trapezoïdal, rectangular, triangular i circular

Es tracta de determinar la secció hidràulica òptima. Aquest concepte s'estableix a partir del funcionament del canal en règim uniforme. En aquest tipus de règim:

$$Q = v \cdot A = \frac{R_h^{2/3} \cdot I^{1/2}}{n} \cdot A \Rightarrow Q = \frac{R_h^{2/3} \cdot A}{n} \cdot I^{1/2} \Rightarrow Q = K \cdot I^{1/2} \quad (11.1)$$

on es defineix el paràmetre K com l'anomenada *conductivitat* de la secció. S'observa que considerant l'àrea (A) de la secció fixa, quan el radi hidràulic (R_h) augmenta, la conductivitat també ho fa. O bé, considerant igualment l'àrea transversal fixa, quan el perímetre mullat (p) augmenta, la conductivitat, en canvi, disminueix.

Per tant, segons aquestes relacions, la secció amb perímetre mullat mínim presenta una conductivitat màxima, que es tradueix en el cabal (Q) màxim, fixats el pendent motriu (I), el coeficient de fricció de Manning (n) i la secció transversal. Aquesta secció transversal es defineix com la secció hidràulicament eficient o òptima.

Com a curiositat, cal notar que, de totes les geometries possibles que pot presentar un canal prismàtic (rectangular, trapezoïdal, etc.), la secció semicircular és la que presenta un perímetre mullat mínim.

11.2.1 Paràmetres que fan òptima una secció rectangular

Les variables que acaben definint la mida de la secció rectangular són l'ample (B) i el calat (y). Les relacions geomètriques principals són:

$$A = B \cdot y = ctt \quad (11.2)$$

$$p = B + 2 \cdot y \Rightarrow p = \frac{A}{y} + 2 \cdot y \quad (11.3)$$

Així, segons el concepte de secció eficient, es vol determinar el perímetre mullat mínim, fixada la secció transversal:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A}{y^2} + 2 = 0 \Rightarrow A = 2 \cdot y_{ef}^2 \quad (11.4)$$

Així doncs, resulta que la secció rectangular òptima és aquella que té un ample igual al doble del calat en règim uniforme:

$$\begin{aligned} B_{ef} &= 2 \cdot y_{ef} \\ Rh_{ef} &= \frac{y_{ef}}{2} \end{aligned} \quad (11.5)$$

11.2.2 Paràmetres que fan òptima una secció trapezoïdal

En el cas d'una secció trapezoïdal, se n'estableix la definició geomètrica a la figura 11.1 i les equacions (11.6) i (11.7):

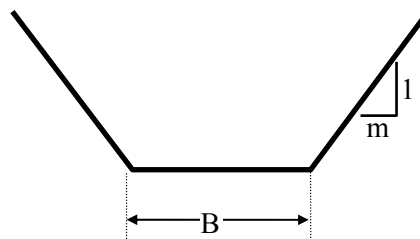


Figura 11.1 Secció trapezoïdal.

$$A = (B + m \cdot y) \cdot y = ctt \Rightarrow B = \frac{A}{y} - m \cdot y \quad (11.6)$$

$$p = B + 2 \cdot y \cdot \sqrt{1 + m^2} \quad (11.7)$$

Per tant, substituint convenientment la relació de l'ample (11.6) a (11.7), queda:

$$p = \frac{A}{y} - m \cdot y + 2 \cdot y \cdot \sqrt{1 + m^2} \quad (11.8)$$

Determinant els extrems d'aquesta expressió, considerant la secció transversal (A) i el talús (m) constants:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A}{y^2} - m + 2 \cdot \sqrt{1 + m^2} = 0 \Rightarrow \quad (11.9)$$

$$A_{ef} = y_{ef}^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{1 + m^2} - m) \quad (11.10)$$

d'on, per tant, l'ample ha de complir la relació següent:

$$B_{ef} = y_{ef} \cdot (2 \cdot \sqrt{1+m^2} - m) - m \cdot y_{ef} \Rightarrow \quad (11.11)$$

$$B_{ef} = 2 \cdot y_{ef} \cdot (\sqrt{1+m^2} - m) \quad (11.12)$$

i el perímetre mullat i radi hidràulic:

$$p_{ef} = 2 \cdot y_{ef} \cdot (\sqrt{1+m^2} - m) + 2 \cdot y_{ef} \cdot \sqrt{1+m^2} \Rightarrow \quad (11.13)$$

$$p_{ef} = 2 \cdot y_{ef} \cdot (2 \cdot \sqrt{1+m^2} - m) \quad (11.14)$$

$$Rh_{ef} = \frac{y_{ef}^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{1+m^2} - m)}{2 \cdot y_{ef} \cdot (2 \cdot \sqrt{1+m^2} - m)} \Rightarrow \quad (11.15)$$

$$Rh_{ef} = \frac{y_{ef}}{2} \quad (11.16)$$

Amb tot això, la secció que representen les variables B_{ef} , p_{ef} i Rh_{ef} s'esquematitza a la figura 9.1:

$$OS = y_{ef} \quad (11.17)$$

$$OT = OR \cdot \sin \vartheta = \frac{OR}{\sqrt{1+m^2}} \quad (11.18)$$

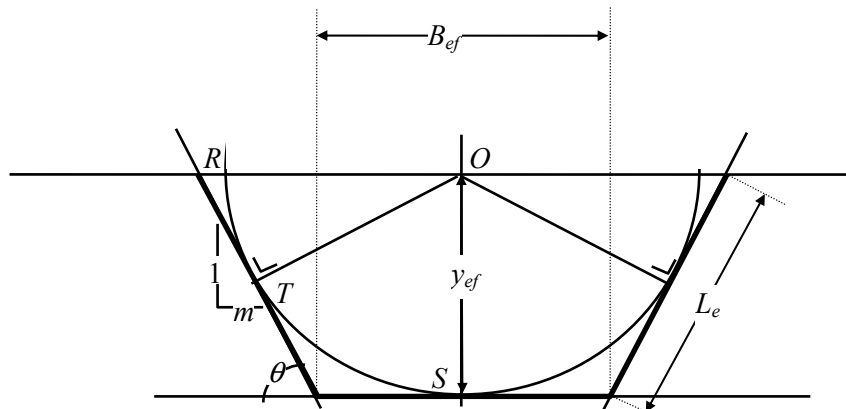


Figura 11.2 Caracterització geomètrica de la secció trapezoidal òptima.

i ja que

$$OR = \frac{1}{2} B_{ef} + m \cdot y_{ef} = \frac{2}{2} y_{ef} \cdot (\sqrt{1+m^2} - m) + m \cdot y_{ef} = y_{ef} \cdot \sqrt{1+m^2} \Rightarrow \quad (11.19)$$

$$OT = \frac{y_{ef} \cdot \sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}} = y_{ef} \Rightarrow \quad (11.20)$$

$$OT = y_{ef} = OS \quad (11.21)$$

Amb la relació (11.21) establerta finalment, es comprova que la secció trapezoïdal eficient és aquella a la qual se li pot inscriure un semicercle; per tant, és la meitat d'un hexàgon. Cal dir que, constructivament, aquesta geometria és difícil d'aconseguir perquè els talussos tenen un pendent elevat que fa que hi hagi problemes d'estabilitat abans de ser revestits de formigó, cosa que obliga a esperar més temps abans de desencofrar i, per tant, alenteix la construcció.

11.3 Anàlisi del moviment uniforme en una secció tancada. El cas d'una secció circular

Se suposa una secció circular tancada, com seria el cas típic de molts col·lectors d'aigües residuals i fins i tot pluvials, amb el coeficient de Manning constant, és a dir, independent del calat. De la fórmula de Manning per al flux uniforme es pot escriure:

$$v = \frac{i^{1/2}}{n} \cdot R_h^{2/3}$$

$$Q = \frac{i^{1/2}}{n} \cdot A \cdot R_h^{2/3} \quad (11.22)$$

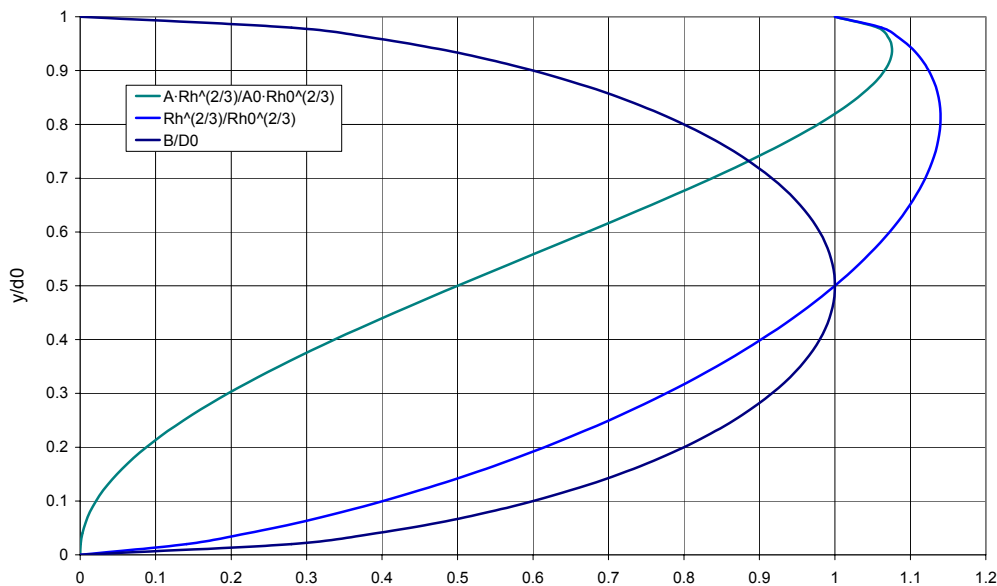


Figura 11.3 Característiques hidràuliques en una secció circular en làmina lliure.

si es considera n i el pendent i constants, la velocitat mitjana resulta proporcional $R_h^{2/3}$ i el cabal al producte $A \cdot R_h^{2/3}$. Si es considera el subíndex 0 per indicar les característiques del flux a secció plena, tot i que en làmina lliure, no a pressió (condició de superfície lliure: P_{atm} sobre la làmina lliure), aleshores es pot obtenir la figura 11.3. En aquest gràfic estan representades les corbes v/v_0 i Q/Q_0 en funció de y/d_0 , segons les seves dependències amb el R_h i l' A . Ambdues corbes presenten un valor màxim per a Q i v respectivament:

- $y > 0.93 \cdot d_0 \Rightarrow$ Existeixen dos calats (y) diferents per al mateix Q .
- $y > 0.81 \cdot d_0 \Rightarrow$ Existeixen dos calats (y) diferents per a la mateixa v .

Observació: Aquests valors màxims es poden obtenir amb precisió fent les respectives derivades de les expressions que resulten de la fórmula de Manning.

La hipòtesi de n constant no és del tot correcta. S'ha demostrat que en conductes de clavegueram i, canals de drenatge nets (per exemple, de formigó) n s'incrementa al voltant del 28% de $1.00 \cdot d_0$ a $0.25 \cdot d_0$, on n apareix com un màxim. Així, els valors de Q i v màxims apareixen entre $0.97 \cdot d_0$ i $0.94 \cdot d_0$, respectivament (figura 11.3). Aquesta anàlisi és igualment vàlida per a qualsevol secció tancada.

11.4 Condicionaments constructius

La selecció del material per a la construcció del canal depèn de:

- La disponibilitat del material.
- El seu cost.
- El mètode constructiu.
- Els propòsits d'ús del canal.

Així, cal tenir en compte aspectes com la prevenció d'erosions o socavacions localitzades, i evitar possibles filtracions d'aigua que provoquen pèrdues de cabal i possibles problemes de subpressió.

11.5 Velocitats permissibles

11.5.1 Velocitat mínima

Es tracta d'imposar un valor mínim per a la velocitat del flux que no provoqui la sedimentació dels àrids que arrossegui i que no indueixi el creixement de plantes aquàtiques, algues, etc.

No existeix una velocitat exacta que impedeixi aquests fenòmens, però de tota manera es tracta de velocitats entre 0.5 m/s i 1 m/s.

11.5.2 Velocitat màxima

En aquest cas, és important distingir entre canals no erosionables (bàsicament de formigó o revestiments rígids) i canals erosionables (materials no cohesius).

Canals no erosionables

En general, es recomanen dissenys que limitin les velocitats a valors al voltant dels 3 m/s, perquè valors superior provoquen a mitjà o llarg termini problemes en la durabilitat del formigó. Igualment es recomanen, si són possibles, dissenys que assegurin velocitats al voltant d'1 m/s, perquè permeten tenir pèrdues de càrrega més petites que en dissenys amb velocitats més grans.

Una altra limitació, en trams curts amb grans pendents (per exemple, sobreeixidors de preses de perfils estrictes) que donen fluxos amb elevades velocitats (entre 13 m/s i 15 m/s), si en aquest flux hi ha una certa manca d'aireació del flux, és que poden aparèixer possibles problemes locals de cavitació, que es solucionaran assegurant l'entrada d'aire al flux.

Canals erosionables

En canals rectes, es poden acceptar v més grans que en canals sinuosos. Per exemple, en un canal amb els contorns amb sorra de gra mitjà ($0.2 \text{ mm} < \phi < 1 \text{ mm}$) cal imposar v inferiors a 0.5 m/s, en aquest cas es poden donar problemes de sedimentacions i creixements de plantes aquàtiques. Per contra, si amb material granular presenta un diàmetre característic més gran ($40 \text{ mm} < \phi < 60 \text{ mm}$) es pot imposar un límit al voltant de 2.5 m/s.

Taula 11.1 Reducció de la v que s'acceptaria en un canal recte segons el seu traçat.

Canal sinuós	
Lleugerament	5%
Moderadament	13%
Molt	22%

11.6 Pendants

Els pendants que presenti el canal vénen fixats implícitament per la topografia i l'energia requerida pel flux. També depenen d'alguna manera de l'ús del canal: per exemple, canals hidroelèctrics requereixen nivells d'energia tan elevats com sigui possible en el punt d'entrada a la canonada forçada, per assegurar el màxim salt possible. Això s'aconsegueix amb pendants petits, que permeten reduir al mínim la dissipació d'energia per pèrdua de cota. Igualment, en canals de regadiu, quant menor sigui el pendent es podrà arribar a l'extrem aigües avall amb nivells més alts d'aigua, que donaran més càrrega i, per tant, la capacitat de regar una superfície més gran.

11.7 Resguards

Entre la superfície lliure de l'aigua en el canal i la cota per damunt de la qual es considera que es produeix el desbordament, es defineix sempre un resguard que dona més seguretat al funcionament dels canals. El resguard ha de ser suficient per preveure que ones o fluctuacions a la superfície lliure de l'aigua provoquin desbordament en el canal.

En general, es solen recomanar resguards de l'ordre de $y/6$, i que no siguin inferiors a 0.15 m. En alguns països, es posa també una limitació en el màxim resguard, de manera que no superi els 0.60 m.

12 Moviment a pressió

12.1 Introducció

En aquest capítol s'estudia el flux en conductes tancats a secció plena, sotmès a un determinat gradient de pressió. En general, es tracta de conductes de secció circular que reben el nom de *canonades*. Aquest tipus de fluxos també es poden donar en seccions no circulars (per exemple, rectangulars o quadrats), que en l'àmbit del drenatge urbà solen anomenar-se *calaixos*. De tota manera cal aclarir que un calaix es dissenya per funcionar en làmina lliure i, per tant, quan treballa a secció plena a pressió és perquè se superen les previsions de disseny.

El concepte de funcionament a pressió es pot introduir per contraposició al concepte de làmina lliure. Mentre un flux en làmina lliure en una secció tancada es caracteritza per l'existència d'una superfície lliure d'interfície entre l'atmosfera i el líquid en el qual el moviment s'estableix per efecte de la gravetat sobre el líquid, un flux a pressió es dona a secció plena i el flux s'estableix, entre dues seccions, per la diferència de pressió entre elles.

Tot i que en una canonada el flux pot ser tant en làmina lliure com a pressió, per un abús del llenguatge, quan es parla de "flux en canonades" es fa referència al flux a secció plena i sota un gradient de pressió.

El transport de fluids en canonades és habitual en sistemes de proveïment d'aigua a poblacions, en xarxes de subministrament industrial; en aquest cas, no només pot ser d'aigua sinó també d'hidrocarburs i fins i tot gasos, en sistemes de distribució d'aigua en regadius i, també, per exemple, en aprofitaments hidroelèctrics.

12.2 Tipus de moviment en canonades

De manera equivalent al que s'ha definit en el flux en canals, el moviment a pressió en una canonada, en funció de la seva dependència amb el temps, pot ser:

- Flux permanent: si les variables que el defineixen (és a dir, la velocitat o el cabal) són independents del temps.
 - Flux permanent i uniforme: si les variables del flux són independents tant del temps com de la secció transversal de la canonada que s'analitzi. És a dir, en qualsevol secció al llarg de la conducció i al llarg del temps, la velocitat i, per tant, també el cabal, és mantenen constants.
 - Flux permanent variat: si la velocitat del flux, tot i ser constant en el temps, pot variar d'una secció a una altra. Si es produeixen canvis d'aquest tipus, són deguts a canvis en la geometria de la conducció, com per exemple una contracció o un eixamplament.

- Flux variable o no permanent: si les característiques del moviment varien no només al llarg de la canonada, sinó també en funció del temps en una mateixa secció. Reben el nom de *transitoris*. Un exemple típic són les operacions d'engegar o aturar un sistema d'impulsió, o la reducció o l'augment del cabal per manipulació d'una vàlvula.

En endavant, llevat que es digui explícitament el contrari, es parlarà del moviment permanent i uniforme de fluids incompressibles, en canonades rígides i, en general, de secció circular.

D'altra banda, atenent el comportament del propi fluid en el moviment, que s'ha vist en l'explicació de l'experiència de Reynolds (apartat 5 del capítol 2), el flux en una canonada es pot classificar en:

- Règim laminar. Per a valors del nombre de Reynolds inferiors a l'interval (2300, 2500)
- Règim turbulent. Per a valors del nombre de Reynolds superiors a l'interval anterior. Més endavant es defineixen, dins el règim turbulent, diferents comportaments en funció de la seva dependència amb el propi Re i amb la rugositat del contorn.

Exercici

Estudieu la mida d'una canonada perquè pugui transportar aigua ($v = 1 \text{ m}^2/\text{s}$) en règim laminar.

Suposant que el límit que assegura la formació d'un règim laminar és $Re < 2300$, s'ha de donar que:

$$Re = \frac{v \cdot \phi}{\nu} < 2300 \quad (12.1)$$

De manera que es verifiquen els valors següents del diàmetre en funció de la velocitat mitjana de circulació:

Taula 12.1 Diàmetre màxim (ϕ) que garanteix $Re=2300$, segons quina sigui la velocitat del flux.

$v \text{ (m/s)}$	$\phi \text{ (mm)}$
1	2.3
0.5	4.6
0.1	23
0.01	230

En el cas de transport d'aigua, atès que s'han de transportar masses importants, cal fer-ho garantint unes velocitats adequades. Observeu que per transportar un fluid en règim laminar amb velocitats de l'ordre d'1m/s la mida de la canonada ha de ser tan petita que és poc eficient tècnicament. En canvi, per tenir règim laminar en canonades de mida més gran (per exemple, de 23mm), la velocitat ha de ser tan petita que fa inviable el transport en aquest règim.

L'ordre de magnitud dels nombres de Reynolds que es donen en el transport d'aigua en canonades a pressió es troba a l'entorn de 10^6 , que resulta de velocitats de l'ordre d'1m/s en canonades de diàmetre de l'ordre d'1m.

12.3 Equacions bàsiques del règim permanent en canonades

Les equacions bàsiques per estudiar el moviment a pressió d'un fluid incompressible i en règim permanent, en canonades, són l'equació de continuïtat, l'equació de momentum i l'equació de l'energia.

12.3.1 Equació de continuïtat

Ja s'ha discutit a l'apartat 2 del capítol 2 que l'equació de continuïtat s'escriu en la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (12.2)$$

Atès que en règim permanent qualsevol dependència amb el temps és nul·la:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow Q = \text{constant} \quad (12.3)$$

equació que es pot expressar en funció de les velocitats mitjanes i àrees de dues seccions transversals donades:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = ctt \quad (12.4)$$

12.3.2 Equació de momentum

En règim permanent per a un fluid incompressible, l'equació de momentum o de variació de la quantitat de moviment, aplicat a un volum de control, és (apartat 3 del capítol 3):

$$\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot (\Delta \vec{v}) \quad (12.5)$$

on cal recordar que $\sum \vec{F}$ és la suma de totes les forces que actuen sobre el volum de control, i el segon membre de la igualtat $\rho \cdot Q \cdot (\Delta \vec{v})$ indica que qualsevol canvi en les velocitats a l'entrada i sortida del volum de control provocat per un canvi de direcció o un canvi d'àrea, etc., origina l'aparició d'una força resultant sobre el volum de control.

12.3.3 Equació de l'energia

L'equació de conservació de l'energia, com se sap, ve donada pel trinomi de Bernoulli. Entre dues seccions qualssevol d'una canonada una part de l'energia, lluny de conservar-se, es dissipa per fregament del líquid amb el contorn. La igualtat que introdueix el trinomi és (capítol 3, apartat 4):

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \cdot \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12} \quad (12.6)$$

on:

- P_i és la pressió mitjana a la secció i . La canonada s'idealitza representada pel seu eix.

$$P_i = \frac{\int_{S_i} P \cdot dS}{S_i} \quad (12.7)$$

- v_i és la velocitat mitjana a la secció i .
- α_i és el coeficient de Coriolis a la secció i . En endavant s'accepta, llevat que es digui explícitament el contrari, que $\alpha_i = 1$.

$$\alpha_i = \frac{\int_{S_i} v_i^3 \cdot dS}{\bar{v}_i^3 \cdot S_i} \quad (12.8)$$

- z_i és l'altura de l'eix de la canonada a la secció i respecte d'un nivell de referència arbitrari.
- ΔH_{12} són les pèrdues d'energia que hi ha entre les seccions 1 i 2 degudes al fregament del fluid amb el contorn.

Segons tot això, l'únic que cal per tenir perfectament definida la igualtat (12.6) és aconseguir una expressió que relacioni les pèrdues de càrrega amb les variables del flux.

