

POLITEXT

Joan Trias Pairó

Matemàtica discreta. Problemes resolts

EDICIONS UPC

Matemàtica discreta. Problemes resolts

POLITEXT

Joan Trias Pairó

Matemàtica discreta. Problemes resolts

EDICIONS UPC

Aquesta obra fou guardonada en el vuitè concurs
"Ajut a l'elaboració de material docent" convocat per la UPC.

Primera edició: maig de 2001

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració
del Comissionat per a Universitats i Recerca
i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya.

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC.

Disseny de la coberta: Manuel Andreu

© Joan Trias, 2001

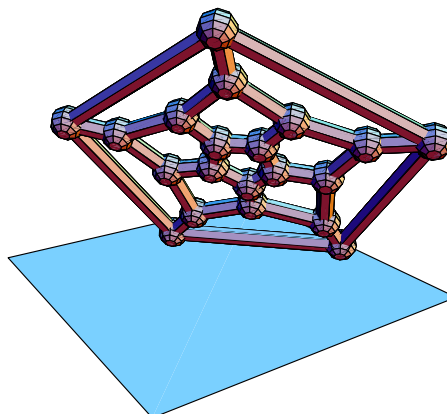
© Edicions UPC, 2001
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
A/e: edicions-upc@upc.es

Producció: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Dipòsit legal: B-23.317-2001
ISBN: 84-8301-486-6

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Índex



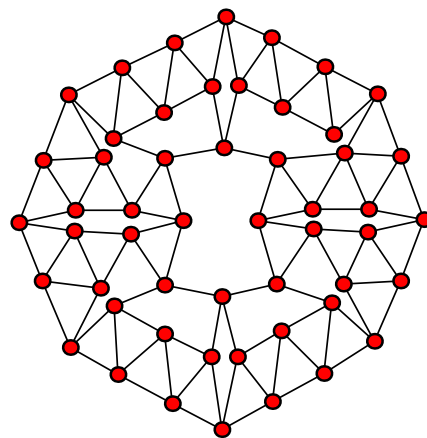
Pròleg	vii
PART I: PRELIMINARS	1
1 Introducció	3
1.1 Objectius	3
1.2 Com treballar amb aquest llibre	3
1.3 “Bons consells”	4
1.3.1 Dibuixeu sempre i experimenteu	5
1.3.2 Modelització de situacions en termes de grafs	10
1.3.3 No oblideu mai el lema de les encaixades... ni el seu corollari	12
1.3.4 Formalitzeu	14
1.3.5 Suposeu que no es compleix el que es demana...	15
1.3.6 Suposeu que el graf és connex...	17
1.3.7 Proveu amb inducció	19
1.3.8 Compteu els objectes de més d’una manera...	19
1.3.9 Convertiu un problema en un altre	21
1.3.9.1 Passeu al graf complementari	22
1.3.9.2 Considereu el problema “complementari”	24
1.3.9.3 Passeu al dual en grafs planaris	25
1.3.9.4 Feu construccions auxiliars	27
1.3.9.5 Convertiu problemes de políedres a problemes de grafs planaris	28
1.4 Intenteu resoldre els problemes per diversos mètodes	33
2 Inducció en matemàtica discreta	37
2.1 Introducció	37
2.2 Principi d’inducció ordinària	38
2.2.1 L’enunciat del principi d’inducció	38
2.2.2 La inducció en acció	39

2.2.2.1	Etapes demostratives	39
2.2.2.2	El pas base	40
2.2.2.3	Triar paràmetre	40
2.2.2.4	Quan és convenient fer demostracions inductives? . . .	40
2.3	Primers exemples	41
2.3.1	Identitats aritmètiques de sumació tancada	41
2.3.2	Inducció a la combinatòria	44
2.3.2.1	La fórmula binomial	44
2.3.2.2	Conjunt de les parts d'un conjunt	46
2.3.3	Inducció en geometria combinatòria	47
2.3.4	Inducció en teoria de grafs	51
2.4	Inducció completa o forta	54
2.5	Inducció respecte de diversos paràmetres possibles	59
2.5.1	Grafs planaris i fórmula d'Euler	59
2.5.2	Inducció respecte del nombre d'arestes	60
2.5.3	Inducció respecte del nombre de cares	62
2.5.4	Inducció respecte de paràmetres inusuals	62
2.6	Aspectes diversos	64
2.6.1	Distinció de casos segons paritat	64
2.6.2	Passos base múltiples	65
2.6.3	Alternatives a la inducció	67
2.6.4	"Demostració" inductiva falsa	70
PART II: TEORIA DE GRAFS		71
3	Grafs: aspectes bàsics	73
3.1	Objectius	73
3.2	Apliqueu el lema de les encaixades	73
3.3	Problemes de reunions	75
3.4	Seqüències de graus	77
3.5	Isomorfisme	82
3.5.1	Bateria de tests	84
3.5.2	Identitat estructural	85
3.5.3	Conservació dels graus dels vèrtexs	86
3.5.4	Pas al complementari	88
3.5.5	Problemes addicionals d'isomorfisme	88
3.6	Altres problemes	92
4	Connexitat i recorreguts	93
4.1	Objectius	93
4.2	Caracterització dels grafs 2-regulars	93
4.3	Caracterització dels trajectes	98

4.4	Passeu al complementari	101
4.5	Problemes addicionals	104
5	Problemes eulerians i hamiltonians	117
5.1	Objectius	117
5.2	Problemes eulerians	117
5.3	Problemes hamiltonians	121
5.3.1	Quin és el problema?	121
5.3.2	La condició suficient sobre la suma de graus	121
5.3.3	“Bons consells”	123
5.3.3.1	“Estructura circular” d’un graf hamiltonià	123
5.3.3.2	Test 1: és 2–connex?	124
5.3.4	Cada vèrtex contribueix amb 2 arestes...	125
5.4	Trobar cicles hamiltonians: el graf del dodecàedre és hamiltonià	126
5.4.1	Si tenim la sort que sigui bipartit...	131
5.4.2	Treure vèrtexs i comptar els components connexos	132
5.4.3	Conjunts independents de vèrtexs	133
5.5	Quan tots els mètodes són inaplicables...	135
5.6	Problemes diversos	138
6	Arbres	143
6.1	Objectius	143
6.2	Preliminars teòrics i exemples	143
6.2.1	Aplicació del teorema de caracterització	144
6.2.2	Existeix un mínim de dues fulles	148
6.2.3	Aplicació de la teoria d’arbres a l’estudi de grafs	150
6.2.4	Problemes de seqüències de graus en arbres	154
6.3	Problemes diversos	156
7	Planaritat	175
7.1	Objectius	175
7.2	Grafs planaris: revisió teòrica i exemples	175
7.2.1	Aspectes bàsics	175
7.2.2	Caracterització del grafs planaris	178
7.2.3	El graf dual	179
7.2.4	La fórmula d’Euler	179
7.2.5	Fitació superior de la mida i del nombre de cares	180
7.3	Com estudiar si un graf és planari...	180
7.3.1	Dibuixeu i experimenteu	180
7.3.2	Apliqueu el teorema de la corba de Jordan	182
7.3.3	Apliqueu contracció d’arestes	182
7.3.4	Apliqueu el teorema de Kuratowski	183

7.3.5	Apliqueu la fitació superior del nombre d'arestes	185
7.4	Comptar en geometria i teoria de grafs planaris	186
7.4.1	Arranjaments o disseccions planes per rectes	189
7.4.2	Triangulacions	190
7.4.3	Políedres i grafs planaris	191
7.5	Algunes tècniques per resoldre problemes en grafs planaris	195
7.5.1	Utilitzeu la fórmula d'Euler	196
7.5.2	Suposeu que no és cert o que és cert... i arribeu a contradicció	196
7.5.3	Utilitzeu la fita superior de la mida	197
7.5.4	Compteu les arestes de dues maneres	198
7.5.5	Passeu al graf dual	199
7.5.6	Reduïu el problema a grafs planaris	200
7.6	Problemes addicionals resolts	202
PART III: COMBINATÒRIA		213
8	Combinatòria elemental	215
8.1	Objectius	215
8.2	Problemes de combinatòria bàsica	215
8.3	Comptar en geometria: disseccions geomètriques	221
8.3.1	Disseccions per rectes	222
8.3.2	Disseccions per plans	228
8.3.3	Disseccions per circumferències	230
9	Principi d'inclusió-exclusió	233
9.1	Objectius	233
9.2	La fórmula d'inclusió-exclusió	233
9.3	Problemes combinatoris resolts pel principi d'inclusió-exclusió	235
9.4	Problemes resolts	235
10	Successions recurrents	247
10.1	Objectius	247
10.2	Preliminars teòrics i exemples	247
10.3	Estratègia de resolució de problemes combinatoris per recurrències	248
10.4	Resolució de successions recurrents per iteració	251
10.5	Resolució de successions recurrents per inducció	259
10.6	Resolució de successions recurrents lineals a coeficients constants	261
10.6.1	Cas homogeni	263
10.6.1.1	La successió de Fibonacci	264
10.6.2	Cas no homogeni	265
10.6.3	Un exemple	266
10.6.4	Problemes addicionals resolts	268

Apèndix	287
A Símbols utilitzats	289
B Fórmules i resultats diversos	291
B.1 Identitats aritmètiques	291
B.2 Fórmules i identitats combinatòries	291
B.3 Altres resultats	293
C Catàleg de grafs	295
C.1 Grafs bàsics	295
C.2 Grafs notables	297
Bibliografia	299



Pròleg

El llibre que teniu a les mans és producte d'una necessitat detectada per l'autor al llarg de la seva docència en l'assignatura Matemàtica Discreta a la Facultat d'Informàtica de Barcelona (FIB), de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), als alumnes de la qual aquesta obra s'adreça especialment. Pretenem que sigui una eina important per al seu aprenentatge i el llibre s'ha orientat expressament pensant en ells. També pot ser útil al professor d'assignatures similars o equiparables.

La *matemàtica discreta* és una disciplina bàsica important per a la fonamentació de la informàtica i, d'una manera especial, pel que fa a l'algorítmica i a la complexitat. En primer lloc, en aquestes àrees s'usen models formulats en termes de la *teoria de grafs*, que ofereix el llenguatge, els conceptes i els resultats necessaris. En segon lloc, per avaluar costos computacionals o costos d'emmagatzemament cal saber comptar. És convenient, doncs, adquirir habilitats per al raonament i manipulació combinatories per part de l'alumne. La *combinatòria* ens proporciona idees i tècniques en aquest sentit.

D'acord amb els estudis i alumnes als quals s'adreça primordialment, hem fet la nostra elecció de què és la *matemàtica discreta*. Davant la possible multiplicitat d'interpretacions, per a nosaltres matemàtica discreta és “teoria de grafs” i “combinatòria”, elecció potser discutible, per restrictiva, però que és la que s'ajusta millor a l'entorn on s'espera que aquest llibre pugui ser més útil.

Per què aquest llibre? La justificació principal és que el raonament combinatori no és fàcil i, a més, a diferència d'altres àrees més clàssiques de la matemàtica, com per exemple l'àlgebra o l'anàlisi, amb les quals l'alumne ja ha tingut contacte previ i hi està familiaritzat, l'alumne de primers cursos d'informàtica es troba amb uns continguts, per exemple, amb teoria de grafs, absolutament nous i que desconeix. Resoldre problemes pot no ser fàcil. Amb aquest llibre volem ajudar-lo en aquesta tasca no trivial.

El llibre està molt pensat per a l'alumne. Està orientat a ensenyar a resoldre problemes de matemàtica discreta, a adquirir tècniques i estratègies de resolució. No hem pretès presentar moltes resolucions de problemes. Més aviat hem preferit escollir exemples ben triats i no excessius. Atès l'enfocament de l'obra, els problemes s'han resolt amb

molt de detall, pràcticament com si l'autor estigués "explicant a la pissarra". Hem defugit expressament l'estil sec i concís, i de vegades escàs en explicacions i en detalls, cosa que certament pot haver originat un cert grau de repetició.

L'objectiu és manifestament didàctic. Es pretén ensenyar l'alumnat a resoldre problemes en aquesta àrea per mitjà de la presentació de diverses tècniques i de "bons consells", i sobretot intentar presentar o explicitar (que s'assoleixi o no és discutible) processos mentals de l'autor quan ha d'encarar la resolució de problemes de matemàtica discreta.

No es tracta la teoria corresponent més que al nivell de recordatori o resum teòric, bàsicament per establir-ne la notació i la nomenclatura i revisar els resultats principals que s'utilitzaran. Se suposa que, paral·lelament, el lector disposa de bibliografia i materials teòrics, als quals pot accedir, juntament amb les explicacions de classe. Cal tenir ben present que la notació i la terminologia no estan del tot estandarditzades. En aquest sentit es poden consultar els apèndixs i la bibliografia bàsica.

L'obra s'estructura en diverses parts. La primera conté un capítol introductor i un capítol dedicat a les demostracions per inducció, atesa la importància que té en matemàtica discreta. La segona està dedicada a la teoria de grafs. La tercera tracta diversos temes de combinatòria. Finalment, hi ha apèndixs d'utilitat i la bibliografia. El lector pot trobar informació addicional a

<http://www.edicionsupc.es/mdiscreta>

Si bé l'origen de l'obra és atendre les necessitats dels alumnes de la FIB, convé tenir present que la modelització en termes de la teoria de grafs és ben present en moltes altres àrees d'aplicació. Pot ser útil en enginyeria (xarxes de transport i investigació operativa), en telecomunicacions (xarxes de comunicacions) i en altres disciplines aplicades. Els alumnes de titulacions relacionades hi poden estar interessats. No cal dir que la capacitat de comptar també pot convenir a les més clàssiques estadística i càlcul de probabilitats (especialment els capítols de combinatòria), d'interès en tota classe d'estudis d'enginyeria i matemàtiques. Finalment, també els alumnes de les Facultats de Matemàtiques que cursen assignatures específiques de Matemàtica Discreta, Teoria de Grafs o Combinatòria es poden beneficiar d'aquesta obra, tot i que és possible, però, que els pugui convenir material més avançat.

Agraïments. L'autor agraeix l'ajut concedit per la UPC per a l'elaboració d'aquesta obra, en el marc de la Convocatòria d'Incentius per a Projectes d'Innovació Educativa UPC 1998 (concurs d'ajuts per a l'elaboració de material docent).

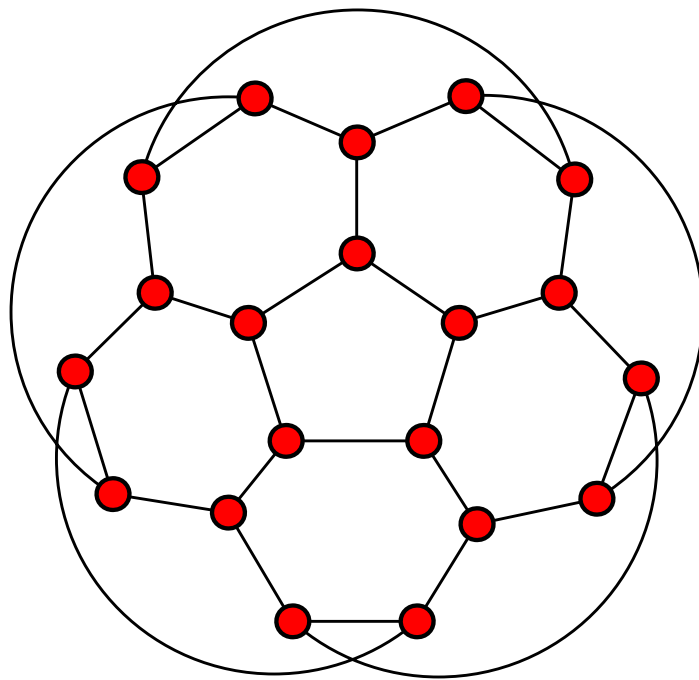
Joan Trias Pairó

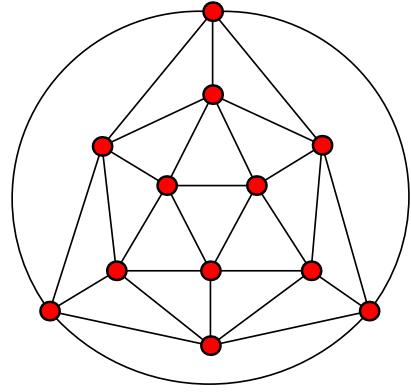
Departament de Matemàtica Aplicada II – Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, 19 d'abril de 2001.

Part I

Preliminars





Capítol 1

Introducció

1.1 Objectius

En aquest capítol introductori presentem algunes idees, en forma de recomanacions que es poden seguir (o no), amb l'objectiu que puguin ajudar el lector en el procés de resolució de problemes.

Com ja s'ha explicat al pròleg, aquest és un llibre essencialment adreçat a l'alumnat i pensat per a ell. En aquest capítol intentem il·lustrar mètodes generals d'atac i específics de cada tema. En els problemes triats el que volem és mostrar idees, procediments, estratègies de resolució de problemes.

1.2 Com treballar amb aquest llibre

Mirarem de donar alguns “consells” (tot i que l'aplicabilitat no està garantida) que puguin servir de guia per a la resolució de problemes. Es tracta de presentar diverses metodologies o estratègies resolutives que es poden intentar plantejar en diverses ocasions, depenent dels problemes.

Ara bé, el lector no pot pretendre esperar fórmules màgiques per a la resolució de problemes. Només les llargues hores de treball i d'intents de resolució de problemes concrets poden proporcionar l'entrenament necessari. A resoldre problemes només se n'aprèn resolent-ne. Aquí només en volem donar unes indicacions i unes tècniques, per si poden ser d'utilitat, sense altres pretensions.

No resulta possible presentar problemes “purs” o problemes tipus. Moltes vegades els problemes resulten barrejats o s'han de resoldre amb tècniques inesperades. Per

exemple, inesperadament, utilitzar la teoria d'arbres per resoldre qüestions que en la seva formulació no involucren el concepte d'arbre.

Recomanacions. Es recomana al lector que en un primer intent no llegeixi les solucions i que procuri resoldre l'exercici pel seu propi compte. Finalment, tant si ha resolt el problema com si no, es recomana consultar la resolució. En el primer cas, és també recomanable, ja que és possible que la solució presentada sigui diferent de la que el propi lector ha proposat i, en tot cas, en el curs de les resolucions es van intercalant indicacions de tècniques resolutives, “trucs” i idees generals sobre com utilitzar les eines disponibles, que poden ser útils. També es recomana intentar resoldre un problema per més d'un mètode, si és possible.

Prerequisits. Se suposa que el lector ha estudiat prèviament els aspectes teòrics del tema. Això ens permet presentar-ne només un resum recordatori, i no sempre, i algunes explicacions, resum que no té cap pretensió de desenvolupament teòric, i ens deslliura de la disciplina de presentar en progressió ortodoxa els resultats i conceptes, tal com exigiria la coherència d'una exposició teòrica. Per tant, en qualsevol moment és permès de parlar de tot i utilitzar tots els resultats i les idees disponibles. Tampoc no és aquest el lloc on el lector trobarà demostracions de resultats.

Hem intentat realitzar un cert agrupament per tipus o aspectes o problemes, tot i que és impossible de fer-ho en forma pura (cosa que és bona, ja que és interessant que, en la resolució d'un mateix problema, s'hi hagin de posar en joc resultats, tècniques i conceptes diversos).

El lector pot llegir l'obra ordenadament, o pels capítols que li interessin o bé de forma desordenada, segons el que li convingui, cosa que és possible pel fet que no es tracta d'un llibre de teoria. Pel que fa a aquest capítol, és recomanable rellegir-lo en ocasions diverses.