12.4 Pèrdues d'energia repartides en una canonada

12.4.1 Caracterització hidràulica

Sigui un volum de control, com el que es mostra a la figura 3.1, definit en una canonada circular de radi R , per la qual circula un fluid incompressible de pes específic γ . En aquest volum de control estan actuant les forces següents:

- En la direcció i el sentit del moviment:
 - La component del pes ($W \cdot \sin \alpha$).
 - La resultant de la distribució de pressió sobre la secció d'entrada del volum de control ($P_1 \cdot S_1$), on P_1 és la pressió mitjana a la secció 1.
- En la direcció i el sentit oposat del moviment:
 - La resultant de la distribució de pressió sobre la secció de sortida del volum de control ($P_2 \cdot S_2$), on P_2 és la pressió mitjana a la secció 2.
 - La resultant de la distribució de tensions tangencials (τ_0) originades pel fregament del fluid amb el contorn de la canonada ($\pi \phi \tau_0 dl$). Aquests esforços són els que provoquen la dissipació d'energia del flux.

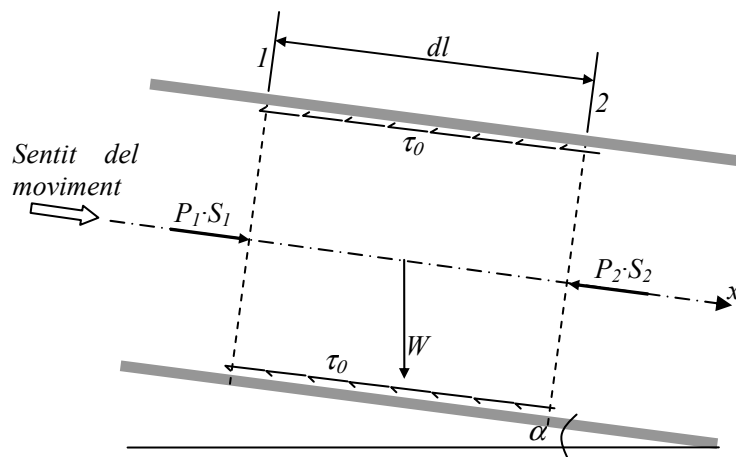


Figura 12.1 Volum de control que cal analitzar per estudiar les pèrdues de càrrega per fregament amb el contorn.

Per simplificar el desenvolupament es considera que es tracta d'un conducte prismàtic circular ($S_1=S_2=S$). Aquesta simplificació no treu generalitat al desenvolupament, ja que aquest és el cas habitual en canonades. Aleshores, en la direcció x del moviment es pot escriure:

$$P_1 \cdot S + W \cdot \sin \alpha - P_2 \cdot S - \pi \cdot \phi \cdot \tau_0 \cdot dl = 0 \quad (12.9)$$

Atès que s'està en condicions de règim permanent, cal observar que la resultant de totes les accions considerades ha de ser igual a 0, ja que, en cas contrari, significaria que existiria una acceleració i, per tant, variació en el temps.

El pes W de l'element de volum es pot escriure com el volum d'un cilindre de longitud dl pel pes específic γ del fluid, mentre que la superfície transversal S és la d'una circumferència de radi $\phi/2$. Amb tot això es pot desenvolupar l'expressió (12.9) anterior:

$$\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} + dl \cdot \sin \alpha = \frac{4 \cdot \tau_0 \cdot dl}{\phi \cdot \gamma} \quad (12.10)$$

Tenint en compte la figura 3.1, es pot comprovar que:

$$dl \cdot \sin \alpha = z_1 - z_2 \quad (12.11)$$

Substituint-ho a (12.10) condueix a:

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right) = \frac{4 \cdot \tau_0 \cdot dl}{\phi \cdot \gamma} = \Delta H_{12} \quad (12.12)$$

Imposant que la canonada és prismàtica ($\phi = \text{constant}$) i el règim permanent s'entén que la velocitat mitjana s'ha de mantenir constant al llarg de tota la conducció. Per tant, el primer membre de l'equació (12.12) representa la diferència del trinomi de Bernoulli entre les dues seccions 1 i 2, que ha de ser igual a l'energia que es dissipa entre ambdues pel fregament amb el contorn de la canonada (veure també (12.6)).

A l'exercici 1 del capítol 1 s'ha definit el concepte de *pendent motriu* com la pèrdua d'energia per unitat de pes i unitat de longitud en una conducció, i es comprova que coincideix amb el pendent de la línia d'energia del flux.

$$I = -\frac{dH}{dl} \approx \frac{\Delta H_{12}}{\Delta L_{12}} \Rightarrow I \cdot \Delta L_{12} = \Delta H_{12} \quad (12.13)$$

Per tant, comparant (12.12) amb la definició de (12.13), es pot escriure una relació entre la tensió tangencial que apareix pel fregament amb el contorn i el pendent motriu:

$$I = \frac{4 \cdot \tau_0}{\phi \cdot \gamma} \quad (12.14)$$

En tractar-se d'una conducció circular, es pot expressar en funció del radi hidràulic, expressió que es demostra vàlida per a qualsevol altra geometria:

$$I = \frac{\tau_0}{R_H \cdot \gamma} \quad (12.15)$$

De manera que el problema s'ha transformat ara a determinar τ_0 en el contacte entre el líquid i el contorn del conducte.

12.4.2 Determinació del pendent motriu

Els paràmetres principals que influeixen en el moviment d'un fluid a l'interior d'una canonada són:

- La mida de la canonada, caracteritzada pel seu diàmetre ϕ .
- La rugositat de la canonada, que es representa a partir de la *rugositat absoluta* (k) del material³³. A la taula 12.2 es presenten alguns valors característics en funció del material.
- El propi fluid que es mou. Es caracteritza per la viscositat cinemàtica ν , i la seva densitat ρ .
- La velocitat mitjana del moviment, v .
- La tensió tangencial de fregament amb el contorn, τ_0 .

És a dir, en general, s'ha de donar que la tensió tangencial buscada sigui una funció dependent de les variables anteriors:

$$\tau_0 = \tau_0(v, \rho, \nu, \phi, k) \quad (12.16)$$

Conceptualment, s'entén que els esforços τ_0 han de ser directament proporcionals a l'energia cinètica del flux i a la densitat del fluid. Tenint en compte això, i a partir de tècniques d'anàlisi dimensional, l'expressió anterior es pot plantejar adimensionalment en la forma:

$$\tau_0 = \frac{v^2}{2g} \cdot \rho \cdot \Phi \left(\text{Re}, \frac{k}{\phi} \right) \quad (12.17)$$

Substituint convenientment (12.14) en (12.17) s'arriba a la igualtat següent:

$$I = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{\phi} \cdot 4 \cdot \Phi \left(\text{Re}, \frac{k}{\phi} \right) \quad (12.18)$$

Es defineix $4 \cdot \Phi$ com una funció dependent de les característiques geomètriques de la conducció expressades en el paràmetre adimensional (k/ϕ), que s'anomena *rugositat relativa*, i de les característiques del fluid en moviment, expressades en el nombre de Reynolds (Re).

$$I = \frac{f}{\phi} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (12.19)$$

on:

- I és el pendent motriu del moviment.
- f és el coeficient de fricció de Darcy–Weisbach, coeficient adimensional que caracteritza el fregament del fluid amb el contorn. En general, és un paràmetre que depèn tant de les característiques de la pròpia canonada: el diàmetre i la rugositat del contorn, com del moviment del fluid: nombre de Reynolds.

³³ Hi ha discussions sobre el significat físic real de la rugositat absoluta: des de qui l'interpreta com l'altura mitjana de les rugositats microscòpiques del contorn, fins a qui en fa la idealització del diàmetre de les esferes que hi hauria d'haver enganxades en un contorn totalment llis, per obtenir les mateixes pèrdues d'energia. En qualsevol dels casos, el concepte és prou senzill d'entendre, i condueix a mesures equivalents de la rugositat.

- ϕ és el diàmetre de la canonada.
- v és la velocitat mitjana del fluid.

a Règim laminar

Quan s'han estudiat els fluids newtonians, s'ha analitzat el flux d'un d'aquests fluids en una canonada horitzontal sotmesa a un gradient de pressions constant. Aquest problema ha conduït a l'equació de Poiseuille, que dona la distribució de velocitats del fluid en una secció qualsevol de la canonada.

L'equilibri en un determinat volum de control de totes les accions que condicionen el moviment condueix a la llei:

$$\tau = \frac{I \cdot \gamma \cdot r}{2} \quad (12.20)$$

a partir de la qual, i amb la llei de Newton per als fluids viscosos, es pot determinar la distribució de la velocitat en una secció transversal (fórmula de Poiseuille mostrada a l'exercici de l'apartat 1.2.4 del capítol 1):

$$v = \frac{I \gamma}{4 \mu} (R^2 - r^2) \quad (12.21)$$

Integrant aquesta llei en tota la secció i dividint per l'àrea, es determina la velocitat mitjana a partir de la qual es pot obtenir la relació amb el pendent motriu:

$$I = \frac{8 \cdot \mu \cdot v_{mitjana}}{\gamma \cdot R^2} \quad (12.22)$$

Assumint la relació empírica mostrada a (12.19), s'obté la relació amb el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach, només vàlida en el cas de règim laminar:

$$I = \frac{8 \cdot \mu \cdot v_{mitjana}}{\gamma \cdot R^2} = \frac{f \cdot v^2}{\phi \cdot 2g} \Rightarrow f = \frac{64}{Re} \quad (12.23)$$

Aquesta relació permet concloure que en règim laminar el pendent motriu varia linealment amb la velocitat mitjana del flux.

b Règim turbulent

b.1 Previ. Concepte de capa límit

En la teoria dels fluids ideals en moviment es fa la hipòtesi que aquests no presenten fenòmens de fricció ni entre les pròpies partícules que constitueixen el fluid, ni amb els seus contorns. És a dir, un fluid ideal teòricament llisca uniformement sobre els contorns, de manera que la resistència al flux que hi oposa el contorn és nul·la.

Aquesta hipòtesi aplicada al flux al voltant de contorns sòlids fixos condueix a resultats paradoxals en contrast amb el comportament de fluids reals al voltant dels mateixos contorns.

Així, quan s'estudia el flux d'un fluid ideal al voltant d'un cilindre de secció circular indefinit (Munson et al., 1999) s'arriba a conclusions com que les línies de corrent es distribueixen simètricament al voltant del cilindre, i es dona que la velocitat és màxima i la pressió mínima, en punts més alt i baix del cilindre ($\theta = \pm\pi/2$); en canvi, la velocitat es fa nul·la i la pressió màxima en la zona frontal i posterior del cilindre ($\theta = 0$ i $\theta = \pi$). Aquests punts s'anomenen *punts d'estancament*. Aquest comportament ideal s'esquematitza a l'esquerra de la figura 12.2. La simetria d'aquests resultats es tradueix que la resultant de les accions que el flux exerceix sobre el cilindre és nul·la, de manera que el cilindre no experimenta cap mena d'arrossegament per part del flux.

Aquests resultats es contradueixen amb el que succeeix en la realitat. Es pot entendre que el cilindre en qüestió dins un fluid en moviment com s'esquematitza a la figura 12.2, realment és arrossegat per aquest. En aquest cas, es comprova que la simetria del moviment es trenca i apareix, a la zona posterior del cilindre, una regió on s'aprecia la formació d'esteles o remolins, que són els que afavoreixen el desequilibri necessari per a l'aparició de la força d'arrossegament sobre el sòlid. Aquesta contradicció amb el que predeia la teoria dels fluids ideals es coneix en mecànica de fluids com la *paradoxa de D'Alembert*, en honor de Jean le Rond D'Alembert (1717–1783) que fou el primer a demostrar que la força d'arrossegament esmentada sobre sòlids immersits en fluids ideals en moviment era nul·la. Va caldre esperar fins a finals del segle XIX i principis del XX, perquè es possessin les bases per entendre la influència de la viscositat en el moviment dels fluids reals a l'entorn de sòlids.

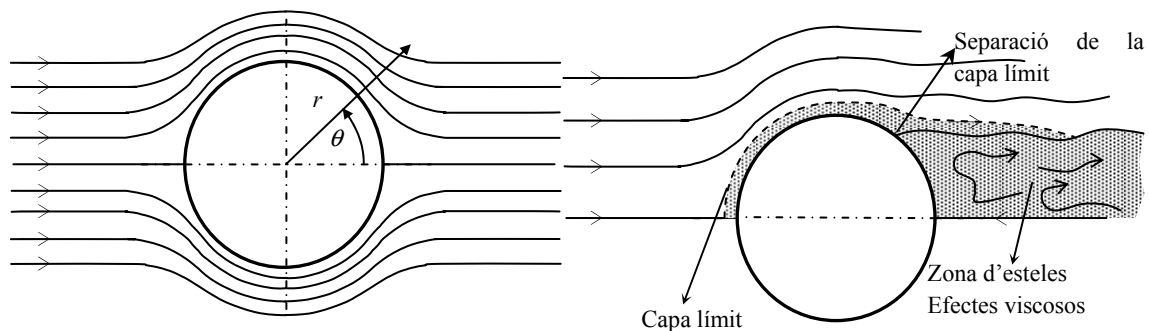


Figura 12.2 Esquerra: fluid ideal en moviment al voltant d'un cilindre circular. Dreta: fluid viscos en moviment al voltant d'un cilindre circular.

En la realitat, el que succeeix és que les partícules fluides en moviment, per raó de la segona llei de Newton, reben l'efecte de les forces d'inèrcia que apareixen pel fet de moure's. Així, el canvi d'orientació en la curvatura que presenta el cilindre en $\theta = \pi/2$ no el poden seguir les partícules fluides i es provoca que aquestes se separin del contorn, i es genera en la zona posterior del cilindre una zona de remolins que trenca la simetria del flux.

D'altra banda, i considerant la condició d'adherència perfecta per la qual sobre el contorn del sòlid la velocitat ha de ser nul·la, s'entén que hi ha d'una petita zona junt al contorn on la velocitat és encara petita i on està creixent des de 0 fins al valor que tingui el fluid en moviment. Aquesta zona propera al contorn sòlid s'anomena *capa límit*. Dins ella, mentre la velocitat sigui prou petita, les forces viscoses seran prou grans, comparades amb les forces d'inèrcia, això és, nombres de Reynolds petits ($Re < 2300$), i el comportament es pot semblar al règim laminar d'un fluid newtonià. Aquesta regió dins la capa límit es defineix com la *subcapa laminar*. Aquests conceptes els va introduir el 1904 Ludwig Prandtl (1857–1953), físic alemany que va treballar sobretot en aerodinàmica.

b.2 Classificació del règim turbulent

La influència de la capa límit en el moviment del fluid amb relació al seu contacte amb el contorn permet una classificació del règim turbulent.

- Quan tota la rugositat del contorn queda dins la subcapa laminar, es considera un contorn llis i el flux s'anomena *turbulent llis*. Aquest es caracteritza pel fet que la rugositat del contorn pràcticament no influeix en el moviment. En aquest cas, es constata que el pendent motriu depèn aproximadament, depèn de la velocitat a un exponent 1.75 ($I \sim v^{1.75}$).
- Quan la rugositat supera la zona de la capa límit, de manera que interfereix de manera significativa la distribució de velocitats del fluid, l'efecte de la rugositat guanya la influència que pugui tenir les forces d'inèrcia i viscoses. El flux, en aquest cas, s'anomena *turbulent rugós*. I ara el pendent motriu és proporcional al quadrat de la velocitat mitjana ($I \sim v^2$).
- El cas intermedi entre dels dos anteriors rep el nom de règim *turbulent intermedi*. En aquest cas, la mida de la rugositat es manté dins la capa límit i fa que el fregament amb el contorn variï tant en funció de la pròpia rugositat com de la relació entre forces d'inèrcia i viscoses, és a dir, del nombre de Reynolds. El pendent motriu depèn de la velocitat mitjana, elevada a un exponent que pot variar entre 1.75 i 2.

b.3 Fórmules empíriques vàlides pel règim turbulent

En el cas de règim turbulent, el fet de no existir una relació com la llei de Newton dels fluids viscosos, fa que no es pugui arribar de manera directa a una expressió equivalent a la (12.23), i que calgui recórrer a expressions empíriques per obtenir resultats. Així, en el cas més genèric, en règim turbulent és vàlida l'expressió:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \cdot \log \frac{\phi}{k} = 1.14 - 2 \cdot \log \left(1 + 9.35 \cdot \frac{\frac{\phi}{k}}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right) \quad (12.24)$$

que es coneix com la fórmula de Colebrook i White, amb la qual, coneguts el diàmetre i la rugositat absoluta de la canonada, i la velocitat mitjana i la viscositat cinemàtica del fluid, es pot determinar el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach. Cal entendre que aquesta relació és perfectament vàlida en qualsevol de les tres categories de règim turbulent que s'ha matisat a b.2. De tota manera, permet dues simplificacions:

- Un cas en el qual la rugositat relativa k/ϕ sigui molt petita, de manera que es pot acceptar la simplificació següent:

$$1 + 9.35 \cdot \frac{\frac{\phi}{k}}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \approx 9.35 \cdot \frac{\frac{\phi}{k}}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \quad (12.25)$$

Substituint convenientment en la fórmula de Colebrook i White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.8 + 2 \log(\text{Re} \cdot \sqrt{f}) \quad (12.26)$$

Aquesta es coneix com la primera fórmula de Kármán-Prandtl, que és únicament vàlida en el cas de règim turbulent llis.

- Un segon cas en el qual el nombre de Reynolds sigui prou gran per assegurar que el logaritme del segon membre s'anul·li:

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \left[\log \left(1 + 9.35 \cdot \frac{\frac{\phi}{k}}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \right] = \log(1) = 0 \quad (12.27)$$

de manera que queda:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 + 2 \cdot \log \frac{\phi}{k} \quad (12.28)$$

que és la segona fórmula de Kármán-Prandtl, vàlida únicament en el cas de règim turbulent rugós. Es pot apreciar que el coeficient de fricció és independent del nombre de Reynolds i depèn únicament de la rugositat relativa. En aquest cas, a més, l'equació és explícita i, per tant, fàcilment resoluble.

12.5 Àbac de Moody

12.5.1 Introducció

La relació entre el nombre de Reynolds i el coeficient de Darcy-Weisbach es pot representar gràficament amb l'àbac de Moody (figura 12.3). És un gràfic adimensional per tant, independent del sistema de coordenades emprat, que requereix conèixer les característiques geomètriques de la canonada (diàmetre i rugositat absoluta) i les característiques cinemàtiques del fluid (velocitat mitjana i viscositat cinemàtica).

Fins a valors de Re per sota de 2000 el règim és laminar i per a valors de Re una mica més grans, entre 2000 i 3500, el flux passa a ser inestable i, depenent de les condicions externes, es té règim laminar o turbulent. En aquest cas, la corba ve donada per l'equació (12.23).

Per a valors del nombre de Reynolds superiors a 3500, el règim passa a ser turbulent i es representa la solució de l'equació (12.24), la fórmula de Colebrook i White. Aquesta equació depèn de tres variables: el propi coeficient f , el nombre de Reynolds i la rugositat relativa; per tant, la seva representació gràfica en els eixos $Re-f$ és una família de corbes en funció de la rugositat relativa. Aquesta família de corbes mostra el comportament següent en funció del nombre de Reynolds:

- Per a una determinada rugositat relativa i per a valors creixents de Re , el coeficient de Darcy-Weisbach tendeix a decreixer gradualment fins a un valor constant. És a dir, a mesura que creix Re , la corba tendeix a posar-se horitzontal. El tram en què la corba decreix correspon a un règim turbulent intermedi, mentre que el tram en que es posa horitzontal, el coeficient de fricció f és independent de Re i caracteritza la zona de règim turbulent rugós.
- Així, a la zona de flux turbulent rugós, com és lògic, a menor rugositat relativa el coeficient de fricció f disminueix.
- Per sota d'una rugositat relativa de 10^{-6} , l'efecte del contorn passa a ser negligible i el coeficient f passa a dependre únicament de Re . És el cas de règim turbulent llis.

A la taula 12.2 es mostren alguns valors característics de la rugositat absoluta en funció del material de la canonada.

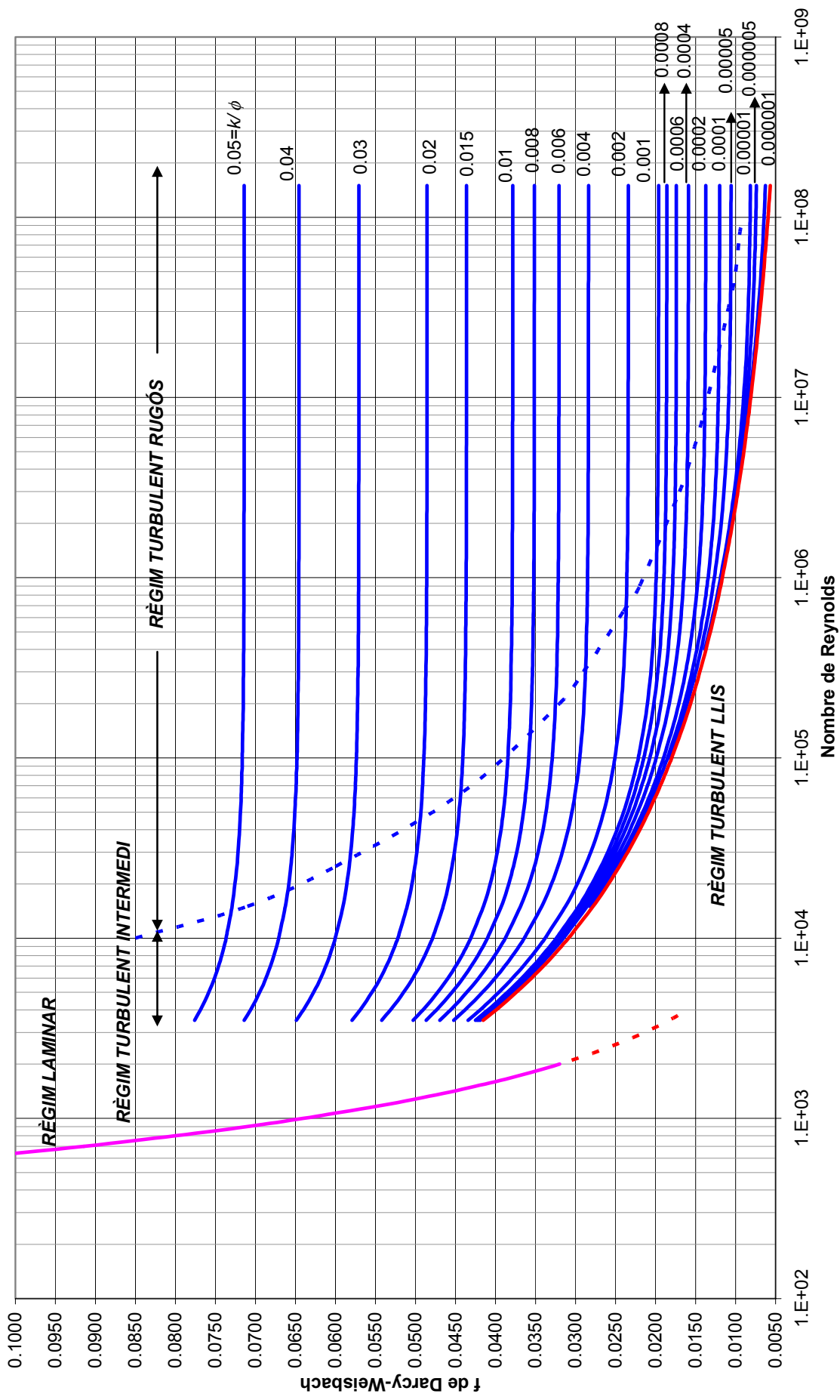


Figura 12.3 Àbac de Moody.