Per obtenir material addicional es pot consultar:

<http://www.edicionsupc.es/mdiscreta>

1.3 “Bons consells”

S'ofereixen en aquesta secció una col·lecció d'idees que poden ser útils (o no) en el procés de resolució de problemes. És difícil sistematitzar i proposar alguna recomanació general. Segurament n'hi ha més de possibles. Alguns dels exemples amb els quals s'intenta il·lustrar les idees o els “consells” solen contenir una barreja d'idees sobre el tema. Naturalment al llarg de l'obra s'aniran trobant molts exemples que permetran veure molts d'aquests consells “en acció”.

S'intentarà establir una certa “teoria” de resolució de problemes, amb tota la modèstia

que cal aplicar a un objectiu com aquest. No cal dir que això no deslliura el lector d'unes elevades dosis de dedicació i treball personal: estem lluny de donar aquí unes (impossibles) pautes infal·libles per resoldre problemes.

Un resum de “bons consells”. Resumim aquí el que desenvoluparem a la resta del capítol. Dibuixeu sempre, analitzeu amb quines eines compteu, formalitzeu bé el problema (de vegades una bona formalització aclareix el problema i fins i tot pot facilitar determinades manipulacions formals; en més d'una ocasió pot suggerir el camí a seguir; poseu en clar, si us és possible, què és el que us donen i què és el que heu de demostrar, en termes formals), analitzeu si es pot resoldre el problema per inducció (especialment si resulta refractari a qualsevol tractament), modelitzeu en termes de teoria de grafs planaris, intenteu resoldre suposant que la conclusió que s'ha de demostrar no és certa, compteu els objectes (arestes, per exemple) de més d'una manera possible (cosa que us pot portar a obtenir una relació útil), no oblideu mai el lema de les encaixades i els resultats més específics de la fórmula d'Euler i la fitació superior de la mida en el cas de grafs planaris.

Consell final. I finalment, i entrant ja més en l'àmbit de les actituds, perseguiu els problemes amb tenacitat i implacablement. Quan un problema “no surt”, no l'abandoneu. Repreneu-lo. Dibuixeu. Experimenteu. Poseu tots els ingredients del problema a la vista. Generalitzeu. Intenteu múltiples vies d'abordatge. Proveu amb inducció.

1.3.1 Dibuixeu sempre i experimenteu

Un graf és una estructura combinatòria abstracta. És un parell ordenat $G = (V, A)$, on V és un conjunt, el conjunt de vèrtexs, i A és el conjunt d'arestes, descripció de relacions existents entre vèrtexs. Amb això n'hi ha prou en principi per construir una teoria, raonar sobre grafs i resoldre problemes.

Ara bé, representar grafs en el pla pot resultar d'un ajut inestimable en la resolució de problemes, òbviament *combinant dibuix amb argumentació*. La teoria de grafs pot ser molt visual (i fins i tot podem buscar representacions estètiques dels grafs!). Representacions gràfiques adequades poden posar de manifest relacions, simetries, propietats que poden facilitar experimentar, resoldre un problema, formular una conjectura o buscar exemples de grafs satisfent determinades propietats.

Dit això, ha de quedar molt clar, però, que *un dibuix no és una demostració ni la pot suplir*. Cal esforçar-se a trobar i produir l'argumentació formal suficientment convincent per a la resolució d'un problema.

Alguns problemes típics en què dibuixar és un ajut inestimable són, per exemple, els de tipus enumeratiu com el següent.

Obteniu, llevat d'isomorfisme, tots els grafs de 4 vèrtexs.

Resolució

Obtindrem tots els grafs possibles considerant els nombres d'arestes m possibles. El màxim és el nombre d'arestes corresponent al graf complet K_4 , per al qual hi ha $\binom{4}{2} = 6$ arestes. Per tant, $0 \leq m \leq 6$. Estudiarem cada cas per separat. L'anàlisi que en farem serà una barreja combinada de dibuix i argumentació. Això també ens permetrà assegurar que no ens deixem cap cas d'entre els possibles.

Observem que el grau de qualsevol vèrtex genèricament ha de ser menor o igual que $|V| - 1 = 4 - 1 = 3$, i també òbviament és inferior o igual al nombre d'arestes disponibles en el graf. Per exemple, si $m = 2$, aleshores el grau màxim és 2. A més, si indiquem per g_1, g_2, g_3, g_4 els graus dels vèrtexs del graf, es compleix, en aplicació del lema de les encaixades, $2m = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$.

Cas $m = 0$. En aquest cas hi ha un únic graf, el graf nul N_4 , que es representa a la figura 1.1 (esquerra).

Cas $m = 1$. És obvi que només hi ha una possibilitat, $G = K_2 \cup N_2$, que es representa a la figura 1.1 (dreta).



Figura 1.1



Cas $m = 2$. És pràcticament obvi que només hi ha dues possibilitats. En tot cas podem sistematitzar l'argumentació atenent els casos en els quals el grau màxim és 1 o bé 2. Els grafs corresponents són: $G_1 = K_2 \cup K_2$ i $G_2 = T_3 \cup N_1$.

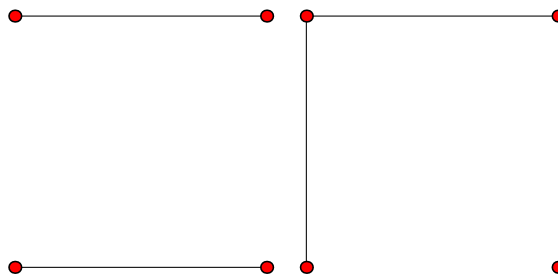


Figura 1.2

Cas $m = 3$. En el cas que existeixi un vèrtex de grau 3, ha de connectar-se a la resta de vèrtexs i així esgotem la provisió d'arestes, amb la qual cosa resulta el graf estrella $G_1 = K_{1,3}$. Si no hi ha vèrtexs de grau 3, del lema de les encaixades, és

a dir, $6 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$, resulten dues possibilitats per a la seqüència de graus (combinadament amb el fet que el nombre de vèrtexs de grau senar és parell): 2,2,2,0; 1,2,2,1. Els grafs corresponents són $G_2 = N_1 \cup C_3$, $G_3 = T_4$. A la figura 1.3 en veiem els resultats.

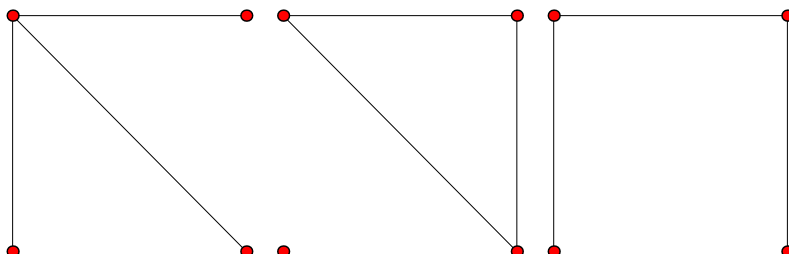


Figura 1.3

Cas $m = 4$. En aquest cas és $g_i \leq 3$, per a tot i , i $8 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$. El nombre màxim de vèrtexs de grau 3 és 2. Ara bé, tampoc no hi pot haver 2 vèrtexs de grau 3, ja que aleshores les seqüències de graus serien 3,3,1,1; 3,3,2,0, que són impossibles (la primera, perquè qualsevol dels vèrtexs de grau 1 hauria de ser adjacent als dos vèrtexs de grau 3, cosa que és absurda; la segona, perquè el vèrtex de grau 0 hauria de ser adjacent als dos vèrtexs de grau 3, cosa igualment absurda –també es pot veure eliminant el vèrtex de grau 0 i observant que no es pot complir la condició bàsica sobre el grau d'un vèrtex, $g(v) \leq |V| - 1$). Per tant, hi pot haver com a molt 1 vèrtex de grau 3, cas en el qual existeix un graf amb les característiques requerides, el $G_1 = N_1 + (N_1 \cup T_2)$.

Si no hi ha vèrtexs de grau 3, aleshores la seqüència ha de ser 2,2,2,2, cas en el qual $G_2 = C_4$. El resultat d'aquesta anàlisi es pot veure a la figura 1.4. El lector pot comprovar que les altres alternatives possibles de col·locació d'arestes a nivell gràfic es tradueixen en grafs isomorfs als dos indicats.

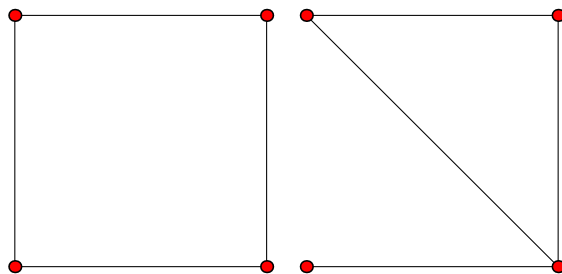


Figura 1.4

Cas $m = 5$. Atès que $g_i \leq 3$ i que $10 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$, no hi pot haver vèrtexs de grau 0. La suma no pot ser 10 si no hi ha cap vèrtex de grau 3, dels quals n'hi ha d'haver un mínim de 2. Hem de descartar la possibilitat 3,3,3,1 (el vèrtex de grau 1 hauria de ser de grau 3). També es pot veure, alternativament, que no n'hi ha cap amb aquesta seqüència eliminant el vèrtex de grau 1 i observant que restaria un graf de 3 vèrtexs amb un mínim d'un vèrtex de grau 3, que és impossible). Resta només la seqüència

3,3,2,2. Els vèrtexs de grau 3 han de ser adjacents a la resta (vegeu la figura 1.5), per la qual cosa l'únic graf és $G = N_2 + K_2$.

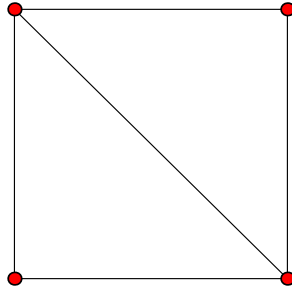


Figura 1.5

Cas $m = 6$. Correspon al graf complet $G = K_4$.

Una altra situació en què dibuixar resulta útil és en problemes d'obtenir grafs amb una determinada seqüència de graus. Bons esquemes ajuden a la sistematització.

Problema 1.2

Obteniu tots els grafs amb seqüència de graus 1,2,3,2,2.

Resolució

Suposem que existeix algun graf G amb aquestes característiques. Vegem quina ha de ser la seva estructura. Si en trobem algun, això demostrarà que n'hi ha; si s'arriba a alguna contradicció, quedarà provat que no n'hi ha cap.

De fet, amb una curta manipulació de dibuix s'arriba fàcilment als grafs de la figura 1.6, que satisfan la condició, cosa que demostra que n'existeixen.

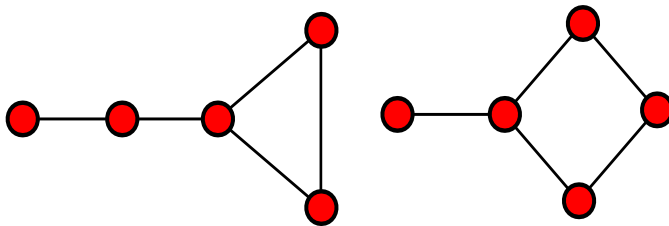


Figura 1.6

Mètode 1. Una idea és considerar un(s) vèrtex(s) d'un grau determinat, eliminar-lo(s) i passar així a una seqüència amb un nombre inferior de vèrtexs i , per tant, a un problema més senzill. Es resol el problema més senzill i després es fa un procés de reconstrucció.

Sigui w el vèrtex de grau 1. Hi ha dos casos possibles, segons si w és adjacent a un vèrtex de grau 2 (cas 1) o a un vèrtex de grau 3 (cas 2). Considerem $G' = G - w$. Depenent dels casos anteriors, hi ha dues possibilitats:

Cas 1. La seqüència de graus de G' és 1,3,2,2, essent el vèrtex de grau 1 el que és adjacent a w en G , en el qual és de grau 2. Aquest vèrtex s'indica en blanc a la figura 1.7.

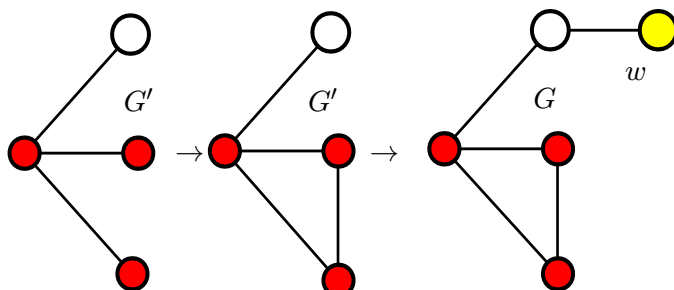


Figura 1.7

Cas 2. La seqüència de graus de G' és 2,2,2,2, essent un d'aquests vèrtexs de grau 2 el que és adjacent a w en G , en el qual és de grau 3. El graf G' és C_4 . La reconstrucció és immediata, com es mostra a la figura 1.8.

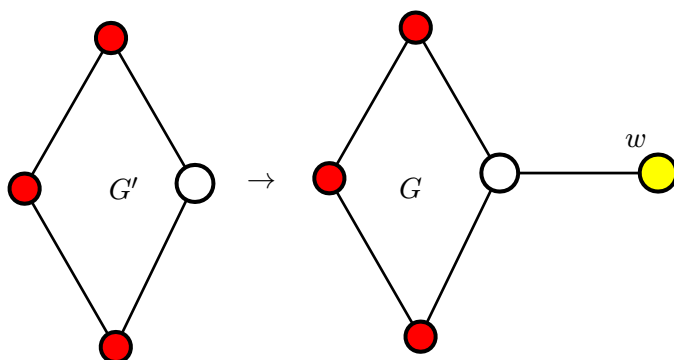


Figura 1.8

D'aquesta manera s'arriba als dos grafs de la figura 1.8. Podem veure que són grafs essencialment diferents, és a dir, no isomorfs de diverses maneres: per exemple, veient que l'estructura dels cicles no coincideix, ja que un conté un C_3 , cosa que no ocorre amb l'altre. També es pot veure raonant sobre graus i adjacències. En efecte, en un dels grafs els únics vèrtexs de graus 1,3 són adjacents: també ho haurien de ser en l'altre, cosa que no es produeix.

En un segon mètode d'anàlisi, que no desenvoluparem, podríem considerar el paper de l'únic vèrtex de grau 3, que ha de ser adjacent a tres dels vèrtexs restants, cosa que dóna lloc a la consideració de dos casos: o bé el vèrtex de grau 3 és adjacent als tres vèrtexs de grau 2, o bé és adjacent al vèrtex de grau 1 i a dos vèrtexs de grau 2. El lector completarà l'anàlisi.

1.3.2 Modelització de situacions en termes de grafs

Determinats problemes poden formular-se en termes de teoria de grafs. Això significa que es pot trobar un model en termes d'aquesta teoria que permeti estudiar el problema en qüestió i aplicar-hi conceptes i resultats.

Sempre que tinguem un problema determinat que involucri objectes i relacions entre ells es pot pensar a descriure un graf que en faci de model (cosa que no garanteix, però, resultats finals).

La modelització abasta molts casos: problemes de reunions, problemes amb políedres, problemes de geometria combinatòria, com es pot veure en diverses parts de l'obra (capítols de grafs planaris, de combinatòria elemental i de recurrències).

Com a exemple, considerem un problema geomètric en el qual tenim un polígon, com el de la figura 1.9, i una triangulació, és a dir, una descomposició del polígon en reunió de triangles no solapants mitjançant l'afegit de diagonals internes.

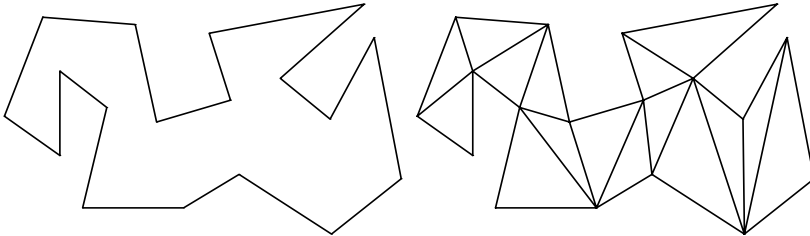


Figura 1.9

Es poden plantejar preguntes com la de comptar el nombre de triangles o de diagonals en termes del nombre de costats del polígon. Utilitzar relacions vàlides per a grafs planaris ens podria ser útil. Però, on és el graf planari? De manera associada al problema formulem un graf planari, que serà el model en termes de grafs de l'estructura triangulada, i definim així el graf de la triangulació, com es veu a la figura 1.10. No seguirem per aquest camí, que es desenvolupa amb detall al capítol de grafs planaris.

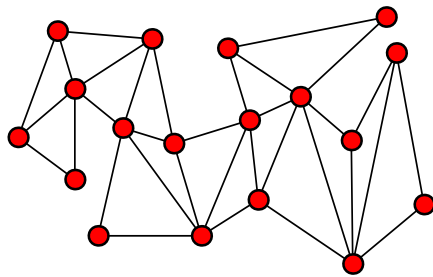


Figura 1.10

En la majoria de casos es tracta de problemes que no són de teoria de grafs, però que per mitjà de la formulació del model es converteixen en un problema de teoria de grafs. És també un cas de conversió d'un problema en un altre. En una secció posterior en

veurem exemples, tant des d'un problema no de grafs per al qual cal formular un model de la teoria de grafs com des d'un problema de l'interior de la teoria de grafs, és a dir, de grafs, que es pot convertir en un altre. També hi haurà força problemes de combinatòria, majorment geomètrics, que es convertiran en altres problemes per via de la modelització.

En aquest apartat veiem un exemple de modelització utilitzant grafs.

Problema 1.3

En una festa assisteixen 5 parelles i es produeixen salutacions entre els assistents. Se suposa que no se saluden entre ells els components de cada parella. A la sortida, en Jordi pregunta a cada un de la resta dels assistents quantes persones l'han saludat i rep 9 respostes diferents.

Podem saber quines són les parelles que assisteixen a la festa? Dit d'una altra manera, quantes persones ha saludat la parella de la persona que n'ha saludat n ?

Quantes persones ha saludat en Jordi i quantes n'ha saludat la seva parella?

Resolució

Considerem un graf $G = (V, A)$ com a model de la situació, en el qual els vèrtexs són les persones assistents a la reunió i hi ha una aresta que uneix x i y , si x i y se saluden.

A l'esquema de la figura 1.11 (esquerra) assignem a cada vèrtex el nombre de salutacions que ha realitzat la persona que simbolitza, nombre que correspondrà al grau del vèrtex, llevat del que simbolitza en Jordi (J), el grau del qual desconeixem.

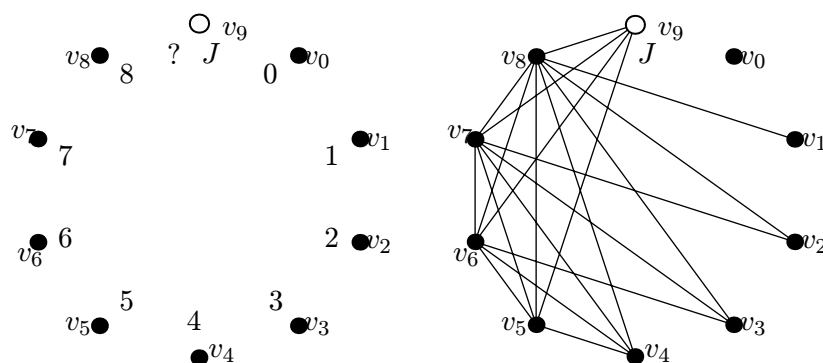


Figura 1.11

Atès que ningú no se saluda a si mateix ni saluda l'altre component de la seva parella, tenim $\forall v \in V : g(v) \leq |V| - 2 = 10 - 2 = 8$

i, en conseqüència, havent consultat 9 invitats i havent rebut 9 respostes diferents, aquestes han de ser les següents: $0, 1, 2, \dots, 8$.