Taula 12.2 Valors de la rugositat absoluta k . (Font: Sotelo, 1995; Lencastre, 1998 i Bosser, 1990)

Material	Característiques	Rugositat absoluta k (mm)	
		Límits	valor normal
PVC	-	-	$1.5 \cdot 10^{-3}$ mm
Vidre	-	$d'1 \cdot 10^{-3}$ a $2 \cdot 10^{-3}$ mm	$1.5 \cdot 10^{-3}$ mm
Tubs de ferro	Ferro forjat rovellat	$d'1$ a 3 mm	-
	Ferro galvanitzat, ferro fos revestit	$d'0.06$ a 0.3 mm	0.15 mm
Tubs d'acer	qualitat normal, moderadament rovellat, poques incrustacions	-	0.4 mm
	Usat, amb moltes incrustacions de mida 1 a 3 mm	$d'1.4$ a 3.7 mm	3mm
	Soldat amb una o dues fileres transversals de perns, amb aigua amb turbidesa	$d'1$ a 2 mm	-
	Galvanitzat	-	0.01 mm
Formigó	Centrifugat, nou	-	0.16 mm
	Armat en tubs i galeries, amb acabat llis i anys de servei	$d'0.2$ a 0.3 mm	-
	Acabat llis	$d'0.015$ a 0.06 mm	0.025 mm
	Acabat normal	$d'1$ a 3 mm	-
	Acabat rugós	-	10 mm
	Allisat amb ciment	-	0.25 mm

12.5.2 Avaluació de les pèrdues de càrrega

La determinació del coeficient de fricció de Darcy-Weisbach permet calcular les pèrdues de càrrega per fregament entre dues seccions. Les dades necessàries són: la rugositat absoluta, el diàmetre, la longitud entre seccions, la velocitat mitjana del flux (o cabal circulant) i la viscositat cinemàtica del fluid.

El procediment per determinar les pèrdues de càrrega és:

- Es calculen la rugositat relativa k/ϕ i el nombre de Reynolds.
- Amb els dos valors s'entra a l'àbac de Moody i es determina el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach.
- Amb f a la fórmula (12.19) es calcula el pendent motriu, i amb la longitud entre les seccions que s'analitzen i amb (12.13) es pot determinar la pèrdua de càrrega per fregament amb el contorn.

Exercici

Determineu les pèrdues de càrrega entre dues seccions d'una canonada de 300 mm de diàmetre i 1 mm de rugositat absoluta, per la qual circula un cabal d'aigua de $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$. La distància entre ambdues seccions és de 100 m.

$$\text{Rugositat relativa: } \frac{k}{\phi} = \frac{1}{300} = 3.33 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Velocitat mitjana: } v = \frac{Q}{S} = \frac{0.250}{\pi \left(\frac{0.3}{2}\right)^2} = 3.537 \text{ m/s}$$

$$\text{Nombre de Reynolds: } Re = \frac{v \cdot \phi}{\nu} = \frac{3.537 \cdot 0.300}{10^{-6}} = 1061033$$

De l'àbac de Moody s'obté: $f = 0.027$

$$\text{Així amb (12.19) es determina el pendent motriu: } I = \frac{f \cdot v^2}{\phi \cdot 2g} = \frac{0.027 \cdot 3.537^2}{0.3 \cdot 2g} = 0.05739$$

I amb (12.13), les pèrdues de càrrega: $\Delta H_{12} = I \cdot \Delta L_{12} = 0.05739 \cdot 100 = 5.74 \text{ mca}$

12.5.3 Càlcul del funcionament hidràulic d'una canonada

Es tracta, en aquest cas, de determinar quin és el cabal que circula per la canonada, coneguts la rugositat absoluta, el diàmetre, la longitud entre seccions, la viscositat cinemàtica del fluid i les pèrdues d'energia per fregament que hi ha en la conducció.

En aquest cas, el càlcul ha de realitzar-se de manera iterativa, perquè el fet de no disposar del cabal fa que no es pugui calcular el nombre de Reynolds del flux, de manera que cal fer-ne una primera aproximació. Amb aquesta llavor, i amb la rugositat relativa, que sí que és coneguda, es pot determinar el coeficient de fricció corresponent amb l'àbac de Moody. Amb aquest i les equacions (12.13) i (12.19) es pot determinar quin és el cabal que correspon a aquesta primera aproximació. Ara, amb aquest cabal obtingut es pot comprovar si l'aproximació inicial del nombre de Reynolds havia estat correcta. En cas afirmatiu, el cabal circulant és aquest i, en cas negatiu, cal procedir a una nova iteració a partir del nou nombre de Reynolds calculat.

En general, és una bona llavor inicial imposar que el règim sigui turbulent rugós. D'aquesta manera, no cal "inventar" un valor numèric concret, gràcies al fet que en aquestes condicions el coeficient de fricció és independent del nombre de Reynolds, que depèn únicament de la rugositat relativa, que és coneguda. Així, en el cas que el Re que s'obtingui al final del procés correspongui efectivament a règim turbulent rugós, s'ha determinat el cabal que realment hi circula; en cas contrari, s'està en règim turbulent intermedi i cal procedir amb una nova iteració amb el Re obtingut. En general, la segona iteració és suficient per convergir amb aquest procediment de càlcul.

El procés es resumeix així:

- Es fa la hipòtesi que el flux és turbulent rugós.
- Amb aquesta suposició i la rugositat relativa de la canonada k/ϕ , es pot estimar el coeficient de fricció f .
- A partir de les expressions (12.13) i (12.19) es determina la velocitat mitjana del flux que les verifiqui.
- Aquesta velocitat permet calcular el nombre de Reynolds corresponent. Si aquest resulta en la zona de règim turbulent rugós, la hipòtesi inicial es verifica i la velocitat calculada és correcta. Si el règim, en canvi, no és turbulent rugós, aquest nou nombre de Reynolds permet repetir el procés des del punt 2.

Exercici

Determineu el cabal d'aigua que circula per una canonada de 300 mm de diàmetre i rugositat absoluta d'1mm entre dues seccions que es troben a una distància de 1000 m si entre ambdues seccions s'ha de dissipar una energia per fregament amb el contorn de 5 mca.

Amb la rugositat relativa $\frac{k}{\phi} = \frac{1}{300} = 3.33 \cdot 10^{-3}$ i la hipòtesi de partida de *règim turbulent rugós* el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach val: $f = 0.0269$.

Amb aquest valor i les equacions (12.13) i (12.19) es pot determinar la velocitat que respon a aquestes condicions:

$$\Delta H_{12} = I \cdot \Delta L_{12} = \frac{f}{\phi} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \Delta L_{12} \Rightarrow \frac{0.0269}{0.3} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot 1000 = 5 \text{ mca}$$

i la velocitat mitjana resulta $v = 1.045 \text{ m/s}$, que li correspon un nombre de Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{1.045 \cdot 0.3}{10^{-6}} = 313616$$

que es troba en la zona de *règim turbulent intermedi*. Per tant, cal procedir a una nova iteració a partir d'aquest $\text{Re} = 313616$. A aquest Re i la rugositat relativa de la canonada els correspon un coeficient de Darcy-Weisbach $f = 0.0273$, amb el qual es pot determinar:

$$\Delta H_{12} = I \cdot \Delta L_{12} \Rightarrow \frac{0.0273}{0.3} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot 1000 = 5 \text{ mca} \Rightarrow v = 1.038 \text{ m/s}$$

que li correspon un nombre de Reynolds: $\text{Re} = \frac{1.038 \cdot 0.3}{10^{-6}} = 311483$ que, amb la rugositat relativa esmentada, li correspon el mateix coeficient $f = 0.0273$ i, per tant, ja s'ha convergit i el cabal circulant serà:

$$\Rightarrow Q = v \cdot S = 1.038 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0.3}{2}\right)^2 \Rightarrow Q = 0.073 \text{ m}^3/\text{s}$$

12.5.4 Dimensionament d'una canonada

L'objectiu, en aquest cas, és determinar el diàmetre mínim necessari d'una canonada d'un material determinat, per transportar un cabal conegut d'un fluid al llarg d'una longitud determinada, amb una energia disponible per ser dissipada. Resumint, les dades necessàries per dur-ho a terme són: la rugositat absoluta del material (k) i la longitud entre les dues seccions de la canonada (L), l'energia disponible (ΔH), el cabal que s'ha de transportar (Q) entre ambdues seccions i la viscositat cinemàtica del fluid (ν) a transportar.

Com que se'n desconeix el diàmetre, igual que en el cas anterior no es coneix el Re i, per tant, cal procedir de manera iterativa, igual que abans. Ara s'itera directament sobre el diàmetre. De manera que, a partir d'un valor inicial del diàmetre (ϕ), i ja que és conegut el cabal, es pot determinar el nombre de Reynolds corresponent i, amb ell, i la rugositat del material, el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach associat. Així, es pot estimar l'energia necessària per transportar el cabal amb una canonada de diàmetre igual al considerat (ΔH_f). Aquest és el paràmetre de comparació. Si l'energia calculada (ΔH_f) coincideix amb la coneguda a priori (ΔH) el procés finalitza; en cas contrari, cal procedir amb una nova iteració.

Per a la nova iteració, cal considerar un nou diàmetre (ϕ_2) que corregeixi el diàmetre considerat inicialment. Es pren un diàmetre més gran o més petit depenent de si l'energia calculada (ΔH_1) és més gran o més petita que la donada per les condicions del projecte (ΔH):

- Si $\Delta H_1 > \Delta H$, cal considerar un $\phi_2 > \phi_1$, ja que un diàmetre més gran transporta el cabal Q amb una velocitat més petita, que provoca, per tant, unes pèrdues de càrrega ΔH_2 menors que les obtingudes en la primera iteració i permet apropar-se al valor demanat ΔH .
- Si $\Delta H_1 < \Delta H$, cal considerar un $\phi_2 < \phi_1$, ja que un diàmetre més petit transporta el cabal Q amb una velocitat més gran i, per tant, provoca pèrdues de càrrega ΔH_2 més grans que les de la primera iteració i permet apropar-se al valor demanat ΔH .

Tenint en compte les expressions ja esmentades (12.13) i (12.19) es pot escriure:

$$\Delta H = I \cdot L \Rightarrow \Delta H = \frac{f \cdot v^2}{\phi \cdot 2g} \cdot L \Rightarrow \Delta H = \frac{f}{2g \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \cdot \frac{Q^2}{\phi^5} \cdot L \quad (12.29)$$

El que es busca és que en la iteració següent (ΔH_{i+1}) l'energia que es dissipi coincideixi tant com sigui possible amb l'energia disponible donada (ΔH); per tant, es pot comparar amb el que s'hagi estimat en la iteració anterior:

$$\frac{\Delta H_{i+1}}{\Delta H_i} = \frac{\frac{f_{i+1}}{2g \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \cdot \frac{Q^2}{\phi_{i+1}^5} \cdot L}{\frac{f_i}{2g \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \cdot \frac{Q^2}{\phi_i^5} \cdot L} \Rightarrow \frac{\Delta H_{i+1}}{\Delta H_i} = \frac{f_{i+1} \cdot \phi_i^5}{f_i \cdot \phi_{i+1}^5} \quad (12.30)$$

Imposant que en la pròxima iteració les pèrdues de càrrega (ΔH_{i+1}) siguin les que es disposen de partida (ΔH), i fent la suposició que d'una iteració a l'altra els coeficients de fricció no varien gaire, es pot obtenir el següent algorisme d'iteració:

$$\frac{\Delta H}{\Delta H_i} \approx \frac{\phi_i^5}{\phi_{i+1}^5} \Rightarrow \phi_{i+1}^5 \approx \frac{\Delta H_i \cdot \phi_i^5}{\Delta H} \quad (12.31)$$

Cal notar que la solució d'aquest algorisme no és exacta, ja que en fer variar el diàmetre la rugositat relativa també varia i, per tant, els coeficients de fricció no donen exactament igual d'una iteració a l'altra. Això fa que la igualtat (12.31) calgui prendre-la com una expressió recurrent per fer una estimació per a la iteració següent, i mai com una igualtat exacta per al càlcul.

Exercici

Determineu el mínim diàmetre necessari que permeti transportar un cabal d'aigua de 0.100 m³/s amb una canonada de rugositat absoluta d'1 mm i longitud de 1000m, si es disposa d'una energia de 5 mca per fer-ho. Es considera que els diàmetres comercials van de 20 mm en 20 mm des del més petit de 100 mm.

1^a iteració

Es suposa un diàmetre per iniciar el procés $\phi_1 = 300$ mm. Aquest diàmetre implica una rugositat relativa $\frac{k}{\phi} = \frac{1}{300} = 3.33 \cdot 10^{-3}$ i una velocitat mitjana:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{0.100}{\pi \left(\frac{0.300}{2} \right)^2} \Rightarrow v = 1.415 \text{ m/s}$$

que dóna un nombre de Reynolds $Re = \frac{1.415 \cdot 0.3}{10^{-6}} = 424413$ i un coeficient de fricció $f=0.0272$.

Les pèrdues de càrrega associades al diàmetre inicial de 300 mm, són:

$$\Delta H_1 = \frac{0.0272}{0.300} \cdot \frac{1.415^2}{2g} \cdot 1000 \Rightarrow \Delta H_1 = 9.25 \text{ mca} > 5 \text{ mca} = \Delta H$$

És a dir, per transportar aigua a una distància de 1000 m, un cabal de $0.100 \text{ m}^3/\text{s}$ en una canonada de 300 mm i d'1 mm de rugositat absoluta, és necessària una energia de 9.25 mca, significativament més gran que la disponible de 5 mca. Per tant, cal fer-ho amb una canonada més gran. Usant l'algorisme (12.31), resulta:

$$\phi_2 \approx \phi_1^5 \cdot \sqrt[5]{\frac{\Delta H_1}{\Delta H}} \Rightarrow \phi_2 = 0.300 \cdot \sqrt[5]{\frac{9.25}{5}} \Rightarrow \phi_2 = 0.339 \text{ m}$$

2^a iteració

El diàmetre comercial més proper és el diàmetre $\phi_2 = 340$ mm. Aquest implica una rugositat relativa $\frac{k}{\phi} = \frac{1}{340} = 2.94 \cdot 10^{-3}$ i una velocitat mitjana més petita que en el cas de la primera iteració:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{0.100}{\pi \left(\frac{0.340}{2} \right)^2} \Rightarrow v = 1.101 \text{ m/s}$$

que dóna un nombre de Reynolds $Re = \frac{1.101 \cdot 0.340}{10^{-6}} = 374482$ i, per tant, un coeficient de fricció $f=0.0264$. Les pèrdues de càrrega associades al diàmetre inicial de 300 mm, són:

$$\Delta H_2 = \frac{0.0264}{0.340} \cdot \frac{1.101^2}{2g} \cdot 1000 \Rightarrow \Delta H_2 = 4.79 \text{ mca} < 5 \text{ mca} = \Delta H$$

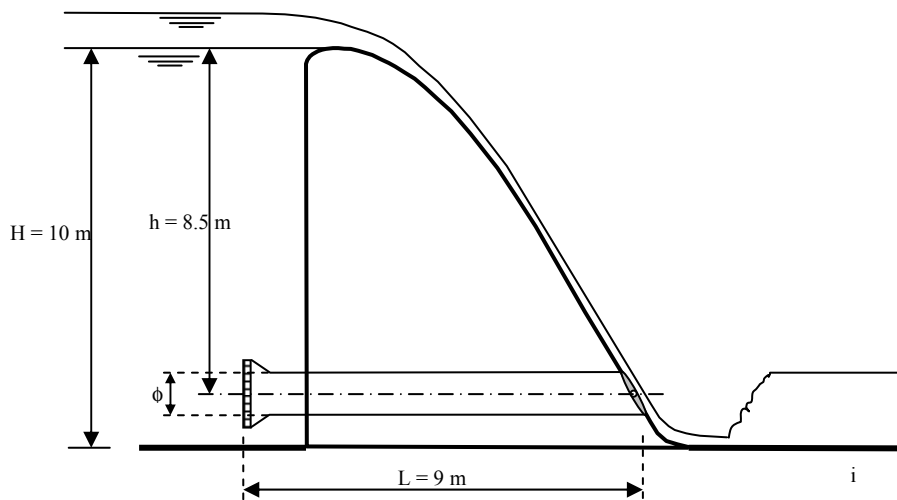
El diàmetre comercial immediatament més gran donaria unes pèrdues encara més petites, mentre que el diàmetre immediatament menor dóna unes pèrdues segurament excessives³⁴. Per tant el diàmetre mínim idoni per transportar $0.100 \text{ m}^3/\text{s}$ d'aigua a pressió, a una distància de 1000m amb una energia de 5mca amb un canonada de rugositat 1mm és un diàmetre de 340mm. Notar però que en aquestes condicions, realment es consumeixen 4.79mca i el que es disposa, en canvi, per les condicions del projecte són 5mca. És a dir, en realitat o bé es disposa d'algun mecanisme que permeti incrementar les pèrdues d'energia de 4.79mca a 5mca (per exemple, tancant una vàlvula) o bé la diferència entre els 4.79mca i els 5mca es gasta en fer passar un cabal més gran que els $0.100 \text{ m}^3/\text{s}$:

³⁴ $\phi=320 \text{ mm} \Rightarrow v=1.243 \text{ m/s} \Rightarrow Re=397887$, junt amb la rugositat $k/\phi=3.12 \cdot 10^{-3}$ condueix a un coeficient $f=0.0268$, i a unes pèrdues $\Delta H=6.59 \text{ mca} > 5 \text{ mca}$.

Exercici

Un assut de 10 m d'altura i ample $B = 25$ m disposa d'un desguàs de fons amb el qual es desitja poder evacuar, en el pitjor cas com a mínim $6 \text{ m}^3/\text{s}$. Consisteix en un conducte d'acer de longitud $L = 9$ m, de diàmetre ϕ i rugositat absoluta $\varepsilon = 0.6$ mm. El cabal en aquesta canonada es regula des del seu extrem aigües avall per una vàlvula de papallona que, completament oberta, introdueix una pèrdua de càrrega localitzada $\lambda = 0.01$. Al seu extrem aigües amunt s'ha col·locat una reixa per tal d'evitar l'entrada de sòlids d'una mida determinada que hi introdueix una pèrdua de càrrega local $\lambda = 0.07$. També cal tenir en compte que el disseny de l'embocadura del conducte fa que la pèrdua de càrrega local que s'hi espera és de $\lambda = 0.005$. Es demana:

- Determineu el diàmetre ϕ més escaient, si els diàmetres comercials van de 50 mm en 50 mm.
- Determineu el cabal màxim que pot circular pel desguàs de fons.



Dimensionament de la canonada del desguàs de fons:

$$8.5 = \frac{6^2}{\left(\frac{\pi}{4}\phi^2\right)^2 2g} + \left[\frac{f}{\phi} \cdot \frac{6^2}{\left(\frac{\pi}{4}\phi^2\right)^2} \cdot 9 + (0.01 + 0.07 + 0.005) \frac{6^2}{\left(\frac{\pi}{4}\phi^2\right)^2 2g} \right]$$

Energia de velocitat a la sortida del desguàs de fons

Pèrdues d'energia repartides

Pèrdues d'energia localitzades

Es resol fent diverses iteracions, suposant un diàmetre comercial de 50 mm, en 50 mm, fins a ajustar que el segon membre de l'equació s'apropi a l'altura 8.5 mca.

Iteració	ϕ (m)	v (m/s)	Re	f	ΔH (mca)	Comentari
1a	0.8	11.937	$9.549 \cdot 10^6$	0.01835	9.379	>8.5 Consumeix més energia que la disponible => augmentar ϕ
2a	0.9	9.431	$8.488 \cdot 10^6$	0.01787	5.729	<8.5 Consumeix menys energia que la disponible => disminuir ϕ
3a	0.85	10.574	$8.988 \cdot 10^6$	0.01810	7.274	<8.5 Consumeix menys energia que la disponible però és el diàmetre comercial escaient => circularan més de $6 \text{ m}^3/\text{s}$

Obtenció del cabal real que hi circula, en el cas de la màxima càrrega disponible:

$$8.5 = \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4} 0.85^2\right)^2 2g} + \left[\frac{f}{0.85} \cdot \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4} 0.85^2\right)^2 2g} \cdot 9 + (0.01 + 0.07 + 0.005) \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4} 0.85^2\right)^2 2g} \right]$$

on $\frac{\varepsilon}{\phi} = 0.000706$ i, si per $6 \text{ m}^3/\text{s}$ el règim era turbulent rugós, ara ho és amb més motiu. Per tant, resulta $f = 0.018$.

En aquestes condicions, de l'anterior equació resulta $Q = 6.48 \text{ m}^3/\text{s}$.

12.6 Seccions no circulars

S'ha definit el concepte de radi hidràulic (R_h) com el quocient entre l'àrea de la secció transversal entre el perímetre mullat pel fluid. Aquest concepte permet estendre tot el que s'ha vist fins ara per a canonades de secció circular, a conduccions amb qualsevol altre tipus de geometria.

$$R_h = \frac{S}{P_{mullat}} \quad (12.32)$$

En el cas d'una secció circular de diàmetre ϕ , val:

$$R_h = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^2}{\pi \cdot \phi} \Rightarrow R_h = \frac{\phi}{4} \quad (12.33)$$

D'aquesta manera, si la conducció no és de secció circular, es podran fer servir totes les expressions analitzades fins ara, substituint allà on aparegui el diàmetre per quatre vegades el radi hidràulic de la secció ($4 \cdot R_h$). S'entén que aquest canvi és una aproximació, que és tant més precisa quant més s'assembla la secció a una de circular.

12.7 Altres fórmules empíriques

Són, en general, fórmules de tipus exponencial, per contraposició a les fórmules de tipus logarítmic, com la de Colebrook i White, vistes fins ara.

$$v = a \cdot \phi^x \cdot I^y \quad (12.34)$$

Són expressions purament empíriques, molt senzilles d'ús, que en general estan ajustades per condicions de flux molt concretes que cal respectar en el càlcul. A més, tal com es mostra a (12.34), són expressions no dimensionals amb uns paràmetres d'ajust que depenen del sistema d'unitats escollit i, per tant, cal ser doblement curosos.

12.7.1 Règim turbulent intermedi

En aquest cas, és vàlida la fórmula de Hazen-Williams:

$$v = 0.355 \cdot C_H \cdot \phi^{0.63} \cdot I^{0.54} \quad (12.35)$$

on v és la velocitat mitjana del flux, ϕ el diàmetre de la conducció, I el pendent motriu i C_H un coeficient que depèn del material de la canonada i que adopta els valors que es mostren a la taula següent:

Taula 12.3 Valors del coeficient C_H de Hazen-Williams en funció del material de la canonada.

Acer corrugat	60
Acer galvanitzat	125
Ferro fos net	130
Plàstic	150
Asbest-ciment	135
Coure i llautó	130
Conductes amb acabat interior de ciment polit	100
Formigó amb acabat llis	130
Formigó acabat normal	120

12.7.2 Règim turbulent rugós

En aquesta categoria de flux és vàlida la fórmula de Manning que ja ha estat discutida en el flux en làmina lliure.

$$I = \frac{n^2 \cdot v^2}{R_h^{4/3}} \quad (12.36)$$

Per als materials comunament utilitzats en canonades, el coeficient de rugositat de Manning adopta els valors que es mostren a la taula 12.4:

Taula 12.4 Valors del coeficient n de Manning en funció del material de la canonada.

Acer galvanitzat	0.014
Ferro fos net	0.013
Conductes amb acabat interior de ciment polit	0.012
Formigó amb acabat llis	0.013
Formigó acabat rugós	0.015

12.7.3 Règim turbulent llis

En aquest cas, són expressions que permeten obtenir directament el coeficient de Darcy-Weisbach coneixent el nombre de Reynolds. Les més utilitzades són:

Fórmula de Blasius

És una fórmula aplicable per a valors de $4000 < Re < 10^5$, en canonades d'alumini, llautó, coure, plom, plàstic, vidre i asbest-ciment, que és un rang prou ampli de materials i, per tant, una expressió prou generalitzable als tubs llisos.

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \text{ per a valors de } 4000 < Re < 10^5 \quad (12.37)$$

Fórmula de Kozeny

Vàlida per a canonades d'asbest-ciment, amb ombres de Reynolds $Re > 4000$.

$$f = \frac{2g}{(7.78 \cdot \log(Re) - 5.95)^2} \text{ per a valors de } Re > 4000 \quad (12.38)$$

Fórmula de Richter

També ajustada per a valors de $Re > 4000$ en el cas de canonades d'hule.

$$f = 0.01113 + 0.917 / Re^{0.41} \text{ per a valors de } Re > 4000 \quad (12.39)$$

12.7.4 Discussió

A la figura 12.4 es comparen les fórmules esmentades i es mostra el seu comportament tant dins com fora del seu interval, de ombres de Reynolds, de validesa. Es poden fer els comentaris següents:

- La fórmula de Manning, com ja s'ha dit, només és vàlida en el cas de règim turbulent rugós. Si s'analitza l'equivalència entre el coeficient de fricció de Manning (n) i el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach (f), es comprova que s'estableix una relació que depèn únicament del diàmetre i de la gravetat i, per tant, fixats el diàmetre i el coeficient de Manning, sigui quin sigui el cabal circulant, és a dir, sigui quin sigui el nombre de Reynolds, el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach es manté constant. D'altra banda, a igualtat de diàmetre de la conducció, coeficients de Manning més grans estan associats amb rugositats absolutes també més grans. Per contra, a igualtat de coeficient de Manning, a diàmetres de la conducció més grans els corresponen rugositats relatives més petites i, per tant, també rugositats absolutes més petites, tot i que no proporcionalment més petites.
- Pel que fa a la fórmula de Hazen-Williams, com es podia esperar es mou dins la zona de règim turbulent intermedi. Per a un determinat cabal i diàmetre (nombre de Reynolds constant), materials de menor rugositat estan associats amb coeficients C_H més grans. D'altra banda, a igualtat de coeficient C_H , a diàmetres més petits els corresponen rugositats relatives més grans essent tant més grans quant menor és el nombre de Reynolds.
- La fórmula de Kotzeny mostra un comportament molt similar a la primera fórmula de Kármán-Prandtl (12.26) amb una lleugera tendència a donar valors una mica més petits a mesura que el coeficient de Reynolds es fa més gran.
- Es pot verificar que la fórmula de Blasius mostra un comportament totalment equivalent que la primera fórmula de Kármán-Prandtl (12.26) per a valors de $Re < 10^5$. Per damunt d'aquest límit es separa significativament i, per tant, condueix a estimacions incorrectes.
- La fórmula de Richter és potser la que pitjor comportament mostra en la zona de règim turbulent llis. Per tant, cal ser molt curosos d'usar aquesta expressió.

12.8 Envelliment d'una canonada

Amb el temps, una canonada pot canviar les seves característiques a causa, fonamentalment de les propietats fisicoquímiques del fluid que transporta. El canvi que més importa pel que fa al disseny és aquell que provoca un augment en la rugositat absoluta. La metodologia utilitzada més comunament per a la seva estimació és la fórmula de Genijew, per a la seva simplicitat.

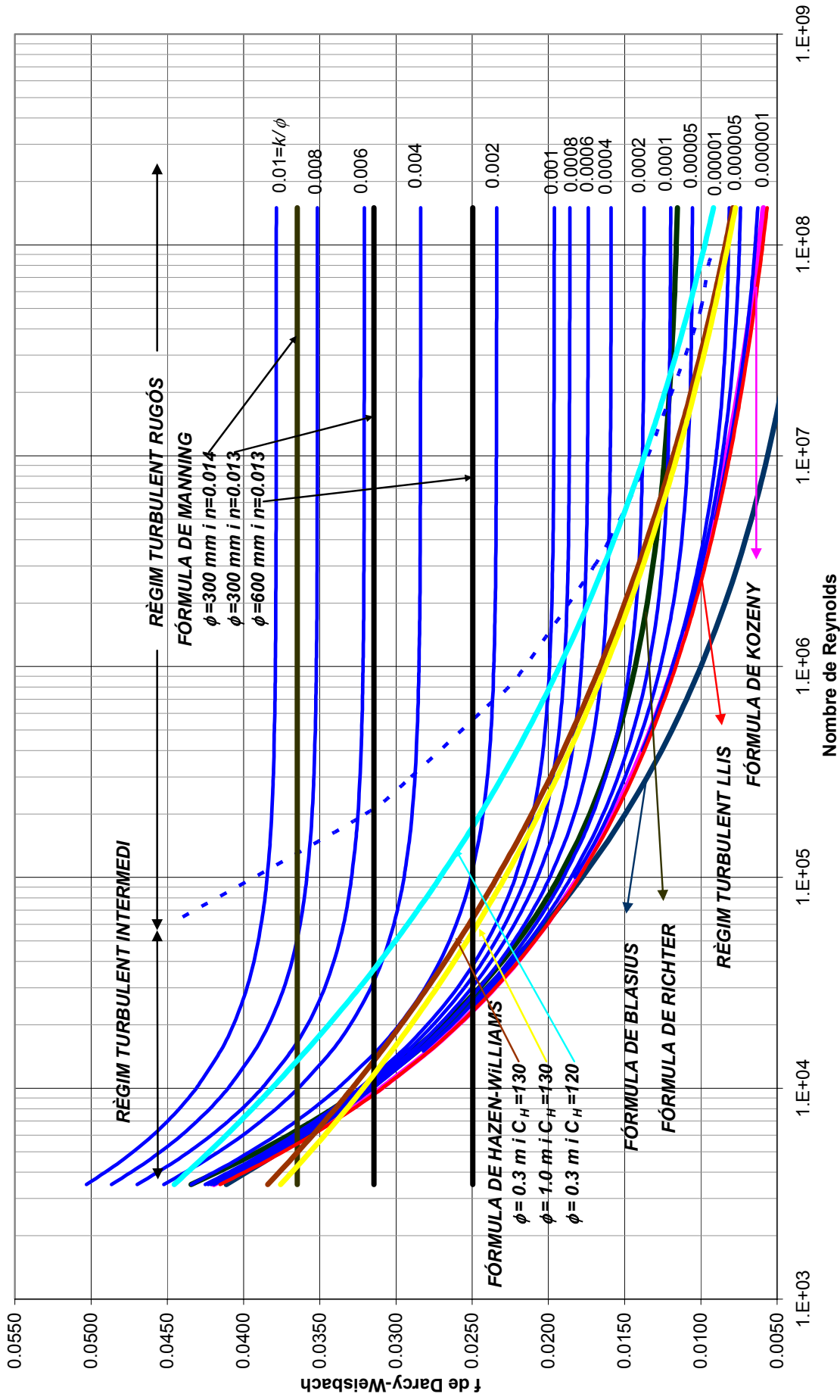


Figura 12.4 Comparació de les fórmules empíriques alternatives a la formulació logarítmica de l'abac de Moody.

$$k = \beta \cdot t + k_0 \quad (12.40)$$

on

- t és el temps de servei de la canonada, en anys.
- k_0 és la rugositat inicial de la canonada, en mm.
- β índex de Genijew, en mm/any.

L'índex β es determina de manera experimental i la taula següent en pot ser un resum vàlid per a canonades de foneria.

Aigües poc corrosives	0.025
Aigües fins a 3 mg/l de matèria orgànica	0.07
Aigües corrosives sense Cl^- ni $\text{SO}_4^{=}$	0.20
Aigües corrosives amb Cl^- i $\text{SO}_4^{=}$	0.51
Aigües carbonatades	de 0.6 a 1

Els valors de la taula 12.5 també són aplicables en el cas de canonades de formigó o amb revestiments de quitrà en les quals es vulgui estudiar l'evolució de la rugositat en funció del temps, segons la influència dels dipòsits de llot i el seu grau de formació (els valors de β es correspondrien, respectivament, a formacions lleugeres, moderades, apreciables i severes). Pèrdues d'energia localitzades en una canonada

12.8.1 Introducció

En una conducció a pressió, a més de les pèrdues de càrrega repartides per fregament amb el contorn, cal considerar les pèrdues d'energia que es produeixen en singularitats del traçat del conducte. Aquestes singularitats poden ser des de canvis de direcció de la canonada, que en l'argot es coneixen com "colzes", unions o derivacions de dues conduccions i accessoris o aparells per regular el cabal o actuar sobre el flux, com són les vàlvules.

Cal tenir en compte que les pèrdues locals són, en general, de menys magnitud que les contínues en conduccions de prou longitud. És a dir, en canonades de longitud de l'ordre d'algun quilòmetre, les pèrdues de càrrega localitzades són negligibles per comparació de les repartides. En canvi, en conduccions més curtes (per exemple, menys d'1 km) les localitzades poden ser fins i tot més grans que les contínues.

En general es poden calcular usant:

$$\Delta H = \lambda \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (12.41)$$

on λ és coneix com el coeficient de pèrdues de càrrega localitzades. Existeixen alguns casos en els quals es pot obtenir una certa estimació del coeficient λ .

12.8.2 Eixamplament sobtat de secció. Fórmula de Borda

El flux que es troba amb una discontinuïtat sobtada com la que s'esquematitza a la figura 12.5 experimenta unes pèrdues de càrrega provocades per la pròpia geometria del contorn, que es poden estimar de manera aproximada.

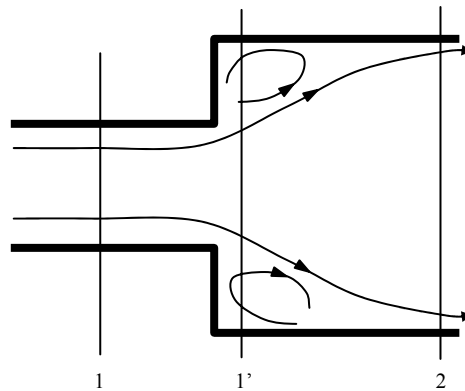


Figura 12.5 Esquema d'un eixamplament sobtat de secció.

L'energia que es dissipa de manera local es perd en la formació del remolí que es crea just en el canvi de secció. En aquesta zona, el flux que ve de la canonada de diàmetre menor (aigües amunt) a causa de la seva pròpia inèrcia no es pot adaptar de manera igual de sobtada al nou diàmetre, de manera que, de forma gradual, es va apropant al nou contorn. Aquest fenomen de separació del contorn du associada l'aparició, en l'espai que queda lliure, d'una massa d'aigua que, per efecte del flux que hi passa fregant, es troba rotant permanentment (remolí). L'energia que necessita aquest remolí per mantenir el seu gir prové del flux principal i correspon precisament a l'energia que es dissipa localment en aquestes expansions del diàmetre.

Siguin 1 la secció immediatament aigües amunt de l'expansió, 1' la secció immediatament avall i la 2 en la conducció de diàmetre més gran, on el flux ja s'ha expandit plenament. La secció 1' manté les condicions de velocitat i pressió de la secció 1, però amb la secció de 2. Aquesta "trampa" permet simplificar el desenvolupament algebraic per estimar les pèrdues locals. Així, plantejant l'equació de momentum entre 1' i 2 queda:

$$P_1 \cdot A_2 - P_2 \cdot A_2 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2 \cdot (v_2 - v_1) \quad (12.42)$$

Reordenant resulta:

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{v_2}{g} \cdot (v_1 - v_2) \quad (12.43)$$

En aquest punt es pot plantejar l'equació de conservació de l'energia entre 1 i 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_L \quad (12.44)$$

Aïllant-hi el terme de pèrdues locals queda:

$$\Delta H_L = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - \frac{P_2 - P_1}{\gamma} \quad (12.45)$$

Substituint-hi l'expressió (12.43) es pot escriure:

$$\Delta H_L = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2}{g} \cdot (v_1 - v_2) \quad (12.46)$$

expressió que es pot simplificar:

$$\Delta H_L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad (12.47)$$

D'altra banda, l'equació de continuïtat es pot escriure:

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad (12.48)$$

I en resulta:

$$\Delta H_L = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (12.49)$$

Per tant, el coeficient de pèrdua de càrrega local val

$$\lambda = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (12.50)$$

Aquesta expressió es coneix com la fórmula de Borda.

a Cas particular. Entrada d'una canonada en un dipòsit de grans dimensions

El cas d'una canonada que s'incorpora en un dipòsit de grans dimensions es pot analitzar a partir de la fórmula de Borda. En aquest cas, la relació d'àrees A_1/A_2 tendeix a zero pel fet que la secció transversal A_2 és molt més gran que la de la canonada A_1 , de manera que de l'expressió anterior (12.50) resulta $\lambda=1$.

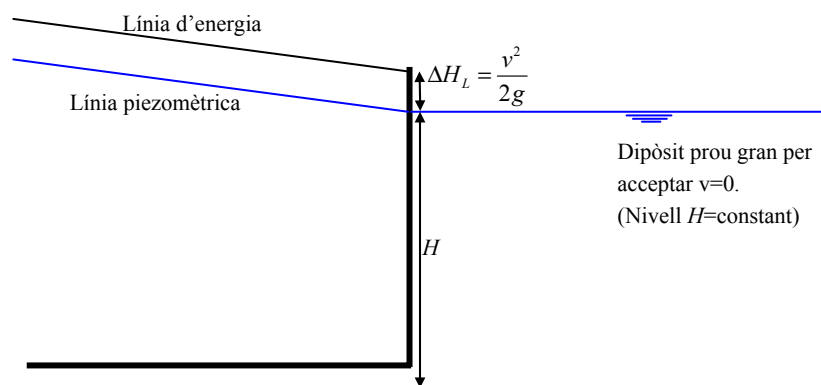


Figura 12.6 Esquema d'una canonada que entra en un dipòsit de grans dimensions.

És important adonar-se que un coeficient de pèrdua de càrrega igual a la unitat ($\lambda=1$) implica que en aquella secció l'energia que es perd és exactament igual a l'energia de velocitat del flux. Aquest fet és totalment coherent amb el fenomen de frenat del flux que es dona a l'entrada de la canonada al dipòsit, on el flux ha de passar de la velocitat mitjana v dins la canonada, a aturar-se completament ($v=0$).

Lògicament, el flux s'atura si el dipòsit és prou gran per assegurar que el seu nivell H es manté constant amb el temps, tot i l'entrada de cabal des de la canonada.

Resumint, aquest resultat que s'ha obtingut analíticament de la fórmula de Borda és totalment coherent amb un procés físic de frenat del flux, que es dona en qualsevol incorporació de qualsevol canonada en un dipòsit prou gran.

12.8.3 Contraccions sobtades

En aquest cas l'esquema hidràulic del flux que s'hi dona és sensiblement diferent al cas anterior. Ara, immediatament aigües amunt del canvi de secció (secció 1 de la figura 12.7) la pròpia pressió del flux que arriba, contra la paret vertical del contorn, evita la formació de remolins. És una zona on les partícules de fluid s'aturen i s'hi pot establir una recirculació molt lleugera, tot i que sense la intensitat suficient perquè sigui la responsable de la dissipació local d'energia.

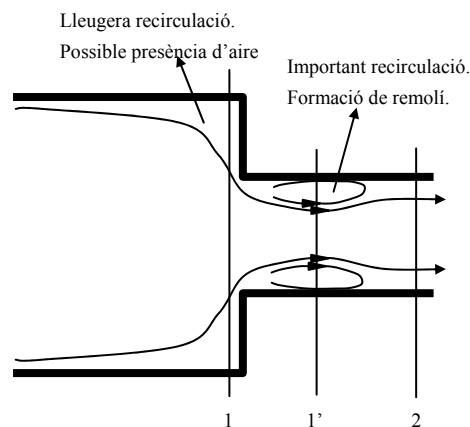


Figura 12.7 Esquema d'un eixaplament sobtat de secció.

Per poder passar a través de la contracció, les partícules de fluid han de mostrar una component en la direcció transversal del moviment. Un cop ja en la conducció de diàmetre més petit, la seva inèrcia fa que el flux continuï contraient-se fins a la secció 1', on la pròpia concentració del flux provoca que comenci a expandir-se i acaba ocupant tota la canonada en 2. Aquest fenomen de separació del contorn du novament associada la formació d'un remolí que necessita energia per girar. Aquesta energia prové del flux principal i és la que es produeix localment en aquests canvis de secció. És a dir, en última instància, les pèrdues d'energia que s'hi produeixen localment són degudes, realment, a una expansió i s'utilitza la fórmula de Borda (12.50) per avaluar-les.

Experimentalment, s'ha comprovat que la relació entre les seccions 1' i 2 que ocupa el flux principal és:

$$A_1' \approx 0.6 \cdot A_2 \quad (12.51)$$

Per tant, resulta:

$$\Delta H_L \approx \frac{\left(\frac{v_2}{0.6}\right)^2}{2g} \cdot \left(1 - \frac{0.6 \cdot A_2}{A_2}\right)^2 \Rightarrow \Delta H_L \approx 0.44 \cdot \frac{v_2^2}{2g} \quad (12.52)$$

a Cas particular. Entrada en una canonada des d'un dipòsit de grans dimensions

El cas de la incorporació del flux en una canonada que surt d'un dipòsit de grans dimensions provoca unes pèrdues de càrrega localitzades en la incorporació, que responen bàsicament al seu disseny. Val a dir que la diferència essencial amb el cas de l'entrada de la canonada en un dipòsit és que, en aquest cas, la pèrdua d'energia responia a un fenomen físic de frenat del flux, mentre que el cas d'incorporació a la conducció es funció del disseny hidràulic. Un bon disseny d'aquesta incorporació (per exemple, absència d'arestes vives en la incorporació, canonada que té una determinada longitud dins el dipòsit, etc.) pot ajudar a fer negligibles les pèrdues locals.

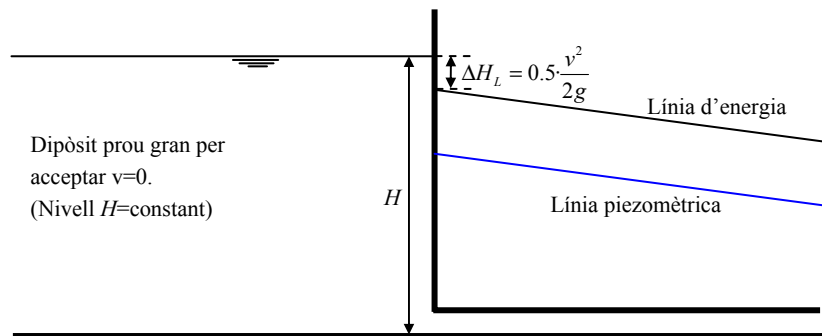


Figura 12.8 Esquema d'una canonada entrant en un dipòsit de grans dimensions.

En dependre bàsicament de la geometria de la incorporació, el coeficient de pèrdues locals és eminentment empíric. En el cas més desfavorable (per exemple, incorporació amb arestes vives, amb una canonada que s'inicia en el propi contorn del dipòsit) es determina un valor de $\lambda=0.5$.