Atès que $g(v_0) = 0$ i $g(v_8) = 8$, el vèrtex v_8 és adjacent a la resta de vèrtexs

$v_1, v_2, \dots, v_6, v_7, v_9$. Com que $g(v_1) = 1$ i ja existeix una aresta incident amb v_1 , queden exclosos de poder ser adjacents amb v_7 els vèrtexs v_0 i v_1 ; per tant, v_7 és adjacent a $v_2, v_3, \dots, v_6, v_8, v_9$. Raonant de forma anàloga s'arriba a establir de manera completa l'estructura d'adjacències del graf, que és la que s'indica a l'esquema de la figura 1.11 (dreta):

A partir d'aquí poden contestar fàcilment les preguntes que es formulen. Si les parelles s'indiquen amb la notació $a_1 - b_1, \dots, a_5 - b_5$, aleshores la distribució de parelles és la que es mostra a la figura 1.12.

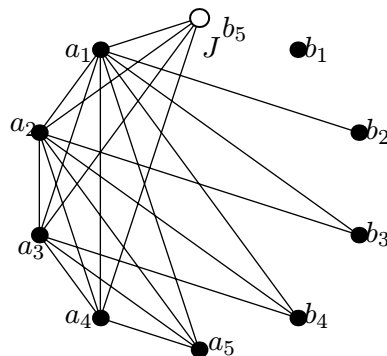


Figura 1.12

En efecte, si a_1 és v_8 , aleshores, com que v_8 és adjacent a tots els vèrtexs llevat del v_0 , cap no pot ser b_1 ; per tant, v_0 és b_1 . Si a_2 és v_7 , per un argument similar a l'anterior només v_0 i v_1 podrien ser b_2 ; cal excloure v_0 (que és b_1) i, per tant, v_1 és b_2 . De manera anàloga es deduiria quines són les parelles que queden per determinar.

Finalment, v_4 és la parella d'en Jordi i ha saludat, per tant, 4 persones.

1.3.3 No oblideu mai el lema de les encaixades... ni el seu corollari

Un dels resultats de la teoria de grafs més utilitzat és el lema de les encaixades, que convé tenir sempre present, com a possible font de relacions.

El lema de les encaixades és $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$. Observeu que es pot utilitzar per obtenir el nombre d'arestes, si tenim la seqüència de graus, o bé per obtenir relacions d'interès. D'aquí es deriva un corollari molt útil que afirma que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell.

Vegem-ne alguns exemples d'ús.

En els propers exemples utilitzem el lema de les encaixades per obtenir el nombre d'arestes.

Quantes arestes té un graf 3-regular d'ordre 6?

Resolució

Sigui $A = (V, A)$ un graf 3-regular d'ordre $n = |V| = 6$. La hipòtesi significa que tots els vèrtexs són del mateix grau, 3 en aquest cas, és a dir, que $g(v) = 3, \forall v \in V$. Quan es coneix tota la seqüència de graus, com és el cas d'aquest enunciat, es pot obtenir el nombre d'arestes utilitzant el lema de les encaixades:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} 3 = 3|V| = 18.$$

Per tant, $|A| = 9$.

Problema 1.5

Demostreu que el nombre d'arestes d'un graf 4-regular és el doble del nombre de vèrtexs.

Resolució

Aquest és un problema en el qual coneixem la seqüència de graus. Ho podem utilitzar si escrivim i concretem la fórmula del lema de les encaixades, com segueix a continuació: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 4n$. Per tant, $|A| = 2n$.

A l'exemple següent l'utilitzem per obtenir una relació que ens sigui d'utilitat. És també un exemple d'ús del corollari del lema de les encaixades.

Problema 1.6

Proveu que un graf regular de grau senar és d'ordre parell.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf regular. Sigui r el grau comú de tots els vèrtexs, és a dir, $\forall v \in V : g(v) = r$. Per hipòtesi, r és senar. Cal provar que $n = |V|$ és parell.

Apliquem el lema de les encaixades:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} r = r|V|.$$

Per tant, $r|V|$ és parell. Essent r senar, ha de ser $|V|$ parell.

Mètode alternatiu. També es pot resoldre de manera més fulminant. Si existís un graf d'ordre senar amb la propietat de ser regular de grau senar, aleshores el nombre de

vèrtexs de grau senar (tots) seria senar, cosa que contradiu el corollari del lema de les encaixades, que afirma que el nombre de vèrtexs de grau senar és parell.

Un nou exemple d'ús del corollari:

Problema 1.7

Estudieu si pot existir un graf amb la seqüència de graus 5,4,3,2,1,6,7,5.

Resolució

Un graf amb aquestes característiques tindria un nombre senar de vèrtexs de grau senar, cosa que contradiu un conegut corollari del lema de les encaixades. Per tant, és impossible.

També es podria arribar directament a una contradicció aplicant el lema de les encaixades, com es pot veure a continuació en aquest cas concret, suposant que existís un graf $G = (V, A)$ amb aquesta seqüència de graus:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 5 + 4 + 3 + 1 + 6 + 7 + 5 = 31.$$

El membre de la dreta de la fórmula és senar, cosa que contradiu el que s'està dient al membre de l'esquerra, nombre parell.

Problema 1.8

Poden existir grafs 5-regulars d'ordre 13?

Resolució

No pot existir cap graf d'aquestes característiques, ja que el nombre de vèrtexs de grau senar (5) seria senar (13), la qual cosa és contrària a allò que afirma el corollari al lema de les encaixades.

1.3.4 Formalitzeu

Intentar sempre formalitzar i expressar notacionalment, en termes de notació precisa, el que teniu i el que us demanen és més que recomanable. Moltes vegades la notació precisa pot ajudar (fins i tot guiar, facilitar o induir!) el raonament; tot depèn naturalment del tipus de problema, però sempre és convenient i pot resultar d'ajut. Establir notació en un problema pot ser d'ajut per “tenir tots els ingredients” de què disposem a la vista ...

La formalització pot ajudar a tractar possibles complicacions d'enunciats en els quals el que s'ha de provar es descriu verbalment, en llenguatge natural. El següent n'és un bon exemple.

Vegem un exemple en el qual una certa formalització del problema ens pot guiar cap a la resolució. L'exemple també encaixaria a la subsecció 1.3.5

Problema 1.9

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $|V| \geq 13$ amb vèrtexs de graus 7 o 8. Proveu que hi ha com a mínim 7 vèrtexs de grau 8 o bé, com a mínim, 8 vèrtexs de grau 7.

Resolució

Siguin

$$V_7 = \{v \in V \mid g(v) = 7\}, \quad V_8 = \{v \in V \mid g(v) = 8\}.$$

Evidentment, per hipòtesi tenim $V = V_7 \cup V_8$. Volem veure que es compleix: $|V_7| \geq 8$ o $|V_8| \geq 7$.

Suposem que la conclusió no es compleix, és a dir, que es compleix

$$|V_7| < 8 \quad \text{i} \quad |V_8| < 7,$$

o bé, equivalentment,

$$|V_7| \leq 7 \quad \text{i} \quad |V_8| \leq 6.$$

Ara bé, com que en un graf el nombre de vèrtexs de grau senar és sempre parell, no pot ser $|V_7| = 7$ i, per tant, és $|V_7| \leq 6$.

Però aleshores arribem a una contradicció, ja que ha de ser

$$13 \leq |V| = |V_7| + |V_8| \leq 6 + 6 = 12.$$

1.3.5 Supposeu que no es compleix el que es demana...

Vegem-ne uns exemples il·lustratius, tot i que en el curs de l'obra se'n presenten molts més.

Els dos exemples que segueixen són també bons exemples per a l'apartat anterior 1.3.4.

Problema 1.10

Sigui G un graf de 19 vèrtexs amb 3 components connexos. Proveu que almenys un dels components té un mínim de 7 vèrtexs.

Resolució

Sigui V el conjunt dels vèrtexs i sigui $|V| = 19$. Si G_1, G_2, G_3 són els components connexos de G i V_1, V_2, V_3 , respectivament, els conjunts de vèrtexs, aleshores tenim $|V_1| + |V_2| + |V_3| = |V| = 19$.

Suposem que la condició que es vol demostrar no es compleix. Es tractarà d'arribar a alguna contradicció.

Si no es complís l'afirmació que es vol demostrar, seria

$$|V_1| < 7, \quad |V_2| < 7, \quad |V_3| < 7,$$

és a dir,

$$|V_1| \leq 6, \quad |V_2| \leq 6, \quad |V_3| \leq 6,$$

d'on

$$19 = |V_1| + |V_2| + |V_3| \leq 6 + 6 + 6 = 18,$$

que és absurd.

Problema 1.11

Sigui T un arbre amb un nombre parell d'arestes. Proveu que T té almenys un vèrtex de grau parell.

Resolució

En primer lloc, vegem què tenim, què podem escriure o afirmar a partir o bé de la hipòtesi, o bé de la teoria general. Mirarem d'utilitzar-les per obtenir informació sobre paritats, ja que d'això tracta el problema.

En primer lloc, establim la notació. Sigui $T = (V, A)$.

En segon lloc, com que T és arbre, és $|A| = |V| - 1$, d'on $|V| = |A| + 1$, senar, ja que per hipòtesi $|A|$ és parell. En tercer lloc, pel lema de les encaixades, podem escriure $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$.

Suposem que no es compleix el que s'ha de demostrar. Això equival a dir que cap dels vèrtexs és de grau parell. Vegem que s'arriba a una contradicció.

Si tot vèrtex és de grau senar, aleshores el grau és de la forma típica de tot nombre senar, és a dir, $g(v) = 2k_v - 1$, per a un k_v convenient associat al vèrtex v , d'altra banda arbitrari. Substituïm al lema de les encaixades i resulta:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} (2k_v - 1) = 2 \sum_{v \in V} k_v - \sum_{v \in V} 1 = 2 \sum_{v \in V} k_v - |V|.$$

D'on $|V| = 2 \sum_{v \in V} k_v - 2|A|$ és parell, per ser diferència de parells. Es produeix, doncs, contradicció amb el fet que $|V|$ sigui senar.

Per tant, algun dels vèrtexs ha de tenir grau parell.

Problema 1.12

Proveu que tot graf planari té un vèrtex de grau menor o igual que 5.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf planari. S'ha de provar que *existeix* un vèrtex $w_0 \in V$ tal que $g(w_0) \leq 5$.

Suposem que la condició que es vol demostrar no es compleix. Es tractarà d'arribar a alguna contradicció.

El que hem de fer, doncs, és negar la propietat que es vol a demostrar: suposem, doncs, que per a *tot* vèrtex $v \in V$ es compleix la negació de l'afirmació sobre el grau, és a dir, $g(v) \not\leq 5$. Suposem, doncs, que per a tot vèrtex v és $g(v) > 5$. Ara bé, atès que els graus són enters, la condició anterior equival a $g(v) \geq 6, \forall v \in V$.

Apliquem el lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V} 6 \geq 6|V|$. D'aquí deduïm $3|V| \leq |A|$. Ara bé, essent G planari i $|V| \geq 3$, és $|A| \leq 3|V| - 6$ i, combinant les dues desigualtats, resulta $3|V| \leq 3|V| - 6$, i d'aquí la contradicció $0 \leq -6$.

1.3.6 Supposeu que el graf és connex...

... O treballem sobre els components connexos.

Depenent del problema, en alguns casos pot donar bon resultat provar resultats o estudiar un problema determinat per al cas que el graf sigui connex. Després, si l'enunciat fa referència a un graf general, es pot considerar el graf com a reunió de components connexos i estendre el resultat al graf general.

Un exemple el trobem a la secció 4.2. Es caracteritzen els grafs 2-regulars. Per a això es fa un estudi del problema en el cas connex i posteriorment se n'estén el resultat al cas no connex, aplicant a cada component connex el que s'ha provat per a grafs connexos.

Vegem-ne un exemple addicional. Considerem l'enunciat següent. *Sigui G un graf planari que no conté cicles de longitud 3. Proveu que G conté algun vèrtex de grau inferior o igual a 3.* En aquest cas, podem demostrar el que es demana suposant que

el graf és connex, ja que si no ho fos demostrariem l'afirmació per als components connexos. En aquest cas, això és factible perquè un graf és planari si, i només si, ho són els components connexos, i un graf no té cicles C_3 si, i només si, no en tenen els components connexos. Aquestes propietats del graf les hereten els components connexos, considerats com a grafs. Aquest exemple es resoldrà al capítol 7, dedicat a grafs planaris.

Un exemple d'aquesta estratègia el podem trobar en la demostració de la fórmula d'Euler per a grafs planaris no connexos. Es demostra separatament la fórmula per al cas connex, cosa que no fem aquí, ja que forma part de la teoria estàndard usual.

Vegem el cas de la generalització de la fórmula d'Euler.

Problema 1.13

Sigui $G = (V, A)$ un graf planari amb m components connexos. Formuleu i demostreu el resultat anàleg a la fórmula d'Euler per a aquest tipus de graf.

Indicació. Apliqueu la fórmula d'Euler a cadascun dels components.

Resolució

Suposem que G conté v vèrtexs, a arestes, c cares, i que els m components connexos són C_1, \dots, C_m i contenen, respectivament, v_i, a_i, c_i vèrtexs, arestes i cares, per a cada $i = 1, \dots, m$.

Evidentment, es compleix

$$v = \sum_{i=1}^m v_i, \quad a = \sum_{i=1}^m a_i, \quad c = \sum_{i=1}^m c_i - (m - 1),$$

ja que la cara no fitada s'ha comptat m vegades repetidament, una per a cada component connex.

Per tant,

$$\begin{aligned} v + c &= \sum_{i=1}^m v_i + \sum_{i=1}^m c_i - (m - 1) = \sum_{i=1}^m (v_i + c_i) - (m - 1) \\ &= \sum_{i=1}^m (a_i + 2) - (m - 1) = \sum_{i=1}^m a_i + 2m - m + 1 = a + m + 1. \end{aligned}$$

En conseqüència, la generalització és

$$v + c = a + m + 1.$$

Observem que si $m = 1$, cas connex, s'obté la fórmula que ja teníem: $v + c = a + 2$.

1.3.7 Proveu amb inducció

Desesperats? Si no sabeu què més fer, proveu amb inducció.

Al capítol 2, dedicat a la inducció, s'han presentat exemples molt diversos d'ús del mètode inductiu per demostrar propietats i resoldre, per tant, problemes plantejats. També se'n poden trobar molts exemples addicionals a la resta dels capítols. Remetem el lector al capítol esmentat i a la resta de l'obra.

Malgrat que moltes vegades el mètode ens pot permetre arribar a la demostració d'un resultat determinat, no s'ha de creure que sempre funcionarà. Vegem un exemple en què sembla problemàtic utilitzar el mètode d'inducció per demostrar un resultat, concretament el següent, resolt posteriorment al capítol 6, dedicat a arbres:

Sigui T un arbre tal que cada vèrtex adjacent a una fulla és de grau com a mínim 3. Proveu que existeixen dues fulles que són adjacents a un mateix vèrtex.

El lector pot intentar-ho per comprovar les complicacions que es presenten.

1.3.8 Compteu els objectes de més d'una manera...

...si és possible.

En més d'una ocasió pot ser útil intentar comptar objectes (per exemple, les arestes d'un graf) per més d'un mètode per tal d'arribar a obtenir *relacions que ens siguin útils*. Per exemple, el lema de les encaixades ens pot proporcionar una manera de calcular el nombre d'arestes. Si estem en un problema d'arbres, aleshores tenim una altra relació, que podem combinar amb la primera, que és $|A| = |V| - 1$. Si estem treballant amb un graf planari, podem comptar addicionalment les arestes comptant les arestes de la frontera de cada cara, per exemple.

Vegem-ne un parell d'exemples. Se'n presentaran més al capítol de grafs planaris.

Problema 1.14

Sigui $G = (V, A)$ un graf planari 3-regular de cares poligonals (la no fitada inclosa) que són hexàgons o quadrilàters. Proveu que té exactament 6 quadrilàters.

Resolució

Establím la notació: v és el nombre de vèrtexs, a és el nombre d'arestes, c el nombre de cares (amb la no fitada inclosa). Atès que hi ha exactament dos tipus de cares, indiquem per n_4 el nombre de quadrilàters i per n_6 el nombre d'hexàgons. Òbviament, $c = n_4 + n_6$.

Observeu que el fet que la cara no fitada també hagi de ser poligonal implica que el graf és connex.

Comptem les arestes de dues maneres diferents.

En primer lloc, com a arestes “aportades” pels vèrtexs, és a dir, comptant, per a cada vèrtex, el nombre d’arestes que hi són incidents. Això no és res més que aplicar el lema de les encaixades, és a dir, $2a = \sum_{w \in V} g(w) = \sum_{w \in V} 3 = 3v$, d’on resulta una primera relació, $v = \frac{2}{3}a$.

En segon lloc, com a arestes “aportades” per la frontera de cada cara. D’aquesta manera comptarem les arestes per duplicat, ja que cada aresta és comuna a exactament dues cares, i és comptada una vegada per a cada cara. Aquesta propietat de les arestes es pot afirmar per l’estructura poligonal de les cares, de la qual deriva l’absència d’arestes-pont. Tenim, per tant, $6n_6 + 4n_4 = 2a$, d’on $a = 3n_6 + 2n_4$.

Ara podem reescriure en termes de n_4, n_6 la primera relació que hem obtingut anteriorment: $v = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}(3n_6 + 2n_4)$.

Observem que tenim c, v, a expressats en termes de n_4, n_6 . Podem substituir aquestes expressions a la fórmula d’Euler, $c + v = a + 2$:

$$(n_4 + n_6) + \frac{2}{3}(3n_6 + 2n_4) = (3n_6 + 2n_4) + 2.$$

Després de les simplificacions pertinents s’arriba a la conclusió esperada: $n_4 = 6$.

Problema 1.15

Sigui G un graf (simple) connex d’ordre n que conté exactament k cicles arestodisjunts, és a dir, que no comparteixen arestes. Calculeu el nombre d’arestes en termes de n, k .

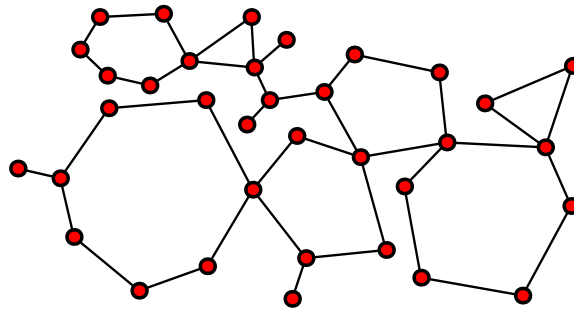


Figura 1.13

Resolució

En primer lloc, establim la notació. Sigui $G = (V, A)$ i siguin $n = |V|$, $m = |A|$.

Eliminem de cada cicle exactament una aresta. Quan en un cicle eliminem una aresta no es produeix desconexió en el graf, ja que si existia un recorregut utilitzant l’aresta

eliminada, sempre es pot considerar el recorregut alternatiu en què l'aresta se substitueix per la resta del cicle; per tant, d'aquesta manera es manté la connexió. Ara bé, amb l'eliminació d'una aresta, el cicle desapareix. Per la hipòtesi de l'arestodisjunció, l'eliminació d'exactament k arestes, tal com s'ha indicat, produeix l'eliminació dels exactament k cicles del graf.

Si les arestes són $\{a_1, \dots, a_k\}$, aleshores $G' = G - \{a_1, \dots, a_k\}$ és connex i acíclic, per tant, és un arbre i li és aplicable el resultat de la teoria d'arbres, que diu que $|A'| = |A(G')| = |V(G')| - 1 = |V(G)| - 1 = n - 1$. D'altra banda, com que hem eliminat exactament k arestes per eliminar els exactament k cicles (aixó és així per l'arestodisjunció), resulta $|A'| = |A| - k = m - k$. Finalment, igualant, resulta $m = |A'| + k = n - 1 + k$.