12.9 Diàmetre òptim d'una canonada

Fins a aquest moment s'ha parlat de canonades obviant el concepte econòmic. De tota manera, en el disseny de qualsevol instal·lació s'entén que aquest és un aspecte important per tenir en compte.

Un disseny amb una canonada de diàmetre gran té un cost també gran, tot i que per a un mateix cabal les velocitats són inferiors i, per tant, les despeses de funcionament (energia perduda per fregament) també són menors. Per contra, una canonada de diàmetre menor té un cost més baix però, en canvi, les velocitats al seu interior són més grans per un mateix cabal i, per tant, l'energia dissipada per fregament també és més gran.

El cost material de la canonada es paga habitualment en pes i per tant, és funció del volum de material emprat, és a dir, funció del diàmetre al quadrat de la conducció, de manera que:

$$C_1 = \alpha \cdot \phi^2 \quad (12.53)$$

D'altra banda, l'energia que es dissipa per fregament també té un cost (per exemple, en centrals hidroelèctriques seria energia que no es podria transformar en electricitat) que, per a un cabal donat, es també funció del diàmetre, en aquest cas elevat a la cinquena potència:

$$\Delta H = \frac{f \cdot v^2}{\phi \cdot 2g} \cdot L = \frac{Q^2}{\phi \cdot \pi^2 \cdot \frac{\phi^4}{16} \cdot 2g} \cdot f \cdot L \quad (12.54)$$

I aquestes pèrdues tenen, òbviament un cost:

$$C_2 = \beta' \cdot \Delta H = \frac{\beta}{\phi^5} \quad (12.55)$$

De manera que el cost total és:

$$C = C_1 + C_2 = \alpha \cdot \phi^2 + \frac{\beta}{\phi^5} \quad (12.56)$$

Aquesta funció es comprova que té un mínim, com es mostra a la figura 12.9.

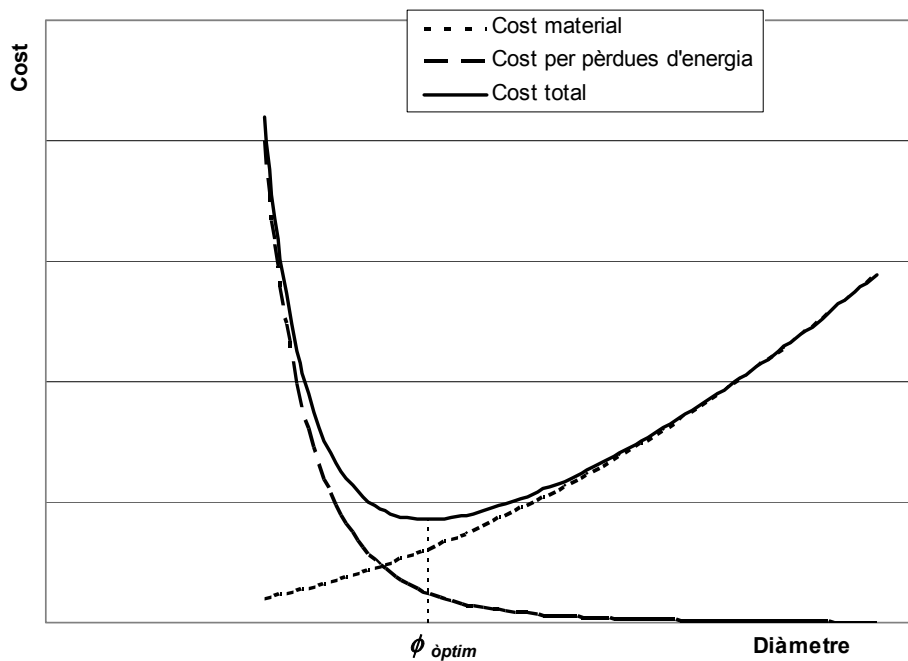


Figura 12.9 Optimització del cost d'una canonada en funció del diàmetre.

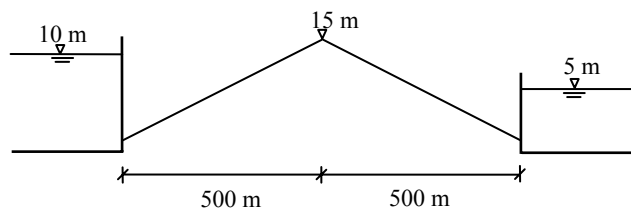
12.10 Exercicis proposats

- Discutiu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:
 - Una canonada de secció circular de 300 mm de radi, funcionant a pressió, té un radi hidràulic de 0.075 m.
 - En una canonada, una energia de pressió per unitat de pes de 30 mca equival a una pressió de 294300 Pa que equival, per la seva banda, a 3kp/cm².
 - Dues canonades del mateix material (mateixa rugositat absoluta) tenen el mateix coeficient de fricció de Darcy-Weisbach, independentment del diàmetre.
 - Dues canonades amb el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach són del mateix material (mateixa rugositat absoluta), independentment del diàmetre.
 - Un coeficient de fricció de Darcy-Weisbach $f = 0.09$ mai no pot correspondre a una rugositat relativa de $1 \cdot 10^{-5}$.

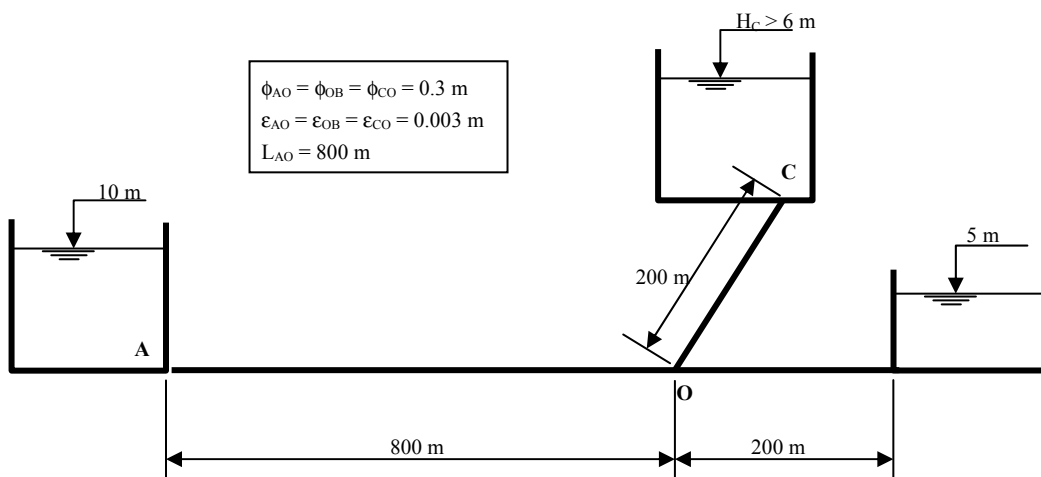
- El règim turbulent intermedi es caracteritza per uns coeficients de fricció de Darcy-Weisbach que depenen de la rugositat relativa i del nombre de Reynolds.
- El règim turbulent rugós es caracteritza per uns coeficients de fricció que depenen només del nombre de Reynolds.
- Quan s'analitza un sistema a pressió a través del trinomi de Bernoulli, el terme d'energia de velocitat per unitat de pes ($v^2/2g$) és irrellevant enfront del terme d'energia de pressió per unitat de pes (p/γ).
- La fórmula de Colebrook i White només és vàlida en règim turbulent intermedi.
- En dues canonades a pressió, una de diàmetre ϕ i una altra $2\cdot\phi$, per al mateix cabal, l'energia de velocitat val, respectivament, $v^2/2g$ i $4\cdot v^2/2g$.
- Si en una determinada instal·lació a pressió, per a un cabal Q les pèrdues d'energia repartides valen $I\cdot L$, per a un cabal $2Q$ valdran $4\cdot I\cdot L$, només si el règim és turbulent rugós.

Les quatre qüestions següents es refereixen a la conducció d'aigua de la figura. Negligint les pèrdues de càrrega localitzades i el terme cinètic ($v^2/2g$) en determinar les pressions, un cop iniciat el moviment es compleix:

- El pendent motriu és $I = 0.05$.
- El pendent motriu depèn del diàmetre de la canonada.
- En el punt alt, l'altura d'energia de pressió és $p/\gamma = -7.5$ m.
- En el punt alt, no hi ha cavitació si es compleix $p_v = 0.2$ kp/cm², essent p_v la pressió de vapor (absoluta) a la temperatura de transport.



- Determineu la relació entre el coeficient de fricció de Manning (n) i el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach (f). Discutir la dependència del coeficient de Manning amb el nombre de Reynolds i amb la rugositat relativa.

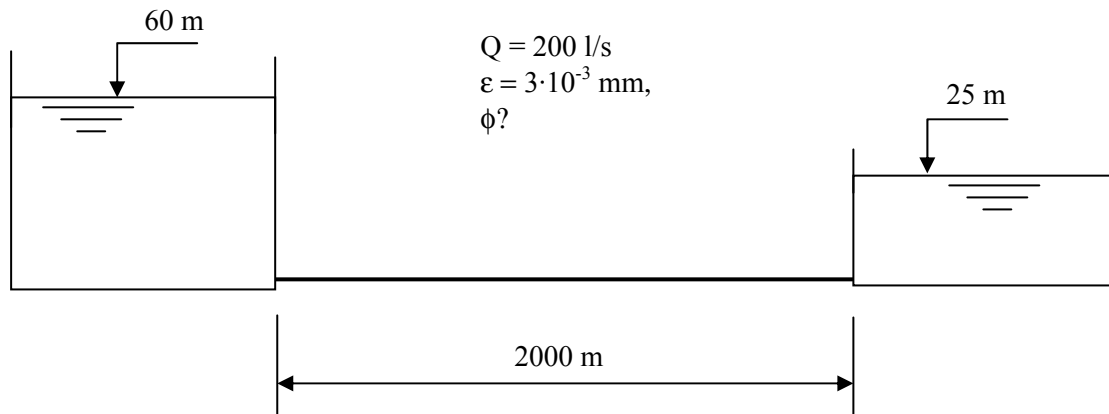


3. L'esquema anterior representa un sistema format per tres dipòsits (A, B i C), de manera que les canonades que surten de cadascun conflueixen en el punt O. Les condicions de treball d'aquests dipòsits permeten suposar que els nivells d'aigua a A i B són constants i iguals, respectivament, a 10 m i 5 m, mentre que a C aquest nivell pot variar però sempre per damunt de 6 m.

Si es vol assegurar que del dipòsit A sempre surti cabal cap a B i que al dipòsit B hi entri un cabal superior o igual a 100 l/s, determineu els valors $d'H_B$ que ho fan possible. Es poden suposar negligibles totes les pèrdues de càrrega localitzades.

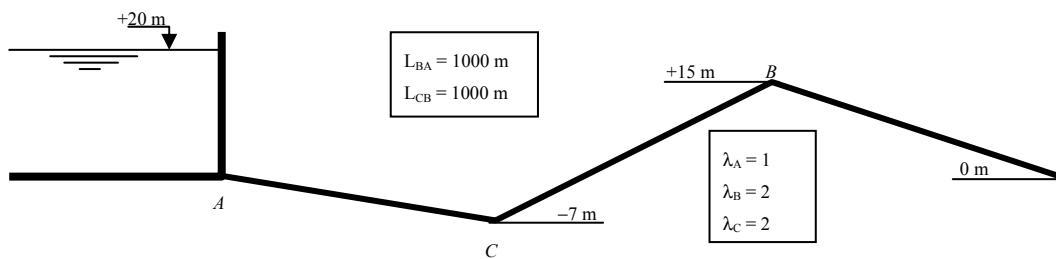
4. A la instal·lació de la figura, determineu el diàmetre que permeti transportar, pel cap baix, un cabal de 200 l/s entre tots dos dipòsits, si els diàmetres comercials van de 50 mm en 50 mm.

Quin és el cabal que realment hi està circulant? Es poden negligir totes les pèrdues de càrrega localitzada.



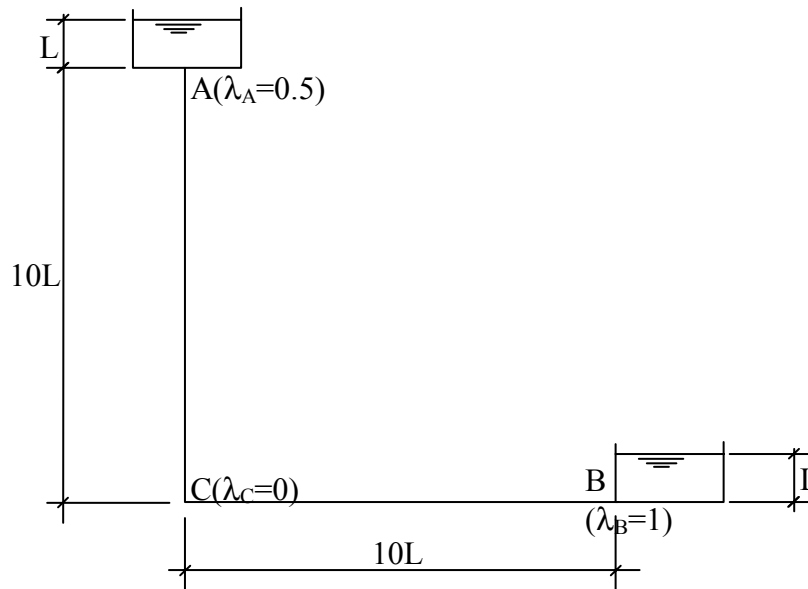
5. La instal·lació de la figura consisteix en una canonada de diàmetre $\phi = 250 \text{ mm}$ i rugositat absoluta $\varepsilon = 2.5 \text{ mm}$ en el moment de la seva col·locació. La conducció surt d'un dipòsit que pot presentar aigua com a màxim a la cota +20 m i desguassa a la secció A (cota 0 m) a l'atmosfera. Aquesta conducció està dissenyada per transportar aigua corrosiva sense concentracions importants de $[\text{Cl}^-]$ ni $[\text{SO}_4^{2-}]$ (constant de Genijew $\beta = 0.25$). Si el traçat de la conducció passa pels punts B i C, situats respectivament a +15 m i -7 m, i les pèrdues de càrrega localitzades són les que s'indiquen a la figura, es demana:

- Determineu el màxim cabal Q pel qual es va dissenyar la instal·lació.
- Determineu la vida útil de la conducció si no poden permetre's cabals inferiors a 40 l/s ($Q > 40 \text{ l/s}$)
- Analitzeu la sensibilitat de la pressió a B a l'envelliment de la canonada.
- Quina és la mínima cota d'aigua que es pot permetre en el dipòsit al llarg de tota la vida útil de la conducció per evitar problemes de cavitació a la secció B.



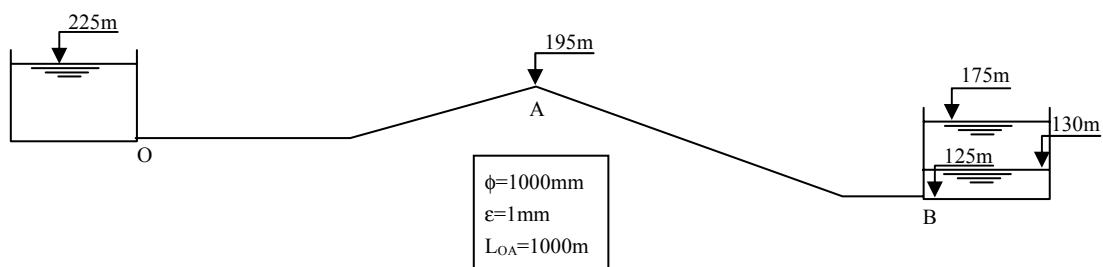
6. A partir de les dades de la figura, es demana:

- Llei de pressions a la canonada per $v^2/2g = 0.5 L$.
- Valor de v perquè s'hi produeixin pressions negatives en algun punt de la canonada.
- Per a $P_{\min}/\gamma = -L$ i $P_{\max}/\gamma = 15L$, dibuixeu la línia de pressió corresponent a la bomba de més potència que es pugui situar a A, B i C. Indiqueu quines donen un cabal més gran i més petit. (Considereu $v^2/2g = 0.5 L$)



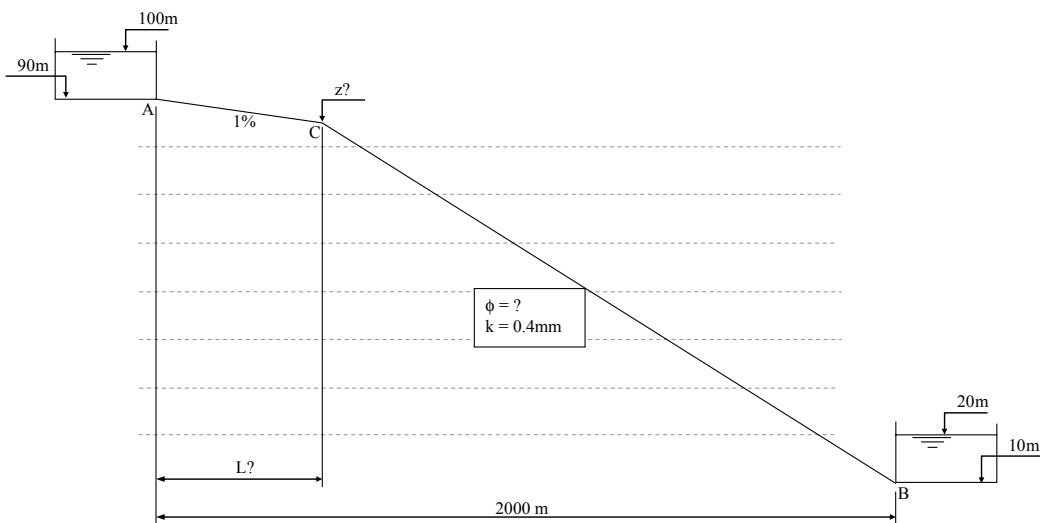
7. En la instal·lació que es mostra a la figura, determineu l'altura mínima que hi ha d'haver en el dipòsit de l'extrem aigües avall per assegurar que l'aigua pugui superar el punt elevat A. Considereu que en el dipòsit B l'altura d'aigua pot variar entre la cota 175 m i la 130 m.

Es poden negligir totes les pèrdues de càrrega localitzades llevat de les d'entrada al dipòsit B ($\lambda_B = 1$).



8. Es pretén connectar els dos dipòsits de la figura des del punt A fins al B, essent la distància horitzontal entre ambdós punts de 2000 m i les cotes les indicades a la figura amb una canonada de diàmetre ϕ i rugositat absoluta 0.4 mm.

A) Per condicionaments constructius, el tram de canonada que surt del punt A com a màxim pot presentar un pendent de l'1%. Tenint això en compte i sabent que la pressió mínima que es pot acceptar en la instal·lació és de -7 mca, determineu gràficament la màxima cota z a la qual pot trobar-se el punt de canvi de pendent i la longitud real de canonada ACB.



B) Determineu el diàmetre de canonada necessari per garantir, en el punt B, pel cap baix 200 l/s, tenint en compte que els diàmetres comercials van de 25 mm en 25 mm.

Es poden suposar negligibles totes les pèrdues de càrrega localitzades.

13 Instal·lacions de bombament

13.1 Introducció

Una bomba hidràulica és una màquina capaç d'eleva la càrrega hidràulica (trinomi de Bernoulli) d'un fluid en una conducció a pressió. Ho fa absorbint l'energia mecànica que prové d'un motor, normalment elèctric. Això permet que el fluid pugui ser transportat d'un punt a un altre situats en un mateix nivell o a diferents nivells i/o a diferents velocitats.

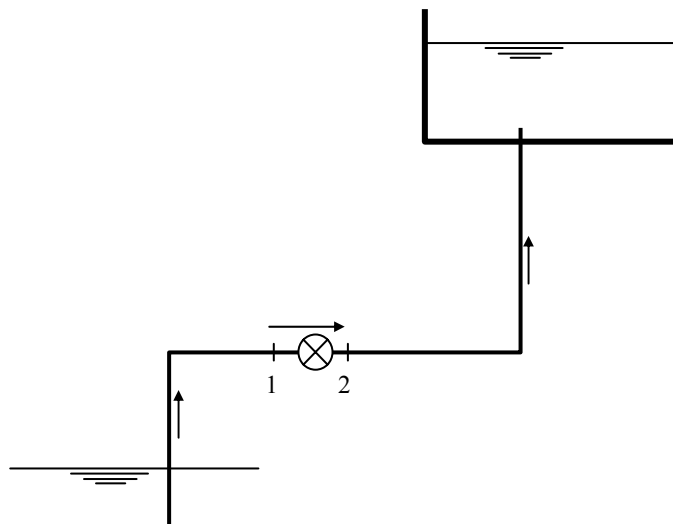


Figura 13.1 Esquema típic d'una impulsió des d'un dipòsit inferior fins a un de superior.

Entre l'entrada de la bomba (1) i la seva sortida (2) existeix una diferència de càrrega:

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_1 = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) \quad (13.1)$$

Considerant que:

- Les dimensions de les bombes solen permetre acceptar que $z_1 \approx z_2$.
- El diàmetre de la canonada a l'entrada de la bomba (1) –diàmetre de l'aspiració– és igual³⁵ al de la sortida (2) –diàmetre de la impulsió.

³⁵ Habitualment, a la pràctica, el diàmetre de l'aspiració sol ser més gran que el de la impulsió. D'aquesta manera, s'aconsegueixen reduir les pèrdues de càrrega a l'aspiració.

- Les bombes no hi afegixen cabal i, per tant, $Q_1=Q_2$.
- Les dues darreres consideracions permeten imposar que $v_1=v_2$.

S'arriba a la conclusió que:

$$\Delta H_{12} = \frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} \quad (13.2)$$

És a dir, una bomba provoca una variació en la pressió del sistema entre les seccions d'entrada i sortida. Per tant, es conclou que les bombes són convertidors de l'energia mecànica que subministra el motor que les acciona, en energia hidràulica, en concret de pressió.

La potència hidràulica que es comunica directament al flux es determina fent:

$$W_{neta} = \gamma \cdot Q \cdot \Delta H \quad (13.3)$$

On, si el pes específic del fluid (γ) és en N/m^3 , el cabal (Q) en m^3/s i l'energia (ΔH) en mca, aleshores la potència (W) es dona en watts.

La seva relació amb la potència que comunica el motor de la bomba, també anomenada potència de l'eix, dona el que es coneix amb el nom de rendiment (η) de la bomba:

$$\eta = \frac{\gamma \cdot Q \cdot \Delta H}{P_{consumida}} \quad (13.4)$$

Normalment es busca treballar amb rendiments alts, entre 0.8 i 0.9.

13.2 Tipus de bombes

En general, es poden dividir en dos grans grups:

- Bombes de desplaçament positiu, que fan que el fluid entri en una cambra i en surti, en canviar el volum, com ara la bomba per inflar pneumàtics de bicicletes, el cor humà o el motor de combustió interna dels cotxes
- Turbobombes, que afegixen energia a un fluid en moviment com a resultat de les interaccions dinàmiques entre la màquina i el fluid. El seu funcionament es basa en un eix rotatori al qual es connecten unes pales (àleps) que reben energia mitjançant un motor i que es transmet directament al fluid.

13.3 Bombes centrífugues

Són turbobombes radials en què el flux s'estableix des de l'eix cap a fora, seguint una trajectòria perifèrica per acció per les forces centrífugues. Aquests tipus de bomba tenen dos components principals: un impulsor connectat a un eix rotatori i la caixa o rodet que el conté. L'impulsor disposa d'un conjunt d'aspes guerxes, anomenades àleps directors, al voltant de l'eix. El gir dels àleps provoca l'aspiració del fluid i fa que aquest entri des de l'eix. El bastiment presenta forma espiral amb una àrea creixent en el sentit del flux i està dissenyat perquè el fluid redueixi la velocitat a mesura que surt de l'impulsor. Aquesta disminució d'energia cinètica es converteix en un augment de pressió.

El coneixement del funcionament hidràulic d'una bomba l'ha de facilitar el fabricant mitjançant les anomenades *corbes característiques* de la bomba. Són tres corbes que donen, respectivament, la relació entre el cabal circulant i les tres variables següents: altura de bombament, rendiment de la bomba i potència d'impulsió.

Tenint en compte que l'equació (13.4) relaciona les quatre variables, de les tres corbes característiques només dos són independents entre elles, de manera que la tercera ($W-Q$) mai no se sol donar ja que es pot deduir de les dues anteriors (H_B-Q i $\eta-Q$)

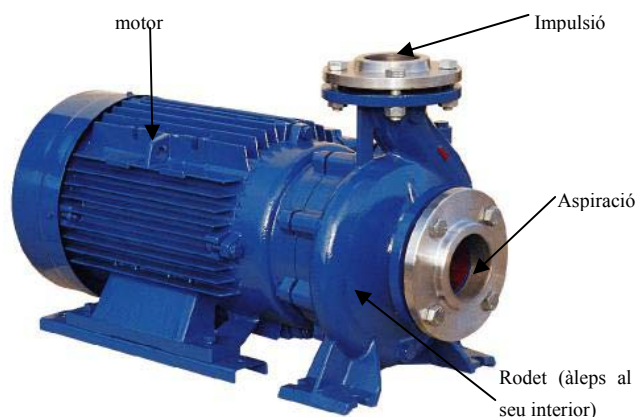


Figura 13.2 Bomba centrífuga.

13.3.1 Corba $H_B=f(Q)$:

Solen ser funcions de tipus quadràtic $H=A+B\cdot Q+C\cdot Q^2$.

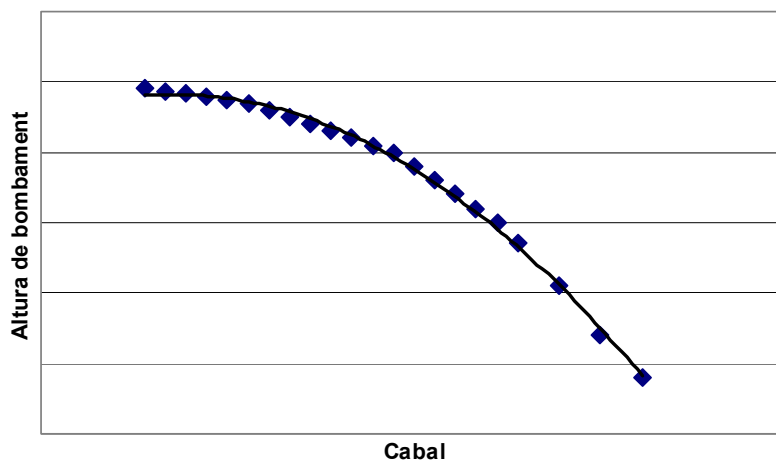


Figura 13.3 Corba característica d'una bomba que dona el rang de cabals i l'altura de bombament que és capaç de proporcionar.

13.3.2 Corba $\eta=g(Q)$:

Dins la bomba, hi existeixen unes pèrdues locals d'energia degudes a:

- La turbulència elevada del flux.
- El canvi de direcció que rep el fluid en la impulsió.

- Possibles fugues de fluid.
- Qüestions mecàniques, com per exemple el fregament de l'eix de la bomba en la transmissió de la seva potència amb el rodet.

Aquestes pèrdues fan que no tota l'energia mecànica que genera el motor es transmeti al fluid. Aquest és el motiu pel qual cal parlar de rendiment. Ja s'ha dit que normalment es busca treballar amb rendiments alts d'entre 0.8 i 0.9.

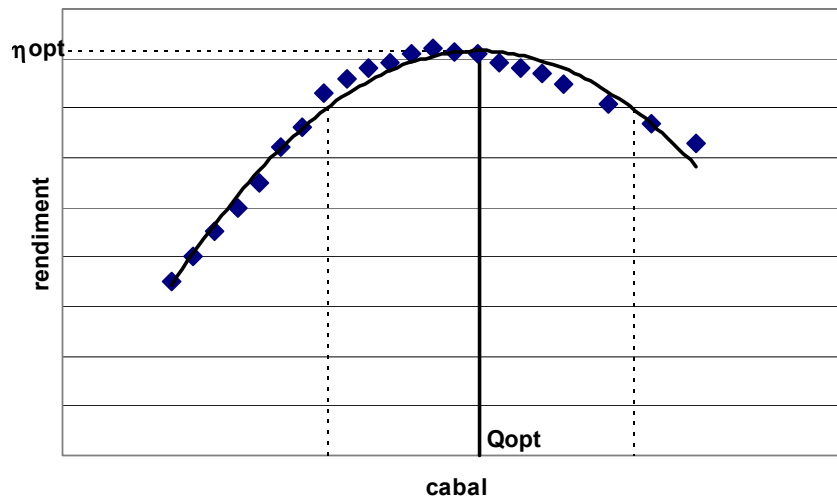


Figura 13.4 Corba característica d'una bomba que dona la relació entre el seu rendiment i el cabal que pot impulsar.

13.3.3 Corba $W=h(Q)$:

Aquesta corba és linealment dependent de les altres dues, i es pot deduir d'elles a partir de l'equació (13.4).

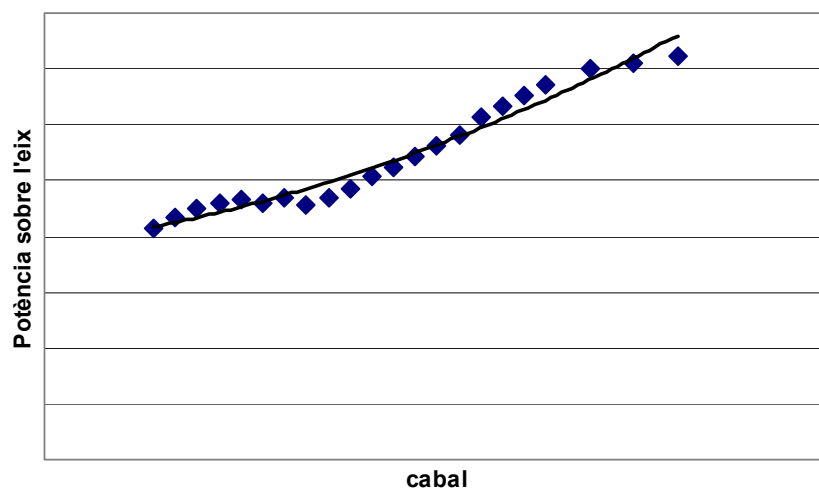


Figura 13.5 Corba característica d'una bomba que dona el rang de cabals i la potència que pot donar.

No és bo que una bomba treballi molt per sota del cabal pel qual el seu rendiment és el màxim possible. Aquest es coneix com *cabal òptim* o *cabal nominal*. En cas que això succeeixi la diferència entre la potència elèctrica i la potència hidràulica (el seu quocient és el rendiment de la màquina) es dissipa en calor per fregament que provoca el deteriorament dels equips mecànics.

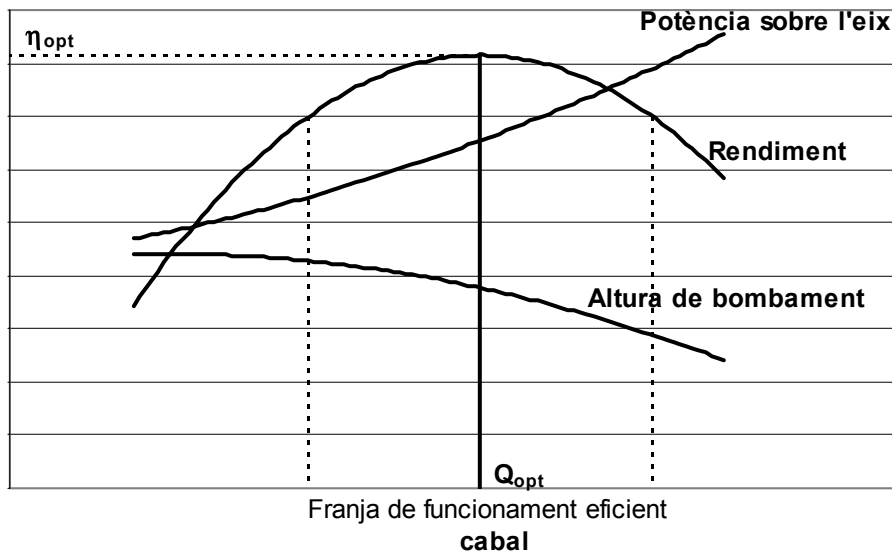


Figura 13.6 Corbes característiques d'un bomba. Rang adequat de funcionament.

13.4 Conseqüències de la instal·lació d'una bomba en un sistema a pressió

Sigui una instal·lació que condueix aigua a pressió amb una conducció de diàmetre ϕ , des d'un dipòsit que dona una càrrega H_1 fins a un altra amb una càrrega menor H_2 . S'entén que, en aquest cas, l'aigua va d'1 cap a 2 de manera natural, consumint l'energia disponible $\Delta H = H_1 - H_2$. Entre 1 i 2 es pot plantejar:

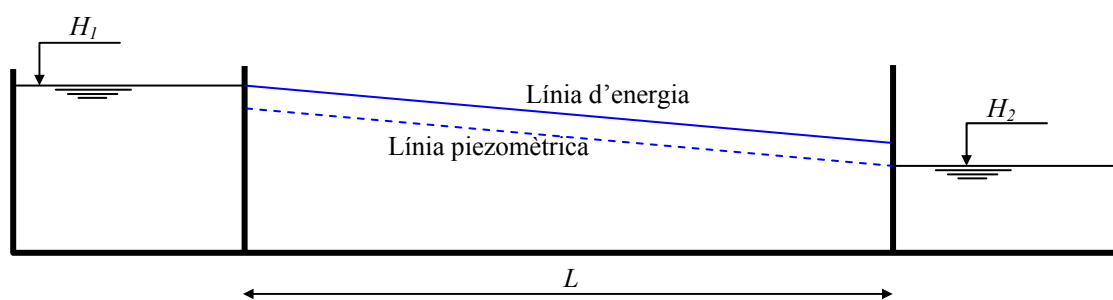


Figura 13.7 Esquema típic d'una instal·lació a pressió que funciona sense la necessitat de cap bomba hidràulica.

$$H_1 = H_2 + I \cdot L \Rightarrow H_1 - H_2 = \frac{f \cdot L}{2g \cdot \phi} \cdot v^2 \quad (13.5)$$

que permet estimar el cabal circulat:

$$Q = \pi \cdot \frac{\phi^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{H_1 - H_2}{\frac{f \cdot L}{2g \cdot \phi}}} \quad (13.6)$$

Es pretén comparar el funcionament de l'esquema hidràulic anterior (figura 13.7) amb el que es donaria si entre ambdós dipòsits es col·loqués una bomba hidràulica que donés una altura d'impulsió H_B (figura 13.8).

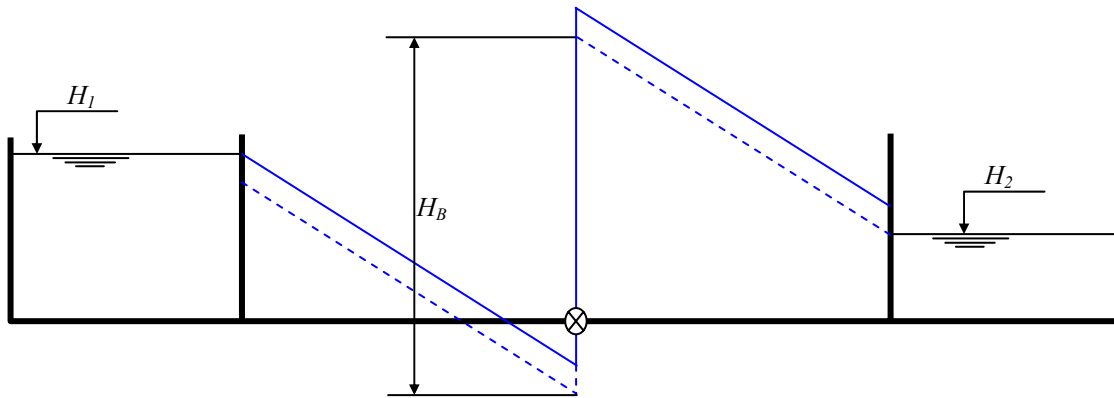


Figura 13.8 Instal·lació a pressió de la figura 13.7 que funciona amb una bomba entre els dipòsits 1 i 2.

En aquest segon cas, imposant que la canonada abans i després de la bomba manté el diàmetre constant (i, per tant, les velocitats i també els pendents motrius), el balanç d'energia entre 1 i 2 permet escriure:

$$H_1 + H_B = H_2 + I \cdot L \Rightarrow H_1 - H_2 + H_B = \frac{f \cdot L}{2g \cdot \phi} \cdot v^2 \quad (13.7)$$

de manera que ara el cabal circulant és:

$$Q = \pi \cdot \frac{\phi^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{H_1 - H_2 + H_B}{\frac{f \cdot L}{2g \cdot \phi}}} \quad (13.8)$$

L'energia que introdueix en el sistema el fet de col·locar la bomba entre ambdós dipòsits es tradueix en un augment del pendent motriu i amb ell, del terme cinètic. En altres paraules, augmenta el cabal que circula si no hi ha la bomba. Com es pot veure per la variació de la línia d'energia entre el primer cas (figura 13.7) i el segon (figura 13.8) la col·locació de la bomba influeix no només aigües amunt si no també aigües avall.

13.5 Risc de cavitació

El fenomen de la cavitació en una impulsió condiona el lloc on col·locar-hi la bomba. Per exemple, en una impulsió on la canonada d'aspiració puja verticalment fins a la bomba, com que la cota ha d'augmentar, cal que es vagi perdent energia de pressió. Però la pressió a l'entrada de la bomba no pot disminuir indefinidament, ja que la pressió mínima es troba limitada per la pressió de vapor. Apareix, en aquest punt, el risc de cavitació.

En ser el règim permanent i el diàmetre de la canonada constant, els termes cinètics en ambdues seccions són iguals. Per contra, la cota $z_2 > z_1$; per tant, això obliga que els termes de pressió segueixin la relació contrària i, per tant, $P_2 < P_1$. Si la cota z_2 es prou alta, podria arribar a succeir que $P_2 \approx P_{\text{vapor}}$, cas en el qual es dona cavitació. Pot passar que $P_2 > P_{\text{vapor}}$, però no prou gran perquè dins la bomba localment hi hagi algunes caigudes de pressió degudes a pèrdues locals al seu interior, que podrien originar cavitació dins la pròpia bomba. Per evitar aquests problemes, es recomana que s'entri a la bomba (secció 2) amb un resguard de pressió. És el concepte del *NPSH*, que respon a les sigles del terme anglès *Net Positive Suction Head*, o càrrega neta positiva de succió, que ve a ser la càrrega que es pot arribar a “consumir” localment dins la bomba sense que es produeixi cavitació al seu interior.

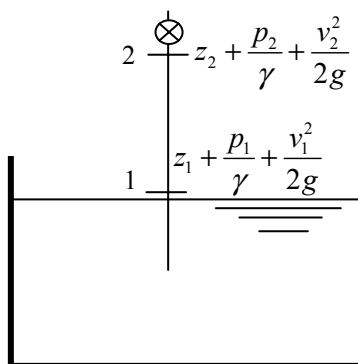


Figura 13.9 Canonada d'aspiració entre un dipòsit i la bomba.

$$NPSH = \frac{P_{\text{entrada}} - P_{\text{vapor}}}{\gamma} \quad (13.9)$$

El fabricant ha de donar l'*NPSH requerit* per la bomba, que dona idea del que es “consumeix” dins la bomba. S'està del costat de la seguretat si el que hi ha disponible a l'entrada és més gran que el requerit:

$$NPSH_{\text{disponible}} > NPSH_{\text{requerit}} \quad (13.10)$$

Per tant, cal calcular la P_{entrada} (secció 2 de la figura 13.9) que hi ha en funció del disseny plantejat i, a partir d'aquesta dada, esbrinar quina bomba dona la millor relació de *NPSH*.

La bomba, en general, s'hauria de trobar a prop del dipòsit inicial, no més de 5 ó 6 m per sobre d'ell. Aquí es comprèn que hi tenen algun avantatge les bombes submergibles, tot i que donen poca altura i són més cares. També s'entén que, si l'altura que cal salvar és superior als 10 m que la P_{vapor} imposa com a límit, cal aconseguir-ho combinant diverses bombes com es descriu, més endavant, a l'apartat 13.7.

13.5.1 Ubicació d'una bomba

El risc de cavitació, per tant, fa que en una instal·lació de bombament alguns trams no siguin adequats per a la col·locació de la bomba. Aquesta és una limitació imposada per la pressió mínima admissible en una conducció a pressió. Però també cal imposar alguna limitació per les pressions màximes que pugui suportar la canonada. Tot plegat permet determinar el tram de canonada on sí és possible la col·locació de la bomba.

La posició relativa de la línia piezomètrica respecte dels límits de pressió màxima i mínima admissibles en el sistema delimita el tram on la col·locació de la bomba és possible. S'entén que, per poder-ho definir, cal conèixer el funcionament hidràulic del sistema amb la bomba que s'hi ha de col·locar (apartat 13.6 següent), és a dir, l'altura de bombament i el cabal. Aquesta informació permet determinar el pendent motriu resultant i, així definir els trams esmentats, tal com s'aprecia a la figura 13.10.

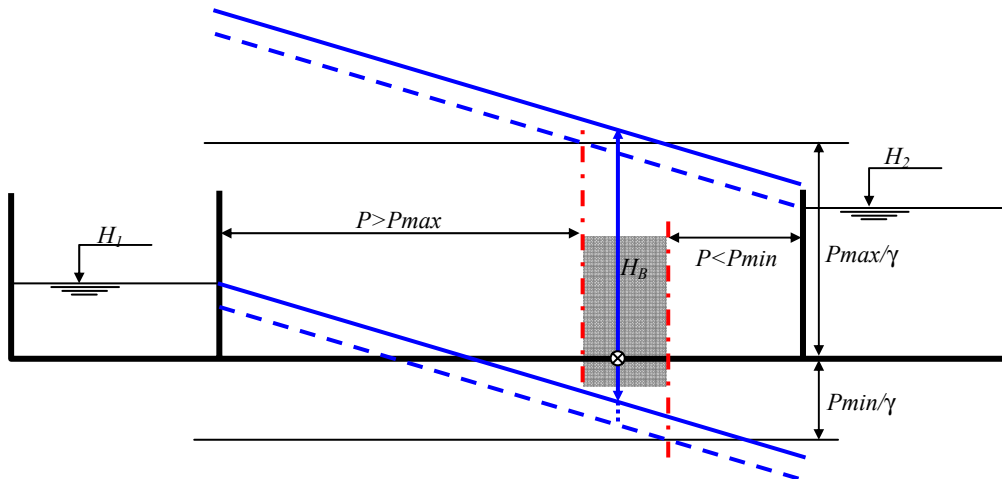


Figura 13.10 Delimitació de les zones en una impulsió on es pot ubicar una bomba, en funció de les pressions màxima i mínima admissibles.

13.6 Punt de funcionament d'una instal·lació de bombament

Una bomba adequada per una instal·lació, com la de la figura 13.11, ha de ser tal que proporcioni una energia (H_B) capaç de vèncer l'altura estàtica ($H_2 - H_1$) més les pèrdues per fregament ($\Delta H_1 + \Delta H_2$).

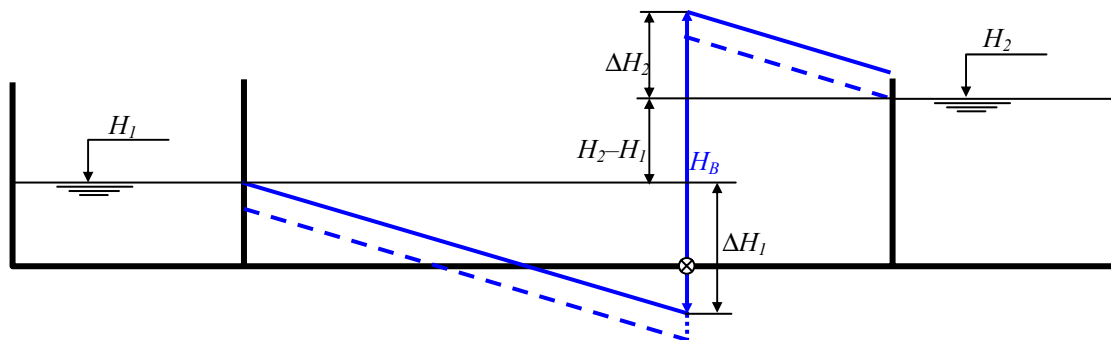


Figura 13.11 Típica instal·lació de bombament entre dos dipòsits.