Vegeu com hem comptat un mateix objecte, les arestes, de dues maneres diferents per obtenir una relació.

Si els cicles no fossin arestodisjunts, aleshores no podríem aplicar el raonament, ja que l'eliminació d'una aresta pot comportar la disminució d'un cicle o més. Vegeu l'exemple senzill de la figura 1.14.

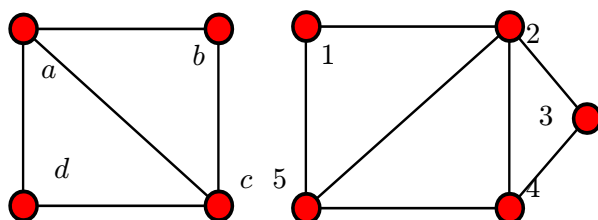


Figura 1.14. L'eliminació de l'aresta ac destrueix 2 cicles. Els cicles $2 - 3 - 4$, $2 - 4 - 5$, $1 - 2 - 4 - 5$ comparteixen l'aresta $2 - 4$, l'eliminació de la qual destrueix els cicles.

Cas arbitrari. Es pot considerar una extensió del problema al cas arbitrari, no necessàriament connex, d'ordre n , amb exactament k cicles arestodisjunts i amb r components connexos. L'argumentació funciona exactament igual: amb l'eliminació d'exactament una aresta de cadascun dels k cicles s'arriba a crear un bosc d'ordre n , amb r components connexos, cas en el qual sabem per la teoria general d'arbres que el nombre d'arestes és $n - r$. Per tant, pel que fa al graf inicial, és $m = n - r + k$.

1.3.9 Convertiu un problema en un altre

Veurem, per mitjà dels exemples, diverses modalitats de reducció d'un problema a un altre, del mateix tipus o de tipus diferent.

1.3.9.1 Passeu al graf complementari

En aquests casos que veurem, el problema es converteix en un altre del mateix tipus, però més fàcil de resoldre.

Problema 1.16

Obteniu els grafs 3-regulars d'ordre 6.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'aquestes característiques, amb $n = 6$ i amb seqüència de graus $3, 3, 3, 3, 3, 3$.

Amb l'objectiu de veure com podem abordar el problema, apliquem el lema de les encaixades per obtenir el nombre d'arestes: $|A| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} g(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 3 = 9$. No sembla fàcil veure com es poden distribuir aquestes 9 arestes ni com reduir l'estudi combinatori que podria derivar de la consideració de la seqüència de graus donada.

En aquests casos, es pot intentar passar al complementari, amb el benentès que l'èxit no està mai garantit: només si en el complementari el problema resulta més fàcil de resoldre.

Considerem, doncs, el complementari $H = G^c$, la seqüència de graus del qual serà $g_H(w) = g_{G^c}(w) = n - 1 - g_G(w)$, és a dir, en aquest cas, $2, 2, 2, 2, 2, 2$. Podem fer servir ara la caracterització de grafs 2-regulars, problema que hem estudiat al capítol dedicat a connexió, a l'apartat 4.2. Sabem que H és un cicle o reunió de cicles, segons si és connex o no, respectivament.

Per tant, tenim dos casos:

H és connex. Aleshores és un cicle, és a dir, $H = C_6$, d'on $G_1 = (H^c)^c = C_6^c$. A la figura 1.15 (subfigura central) podem veure el graf corresponent; a la subfigura dreta tenim el mateix graf, i així resulta que és $G_1 = C_3 \times T_2$.

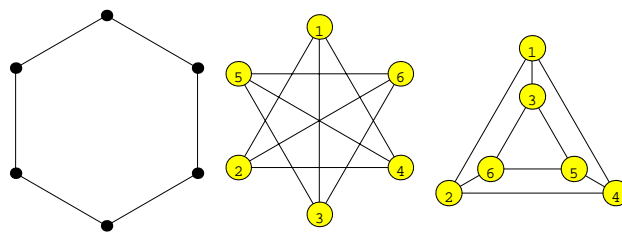


Figura 1.15

H no és connex. Aleshores és reunió de dos cicles (ja que un cicle té, com a mínim, 3 vèrtexs), i necessàriament és $H = C_3 \cup C_3$. En aquest cas, és $G_2 = (H^c)^c = (C_3 \cup C_3)^c = C_3^c + C_3^c = N_3 + N_3 = K_{3,3}$.

Per tant, llevat d'isomorfisme, hi ha dos grafs 3-regulars de 6 vèrtexs: $K_{3,3}$ i $C_3 \times T_2$. El punt essencial d'aquesta resolució ha estat passar al complementari i convertir, així, el problema en un del mateix tipus, però més abordable.

Problema 1.17

Obteniu els grafs amb 20 vèrtexs i 187 arestes.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb aquestes característiques. Tractar el problema directament no sembla massa còmode, justament per l'alt nombre d'arestes, que s'acosta al màxim possible, ja que el màxim d'arestes possible en un graf de 20 vèrtexs, corresponent al graf complet K_{20} , és $\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$. Sembla recomanable treballar amb el complementari, en el qual hi haurà un nombre molt reduït d'arestes, concretament $190 - 187 = 3$.

Sigui, doncs, $H = G^c = (V, A')$ el graf complementari, amb $|A'| = 3$ i $n = |V| = 20$. El problema és ara com distribuir 3 arestes en un graf de 20 vèrtexs i obtenir així tots els grafs essencialment diferents, és a dir, no isomorfs. Hi ha diverses possibilitats.

Cas 1. Les tres arestes generen el subgraf $K_2 \cup K_2 \cup K_2$. La resta de vèrtexs formaran un graf nul (el subgraf generat serà un graf nul). Tenim, per tant, $H_1 = K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup N_{n-6} = K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup N_{14}$.

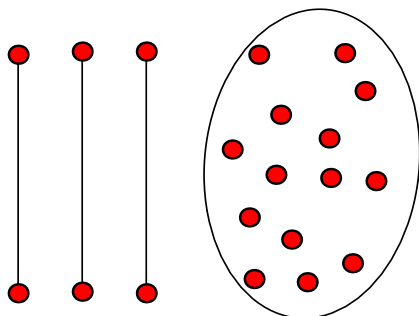


Figura 1.16. El graf H_1 .

Per tant, derivat d'aquest cas, tenim el graf $G_1 = H_1^c = (K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup N_{14})^c = K_2^c + K_2^c + K_2^c + N_{14}^c = N_2 + N_2 + N_2 + K_{14} = K_{2,2,2} + K_{14}$.

Cas 2. Les tres arestes generen el subgraf $T_3 \cup T_2$ i la resta de vèrtexs forma el graf nul corresponent. Tenim, per tant, $H_2 = T_3 \cup T_2 \cup N_{15}$. El complementari serà $G_2 = H_2^c = (T_3 \cup T_2 \cup N_{15})^c = T_3^c + T_2^c + N_{15}^c = (N_1 \cup T_2) + N_2 + K_{15}$.

Cas 3. Les tres arestes generen el subgraf T_4 i la resta de vèrtexs forma el graf nul corresponent. Tenim, per tant, $H_3 = T_4 \cup N_{16}$. El complementari serà $G_3 = H_3^c =$

$(T_4 \cup N_{16})^c = T_4^c + N_{16}^c = T_4 + K_{16}$ (T_4 és autocomplementari, com es pot veure fàcilment).

Cas 4. Les tres arestes generen el subgraf cicle C_3 i la resta de vèrtexs forma el graf nul corresponent. Tenim, per tant, $H_4 = C_3 \cup N_{17}$. El complementari serà $G_4 = H_4^c = (C_3 \cup N_{17})^c = C_3^c + N_{17}^c = N_3 + K_{17}$.

Cas 5. Les tres arestes generen el subgraf estrella $E_4 = K_{1,3}$ i la resta de vèrtexs forma el graf nul corresponent. Tenim, per tant, $H_5 = E_4 \cup N_{16}$. El complementari serà $G_5 = H_5^c = (E_4 \cup N_{16})^c = E_4^c + N_{16}^c = (N_1 \cup C_3) + K_{16} = C_3 + K_{17}$.

Finalment, caldrà estudiar si hi ha alguna parella de grafs isomorfs entre els obtinguts. Resulta ràpid de calcular les seqüències de graus de H_1, H_2, H_3, H_4 , que veiem que totes són diferents, amb la qual cosa també ho seran les de G_1, G_2, G_3, G_4 . Per tant, no hi ha cap parella de grafs isomorfs. Són essencialment diferents, i aquests són els grafs amb les característiques demanades.

En aquest cas, hem convertit el problema original en un del *mateix tipus*, però amb dades diferents.

No sempre funciona. El pas al complementari no sempre és útil. Per exemple, en problemes de seqüències, si es dóna el cas que el problema no resulta realment més simple. Fins i tot pot donar-se que el problema resulti ser exactament el mateix, com el que ara enunciem: *obteniu tots els grafs amb la seqüència de graus 1,2,3,2,2*. Si passem al complementari, la seqüència de graus resulta ser la mateixa: 3,2,1,2,2. Per tant, el mètode no és aplicable.

1.3.9.2 Considereu el problema “complementari”

De vegades, en problemes combinatoris resulta més fàcil (si més no per a qui els ha de resoldre) de resoldre, en comptes del problema, el que podríem anomenar el problema “complementari”. Això es pot produir en el cas que el cardinal que cal comptar faci referència a un conjunt universal S , és a dir, que calgui comptar $|P|$, amb $P \subset S$. Si considerem el complementari $Q = P^c$, es compleix $|P| = |S| - |Q|$ i, per tant, podem resoldre el nostre problema si sabem resoldre el problema “complementari” de calcular $|P^c|$, cosa que ens pot resultar més fàcil.

Vegem-ne un exemple a continuació.

Problema 1.18

Calculeu quants números de telèfon de 6 dígitos tenen algun dígit repetit?

Resolució

Els dígitos disponibles són $\{0, 1, \dots, 9\}$.

El total de nombres possibles (admetent que poden començar per 0) és $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$, ja que cada casella de la cadena pot contenir qualsevol dígit sense cap restricció. Si S és el conjunt de tots els nombres possibles, és $|S| = 10^6$.

Sigui $P \subset S$, el conjunt dels números de telèfon de 6 dígit amb algun dígit repetit. Podem considerar el problema “complementari”, és a dir, el problema consistent justament en el contrari del que es demana, que és obtenir el nombre dels números de telèfon de 6 xifres sense cap dígit repetit. Volem obtenir, doncs, $|Q|$, essent $Q = S \setminus P$, complementari en S .

Per calcular els de telèfon amb tots els dígit diferents, triem 6 dígit del total disponible (amb la garantia que seran diferents), sense que l'ordre importi (només importa quins són) i, un cop triats, els permutem de totes les maneres possibles, per formar tots els números possibles amb les xifres triades. La quantitat és $6! \binom{10}{6}$. És a dir, $|Q| = 6! \binom{10}{6}$.

Finalment, el nombre buscat és

$$|P| = |S| - |Q| = 10^6 - 6! \binom{10}{6}$$

Aquesta idea també s'utilitza moltes vegades quan resollem problemes de combinatòria aplicant la fórmula d'inclusió-exclusió.

1.3.9.3 Passeu al dual en grafs planaris

Problema 1.19

Sigui G un graf planari connex sense vèrtexs d'articulació i amb les cares com a mínim triangulars. Proveu que el nombre de cares amb un nombre senar d'arestes és parell.

Resolució

Observeu que, amb la condició sobre els vèrtexs d'articulació, garantim que no existeixen arestes-pont, ni estructures arbòries, i que totes les cares (la no fitada inclosa) són poligonals. La construcció que farem també es pot considerar en aquests casos, però no ho tractarem aquí.

Es podria resoldre aquest problema per algun mètode directe. No ho farem així, ja que l'objectiu és il·lustrar una idea, la de la conversió d'un problema en un altre d'un altre tipus.

La condició que es vol provar ens resulta familiar, ja que si substituïm “cares” per “vèrtexs” i “arestes” per “arestes incidents”, aleshores resulta simplement l'afirmació que el nombre de vèrtexs de grau senar és parell. Amb l'objectiu d'aplicar aquest

resultat farem una reducció del problema a un d'un altre tipus mitjançant la construcció d'un graf auxiliar, el dual en el cas de grafs planaris.

Considerem, doncs, el graf G planari amb les condicions donades i construïm un nou (multi)graf, associat a una representació planària de G , de la manera que es descriu a continuació. Per il·lustrar aquesta construcció, considerem per exemple el graf de la figura 1.17.

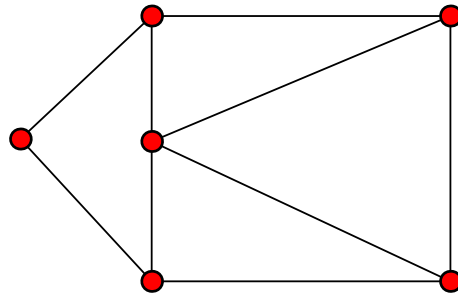


Figura 1.17

El nou (multi)graf s'anomena graf *dual*, que denotem G^δ . Hem de dir quins són els seus vèrtexs i quines les seves arestes. A cada cara li associem un nou vèrtex (vèrtexs blancs a la figura 1.19). Per a cada parella de vèrtexs u, v , hi ha tantes arestes (possiblement, per tant, múltiples) uv com arestes comparteixen les fronteres de les cares corresponents als vèrtexs en la representació planària del graf original.

A la figura 1.18 podem veure el (multi)graf dual corresponent.

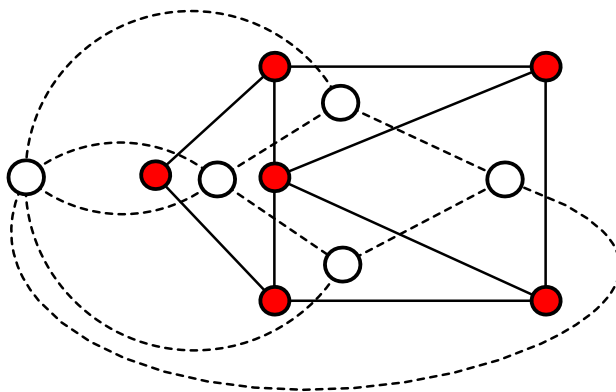


Figura 1.18. El graf original és el dels vèrtexs de color i arestes de traç continu. El graf dual és el dels vèrtexs d'interior blanc i arestes de traç discontinu.

Aquesta construcció no sempre produeix un graf (simple), ja que, com veiem, es poden produir arestes múltiples, derivades del fet que dues cares puguin tenir una frontera comuna formada per més d'una aresta. Depenent de les característiques del problema, això pot no tenir importància. Per exemple, si el que necessitem és poder aplicar el

lema de les encaixades o el seu corollari, aleshores no es presenta cap problema, ja que també són vàlids per a multigrafs (com es pot veure fàcilment comptant les arestes com a arestes “aportades” per cada vèrtex). No és el cas del nostre problema, però també li seria aplicable la fórmula d’Euler, o la caracterització de grafs eulerians en termes de la paritat dels graus.

Observem que, donada una cara C de G , amb la frontera formada per k arestes, el vèrtex v_C que li correspon en el graf dual G^δ té justament grau k , és a dir, $g_{G^\delta}(v_C) = k$, de manera que afirmacions sobre la paritat del nombre d’arestes que envolten la cara C es converteixen automàticament en afirmacions sobre la paritat del grau v_C en el dual. Però ara podem aplicar el corollari del lema de les encaixades, que afirma que en un multigraf el nombre de vèrtexs de grau senar és parell, resultat que, retornat al graf original G , ens diu que el nombre de cares que tenen una frontera formada per un nombre senar d’arestes ha de ser parell.

Observació: De fet no cal que les cares siguin formades per una frontera de 3 arestes, com a mínim. Podríem acceptar fins i tot cares de 2 arestes, derivades, de fet, d’arestes múltiples (i aleshores el nostre graf seria un multigraf).

Vegem-ne altres exemples.

Considerem l’afirmació següent (problema resolt del capítol de grafs planaris). És un problema sobre políedres que es pot traduir, com es veu en aquesta mateixa secció, a un problema sobre grafs planaris: *Considerem un políedre (deformable a esfera) amb els vèrtexs de grau 3 i amb dos tipus de cares, pentagonals i hexagonals. Aleshores té exactament 12 pentàgons.*

Vegem ara el problema: *Considerem un políedre (deformable a esfera) amb totes les cares triangulars i amb vèrtexs de graus 5 o 6. Proveu que hi ha exactament 12 vèrtexs de grau 5.*

Un problema és dual de l’altre. Si en sabem resoldre un, l’altre queda automàticament resolt. Formulem el primer en termes equivalents de grafs planaris: *Considerem un graf planari, de cares poligonals (la no fitada inclosa), amb els vèrtexs de grau 3 i amb dos tipus de cares: C_5, C_6 . Proveu que hi ha exactament 12 cares pentagonals.* El segon problema es reformularia com: *Considerem un graf planari amb totes les cares triangulars i amb vèrtexs de grau 5 o 6. Aleshores hi ha exactament 12 vèrtexs de grau 5.*

1.3.9.4 Feu construccions auxiliars

La idea és fer construccions que converteixin un problema en un altre.

La construcció del dual de l’apartat 1.3.9.3 ja n’és una, però n’hi ha d’altres possibles que es poden considerar segons el problema.

Tindrem ocasió de veure al capítol 7, dedicat a grafs planaris, i als capítols de combinatòria, resolucions de problemes combinatoris en disseccions geomètriques mitjançant construccions de grafs planaris auxiliars, lligats a la dissecció geomètrica, grafs als quals és aplicable tota la teoria de planaritat i, en particular, la fórmula d'Euler.

En moltes ocasions convertim un problema que no és de grafs (problemes de disseccions geomètriques, triangulacions o políedres) en un altre que sí que ho és, mitjançant la modelització corresponent. O bé podem considerar un model en termes de teoria de grafs (per exemple, el graf d'un políedre), però encara ens manca un últim pas (per exemple, una transformació geomètrica, com la projecció estereogràfica) per convertir l'estructura intermèdia creada en la final (per exemple, un graf planari).

Per al cas dels políedres, hi dediquem l'apartat següent.

1.3.9.5 Convertiu problemes de políedres a problemes de grafs planaris

Els políedres per als quals podem aplicar resultats de teoria de grafs planaris (com per exemple la fórmula d'Euler) són els que són "topològicament deformables a esfera". Si el políedre té "forats", com en el cas del "políedre" tor (figura 1.19, subfigura de la dreta), aleshores no es pot recórrer a la projecció estereogràfica i al model del políedre en termes de la teoria de grafs planaris (existeix, però, una generalització de la fórmula d'Euler que té en compte el nombre de forats).

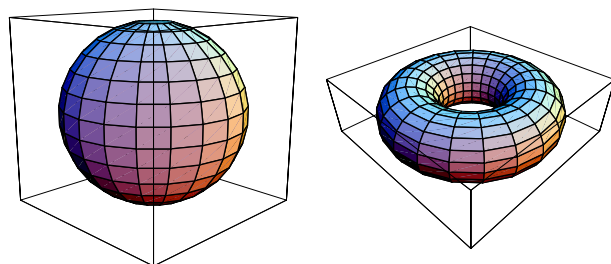


Figura 1.19

El lector en pot completar la informació a [WILS72] (grafs poliedrals: planaris, 3-connexos).

Políedres especialment notables des del punt de vista dels grafs planaris són els regulars. Aplicant la teoria de grafs planaris, se'n poden obtenir propietats. Vegem els cinc políedres regulars a les figures 1.20 i 1.21. A la figura 1.20 tenim, d'esquerra a dreta, el tetràedre, el cub o hexàedre i l'octàedre.

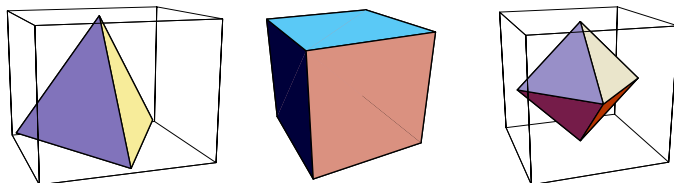


Figura 1.20

A la figura 1.21 tenim, d'esquerra a dreta, l'icosàedre i el dodecàedre.

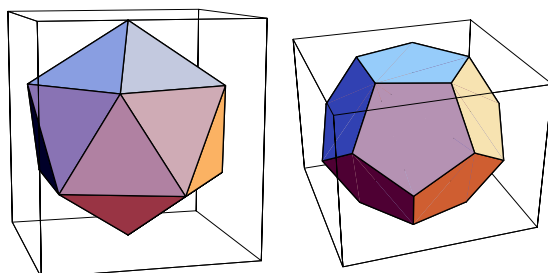


Figura 1.21

Molts problemes de políedres es poden convertir a problemes de grafs planaris en el pla. Pot utilitzar-se una projecció que transformi punts de l'esfera (no necessàriament tots) en punts del pla. Entre d'altres, una de les transformacions que es pot utilitzar és la projecció estereogràfica. Algunes projeccions cartogràfiques podrien fer una funció similar.

Vegem a la figura 1.22 un esquema de perfil de la situació referent a la projecció estereogràfica.

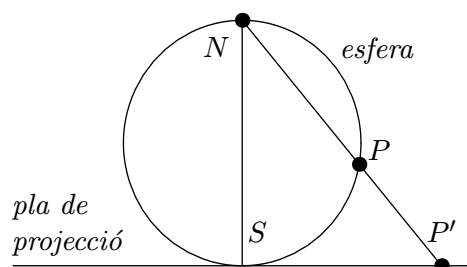


Figura 1.22

Considerem una esfera, de la qual seleccionem un punt N (pol de projecció). Considerem el punt S diametralment oposat i el pla tangent a l'esfera en aquest punt, pla que serà el pla de projecció. La *projecció (estereogràfica)* P' del punt P de l'esfera és la intersecció del pla de projecció amb la semirecta que passa per P i és d'origen N . D'aquesta manera, tots els punts de l'esfera, llevat de N , es poden projectar sobre el pla. Vegem a la figura 1.23 un esquema il·lustratiu de la projecció estereogràfica.

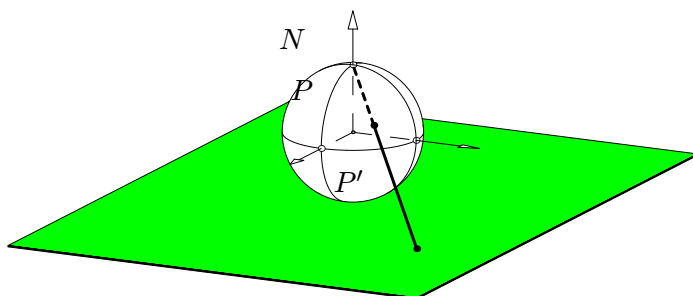


Figura 1.23

A la figura 1.24 veiem com es projectaria una circumferència sobre l'esfera.

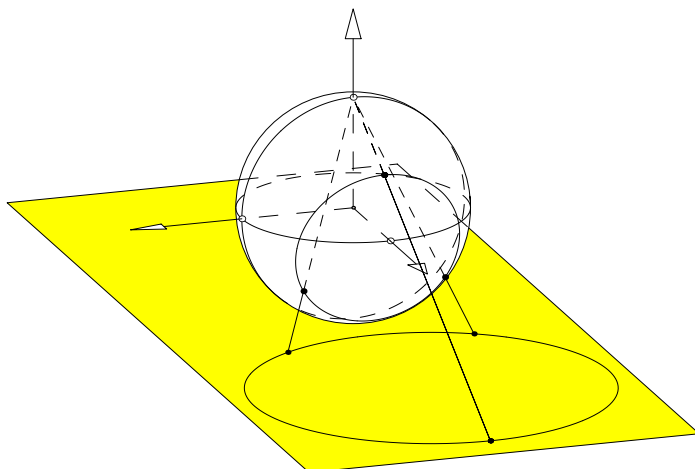


Figura 1.24

Com utilitzar aquesta projecció en el cas d'un políedre? Es considera una esfera que contingui el políedre (o, si és possible, que en sigui una esfera circumscrita). Des d'un punt interior del políedre (a vegades podrà ser el centre de l'esfera) es realitza una projecció central del políedre sobre l'esfera, operació que crea una estructura sobre la superfície esfèrica, corresponent al políedre, que és la que després es projecta. Això s'il·lustra a la figura 1.25.

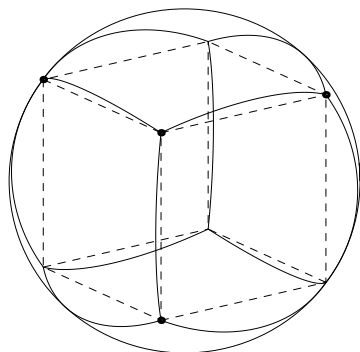


Figura 1.25. Il·lustració en el cas del cub.

Vegem un exemple del procés en el cas del políedre "buckminsterfullerè" o "pilota de futbol", que correspon a la figura 1.26 (esquerra). A la dreta tenim el políedre projectat

sobre l'esfera.

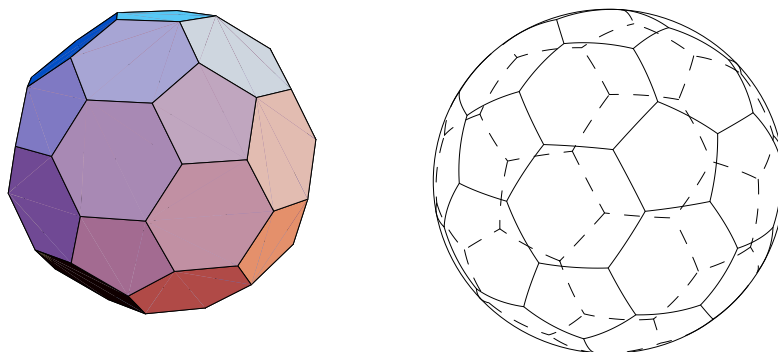


Figura 1.26

Finalment, a la figura 1.27, una projecció sobre el pla (estèticament manipulada).

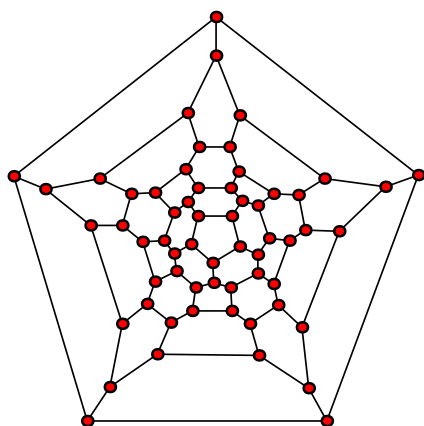


Figura 1.27

Vegem grafs planaris associats als polèdres regulars. A la figura 1.28, i d'esquerra a dreta, tenim els grafs del tetràedre, el cub i l'octàedre. En els esquemes s'ha mantingut l'estructura del graf, però no les dimensions de la projecció, que resulten irrelevantes, i s'han rectificat les arestes.

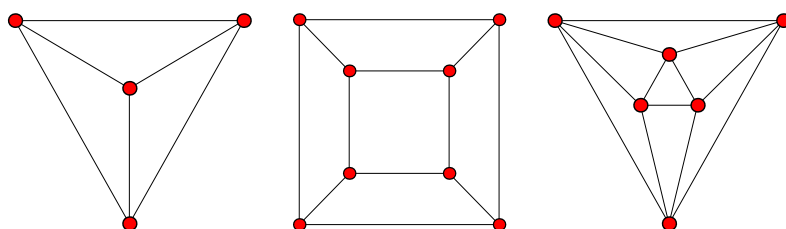


Figura 1.28

A la figura 1.29, i d'esquerra a dreta, tenim els grafs de l'icosàedre i del dodecàedre.

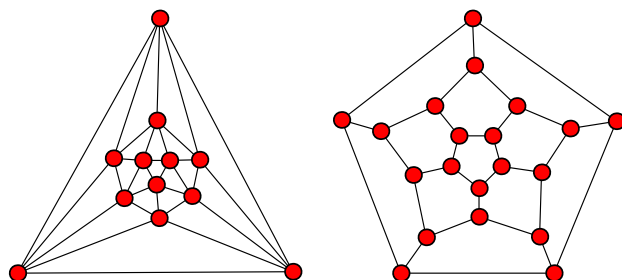


Figura 1.29

Vegeu un problema sobre políedres que, de fet, ha estat resolt prèviament en aquest mateix capítol com a problema de teoria de grafs planaris, a l'apartat 1.3.8: *Considerem un políedre (deformable a esfera) tal que cada vèrtex és incident a 3 arestes i tal que només hi ha cares de dos tipus: quadrilàters i hexàgons. Proveu que hi ha exactament 6 quadrilàters.* La resolució donada anteriorment resol completament el nostre problema.

Concretem el que s'ha dit en un exemple.

Problema 1.20

Considerem un políedre convex format per cares triangulars i quadrangulars tal que cada vèrtex pertany a 4 cares exactament. Proveu que conté exactament 8 triangles.

Resolució

Per una projecció estereogràfica adequada, projectem el políedre sobre un pla, i convertim el problema en un d'equivalent per a un graf planar $G = (V, A)$, connex, amb totes les cares poligonals (la no fitada inclosa). Les cares són dels dos tipus indicats. La condició sobre els vèrtexs es tradueix que els vèrtexs són tots de grau 4.

Establím la notació: v, a, c són, respectivament, el nombre de vèrtexs, d'arestes i de cares (amb la no fitada inclosa). Si n_3, n_4 són, respectivament, el nombre de triangles i el de quadrilàters, és $c = n_3 + n_4$. Cal veure $n_3 = 8$.

A partir d'aquest moment el problema sobre políedres s'ha convertit en un problema sobre grafs planaris. Els vèrtexs, les arestes i les cares del graf es corresponen amb els respectius del políedre.

Ara es tractarà d'obtenir relacions a partir de les propietats del graf planari. Intentarem expressar les quantitats a, v en termes de n_3, n_4 i després substituir a la fórmula d'Euler, $c + v = a + 2$.

Una primera relació s'obté per aplicació del lema de les encaixades, és a dir, $2a = 4v$, o bé $a = 2v$. Això correspon a comptar les arestes a partir de les incidents a cada vèrtex. Comptant les arestes a partir de les fronteres de les cares, podem escriure

$2a = 3n_3 + 4n_4$, d'on $a = \frac{1}{2}(3n_3 + 4n_4)$. A més, ara podem reescriure la relació $a = 2v$ i en resulta $v = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}(3n_3 + 4n_4)$.

Finalment, substituïm a la fórmula d'Euler

$$(n_3 + n_4) + \frac{1}{4}(3n_3 + 4n_4) = \frac{1}{2}(3n_3 + 4n_4) + 2.$$

Fent càlculs, resulta $n_3 = 8$.

Vegem-ne un altre exemple. En presentarem més endavant.

Problema 1.21

Considerem un políedre deformable a esfera. Proveu que el nombre de cares amb un nombre senar d'arestes és parell.

Resolució

Aquest problema ja ha estat resolt per diverses vies. S'ha plantejat anteriorment (1.3.9.3) en termes de teoria de grafs planaris. Més concretament, l'enunciat era: "Si-gui G un graf planari connex sense vèrtexs d'articulació i amb les cares com a mínim triangulars. Proveu que el nombre de cares amb un nombre senar d'arestes és parell."

Només cal disposar d'un mecanisme que ens permeti convertir un problema tridimensional de políedres deformables a esferes en un problema de grafs planaris en el pla. El problema relatiu al políedre real de l'espai ha de ser un problema de tipus combinatori o "topològic", en el qual no tinguin interès les relacions mètriques entre vèrtexs, angles dièdrics. *Un possible mecanisme és la projecció estereogràfica sobre un pla adequat de projecció.*

Aquesta projecció ens permetrà convertir un problema tridimensional en un problema bidimensional, i així convertir un problema de políedres en un problema de grafs planaris, per després tornar enrere i arribar a una conclusió relativa a políedres.

1.4 Intenteu resoldre els problemes per diversos mètodes

Al marge dels consells per abordar la resolució de problemes, amb caràcter general és molt recomanable, per a propòsits d'entrenament personal, intentar resoldre els problemes pel nombre màxim de mètodes de què siguem capaços.

Això s'ha fet en moltes ocasions al llarg del llibre. Vegem-ne un exemple, d'entre molts possibles, a 6.2.2.

Vegem a continuació un exemple, en què de fet es resol el problema amb dues variants de la mateixa idea.

Problema 1.22

Sigui G un graf planari connex sense vèrtexs d'articulació i amb les cares com a mínim triangulars (la frontera té, com a mínim, 3 arestes). Proveu que el nombre de cares amb un nombre senar d'arestes és parell.

Resolució

Aquest problema ja ha estat resolt per una via anteriorment a 1.3.9.3 i 1.3.9.5. Aquesta és una mostra de com és possible, en moltes ocasions, intentar procediments alternatius de resolució.

A més, en aquesta exposició considerarem més d'un mètode de resolució.

Mètode 1. Atès que hem de tractar la qüestió relacionada amb el nombre d'arestes de la frontera d'una cara, considerem c_i , que definim com el nombre de cares envoltades per i arestes, amb $i \geq 3$ (tot i que no és estrictament imprescindible). Ara podem comptar les arestes a partir de l'aportació de cada cara. L'absència d'arestes-pont permet afirmar que cada arista és compartida per exactament dues cares, de manera que, comptant les arestes a partir de $\sum_{i \geq 3} ic_i$, les estem comptant per duplicat, ja que cada arista pertany a dues cares i, per tant, és $\sum_{i \geq 3} ic_i = 2|A|$. Reescrivim la fórmula anterior i la desglosem segons la paritat de i :

$$2|A| = \sum_{i \geq 3} ic_i = \sum_{k \geq 2} 2kc_{2k} + \sum_{k \geq 1} (2k+1)c_{2k+1} = \sum_{k \geq 2} 2kc_{2k} + \sum_{k \geq 1} 2kc_{2k+1} + \sum_{k \geq 1} c_{2k+1}.$$

Ara bé, l'últim sumand és justament el que ens demanen, ja que el nombre de cares amb la frontera formada per un nombre senar d'arestes és justament $c_3 + c_5 + c_7 + \dots$. Escrivint la igualtat anterior en la forma

$$\sum_{k \geq 1} c_{2k+1} = 2|A| - \sum_{k \geq 2} 2kc_{2k} - \sum_{k \geq 1} 2kc_{2k+1},$$

resulta que aquesta suma, com a suma de parells que és, és un nombre parell.

Aquest és també un exemple de com comptar un objecte (les arestes) de més d'una manera.

Mètode 2. És una variant d'idees semblants a l'anterior, entorn de la paritat del nombre d'arestes de la frontera de les cares. Novament, sigui c_i el nombre de cares limitades per i arestes, amb $i \geq 3$. S'arriba amb les mateixes argumentacions a $2|A| = \sum_{i \geq 3} ic_i$. Ara passem a classes de residu de mòdul 2, i així tindrem

$$\overline{2|A|} = \overline{\sum_{i \geq 3} ic_i}$$

Ara bé, si i és parell, la classe corresponent és $\bar{0}$, i si i és senar, és $\bar{1}$, de manera que només quedarà la contribució corresponent als índexs senars:

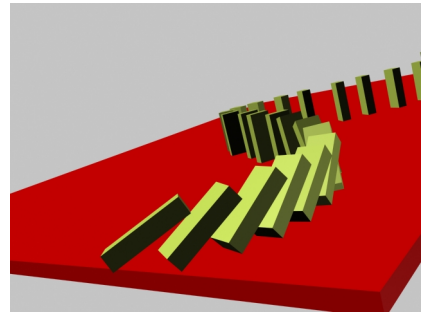
$$\bar{0} = \bar{c}_3 + \bar{c}_5 + \bar{c}_7 + \dots$$

d'on

$$\bar{0} = \overline{c_3 + c_5 + c_7 + \dots},$$

és a dir, $c_3 + c_5 + c_7 + \dots$ és parell (zero mòdul 2).

Capítol 2



Inducció en matemàtica discreta

2.1 Introducció

En matemàtica discreta s'utilitza en moltes ocasions la metodologia de demostració de resultats basada en el *principi d'inducció*. Aquest mètode dona lloc a les anomenades *demostracions per inducció* o *inductives*. En aquest capítol descriurem amb detall el mètode d'inducció i en presentarem exemples variats. De fet, n'anirem trobant exemples d'ús al llarg de tot el llibre, en el decurs de la resolució de més d'un problema.

El mètode d'inducció resulta útil no solament en matemàtica discreta, sinó també en moltes altres àrees de la informàtica, com per exemple la informàtica teòrica i l'anàlisi d'algorismes. Tot i que l'enfocament (pel que fa als exemples) es decanta sobretot cap a la matemàtica discreta, l'adquisició d'aquesta tècnica demostrativa pot servir també per a altres matèries d'interès per a l'alumne d'informàtica.

Els exemples que utilitzarem poden ser tant de teoria inicial com de teoria més avançada, sense que en cap moment s'estableixin preliminars o prerequisits. Per aquest motiu, si alguns exemples no són completament comprensibles al lector per manca de coneixements previs en una primera lectura, el remetem a l'estudi corresponent o a una relectura posterior, quan ja tingui els coneixements requerits. D'altra banda, és absolutament recomanable efectuar relectures periòdiques d'aquest capítol sobre inducció.

Es procurarà mostrar el mètode mitjançant exemples que tinguin relació o bé amb la teoria de grafes o bé amb la combinatòria. El lector pot considerar aquests exemples com exercicis per resoldre pel seu compte.

Segueix una breu introducció no formalitzada, amb explicacions molt sumàries, a títol

de recordatori, dels conceptes de *grafs* que necessitarem al llarg del capítol. Un *graf* és una estructura combinatòria $G = (V, A)$, on V és el conjunt de vèrtexs i A és el conjunt d'arestes, expressió de relacions entre vèrtexs (una arista és un subconjunt de 2 vèrtexs en el conjunt de tots els subconjunts de V). L'*ordre* d'un graf és el nombre $n = |V|$ de vèrtexs i la *mida* és el nombre $m = |A|$ d'arestes. El *grau* $g(v)$ d'un vèrtex $v \in V$ és el nombre d'arestes que hi són incidents. Un graf és *connex* si per a tota parella de vèrtexs u, v existeix un recorregut que els connecta. Un *component connex* és el subgraf més gran (maximal en ordre) per al qual es compleix la propietat anterior. Un arbre és un graf connex sense cicles (acíclic). Un graf és *planari* quan es pot “dibuixar” en el pla sense que hi hagi interseccions entre arestes; en aquest cas, es produeix una dissecció del pla en què apareixen, a més dels vèrtexs i les arestes, les regions, són les *cares* (totes fitades excepte una). Un graf és *k-colorible* si podem assignar k colors als vèrtexs amb la condició que no n'hi hagi d'adjacents amb el mateix color.

El lector interessat en una presentació més detallada i completa del tema de la inducció pot consultar el llibre [FESI91], que hi dedica un capítol exhaustiu. També en trobarà molts exemples variats, no necessàriament relacionats amb la matemàtica discreta, als llibres de [ENGE00] i [LARS83].

2.2 Principi d'inducció ordinària

La inducció matemàtica és un mètode de demostració que sol ser molt útil en aquelles situacions en què s'ha de demostrar una propietat $P(n)$ que s'enuncia en termes dels nombres naturals $n \in \mathbb{N}$. N'és un exemple la identitat

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2.1 L'enunciat del principi d'inducció

Segueix l'enunciat precís del principi d'inducció, que de fet es podria formular com a teorema, derivat de l'axiomàtica dels nombres naturals o bé del principi de bona ordenació.