La determinació del punt de funcionament de la instal·lació de bombament permet conèixer el cabal que circula per la conducció i l'altura de bombament que ha de proporcionar la bomba. Així, per obtenir-lo s'entén que cal tenir perfectament definits els parells de punts $Q-H_B$ que és capaç de proporcionar aquella bomba. És a dir, conèixer-ne la seva corba característica.

D'altra banda, cal definir, també, la que es coneix com la corba característica de la instal·lació. Aquesta corba estableix quina altura de bombament és necessària en la instal·lació perquè hi circuli un cabal determinat. Aquesta es pot obtenir de manera senzilla a partir del balanç d'energia de Bernoulli entre els dos extrems de la conducció:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + H_B = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12} \quad (13.11)$$

Reordenant termes i obtenint l'altura de bombament en funció dels altres paràmetres, en particular del cabal, es té:

$$H_B = z_2 - z_1 + \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \Delta H_{12} \quad (13.12)$$

Aquesta expressió (13.12) permet determinar els parells de punts buscats. La intersecció d'aquesta equació amb la de la corba característica de la bomba defineix el punt de funcionament de la instal·lació.

Tenint en compte que a l'equació (13.12) en el terme de pèrdues intervé el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach, en general, aquesta és una equació que no es pot escriure de manera explícita i, per tant, el més habitual és representar-la per punts amb l'objectiu de trobar la seva intersecció amb la corba característica de la bomba, tal com es representa a la figura 13.12.

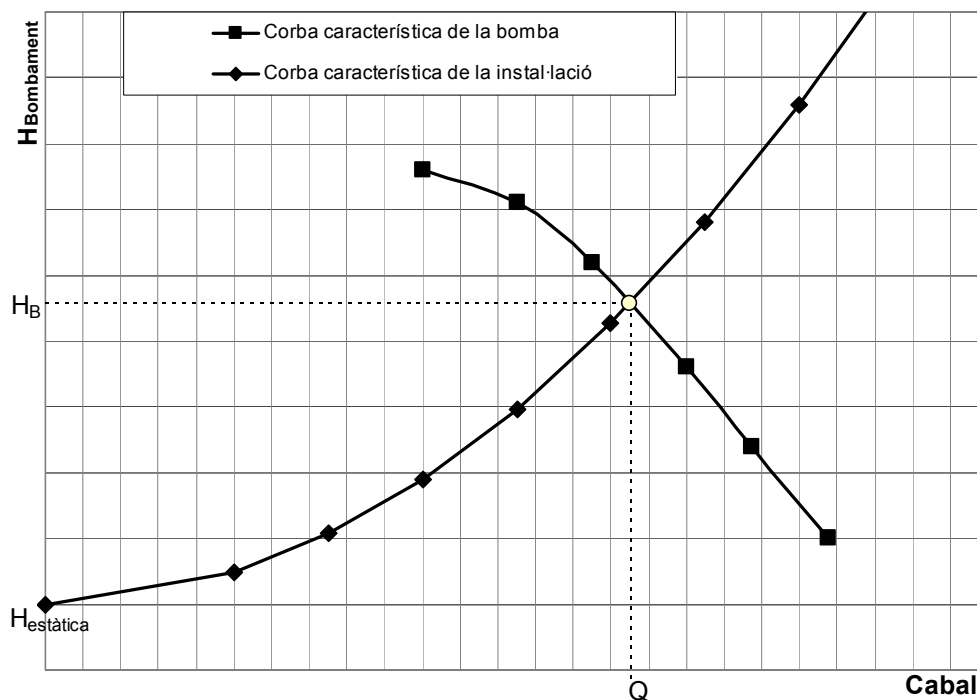
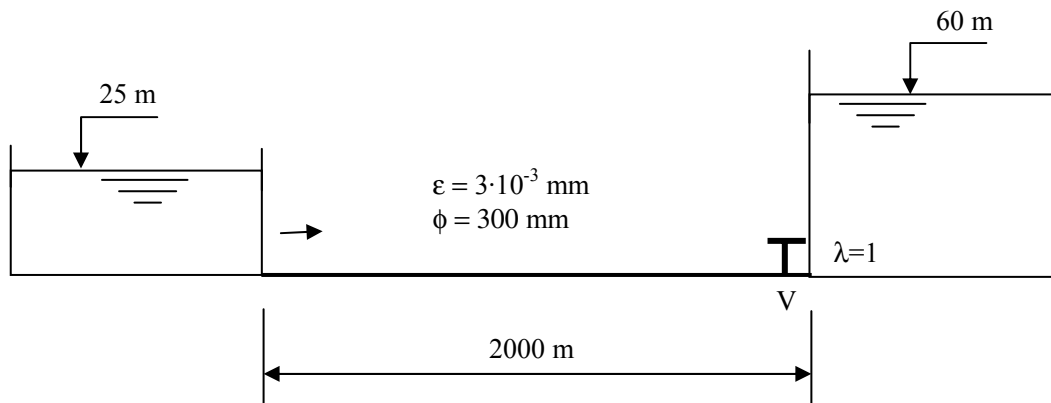


Figura 13.12 Punt de funcionament d'una instal·lació de bombament.

Exercici

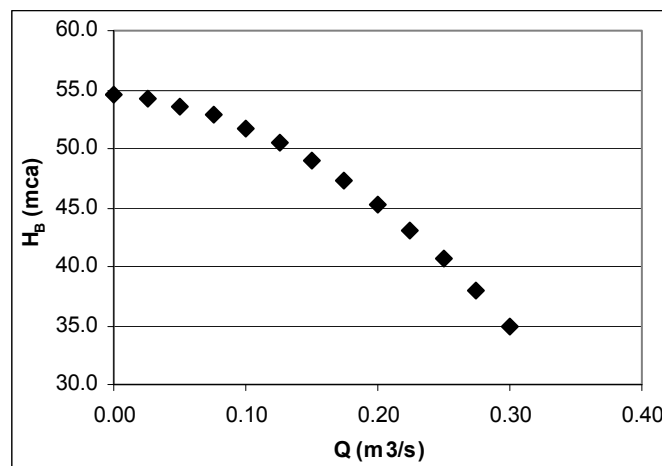
- Determineu el punt de funcionament de la impulsió de la figura si la corba característica de la bomba B és la de la taula adjunta, en el cas que la vàlvula V es trobi totalment oberta i que no es puguin negligir les pèrdues de càrrega d'entrada al dipòsit ($\lambda = 1$)
- Determineu el coeficient de pèrdua de càrrega localitzada quan la vàlvula es troba parcialment tancada i pel sistema circula un cabal $Q = 120$ l/s. Dibuixeu, en aquest cas, únicament dos punts de la corba característica de la instal·lació.



Q (m^3/s)	0.000	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250	0.275	0.300
H_B (mca)	54.50	54.17	53.61	52.81	51.77	50.50	48.99	47.25	45.27	43.06	40.61	37.92	35.00

Nota: Representeu totes les corbes característiques que siguin escaients en un únic gràfic.

A la figura següent es mostra la corba característica de la bomba donada:



Si es té en compte un coeficient de pèrdua de càrrega localitzada $\lambda = 1$ per entrada a dipòsit, el balanç d'energia entre tots dos dipòsits queda:

$$25 + H_B = 60 + 1 \cdot \frac{v^2}{2g} + \frac{f}{0.3} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot 2000 \quad \text{essent } v = \frac{Q}{\pi \frac{0.3^2}{4}}$$

Per tant, la relació entre l'altura de bombament i el cabal circulant que permet estimar la corba característica de la instal·lació és:

$$H_B = 35 + \frac{Q^2}{\left(\pi \frac{0.3^2}{4}\right)^2 2g} \left(1 + \frac{f}{0.3} \cdot 2000\right)$$

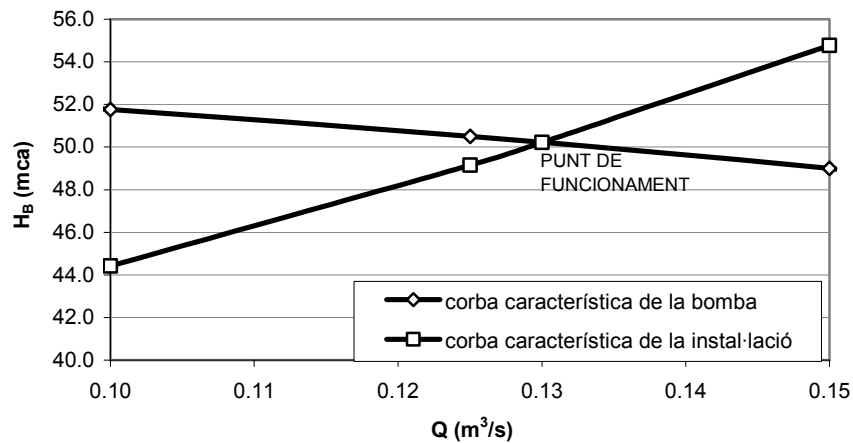
D'aquesta manera, donant diferents valors a Q , es poden anar obtenint les H_B corresponents. Cal tenir en compte, però, que a causa del valor baix de la rugositat relativa:

$$\frac{\varepsilon}{\phi} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{300} = 10^{-5}$$

és molt probable que ens trobem en règim turbulent intermedi i, per tant, que calgui recalculer cada vegada el coeficient de Darcy-Weisbach.

A la taula següent es mostren les parelles de punts $Q-H_B$ que constitueixen la corba característica de la instal·lació. Per la seva banda, a la figura següent es presenta l'obtenció del punt de funcionament:

Q (m ³ /s)	v (m/s)	Re (-)	f (-)	H_B (mca)
0.100	1.415	424413	0.0137	44.41
0.150	2.122	636620	0.0128	54.77
0.125	1.768	530516	0.0132	49.15
0.130	1.839	551737	0.0131	50.22



Per tant, interpolant, resulta que el punt de funcionament és $Q = 130$ l/s i $H_B = 50.22$ mca:

Si el cabal que circula és $Q = 120$ l/s, de la taula que ens dóna la corba característica es pot obtenir interpolant l'altura de bombament corresponent, que resulta $H_B = 50.754$ mca

Per la seva banda, un cabal de 0.120 m³/s en una conducció de 300 mm, dóna un flux amb una velocitat $v = 1.698$ m/s, que li correspon un nombre de Reynolds, $Re = 509296$ i, per tant, un coeficient de Darcy-Weisbach $f = 0.01327$. Així, es poden obtenir les pèrdues de càrrega localitzades que produeix la vàlvula V :

$$25 + 50.754 = 60 + 1 \cdot \frac{1.698^2}{2g} + \frac{0.01327 \cdot 1.698^2}{0.3} \cdot 2000 + \Delta H_L \Rightarrow \Delta H_L = 2.61 \text{ mca}$$

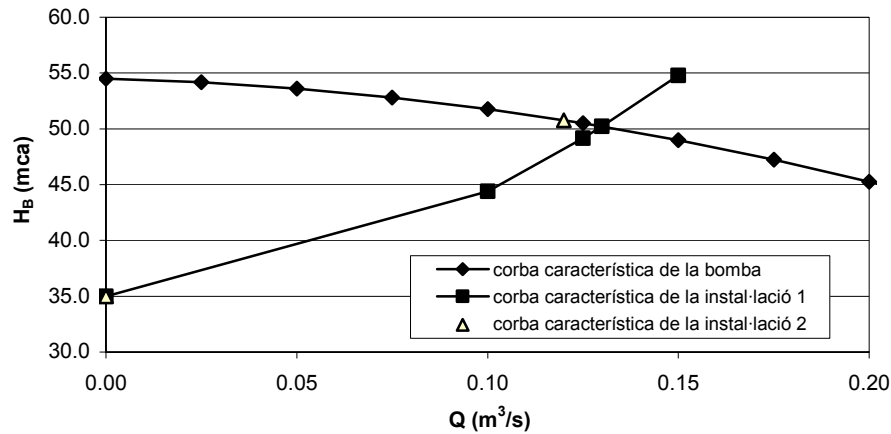
El coeficient de pèrdua de càrrega localitzada queda:

$$\lambda = \frac{2.61}{\frac{1.698^2}{2g}} \Rightarrow \lambda = 17.74$$

La corba característica de la instal·lació, en aquest cas, passa pels punts:

$$Q = 120 \text{ l/s i } H_B = 50.754 \text{ mca}$$

$$Q = 0 \text{ l/s i } H_B = 35 \text{ mca}$$



13.7 Combinació de bombes

Si amb una bomba no es disposa de prou energia per superar un desnivell, cal recórrer a la combinació de dues o més. Es poden dissenyar en sèrie o en paral·lel.

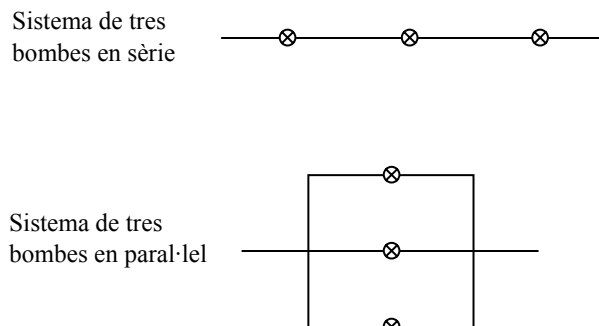


Figura 13.13 Bombes en sèrie i en paral·lel.

13.7.1 Bombes en sèrie

Es col·loquen de manera que la canonada d'impulsió de la primera és la d'aspiració de la segona, i així fins a l'última, tal com s'esquematitza a la figura 13.13.

El moviment s'estableix en una única canonada. Per tant, el seu funcionament es caracteritza perquè el cabal circulant és el mateix a través de totes les bombes. En canvi, cadascuna proporciona al sistema una altura de bombament, que es va sumant a la de les altres. Per tant, és un disseny adequat per vèncer càrregues estàtiques elevades.

Per simplicitat en el disseny i la construcció, les bombes que s'usen solen ser idèntiques entre si. D'aquesta manera, per a cada cabal, la corba característica equivalent a n bombes idèntiques en sèrie s'obté sumant n vegades les respectives altures de bombament.

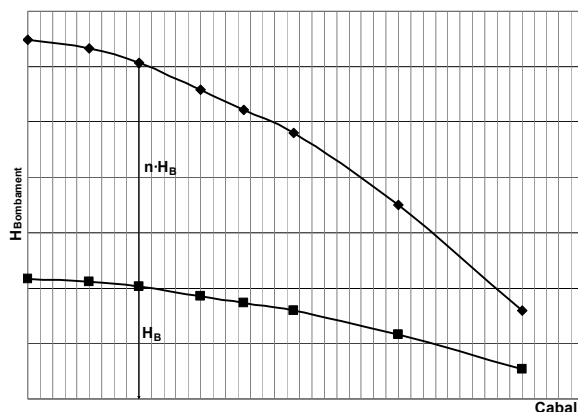


Figura 13.14 Corba característica de la bomba equivalent (en blau) a n bombes idèntiques en sèrie.

13.7.2 Bombes en paral·lel

Cada una es col·loca en ramals independents, com s'esquematitza a la figura 13.13.

El moviment s'estableix a cada ramal que conté cada canonada. Per tant, el seu funcionament es caracteritza perquè el cabal circulat total s'acaba sumant. És, doncs, un disseny adequat per transportar cabals elevats.

Igual que en el cas anterior, per simplicitat en el disseny i en la ucció les bombes que s'usen solen ser idèntiques entre si. D'aquesta manera, per a da altura de bombament, la corba característica equivalent a n bombes idèntiques en sèrie s'obté sumant n vegades els cabals respectius.

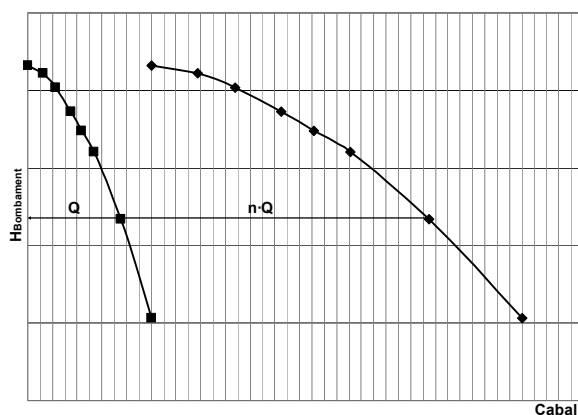


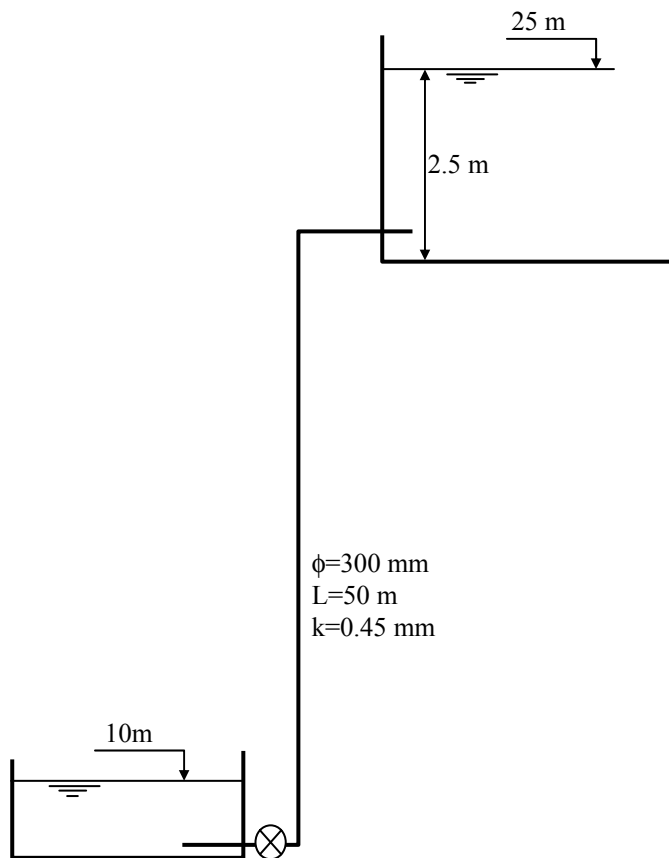
Figura 13.15 Corba característica de la bomba equivalent (en blau) a n bombes en paral·lel.

Exercici

L'esquema de la figura adjunta mostra una infraestructura que consisteix en un sistema de bombament que eleva l'aigua a un dipòsit de càrrega. Les característiques geomètriques de la impulsió s'especifiquen a la figura. Val a dir que el sistema ha de ser capaç d'eleva l'aigua des de la cota 10 m fins, com a màxim, a la cota 25 m. Si la corba característica de la bomba és la que s'indica a la taula següent,

- Determineu quantes bombes són necessàries per aconseguir que el cabal impulsat sigui, pel cap baix, $0.300 \text{ m}^3/\text{s}$, i quin és el cabal exacte que s'impulsa. Considereu que a la sortida del dipòsit inferior el coeficient de pèrdues de càrrega localitzada és $\lambda \approx 0$ i a l'entrada del superior, $\lambda = 1$.

- Aquestes bombes com han d'estar connectades: en sèrie o en paral·lel?



$\phi=300$ mm
 $L=50$ m
 $k=0.45$ mm

La rugositat relativa val: $\frac{k}{\phi}=0.0015$ i, tenint en compte que per al cabal mínim que es demana ($Q=300$ l/s) resulta que la velocitat val:

$$v = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot \phi^2}{4}} = \frac{0.3}{\frac{\pi \cdot 0.3^2}{4}} = 4.244 \text{ m/s}$$

I el nombre de Reynolds val

$$Re = \frac{v \cdot \phi}{\nu} = \frac{4.244 \cdot 0.3}{10^{-6}} = 1273240$$

De l'àbac de Moody es desprèn que en aquestes condicions s'està en règim turbulent rugós i, per tant, el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach val: $f = 0.022$

Amb això es pot plantejar el balanç d'energia de Bernoulli entre tots dos dipòsits per tal d'obtenir l'equació característica de la instal·lació, considerant que:

- Si un cabal de 300 l/s correspon a règim turbulent rugós, un de més gran hi correspon amb més motiu. Per tant, el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach no varia.
- Les pèrdues de càrrega localitzades, com que la instal·lació és curta, no es poden negligir. Es considera a la sortida de dipòsit $\lambda=0.5$ i a l'entrada $\lambda=1$.

$$H_1 + H_B = H_2 + \frac{f}{\phi} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot L + \sum \lambda \cdot \frac{v^2}{2g} \Rightarrow$$

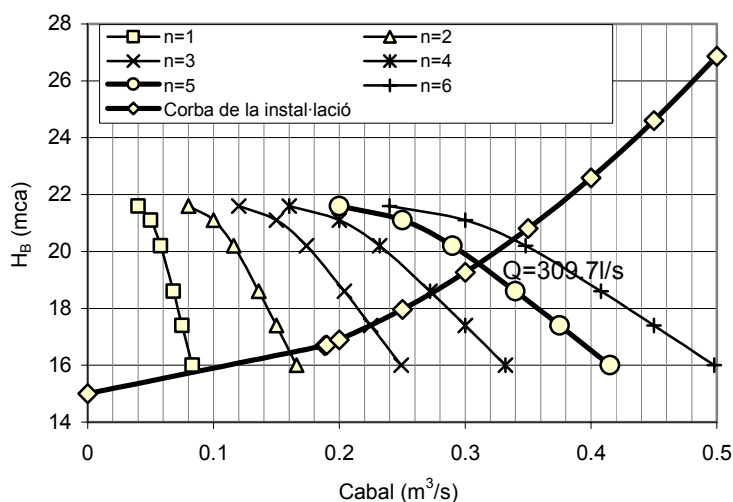
$$10 + H_B = 25 + \left(\frac{0.0219}{0.3} \cdot 50 + 1 \right) \cdot \frac{\left(\frac{Q}{\frac{\pi \cdot 0.3^2}{4}} \right)^2}{2g} \Rightarrow$$

Essent, per tant, la corba característica de la instal·lació: $H_B = 15 + 47.434 \cdot Q^2$

En vista dels valors de les altures d'impulsió que donen les bombes, es comprèn que el sistema de bombes ha d'anar *en paral·lel*. Les corbes característiques respectives en funció del nombre de bombes seran:

$H_{\text{bombament}}$ (mca)	21.6	21.1	20.2	18.6	17.4	16.0
Q (m ³ /s) n=1	0.040	0.050	0.058	0.068	0.075	0.083
Q (m ³ /s) n=2	0.080	0.100	0.116	0.136	0.150	0.249
Q (m ³ /s) n=3	0.120	0.150	0.174	0.204	0.225	0.332
Q (m ³ /s) n=4	0.160	0.200	0.232	0.272	0.300	0.415
Q (m ³ /s) n=5	0.200	0.250	0.290	0.340	0.375	0.498
Q (m ³ /s) n=6	0.240	0.300	0.348	0.408	0.450	0.581

A la figura següent es representen gràficament aquestes corbes i les interseccions respectives amb la corba de la instal·lació:



Es pot apreciar que, amb $n=5$ bombes en paral·lel, el cabal ja és superior al demanat i val amb més exactitud: $Q=0.310$ m³/s.