Principi d'inducció ordinària (versió 1). *Sigui n_0 un nombre natural i $P(n)$ una proposició sobre n per a cada nombre natural $n \geq n_0$. Si*

1. $P(n_0)$ és certa, i
2. Per a cada nombre natural $k \geq n_0$, si $P(k)$ és certa, també ho és $P(k+1)$, aleshores $P(n)$ és cert per a tot nombre natural $n \geq n_0$.

Tot i que es pot provar rigorosament a partir de propietats dels nombres naturals, intuïtivament és clar que això prova la propietat P per a tot $n \geq n_0$. Com a exemple, suposem que $n_0 = 0$. Aleshores tindrem

- $P(0)$ és cert (és a dir, per a $n = 0$) pel pas 1.
- $P(1)$ és cert pel pas 2 i per $P(0)$ (pel pas anterior).
- $P(2)$ és cert pel pas 2 i per $P(1)$ (pel pas anterior).
- $P(3)$ és cert pel pas 2 i per $P(2)$ (pel pas anterior).
- I així successivament...

De vegades, en comptes de l'esquema anterior, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pot convenir per comoditat, costum o conveniència, adoptar l'esquema equivalent $P(k-1) \Rightarrow P(k)$, de manera que podem demostrar propietats per inducció segons la variant:

Principi d'inducció ordinària (versió 2). *Sigui n_0 un nombre natural i $P(n)$ una proposició sobre n per a cada nombre natural $n \geq n_0$. Si*

1. $P(n_0)$ és certa, i
2. Per a cada nombre natural $k \geq n_0$, si $P(k-1)$, $k-1 \geq n_0$ és certa, també ho és $P(k)$, aleshores $P(n)$ és cert per a tot nombre natural $n \geq n_0$.

2.2.2 La inducció en acció

Exposem en aquest apartat com funciona una demostració per inducció.

2.2.2.1 Etapes demostratives

En les demostracions inductives, les que fan servir el resultat anterior (o d'altres variants que es presentaran posteriorment), distingim dues etapes, justament mimetitzant l'enunciat anterior:

- El *pas base*, que és el que correspon a la comprovació o demostració que $P(n_0)$ és cert, és a dir, que la propietat en qüestió es compleix per al cas $n = n_0$.
- El *pas inductiu* (segons la versió 1), que consisteix a demostrar que per a tot $k \geq n_0$, si $P(k)$ és cert, també ho és $P(k+1)$. Quan en el curs de la demostració de la implicació se suposa la validesa de $P(k)$ (per provar $P(k+1)$), aquesta suposició és l'anomenada *hipòtesi d'inducció* (que en algunes ocasions denotarem abreviadament HI a partir d'ara).

2.2.2.2 El pas base

Normalment es pren el valor n_0 més petit per al qual la propietat $P(n)$ tingui sentit. Si no ho fem així, la propietat queda provada només a partir del n_0 que hàgim triat (seria, per tant, poc justificable no prendre el valor més petit possible).

Vegem-ne uns exemples:

- En el cas de la identitat aritmètica $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ podem prendre $n_0 = 1$.
- Si es tracta de demostrar alguna propietat sobre polígons de n costats, aleshores el més “petit” és el triangle, és a dir, $n_0 = 3$. Imaginem, per exemple, que es tracta de demostrar que tot polígon és triangulable, és a dir, descomponible en una reunió de triangles no solapants per afegit de diagonals internes.
- Si s’ha de provar una afirmació sobre grafs r -regulars i es vol fer inducció sobre l’ordre $n = |V|$, aleshores, atès que $g(v) \leq |V| - 1$, resulta que $n = |V| \geq g(v) + 1 = r + 1$. Per tant, el mínim és $n_0 = r + 1$, nombre mínim de vèrtexs que calen perquè hi pugui haver algun vèrtex de grau r .

En moltes demostracions, el pas base és fàcil, però no sempre és així.

2.2.2.3 Triar paràmetre

Respecte de què podem fer inducció? Observem que el principi d’inducció es basa en el fet que, donat un enter n , sempre existeix “el següent” $n + 1$ en el conjunt dels nombres enters. Això és fonamental i és la primera guia per triar el paràmetre respecte del qual es farà la demostració inductiva, quan hi ha la possibilitat d’escollir-ne més d’un, en principi, depenent de la naturalesa del que calgui provar. Així, en una identitat numèrica en la qual intervenen nombres reals i nombres naturals, els reals mai no poden ser candidats a paràmetres per a una demostració inductiva (per a un nombre real, no existeix “el següent!”). Tècnicament, és equivalent al principi de bona ordenació: existeix un mínim de tot conjunt no buit dels nombres naturals.

Sempre que vulguem fer una demostració per inducció hem d’identificar el paràmetre convenient per fer-la, el paràmetre respecte del qual farem la demostració inductiva.

2.2.2.4 Quan és convenient fer demostracions inductives?

No es pot donar cap resposta clara a la pregunta, excepte en el cas d’arguments “d’autoritat” (quan ho demanen explícitament l’enunciat d’un problema o el professor!). Ara

bé, es pot considerar la possibilitat d'una demostració inductiva quan l'enunciat de la propietat que es vol demostrar s'explicita clarament en termes dels nombres naturals, com per exemple en la coneguda identitat $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ o en un enunciat com el següent: “un arbre d'ordre n té $n - 1$ arestes”. En altres casos, no és explícita la dependència respecte d'un paràmetre que sigui nombre natural, però pot ser-hi implícitament, o bé el paràmetre en qüestió existeix; per exemple, “un graf connex amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$ és el graf trajecte”. Podríem intentar fer inducció sobre la longitud de la seqüència de graus, que no és res més que l'ordre. També es pot fer explícita la dependència d'un paràmetre natural fent més explícit l'enunciat: “un graf connex d'ordre n i seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$ és isomorf a T_n ”.

Decidim quan i per què cal fer una demostració per inducció segons l'experiència i la naturalesa del problema.

Finalment, i com a “bon consell”, proveu de demostrar una propietat per inducció quan tots els altres mètodes amb què heu abordat el problema han fracassat o bé quan no teniu té cap idea de com abordar-ne la resolució. Això no vol dir, naturalment, que sempre sigui factible fer una demostració inductiva en aquesta circumstància. El lector no ha de pensar que la inducció sigui una “panacea” quan no troba cap altra manera de resoldre un problema: depèn del problema!

Observeu un exemple en què podem intentar provar amb èxit una propietat per inducció, encara que no hi hagi cap dependència explícita a l'enunciat respecte del paràmetre n , ordre del graf: “tot arbre és 2- acolorible”; podem provar aquesta propietat per inducció sobre l'ordre.

2.3 Primers exemples

Vegem uns primers exemples d'ús del mètode de demostració per inducció ordinària, en la modalitat més senzilla possible, corresponent a l'enunciat anterior. No requereixen pràcticament cap teoria prèvia.

2.3.1 Identitats aritmètiques de sumació tancada

La suma dels n primers nombres naturals. Un exemple molt típic és el de la suma dels n primers nombres naturals, és a dir, $1 + 2 + \dots + n$. Estem interessats a obtenir una expressió “tancada” per a aquesta suma, és a dir, una expressió on no intervinguin “punts suspensius”! Podem experimentar amb diversos n petits per mirar d'induir-ne (sospitar, endevinar!) alguna fórmula, i segurament arribarem a la conclusió que

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aquesta és una identitat ben coneguda, que d'altra banda haguéssim pogut trobar per consulta bibliogràfica. És un dels primers exemples de demostració inductiva que hom sol trobar. Es demostrarà posteriorment en un altre context, el de les successions recurrents, i per mètodes completament diferents.

Observem que en aquest cas $P(1)$ és l'afirmació corresponent a $n = 1$, que ara es redueix a comprovar que els dos membres coincideixen per a $n = 1$, és a dir, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ($= 1$). En canvi, $P(n)$ és l'afirmació $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $P(n+1)$ seria l'afirmació corresponent a la propietat però arribant fins a $n + 1$, és a dir: $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$; en canvi, $P(n - 1)$ seria $1 + 2 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Ara bé, com demostrar-la? *Per inducció.*

Dir això encara no és suficient. Sempre que volem demostrar alguna propietat per inducció hem d'escollir el paràmetre (nombre natural) respecte del qual es farà la demostració; en determinats problemes hi pot haver més d'una possibilitat (com per exemple en el cas de la fórmula d'Euler). Escollim el paràmetre n i, per tant, farem la demostració *per inducció sobre n* . Cal adoptar un *esquema demostratiu*. Adoptem l'esquema

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) \\ P(n) \implies P(n+1), \end{array} \right.$$

on $P(n)$ és la propietat de certa la igualtat $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Com és habitual en tota demostració inductiva, calen els dos passos corresponents a l'esquema demostratiu:

Pas 1 (base): $P(1)$. En primer lloc s'ha d'establir la fórmula per al primer valor per al qual tingui sentit, que és en aquest cas $n = 1$; ara bé, per a $n = 1$ la prova és una simple comprovació de rutina de la coincidència dels dos membres de la igualtat a demostrar, ja que $\frac{n(n+1)}{2} = 1$ per a $n = 1$.

Pas 2 (inductiu): $P(n) \implies P(n+1)$. En segon lloc, hem de suposar que la identitat és certa per a n per *hipòtesi d'inducció* i provar que és certa per al valor $n + 1$; aquest pas, juntament amb el primer, establirà la validesa de la propietat per a tot $n \geq 1$. Suposant, doncs, que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es compleix, vegem que es compleix per a $n + 1$. Escrivim

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \stackrel{\text{(HI)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Observacions. En primer lloc, sobre $n_0 = 1$. Es podria haver provat $P(6)$ (posem per cas), és a dir, provar la propietat prenent $n_0 = 6$ per comprovació directa, però aleshores la propietat, és a dir, la identitat aritmètica, hauria quedat provada només per a $n \geq 6$. En segon lloc, en aquest cas concret resulta molt fàcil passar “de n a $n+1$ ”, ja que no hi ha cap problema a construir la suma $1 + \dots + n + (n+1)$: simplement sumant $n+1$ a $1 + \dots + n$. La suma següent, corresponent a $P(n+1)$, es pot escriure unívocament, sense que es pugui presentar cap problema de multiplicitat com els que es poden produir en estructures més complexes, com els grafs.

Analitzem encara amb més detall el mètode demostratiu per al cas del pas 2, tot i que la simplicitat de l'exemple potser no facilitarà diferenciar els matisos amb gaire claredat (variants en l'orientació conceptual de la demostració). En veurem exemples molt més clars, més endavant, en el cas de demostracions inductives en teoria de grafs.

Variant 1. Partim de $P(n)$, que considerem vàlid per hipòtesi d'inducció, i passem a $P(n+1)$. Això comporta efectuar manipulacions aritmètiques sobre la igualtat $P(n)$, que suposem, doncs, vàlida per hipòtesi d'inducció.

Per tant, donem per vàlida la igualtat

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ara sumem $n+1$ a ambdós membres de la igualtat, per tal d'obtenir la suma dels $n+1$ primers nombres naturals:

$$(1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

La resta és manipulació aritmètica trivial a la dreta de la igualtat i així establim la validesa de $P(n+1)$:

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Seria idèntic per a la variant $P(n-1) \implies P(n)$.

En el cas d'un graf, si per exemple es fes una demostració per inducció sobre l'ordre n , aquesta variant implicaria passar d'un graf d'ordre n a un altre d'ordre $n+1$, cosa

no sempre tan fàcil com en aquest cas, en què passar al següent significa simplement sumar $n+1$. En el cas d'un graf, hauríem d'afegir un vèrtex, però això es pot fer de més d'una manera, en general, ja que podem afegir diversos conjunts d'arestes. I aquest és el problema...

Variant 2. Considerem $P(n+1)$, concretament en aquest cas partirem de l'expressió del primer membre de la identitat que volem demostrar i aplicarem $P(n)$, que suposem certa per hipòtesi d'inducció. Aquesta és justament la que s'ha presentat:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Seria millor encara l'esquema $P(n-1) \implies P(n)$.

Aquesta variant, en el cas d'un graf d'ordre n , no requereix la construcció d'un graf d'ordre superior. Pot ser una via d'atac més adequada que la variant 1. Normalment requereix algun tipus d'operació destructiva per tal de poder aplicar la hipòtesi d'inducció a un graf d'ordre inferior.

Disposar d'identitats aritmètiques de sumació tancada com l'anterior pot ser molt interessant com a auxiliar en processos de comptar a la combinatòria.

2.3.2 Inducció a la combinatòria

Correspondria també al mateix tipus d'estructura demostrativa senzilla la que aplicarem als exemples següents, encara que tècnicament sigui més complicat.

2.3.2.1 La fórmula binomial

Recordem que $k! = k(k-1) \cdots 2 \cdot 1$ (per a $k \geq 1$), $0! = 1$ i que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (per a $n \geq k \geq 0$).

La fórmula del binomi (de Newton) és de gran utilitat en molts contextos, i, en especial, en combinatòria:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Equivalentment, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Demostrem-la per inducció sobre n en la versió 1 i variant ($P(n) \implies P(n+1)$).

Pas 1. Per a $n=1$ es comprova trivialment, ja que

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1.$$

Pas 2. Suposem que la igualtat es compleix per a $n = r$, és a dir, que la hipòtesi d'inducció és

$$(a + b)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k} b^k.$$

Hem de provar que

$$(a + b)^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} a^{r+1-k} b^k.$$

Per a això multiplicarem ambdós membres de la igualtat de la hipòtesi d'inducció per $a + b$:

$$\begin{aligned} (a + b)^{r+1} &= (a + b)^r (a + b) = \left(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k} b^k \right) (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k} b^k a + \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k} b^k b \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k+1} b^k + \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k} b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^{r-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r}{k-1} a^{r-k+1} b^k \\ &= a^{r+1} + \left(\sum_{k=1}^r \left(\binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} \right) a^{r-k+1} b^k \right) + b^{r+1} \\ &= a^{r+1} + \left(\sum_{k=1}^r \binom{r+1}{k} a^{r-k+1} b^k \right) + b^{r+1} \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} a^{(r+1)-k} b^k. \end{aligned}$$

Observem que s'ha utilitzat la identitat combinatòria, que suposem que el lector ja coneix:

$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} = \binom{r+1}{k}.$$

En tot cas, la demostració és molt simple, ja que és un càlcul rutinari:

$$\begin{aligned} \binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} &= \frac{r!}{k!(r-k)!} + \frac{r!}{(k-1)!(r-k+1)!} \\ &= \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{r-k+1} \right) \\ &= \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} \frac{r-k+1+k}{k(r-k+1)} \\ &= \frac{(r+1)!}{k!(r-k+1)!} = \frac{(r+1)!}{k!(r+1-k)!} = \binom{r+1}{k}. \end{aligned}$$

En els casos anteriors, podem fer operacions manipulatives senzilles, com per exemple simplement sumar $n+1$ per passar al cas següent, al cas “ $n+1$ ” col·loquialment parlant, com ara en la identitat que ens dóna la suma dels primers nombres naturals.

2.3.2.2 Conjunt de les parts d'un conjunt

Encara en podem presentar un últim exemple senzill, però que també s'aparta de les típiques demostracions inductives d'identitats aritmètiques senzilles (tot i que també n'hi pot haver de difícils).

Un conjunt de n elements té 2^n subconjunts. Equivalentment, es tracta d'establir $|A| = n \implies |\mathcal{P}(A)| = 2^n$, essent $\mathcal{P}(A)$ el conjunt de les parts o conjunt de tots els subconjunts d' A . Per exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$, és $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Demostrem la propietat per inducció sobre n . En aquest cas, és

$$P(n) : |A| = n \implies |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Pas 1. Sigui $n = 0$. Aleshores $A = \emptyset$, és $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$, és a dir, $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$, com s'havia de veure.

Pas 2. Sigui $k \geq 0$ tal que $P(k)$ és cert, és a dir, que si $|B| = k$, aleshores $|\mathcal{P}(B)| = 2^k$, cosa que considerem la hipòtesi d'inducció. Vegem que $P(k+1)$ és certa. Sigui, doncs, $|A| = k+1$, no buit. Per tal de poder utilitzar la hipòtesi d'inducció hem d'aconseguir un conjunt de k elements al qual sigui aplicable (de fet, l'única condició és

ser de k elements; una idea possible és eliminar un element d' A). Sigui $a_0 \in A$ i sigui $B = A - \{a_0\}$. Aleshores $|B| = k$ i, per tant, $|\mathcal{P}(B)| = 2^k$, per hipòtesi d'inducció.

Vegem com podem arribar a la conclusió buscada. Considerem

$$\begin{aligned} S_1 &= \{S \mid S \subset A, a_0 \notin S\} \\ S_2 &= \{S \mid S \subset A, a_0 \in S\} \end{aligned}$$

Es compleix òbviament $\mathcal{P}(A) = S_1 \cup S_2$ i $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Per tant, $|\mathcal{P}(A)| = |S_1| + |S_2|$, i ara es tracta de calcular separatament els cardinals de S_1, S_2 .

Considerem el cardinal de S_1 . Els elements de S_1 són exactament els subconjunts de B i, per tant, $|S_1| = |\mathcal{P}(B)| = 2^k$. Quant a S_2 , tots els elements són conjunts que contenen un element fix, a_0 , i la resta pot variar lliurement entre els k elements restants d' A , és a dir, els elements de B . Per tant, els elements de S_2 són de la forma $S = S' \cup \{a_0\}$, on $S' \subset B$. De fet, hi ha una correspondència bijectiva i podem escriure $|S_2| = |\mathcal{P}(B)| = 2^k$.

Per tant, finalment,

$$|\mathcal{P}(A)| = |S_1| + |S_2| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1},$$

com s'havia de veure.

2.3.3 Inducció en geometria combinatòria

Els objectes que s'han d'"afegir" a l'esquema inductiu $P(n) \implies P(n+1)$ no sempre són tan simples com als exemples anteriors. Considerem, per exemple, la bicoloració d'una dissecció per rectes del pla:

Exemple 1: Amb dos colors n'hi ha prou per acolorir una dissecció del pla per rectes.

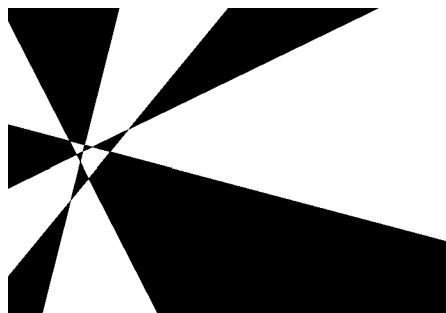


Figura 2.1

Considerem una descomposició del pla per n rectes en regions poligonals. Suposem que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirecta o un segment de longitud no nul·la; no es considera “tenir frontera comuna” compartir un vèrtex.

Provarem que les regions es poden acolorir globalment amb 2 colors, de tal manera que les que tinguin frontera comuna siguin de colors diferents.

El lector s'intentarà convèncere que l'enunciat és correcte veient que és possible d'acolorir amb dos colors afegint rectes successives a les disseccions que es van obtenint a partir de $n = 1$; en presentem aquí la demostració formal inductiva, i farem la demostració per inducció sobre n ; suposem que els colors són “blanc” (B) i “negre” (N).

Demostració.

Pas 1. Per a $n = 1$ és cert trivialment assignant colors diferents als dos semiplans produïts per l'única recta.

Pas 2. Suposem que per hipòtesi d'inducció es poden 2-acolorir (segons el criteri de l'enunciat) totes les disseccions per n rectes; en afegir una $(n+1)$ -èsima recta r arbitrària (figura 2.2) resulta una descomposició del pla en dos semiplans S_1 i S_2 .