13.8 Esquema d'una impulsió. Accessoris més habituals

Sense ànim de ser exhaustius, a la figura 13.16 es mostra un esquema típic d'una impulsió, amb un seguit d'accessoris que se solen col·locar per a un bon funcionament i facilitar les tasques de manteniment.

13.8.1 Vàlvula de peu

Se situa a l'extrem aigües amunt de la canonada d'impulsió i té l'objectiu d'evitar que la canonada es buidi quan s'atura el sistema, ja que en aquest moment, pels desnivells en el sistema, el fluid té tendència a retornar al dipòsit més baix.

Quan s'engega la bomba i s'inicia la impulsió de fluid, la clapeta puja i deixa lliure el pas de l'aigua. Si s'atura el sistema, es deixa de bombar i l'element baixa per tancar la boca de la canonada i evitar, així, que es buidi i es desencebi el sistema.

La boca de la conducció sol estar protegida amb una reixa, o colador, que evita l'entrada de cossos estranys a la canonada i, per tant, a la bomba. Es dissenyen de manera que no es formin vòrtexs a l'entrada, exigint que hi hagi prou càrrega perquè no s'afavoreixi l'entrada d'aire a la conducció, ja que aquests dos efectes donen discontinuïtat al flux i això no és adequat per a la bomba.

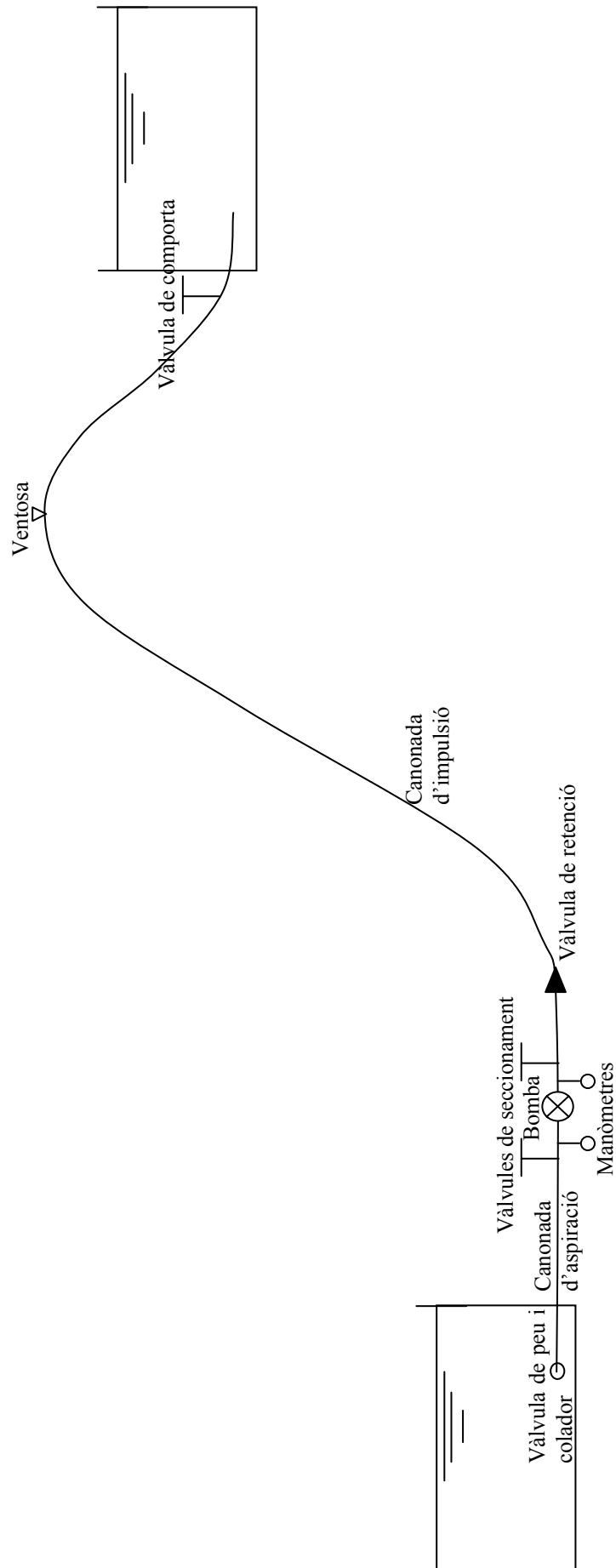


Figura 13.16 Esquema típic d'una impulsió. Accessoris habituals.

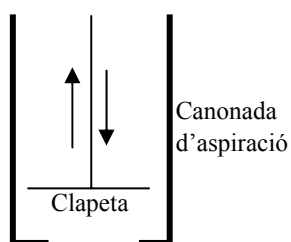


Figura 13.17 Vàlvula de peu.

13.8.2 Vàlvula de seccionament

Permet deixar en sec un tram de conducció per tal de facilitar-ne el manteniment. Normalment és una vàlvula de comporta que s'acciona mitjançant un volant extern, manualment o motoritzades, que permet modificar-ne el grau d'obertura. Això facilita que es pugui regular el cabal circulant. Quant més es tanca la comporta, més grans són les pèrdues locals que es generen, i això provoca un canvi en el punt de funcionament que pot ser així controlat fins a ajustar-lo al rendiment òptim.

13.8.3 Vàlvula de retenció

Actua com una vàlvula de peu, és a dir, deixa passar l'aigua en un sentit però no en l'altre, i també impedeix que es buidi la instal·lació i la manté sempre encebada. Quan hi ha una aturada brusca de la impulsió, el gradient advers de pressions en força el tancament i així es protegeix la bomba del cop d'ariet que provocaria tota la massa de fluid impulsada.

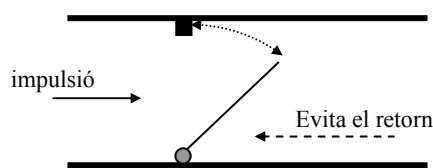


Figura 13.18 Vàlvula de retenció.

13.8.4 Ventosa

És un mecanisme que s'instal·la en sistemes a pressió amb la finalitat d'eliminar l'aire que sovint hi entra. Aquest aire, en les canonades, es concentra a les zones altes: L'aire acumulat redueix la secció neta de pas, hi provoca pèrdues de càrrega incontrolades i afavoreix l'oxidació en canonades metàl·liques.

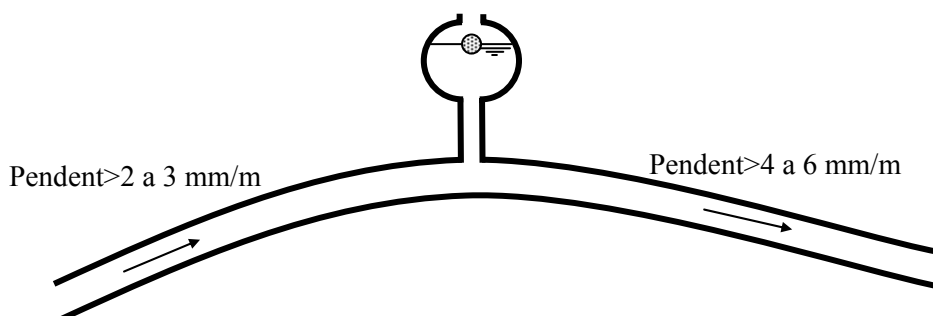


Figura 13.19 Ventosa

El mecanisme consisteix, bàsicament, en un recipient obert a l'atmosfera i connectat en un punt alt al conducte. El fluid hi accedeix per la seva pròpia energia piezomètrica, com també l'aire que, arrossegat pel flux, té tendència natural a buscar els punts més alts. En aquest recipient hi ha un element flotant que obre (permetent la sortida d'aire) o tanca l'orifici de connexió a l'atmosfera, segons la quantitat d'aire que hi ha acumulat.

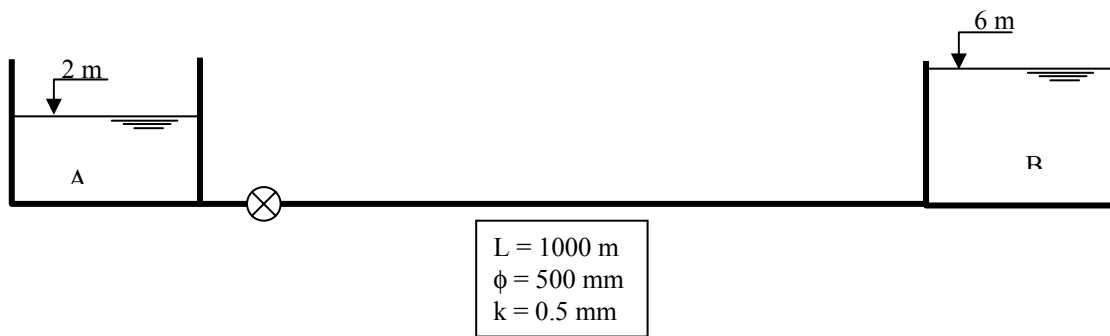
En general, es recomana col·locar-la sempre en qualsevol punt alt, i que el disseny de les conduccions no mostri traçats molt horitzontals, sinó que disposi de prou punts alts per facilitar l'expulsió de l'aire. Habitualment es recomana, en traçats no condicionats per la topografia, que els trams en pujada tinguin un pendent entre 2 i 3 mm/m i, en baixada, entre 4 i 6mm/m.

13.9 Exercicis proposats

1. Discutiu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

- Una bomba que impulsa aigua entre dos dipòsits ho ha de fer sempre des d'aquell que presenti el nivell més baix de la làmina d'aigua cap al de nivell més alt.
- No té cap sentit impulsar aigua amb una bomba entre dipòsits que estiguin a la mateixa cota, ja que l'aigua flueix entre ells pel principi de vasos comunicants.
- A la instal·lació a pressió entre dos dipòsits que presenten una altura de la làmina d'aigua donada, la col·locació d'una bomba hi modifica els pendents de la línia d'energia només aigües amunt de la bomba, respecte de la situació sense la bomba.
- L'altura màxima respecte de la superfície lliure de l'aigua a la qual es pot col·locar una bomba per tal que no cavitï no depèn del cabal.
- L'altura total d'energia aportada per dues bombes idèntiques que funcionen acoblades en paral·lel és el doble de la subministrada per cada bomba.
- La instal·lació d'una bomba en una canonada modifica els pendents de la línia d'energia tant aigües amunt com aigües avall del punt on se situa la bomba.
- Si disposem de dues canonades, amb coeficients de Manning n_1 i n_2 , amb $n_1 > n_2$, l'altura a la qual podem col·locar una bomba per tal que no hi hagi cavitació és menor en el primer cas que en el segon.
- S'ha d'anar molt amb compte on es col·loca una bomba hidràulica en un sistema a pressió, perquè es poden provocar problemes locals de cavitació a la sortida.
- Una bomba hidràulica incrementa el terme cinètic entre la secció d'entrada i sortida.
- En una impulsió en la qual es regula el cabal obrint o tancant una vàlvula, tancant-la parcialment es produeix una reducció en el cabal circulant i en l'altura d'impulsió.
- Si una bomba en un sistema a pressió determinat subministra un cabal Q amb una altura d'energia H_B , en el mateix sistema a pressió, dues bombes idèntiques en sèrie donen un cabal $2Q$ i una altura de bombament H_B .

- Fixat el punt de funcionament d'una bomba (cabal impulsat i altura de bombament), quant més gran és el seu rendiment més gran és la potència consumida per ella.
 - Conegut el punt de funcionament d'una impulsió, queda perfectament definida la potència de treball de l'equip de bombament.
 - El punt de funcionament d'una bomba és independent del diàmetre de la canonada d'impulsió.
 - Un sistema de bombament no pot disposar d'una canonada d'aspiració de més de 10 m de longitud.
 - En una bomba, un rendiment inferior al 60 % no és recomanable per a la seva durabilitat.
 - L'entrada d'una bomba és més propensa a patir cavitació que la sortida.
 - La potència que el motor d'una bomba ha de generar és, com a màxim, igual a la que es transmet al fluid.
 - Dues bombes en paral·lel donen un cabal superior que les mateixes bombes en sèrie.
 - Si dues bombes idèntiques estan acoblades en sèrie, per cada bomba hi circula la meitat del cabal total.
 - Si dues bombes idèntiques estan acoblades en paral·lel, l'altura d'energia total proporcionada pel conjunt d'ambdues bombes és el doble de la proporcionada per cada bomba.
 - Un sistema de bombes acoblades en sèrie és adient per a grans altures d'impulsió.
 - Si l'NPSH requerit per una bomba és 7 mca, això significa que, si a l'entrada es produeixen pressions més petites que -3 mca, hi ha risc de cavitació a l'interior.
 - Com més petit sigui l'NPSH d'una bomba, menor és l'altura màxima a la qual es pot col·locar respecte del nivell de l'aigua del pou (o dipòsit) d'aspiració.
 - L'NPSH d'una bomba es defineix com la pressió del flux a l'entrada menys la pressió de vapor del fluid.
 - Per tenir seguretat enfront del risc de cavitació en una bomba instal·lada en un sistema a pressió, l'NPSH disponible ha de ser més petit que l'NPSH requerit, que és subministrat pel fabricant.
 - En una instal·lació que transporta aigua a pressió, fixats el diàmetre de la canonada i la rugositat del material, i fixats la posició i el model d'una bomba hidràulica, quant més gran és el cabal circulat més gran és l'NPSH a la seva entrada.
2. Per tal d'impulsar aigua del dipòsit A al dipòsit B es disposa de dues (2) bombes idèntiques. La corba característica de cada bomba es pot ajustar per l'expressió $H_B = -6 Q^2 - 0.5 Q + 3.75$.
- Com s'han d'instal·lar les dues bombes per assegurar que la impulsió funcioni: en sèrie o en paral·lel?
 - Quin és el punt de funcionament de la instal·lació?
 - Funcionant les dues bombes, quina és l'altura de bombament que està subministrant cada bomba per separat?



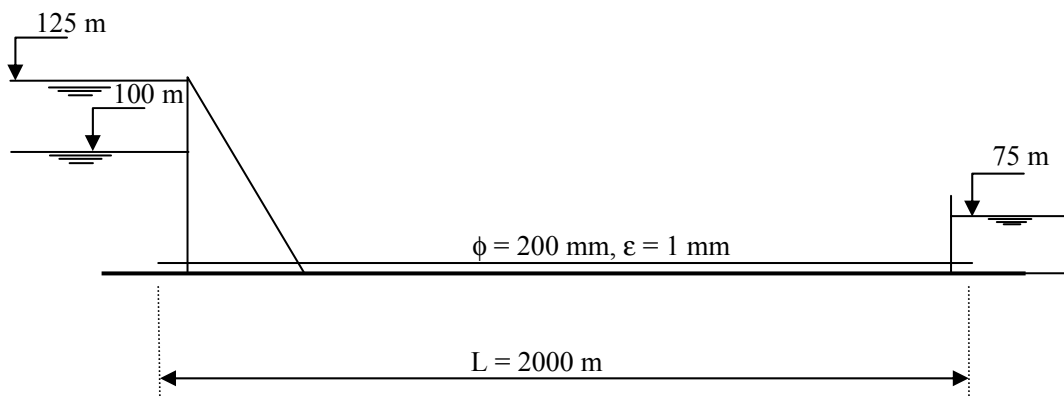
3. L'esquema de la figura representa el subministrament d'aigua des d'un embassament fins a un petit municipi eminentment turístic, que rep l'aigua en un dipòsit que es procura mantenir a un nivell aproximadament constant a la cota 75 m.

El nivell d'aigua a l'embassament sol presentar variacions entre la cota 125 m en època d'aportacions, i la cota 100 m en períodes secs. Si les característiques geomètriques de la instal·lació són les que s'indiquen a la figura, determineu el cabal que es pot subministrar al municipi en la situació més desfavorable.

Si durant el període d'estiu s'estima que la població creix aproximadament en un 50%, per poder incrementar la dotació d'aigua durant aquest període s'ha pensat d'instal·lar-hi una bomba. El fabricant subministra les altures d'impulsió (en mca) de les tres bombes següents:

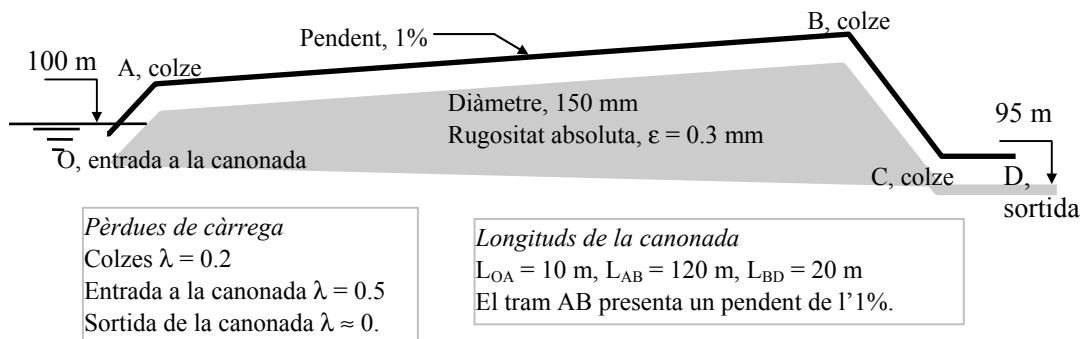
	Q (l/s)														
	30	33.33	36.66	40	43.33	46.67	50	53.33	56.67	60	63.33	66.67	70	73.33	76.67
BOMBA1	42.4	42	41.2	40.2	39	38	36.8	35.5	34	32	31	29	28	26	24
BOMBA2	49.8	49.21	48.2	47.6	46.4	45.2	44	42	41	40	38	36	34	32	30.2
BOMBA3	34.8	34.5	34	33.5	33	32	31	30	29	28	27	26.5	24.5	23	22

Quines d'aquestes bombes són útils per a la instal·lació citada?



4. A l'exercici 4 del capítol anterior, si malgrat tot calgués optar pel conducte de diàmetre immediatament inferior, quina altura de bombament seria necessària per poder transportar, pel cap baix, els 200 l/s?

5. A l'exercici 8 del capítol anterior, si durant la vida útil de funcionament de la canonada es requereix augmentar la dotació d'aigua al punt B fins a 220 l/s, és necessària la col·locació d'una estació de bombament. En cas afirmatiu: quina potència ha de tenir la bomba? En cas negatiu: què caldria fer?
6. Des d'un dipòsit amb un nivell constant a la cota 100 m, es pretén abastir d'aigua, per al seu reg, un terreny proper mitjançant un sifó com el que es mostra a la figura. Si el terreny que es vol regar es troba a la cota 95 m, es demana:
- Determineu el cabal que circula en aquestes condicions.
 - Calculeu la màxima cota (z_A) que pot presentar el punt A, si la mínima pressió absoluta acceptable, a tota la instal·lació, es de 4 mca.
 - Determinar la potència en CV i la possible ubicació d'una bomba que permeti augmentar la dotació de cabal fins a 75 l/s, si se sap que aquesta bomba presenta per aquest cabal un rendiment de 0.8 i requereix d'un NPSH de 6 mca.



14 Referències bibliogràfiques

ARCEMENT, G. J.; SCHNEIDER, V. R. (1984). “*Guide for Selecting Manning’s Roughness Coefficients for Natural Channels and Flood Plains*”. US Geological Survey-Water Supply. Paper 2339. 67 pàgines. Versió electrònica.

BARNES, H. H. (1967). “*Roughness Characteristics of Natural Channels*”. US Geological Survey-Water Supply. Paper 1849. 213 pàgines.

BOSSER, J. (1990). “*Vademécum de mecànica de fluidos y máquinas hidráulicas*”. ETSEIB, UPC.

CHANSON, H. (2001). “*The Hydraulics of Open Channel Flow*”. Butterworth-Heinemann.

CHAUDRY, M. H. (1993). “*Open Channel Flow*”. Prentice Hall.

CHOW, V. T. (1994). “*Hidráulica de canales abiertos*”. Reedició en castellà. McGraw Hill.

FRANZINI, J.; FINNEMORE, E. J. (1999). “*Mecànica de fluidos con aplicaciones en ingeniería*”. 9a ed. Madrid: McGraw Hill.

FRENCH, R. (1988). “*Hidráulica de canales abiertos*”. Reedició en castellà. Mèxic: McGraw Hill.

HENDERSON, F. M. (1966). “*Open Channel Flow*”. Nova York: MacMillan.

LENCASTRE, A. (1998). “*Manual de ingeniería hidráulica*”. Reedició en castellà. Ediciones de Nafarroako Universitate Publikoa.

MUNSON, B.; YOUNG, D.; OKIISHI, T. (1999). “*Fundamentos de mecànica de fluidos*”. Mèxic: Limusa & Willey.

NAUDASCHER, E. (2001). “*Hidráulica de canales*”. Reedició en castellà. Mèxic: Limusa.

RANGA RAJU. (1982). “*Flow through Open Channels*”. Nova Delhi: McGraw Hill.

PUERTAS, J.; SÁNCHEZ-JUNY, M. (2001). “*Hidráulica*”. Madrid: Servicio de Publicaciones del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

ROUSE, H. (1938). “*Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers. Part Three (Mechanics of Wave Motion)*”. Nova York: McGraw Hill.

SOTELO AVILA, G. (1995). “*Hidráulica general*”. Mèxic: Limusa.

USBR (1974). “*Design of Small Dams*”. Washington: US Government Printing Office.