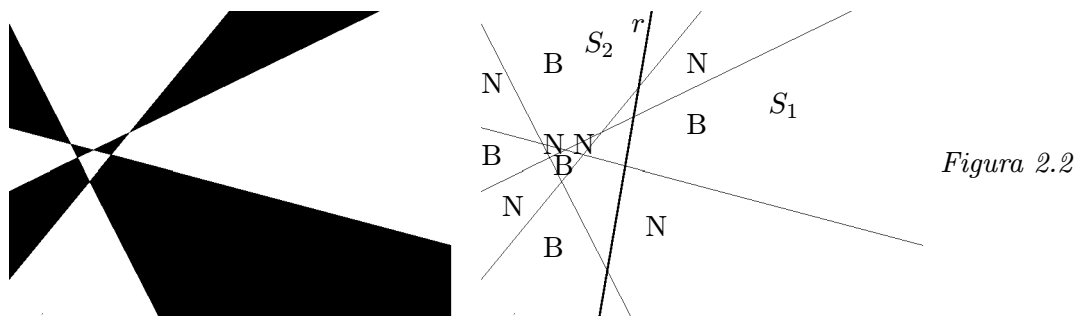


Figura 2.2

Considerem les coloracions sobre S_1 i S_2 induïdes per la 2-coloració general corresponent a les n rectes: això no constitueix una 2-coloració de la dissecció produïda per les $n + 1$ rectes, ja que les cares noves que tenen per frontera comuna segments o semirectes sobre r tenen la mateixa coloració. Vegem que podem obtenir una 2-coloració global (figura 2.3):

1. Mantenim la coloració sobre un dels semiplans, per exemple S_2 ; això deixa establerta una 2-coloració sobre aquest semiplà.
2. Intercanviem els colors de totes les regions de l'altre semiplà, S_1 , és a dir, els blancs passen a negres i els negres passen a blancs: això manté una 2-coloració sobre S_2 i, per l'intercanvi del color de les zones fronteres amb S_1 , obtenim la “compatibilitat” amb

la 2-coloració de S_1 ; per tant, globalment s'ha produït una 2-coloració.

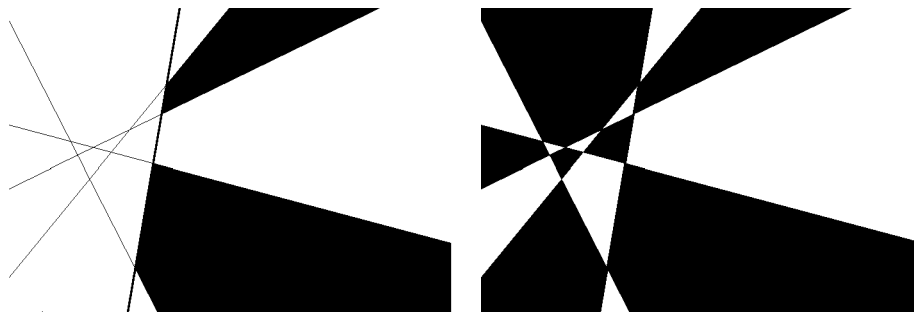


Figura 2.3

Aquí els objectes que s'han d'afegir són rectes!

El problema d'afegir una recta és que podem no estar segurs de generar una configuració general segons com ho fem, o en tot cas s'ha d'estudiar aquest problema en el curs de la demostració.

Potser seria millor una altra modalitat. Tenim la nostra dissecció de n rectes, n'eliminem una, ens queda una dissecció de $n - 1$ rectes, la 2-acolorim per hipòtesi d'inducció i restituïm la recta temporalment eliminada, que ara queda superposada sobre d'una bicoloració. La resta de la demostració és idèntica a la variant anterior.

En aquest cas no es planteja cap problema de com ampliar l'estructura d'una dissecció per rectes amb una recta més: aquest punt de vista no obliga a afegir cap recta, sinó només retornar una recta que s'ha suprimit momentàniament! Observem que l'argumentació és vàlida per a qualsevol recta que se suprimeixi.

Exemple 2: Dissecció del pla per rectes en posició general. Considerem una col·lecció de n rectes en el pla. Direm que estan en *posició general* si

- No n'hi ha dues de paral·leles (és a dir, que dues qualsevol es tallen).
- No n'hi ha tres que passin per un mateix punt (de manera que les interseccions de rectes ho són exactament de dues rectes).

A la figura 2.4 s'observa una dissecció de rectes en posició general a la subfigura esquerra i, a la subfigura dreta, una dissecció de rectes que no estan en posició general.

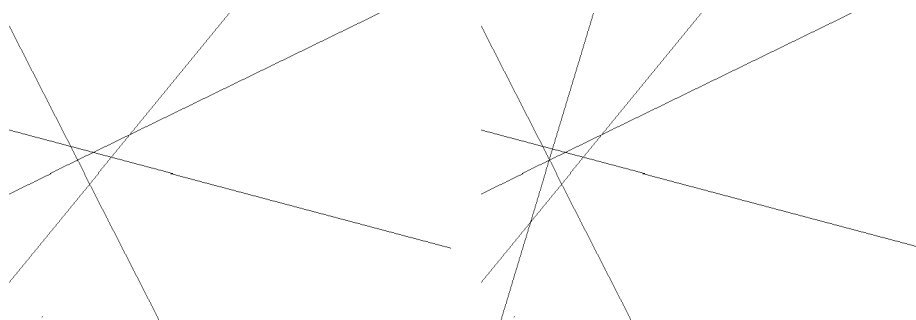


Figura 2.4

En una dissecció per n rectes es creen subobjectes de dimensionalitat diferent: els *vèrtexs* (interseccions de dues rectes), les *arestes* (segments, semirectes i rectes – quan $n = 1$) i regions.

Provem per inducció la propietat següent: *Una dissecció per n rectes en posició general té n^2 arestes.* Indiquem per a_n el nombre d'arestes d'una dissecció d'aquestes característiques.

Pas 1. En aquest cas és $n = 1$ i clarament $a_1 = 1 = 1^2$.

Pas 2. Suposem, per hipòtesi d'inducció, que per a n rectes en posició general és $a_n = n^2$. Es tracta de veure que $a_{n+1} = (n+1)^2$. En afegir una $(n+1)$ -èsima recta, es produeix un increment Δ_n respecte de les arestes que ja hi havia, de manera que podem escriure $a_{n+1} = a_n + \Delta_n$. Vegem quin és aquest increment, que procedirà de dues fonts: l'increment produït per la nova recta en tallar les antigues i els que li produeixen, a la nova recta, les antigues en tallar-la.

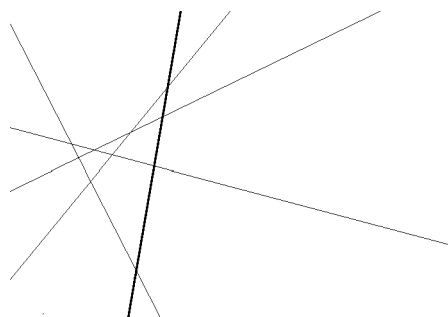


Figura 2.5

Pel que fa a la primera, la nova recta talla totes les n anteriors, ja que no hi ha paral·lelisme, i les talla en un punt interior a una aresta preexistent (no en un vèrtex, ja que està prohibida la intersecció de tres rectes) i, per tant, la desdobla en dues,

amb la qual cosa produeix un increment net d'una aresta per cada aresta que talla. Per tant, l'increment per aquesta contribució és n , nombre d'arestes (rectes) que talla la nova recta. Pel que fa a la segona font, les n rectes produeixen sobre la nova n interseccions diferents (perquè no poden passar 3 rectes per un mateix punt i perquè, en no poder-hi haver paral·lelisme, totes l'han de tallar; això produeix un increment de $n + 1$ noves arestes, totes sobre la nova recta. Per tant, globalment és $\Delta_n = n + (n + 1) = 2n + 1$. Finalment, aplicant la hipòtesi d'inducció podem escriure: $a_{n+1} = a_n + \Delta_n = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$, com s'havia de demostrar.

2.3.4 Inducció en teoria de grafs

Exemple 1

Provem que *tot arbre és 2-acolorible*. En aquest cas, reformulem l'enunciat explicitant el paràmetre respecte del qual farem la demostració inductiva: *tot arbre d'ordre n és 2-acolorible*. Suposem que no és el graf trivial N_1 i que $n \geq 2$. Suposem conegut el resultat que afirma que si tenim un arbre d'ordre $n \geq 2$, aleshores hi ha una mínim d'una fulla (de fet, un mínim de dues), és a dir, un mínim de vèrtexs de grau 1. Vegem per inducció sobre n que es pot acolorir amb 2 colors, que podem suposar B, N .

Utilitzarem l'esquema demostratiu

$$\begin{cases} P(n_0) \\ P(n - 1) \end{cases} \implies P(n)$$

Sigui $T = (V, A)$ arbre d'ordre $n = |V|$.

Pas 1. El valor de n mínim que tingui sentit en un problema de 2-acoloriment és $n_0 = 2$. En aquest cas, atès que T és connex, perquè és arbre, ha de ser $T = T_2$, òbviament acolorible amb 2 colors.

Pas 2. Suposem, doncs, $n \geq 3$. Considerem com a hipòtesi d'inducció la propietat: *tot arbre d'ordre $n' = n - 1$ és 2-acolorible*. Per tal d'aplicar-la hem d'aconseguir un graf de les mateixes característiques que el nostre, és a dir, connex i acíclic, i d'ordre $n - 1$, cosa que suggereix realitzar l'operació destructiva d'eliminar un vèrtex. Ara bé, l'eliminació d'un vèrtex preserva el caràcter d'acíclic, però en general no es garanteix que el graf resultant sigui connex, llevat que es pugui triar un vèrtex amb alguna propietat especial per al qual això estigui garantit.

Ara, pel resultat indicat abans, existeix com a mínim una fulla w_0 , l'eliminació de la qual no produeix desconexió de l'arbre. Considerem, doncs, $T' = T - w_0$, que continua essent arbre, però ara d'ordre $n - 1$, al qual podem aplicar la hipòtesi d'inducció per concloure que T' és acolorible amb 2 colors. Ara reconstruirem el nostre graf original T i veurem que podem estendre a una 2-coloració la que tenim en T' . Res més fàcil: si

w_1 és el vèrtex que és adjacent a w_0 en T' , assignem a w_0 el color que resta, d'entre els dos disponibles, que és diferent del que inductivament li ha estat assignat a w_1 . Això produeix una 2-coloració per a l'arbre T .

Observacions

Una observació important a fer és que si desconexem la propietat d'existència de fulles en un arbre d'un mínim de 2 vèrtexs, aleshores l'eliminació d'un vèrtex produeix en general desconexió i $T' = T - w$ és una reunió de components connexos; certament cada component és un arbre, però la situació no s'ajusta a l'esquema demostratiu, ja que els ordres seran $n'_i < n$, sense que es pugui afirmar $n'_i = n - 1$. Hem de buscar un altre esquema demostratiu per inducció que pugui tractar aquestes situacions més generals: és la *inducció forta* o *inducció completa*. El mateix passaria si eliminem una aresta, necessàriament aresta-pont: els dos components connexos que en resulten tindran normalment un nombre de vèrtexs estrictament inferior a $n - 1$.

Una altra observació fa referència a una altra visió alternativa de l'operació destructiva utilitzada, l'eliminació d'un vèrtex i la creació del nou graf resultant. Tot podria quedar dins del mateix graf a nivell de subgrafs, ja que podríem considerar, en comptes de $T' = T - w$, el subgraf de T induït pel conjunt de vèrtexs $V' = V - \{w_0\}$ i raonar equivalentment sobre aquest subgraf.

Considerem ara el conegut resultat que ens diu quin és el nombre mínim d'arestes perquè el graf pugui ser connex. Si $G = (V, A)$ és un graf connex d'ordre n , aleshores $|A| \geq n - 1$. $P(1)$ seria la propietat indicada per al cas que $n = 1$, cas en el qual s'hauria d'aplicar a $G = N_1$; en general tindriem:

$$P(n) : G = (V, A) \text{ graf connex d'ordre } n \implies |A| \geq n - 1$$

Naturalment, també es pot formular una versió de la propietat que no involucri cap referència explícita a nombres naturals, tot i que hi és subjacent: $G = (V, A)$ graf connex $\implies |A| \geq |V| - 1$.

Novament es veu que necessitem un altre esquema de demostració inductiva, ja que no resulta possible demostrar inductivament la propietat anterior si eliminem un vèrtex: si es produeix desconexió, els components connexos seran en general d'ordre estrictament inferior a $|V| - 1$.

Exemple 2

Caracterització dels grafs trajecte

Demostreu que els grafs connexos amb seqüència de graus $1, 2, \dots, \underbrace{2, 1}_{(n-2)}$ són els grafs

trajecte (isomorfisme).

En primer lloc, si tenim $G = (V, A)$ d'ordre $n = |V|$, pot succeir que $n = 2$ i que, de fet,

no hi hagi cap vèrtex de grau 2. En aquest cas, la seqüència seria 1,1, que considerem vàlida. La idea és, doncs, que hi ha exactament dos vèrtexs de grau 1 i la resta, si n'hi ha, de grau 2.

Hem de provar que són equivalents, per a un graf $G = (V, A)$ connex d'ordre n :

1. La seqüència de graus de G és 1,2, ..., 2, 1.
2. $G = T_n$ (isomorf).

Observem que la implicació (2) \implies (1) és de justificació trivial. El que no és obvi és que (1) \implies (2).

Demostrem ara (1) \implies (2). Ho farem directament, per inducció sobre n , l'ordre del graf. Aquesta és una bona estratègia quan no sabem com demostrar una determinada propietat, que es formula en termes de n , l'ordre del graf.

Com sempre, considerem dos passos:

Pas 1. En aquest primer pas, demostrarem la propietat per al valor de n més petit per al qual tingui sentit la propietat, que en aquest cas és $n = 2$. Això significa que la seqüència és 1,1 i, per tant, $G = T_2$.

Pas 2. Suposem, per tant, que $n \geq 3$, és a dir, que hi ha algun vèrtex de grau 2. *HI:* Suposem per hipòtesi d'inducció que la implicació que es vol demostrar és certa per a grafs connexos amb seqüència de graus 1,2, ..., 2,1 i d'ordre $n' = n - 1 < n$. Més concretament, "si un graf connex d'ordre $n' = n - 1 < n$ té seqüència de graus 1,2, ..., 2,1, aleshores és $T_{n'}$ ".

Considerem, doncs, el nostre graf G , connex, d'ordre $n > 2$, amb seqüència de graus 1,2, ..., 2,1. Per tal d'aplicar la hipòtesi d'inducció, cal derivar de G algun o alguns grafs d'ordre $n' = n - 1$ que siguin connexos i amb el mateix tipus de seqüència de graus. Per a això efectuarem una operació destructiva, que consistirà a eliminar vèrtexs amb la cura suficient perquè estiguem en condicions d'aplicar la hipòtesi d'inducció i posteriorment reconstruir el nostre graf, però ara ja amb l'estructura aclarida.

Exposem ara un mètode, en la línia del que hem dit anteriorment. Tot i que lògicament n'hi ha prou amb una demostració, més endavant exposarem altres mètodes a benefici del lector.

Eliminem un vèrtex de grau 1. Sigui w_1 un dels vèrtexs de grau 1. La seva eliminació no produeix desconexió, de manera que $G_1 = G - w_1$ continua essent connex i és d'ordre $n' = n - 1 < n$. Per tal de poder aplicar la hipòtesi d'inducció a G_1 , ens cal garantir que és de seqüència de graus 1,2,...,2,1. En efecte, si w_1 és adjacent a v_1 , aleshores v_1 no pot ser de grau 1 en G ja que, si ho fos, formarien un component connex T_2 i, atès que $n \geq 3$, el graf G original seria no connex. Per tant, v_1 és de grau 2 en G i, per tant, de grau 1 en G_1 ; d'altra banda, pel que fa a la resta de vèrtexs de G_1 , hereten

el grau que tenien en G , de manera que la seqüència de graus de G_1 és $1, 2, \dots, 21$. Hi podem aplicar la hipòtesi d'inducció i aleshores la seva estructura queda desvelada: és $G_1 = T_{n'}$. Ara bé, reconstruïm G restablint el vèrtex w_1 i l'aresta w_1v_1 , i així resulta $G = T_n$.

Observem que si volem eliminar un altre tipus de vèrtex o més d'un, aleshores ens trobem amb les limitacions del mètode d'inducció simple que ja hem comentat.

2.4 Inducció completa o forta

En algunes demostracions inductives sobre n , paràmetre lligat a una determinada estructura (un graf, per exemple) sobre la qual es vol demostrar una certa propietat, no sempre es pot garantir, depenent del problema, que es podrà aplicar la hipòtesi d'inducció sobre una estructura del mateix tipus a la qual correspongui el paràmetre $n - 1$, com ja s'ha vist abans. Imaginem, per exemple, que tenim un graf G connex d'ordre n per al qual s'ha de provar la propietat $P(n)$ sobre grafs connexos i, per tal de poder aplicar la hipòtesi d'inducció a un graf derivat del donat G , però d'ordre inferior, decidim eliminar un vèrtex v de G . Llevat que mitjançant alguna propietat addicional (com, per exemple, la capacitat d'eliminar un vèrtex de grau 1) puguem garantir que $G' = G - v$ continua essent connex (i d'ordre $n - 1$), normalment el màxim que podrem afirmar és que ha aparegut una col·lecció de components connexos, als quals podríem aplicar la hipòtesi d'inducció, si no fos que ara no es pot garantir que els ordres siguin $n - 1$, sinó que poden ser estrictament inferiors, i, en general, no es pot predir ni saber a priori. Per tant, l'esquema anterior de demostració inductiva simple o ordinària no és aplicable i ens cal un esquema que pugui cobrir aquests tipus de casos, d'altra banda molt freqüents en teoria de grafs.

L'esquema demostratiu que ens fa falta és el de la *inducció forta o completa*.

Principi d'inducció forta. *Siguin n_0 un nombre natural i $P(n)$ una proposició sobre n per a cada nombre natural $n \geq n_0$. Si*

1. $P(n_0)$ és certa, i
2. Per a cada nombre natural $k \geq n_0$, si $P(k')$ és certa per a cada k' amb $n_0 \leq k' \leq k$, aleshores també ho és $P(k + 1)$, aleshores $P(n)$ és cert per a tot nombre natural $n \geq n_0$.

Es pot provar que ambdós esquemes (inducció simple o ordinària i forta o completa) són equivalents.

Se'n pot formular també una versió finita, de manera semblant al cas de la inducció ordinària. També hi ha formulacions més generals per a les quals no cal que la propietat que es vol demostrar es compleixi per a tot $k' < k$, sinó només per a alguns.

Resulta molt útil per demostrar la correctesa d'algorismes basats en bipartició o partició dels conjunts *input*.

Es veurà millor el funcionament del mètode en aquesta variant en el decurs de l'explicació de l'exemple següent.

Exemple 1: Tot arbre d'ordre n té exactament $n - 1$ arestes.

Recordem que un arbre és un graf connex i acíclic, és a dir, sense cicles.

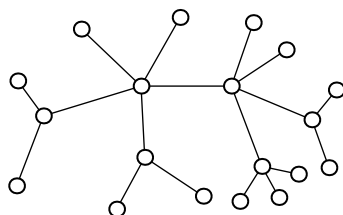


Figura 2.6

Sigui $T = (V, A)$, amb $n = |V|$, $m = |A|$.

Veurem més d'un mètode de demostració, fent inducció respecte del *mateix* paràmetre:

Mètode 1: Eliminant un vèrtex. Provem ara el resultat ben conegut “ $m = n - 1$ ”, per inducció sobre n , ordre del graf.

Pas 1. El cas base correspon a $n = 0$, cas en el qual $T = N_1$. És $m = 0$ i òbviament es compleix la propietat.

Pas 2. La idea és formular una hipòtesi inductiva que ens permeti demostrar el que volem per al “nostre” arbre $T(V, A)$ d'ordre n . Sembla lògic efectuar alguna operació destructiva per passar d'ordre n a ordre inferior, per exemple $n - 1$, i això es pot fer eliminant un vèrtex w i creant, per tant, un nou graf $T' = T - w$. Aleshores, si la hipòtesi d'inducció que haguéssim formulat fos “el nombre d'arestes m' d'un arbre d'ordre $k' = k - 1$ és $m' = k' - 1$ ”, ara no està garantit que la puguem aplicar, perquè s'ha d'aplicar a l'estructura *arbre*, i pot succeir que T' hagi deixat de ser-ho. En efecte, T' reté l'aciclicitat però, en canvi, podem haver perdut la connexió (llevat que hàgim eliminat un vèrtex de grau 1); en general, per tant, $T' = \bigcup_{i=1}^r H_i$, amb $r \geq 1$, reunió de components connexos (observeu que pot ser que $r = 1$, però no ho podem garantir). Cadascun d'aquests components connexos és un arbre com a graf, però ara se'ns presenta el problema que els ordres respectius seran més petits que $n - 1$ i tampoc no els podem aplicar la hipòtesi d'inducció tal com és formulada. Ja es veu, doncs, la conveniència de reformular la hipòtesi d'inducció, en el marc de la inducció forta, per tal de resoldre el problema. Adoptem, doncs, HII: “el nombre d'arestes de tot arbre d'ordre $n' < n$ és $n' - 1$ ”. L'aplicarem a cadascun dels arbres $H_i = (V_i, A_i)$. Establim la notació $n_i = |V_i|$, $m_i = |A_i|$.

Bé, aleshores és $n = n_1 + \dots + n_r + 1$, $m_i = n_i - 1$. Ara, pel que fa a les arestes, si el grau de w és $g(w) = h$, perdem exactament h arestes quan l'eliminem i es creen

exactament h components connexos, ja que si se'n produïssin menys, aleshores voldria dir que hi havia algun cicle. Per tant, $r = h$. Així, doncs, $m = m_1 + \dots + m_h + h = (n_1 - 1) + \dots + (n_h - 1) + h = (n_1 + \dots + n_h) - h + h = n_1 + \dots + n_h = n - 1$.

La inducció ordinària, corresponent a l'esquema $P(n - 1) \implies P(n)$ s'hauria pogut aplicar eliminant un vèrtex de grau 1, però per a això hauríem hagut de saber que tot arbre d'un mínim de dos vèrtexs té un mínim de dos vèrtexs de grau 1 (fulles), propietat certa, però que dins l'ordre expositiu coherent s'exposa posteriorment (potser es podria fer una prova inductiva que justificués l'existència d'una fulla, que es pugués fer directament); justament és fàcil de provar aplicant la propietat $m = n - 1$ que volem demostrar!

Depenent del que vulguem aconseguir o el que sapiguem, podem pensar en altres possibles operacions destructives com, per exemple, l'eliminació d'arestes, cosa que en aquest cas constituiria una altra variant de demostració inductiva, sota el mateix esquema d'inducció forta.

Mètode 2: Eliminant una arista. Podem adoptar una altra via més senzilla. Sigui a una arista. No pertany a cap cicle, ja que no n'hi ha, i, per tant, és arista pont. La seva eliminació crea un nou graf amb exactament dos components connexos. Sigui $T' = T - a = H_1 \cup H_2$. Els components connexos continuen essent acíclics i, per tant, són connexos; així, doncs, són arbres, però d'ordres estrictament inferiors a n i els serà aplicable la hipòtesi d'inducció en la seva versió forta. Siguin $H_1 = (V_1, A_1)$, $H_2 = (V_2, A_2)$, siguin $n_1 = |V_1|$, $m_1 = |A_1|$, $n_2 = |V_2|$, $m_2 = |A_2|$. Per la hipòtesi d'inducció, és $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. I ara recomponem la situació pel que fa al "nostre" arbre: $m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1$.

Insistim que les operacions destructives han de mantenir el mateix tipus d'estructura o s'han de crear subestructures del mateix tipus per tal que els sigui aplicable la hipòtesi d'inducció.

Exemple 2: Caracterització dels grafs trajecte (revisitat)

Tornem a l'exemple presentat a l'apartat anterior, en què es prova la caracterització dels trajectes com els connexos amb la seqüència de graus 1,2, ..., 2,1, per inducció sobre el nombre de vèrtexs. Fem inducció sobre l'ordre n , però ara presentarem dues variants possibles que obliguen a adoptar la inducció completa. Es recomana al lector la relectura de l'exemple tal com s'ha tractat anteriorment.

La part de la caracterització que no és trivial és: si un graf és connex amb graus 1,2, ..., 2,1, aleshores és un trajecte.

Com sempre, considerem dos passos:

Pas 1. En aquest primer pas, demostrarem la propietat per al valor de n més petit per al qual tingui sentit la propietat, que en aquest cas és $n = 2$. Això significa que la seqüència és 1,1 i, per tant, $G = T_2$.

Pas 2. Suposem, per tant, que $n \geq 3$, és a dir, que hi ha algun vèrtex de grau 2. *HI:* Suposem, per hipòtesi d'inducció, que la implicació que es vol demostrar és certa per a grafs connexos amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$ i d'ordre $n' < n$. Més concretament: "si un graf connex d'ordre $n' < n$ té seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$, aleshores és $T_{n'}$ ".

Considerem, doncs, el nostre graf G , connex, d'ordre $n > 2$, amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$. Per tal d'aplicar la hipòtesi d'inducció, cal derivar de G algun o alguns grafs d'ordre estrictament inferior que siguin connexos i amb la mateixa seqüència de graus. Per a això efectuarem una operació destructiva, que consistirà en l'eliminació de vèrtexs amb la cura suficient perquè estiguem en condicions d'aplicar la hipòtesi d'inducció i posteriorment reconstruir el nostre graf, però ara ja amb l'estructura aclarida.

Ja varem presentar el mètode que consistia a eliminar un vèrtex de grau 1.

Mètode 2: Eliminem els dos vèrtexs de grau 1.

Siguin w_1, w_2 els dos vèrtexs de grau 1, respectivament adjacents als vèrtexs v_1, v_2 .

Per connexió, els dos vèrtexs de grau 1 no són adjacents, ja que $n \geq 3$. Si $n = 3$, aleshores els dos vèrtexs de grau 1 són adjacents a un vèrtex comú de grau 2 i, en aquest cas, és $G = T_3$. Suposem, doncs, que $n \geq 4$; aleshores ja no és possible que els vèrtexs de grau 1 siguin adjacents a un mateix vèrtex de grau 2, és a dir, que ha de ser $v_1 \neq v_2$, ja que en cas contrari es formaria un component connex T_3 i en restarien vèrtexs fora, amb la qual cosa no hi hauria connexió. Eliminem ara els vèrtexs de grau 1; aleshores el graf G_1 resultant continua essent connex i amb els vèrtexs v_1, v_2 que han passat a ser de grau 1 i, en conseqüència, la seqüència de graus de G_1 és $1, 2, \dots, 2, 1$. A més, l'ordre de G_1 és $n' = n - 2 < n$ i li és aplicable la hipòtesi d'inducció, per tot el que hem dit; d'aquesta manera la seva estructura queda aclarida immediatament. És $G_1 = T_{n-2}$; ara reconstruïm el graf G i obtenim $G = T_n$.

Mètode 3: Eliminem un vèrtex de grau 2.

El cas $n = 3$ és trivial. Suposem que $n \geq 4$.

Sigui w_0 un vèrtex qualsevol de grau 2, adjacent als vèrtexs v_1, v_2 . No és possible que v_1, v_2 siguin ambdós de grau 1, ja que, si fos així, tindríem un component connex T_3 i restarien vèrtexs, amb la qual cosa G no seria connex. Per tant, un dels dos és de grau 2. Hi ha dos casos que cal contemplar:

Cas 1. El vèrtex v_1 és de grau 1 i el v_2 és de grau 2 (i, anàlogament, si fos a l'inrevés). Eliminem w_0 i creem el graf $G_1 = G - w_0 = N_1 \cup H_1$, amb N_1 format per v_1 . Aleshores H_1 és connex, d'ordre $n' = n - 2 < n$ i amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$, ja que els vèrtexs diferents de v_2 hereten el grau que tenien i v_2 , que abans era de grau 2 excepte un, de grau 1, ara és de grau 1 en G_1 , i també en H_1 . Podem aplicar la hipòtesi d'inducció a H_1 , que serà, per tant, un T_{n-2} . Ara només resta, amb aquesta part de l'estructura aclarida, reconstruir el graf original, amb la qual cosa queda finalment $G = T_n$.

Cas 2. Els vèrtexs v_1, v_2 són de grau 2. Eliminem el vèrtex w_0 ; el graf resultant és format per dos components connexos $G = H_1 \cup H_2$, amb $v_1 \in V(H_1)$, $v_2 \in V(H_2)$, de grau 1. D'altra banda, si els vèrtexs de grau 1 en G són w_1, w_2 , s'han d'haver repartit cadascun a cada un dels components connexos, ja que en cas contrari els components connexos H_1, H_2 tindrien nombres senars, 1 i 3, de vèrtexs de grau senar 1, cosa impossible en un graf. Per tant, els components connexos tenen graus $1, 2, \dots, 2, 1$ i, per hipòtesi d'inducció, són trajectes, de manera que $H_1 = T_{m_1}$, $H_2 = T_{m_2}$. Reconstruint el graf original G , resulta $G = T_n$.

Exemple 3: Tot arbre d'un mínim de dos vèrtexs té un mínim de 2 fulles.

És possible presentar una demostració no inductiva d'aquest resultat. Vegem aquí una demostració inductiva sobre l'ordre n de l'arbre. Sigui $T = (V, A)$ arbre d'ordre $n \geq 2$.

Pas 1. El valor mínim és $n = 2$, cas en el qual $T = T_2$, que té 2 fulles.

Pas 2. Suposem, per tant, $n \geq 3$. La hipòtesi d'inducció es formula com "tot arbre d'ordre $n' < n$, amb un mínim de 2 vèrtexs, admet 2 fulles". Vegem-ne dues variants possibles:

Mètode 1: Eliminem una aresta. Considerem una aresta $a = uv$, que és aresta-pont pel fet de tractar-se d'un arbre. Eliminem-la per formar $T' = T - a$, graf acíclic amb 2 components connexos $H_1 = (V_1, A_1)$, $H_2 = (V_2, A_2)$ acíclics i, per tant, arbres, cadascun d'ells amb ordres respectius $n_1 < n$, $n_2 < n$, que contenen cadascun un vèrtex extrem de l'aresta $a = uv$. Suposem, per exemple, $u \in V_1$, $v \in V_2$. Vegem que cadascun d'aquests components connexos aporta una fulla al còmput general de fulles de T , amb la qual cosa n'hi haurà un mínim de 2 garantides.

Si un dels components és d'ordre 1, aleshores el vèrtex corresponent era ja una fulla en T , amb la qual cosa aporta un 1 al còmput de fulles. Si el component (suposem, per exemple, H_1) és d'ordre $n' \geq 2$, aleshores, en aplicació de la hipòtesi d'inducció, admet 2 fulles com a mínim, fulles en l'arbre H_1 . D'aquestes fulles una podria ser u , que no ho serà en T ; l'altra, en canvi, continua essent de grau 1 en T , amb la qual cosa aportarà una fulla al còmput general. Globalment tenim el que volíem.

Mètode 2: Eliminem un vèrtex. Sigui w un vèrtex de T . Si ja és una fulla, hem resolt el problema aplicant la hipòtesi d'inducció a $T - w$, que seria un arbre d'ordre $n - 1$, i s'aplicaria un raonament similar al mètode 1 per justificar que aporta un mínim d'una fulla a T . Si w no és una fulla, és $g(w) \geq 2$ i aleshores $T' = T - w$ és una reunió d'un mínim de 2 arbres, cadascun amb ordre estrictament inferior a n . Ara aplicariem argumentacions similars a les del mètode 1 per justificar que cada un d'aquests components connexos aporta a l'arbre T un mínim d'una aresta, amb la qual cosa finalment en garantim un mínim de dues.

Exemple 3: Si $G = (V, A)$ és un graf connex d'ordre n , aleshores $|A| \geq n - 1$.

Demostrem ara la propietat per inducció sobre n .

Pas 1. Considerem el cas $n_0 = 1$, cas en el qual és $G = N_1$ i òbviament es compleix la desigualtat, ja que $|A| = 0$.

Pas 2. Sigui $n \geq 2$. Suposarem que la propietat que es vol demostrar és certa per a grafs connexos d'ordre $n' < n$, és a dir: “si $G' = (V', A')$ és un graf connex d'ordre $n' < n$, aleshores $|A'| \geq n' - 1$ ” i aquesta és la hipòtesi d'inducció. Amb l'objectiu de poder aplicar la hipòtesi d'inducció, eliminem un vèrtex w_0 arbitrari del nostre graf $G = (V, A)$ d'ordre n i, per tant, produïm el graf $G' = G - w_0 = (V', A')$. Observem que $|V'| = n - 1$ i $|A'| = |A| - g(w_0)$. Indiquem $r = g(w_0)$; és $r \geq 1$, ja que el graf G és connex.

Ara poden haver passat dues coses:

Cas 1: G' és connex. Estem en condicions d'aplicar la hipòtesi d'inducció a G' i escriure, per tant, $|A'| \geq |V'| - 1$, d'on podem reconstruir la informació relativa a G : $|A| = |A'| + r \geq |A'| + 1 \geq (|V'| - 1) + 1 = |V'| = n - 1$.

Cas 2: G' és no connex. Sigui $G' = G_1 \cup \dots \cup G_q$ l'expressió de G' com a reunió de components connexes, dels quals n'hi ha com a màxim el grau de w_0 , de manera que $q \leq r = g(w_0)$ o equivalentment $r - q \geq 0$. Cada $G_i = (V_i, A_i)$ és connex d'ordre $n_i < n$ i, per tant, li és aplicable la hipòtesi d'inducció i, en conseqüència, podem escriure per a cada $i = 1, \dots, q$, $|A_i| \geq |V_i| - 1$. Aleshores tenim: $|A| = |A'| + r = (\sum_{i=1}^q |A_i|) + r \geq (\sum_{i=1}^q (|V_i| - 1)) + r = ((\sum_{i=1}^q |V_i|) - q) + r = (|V| - 1) + (r - q) \geq |V| - 1 = n - 1$.

S'observa als exemples anteriors que hi pot haver una *multiplicitat de demostracions possibles* fent inducció respecte d'un mateix paràmetre.

2.5 Inducció respecte de diversos paràmetres possibles

Normalment, en demostracions inductives en grafs, la inducció se sol fer respecte de l'ordre o respecte de la mida. Veurem algun exemple respecte d'aquesta última possibilitat.

2.5.1 Grafs planaris i fórmula d'Euler

Aprofitem el cas de la fórmula d'Euler per proposar exemples de demostracions inductives respecte de diversos paràmetres, i fins i tot respecte de paràmetres poc usuals.

Recordem que un graf és planari si admet una representació planària, és a dir, una representació en el pla en la qual els vèrtexs es representen per punts i les arestes per arcs de corba, de tal manera que no hi hagi interseccions entre arestes que no corresponguin als vèrtexs extrems de cadascuna. Quan tenim una representació planària apareixen les cares o regions, determinades per les arestes, cares d'entre les quals n'hi ha una exactament que és no fitada.

Hi ha casos en què la propietat que es vol provar s'explicita en termes de més d'un nombre natural, com és el cas de la *fórmula d'Euler* per a un graf planari connex:

Teorema 2.1 *Sigui G un graf planari connex amb n vèrtexs, m arestes i c cares (comptant la no finita). Aleshores, $c + n - a = 2$ (fórmula d'Euler).*

La fórmula fa referència al nombre de cares c d'una particular representació plana del graf planari; ara bé, un cop provada, i atès que podem reescriure-la com $c = a + 2 - n$, el nombre de cares resulta ser un invariant del graf i no depèn de la particular representació plana del graf planari.

Existeixen moltes demostracions de la fórmula d'Euler de tipus inductiu (i també n'hi ha de tipus no inductiu). *La inducció es pot fer respecte de diversos paràmetres*, com per exemple, entre d'altres:

- respecte de m , la mida o el nombre d'arestes,
- respecte de c , el nombre de cares,
- respecte del nombre de cicles del graf,
- respecte del nombre d'operacions constructives des del nul

No sol resultar productiu fer inducció sobre el nombre de vèrtexs en aquest cas, com pot comprovar el lector.

Vegem tres de les possibilitats anteriors.

2.5.2 Inducció respecte del nombre d'arestes

Què significa fer inducció sobre el nombre d'arestes en teoria de grafs? Aquí en trobem dues modalitats possibles, la concreció de les quals depèn del tipus de problema particular en què es vulgui utilitzar el mètode de demostració per inducció.

Modalitat 1. En alguns casos es considera n , l'ordre del graf, arbitrari, però fix en tot el procés inductiu. D'aquesta manera, si per exemple $n > 0$, aleshores a varia sobre totes les possibilitats de construcció de grafs, afegint arestes (0, 1, 2, etc.), d'acord amb les propietats que hagi de tenir el graf que es considera. Per exemple, si simplement es tracta de grafs sense més restriccions, aleshores el valor mínim de a en el pas base inductiu serà 0, i el graf en qüestió serà el N_n . Ara bé, si n és fix, i estem demostrant alguna propietat per a grafs connexos, aleshores el nombre mínim d'arestes que cal considerar en el pas base de la demostració per inducció és el mínim que permet construir un connex sobre n vèrtexs, és a dir, $a = n - 1$, com és ben sabut de teoria

d'arbres, cas en el qual efectivament tindrem un arbre (a més, s'ha provat abans com a exemple de demostració inductiva).

Demostració inductiva segons aquest esquema: *fixem* n i fem inducció sobre a .

Pas 1 (base). El valor mínim possible, atesa la connexió, és $a = n - 1$, amb la qual cosa G és un arbre i tenim una única cara, la C_∞ , la no fitada; és a dir, $c = 1$, i trivialment es compleix la fórmula d'Euler, ja que $c + n = 1 + n = (n - 1) + 2 = a + 2$, com es comprova rutinàriament.

Pas 2 (inductiu). Sigui ara $a \geq n$. Atès que el nostre graf és connex, no és arbre per la condició $a \neq n - 1$ i, per tant, ha de tenir algun cicle C . Sigui α una aresta de C . L'eliminació de α manté la planaritat. També conserva la connexió, ja que si una aresta és d'un cicle, la seva supressió no augmenta el nombre de components connexos, perquè si un recorregut utilitza aquesta aresta, es pot trobar un recorregut alternatiu a través de la resta del cicle. Per tant, $G' = G - \alpha$, $a' = a - 1$ té totes les propietats requerides per tal que se li pugui aplicar la hipòtesi d'inducció. Caldrà veure com ha afectat l'operació anterior al nombre de vèrtexs i de cares: el nombre de vèrtexs és el mateix, $n' = n$; en canvi, el nombre de cares ha variat. En efecte, l'aresta α , atès que és d'un cicle, no és aresta-pont i és aresta comuna d'exactament la frontera de dues cares: la seva eliminació produeix la fusió de les dues cares en una i, per tant, $c' = c - 1$. Aplicant ara la hipòtesi d'inducció a G' podem escriure la fórmula d'Euler per a G' i aleshores: $2 = c' + n' - a' = (c - 1) + n - (a - 1) = c + n - a$.

Modalitat 2. En altres casos, es considera n , variant també de totes les maneres possibles. Aleshores, per exemple, si es tracta de connexos, en el pas base, ha de ser $m = 0$, cosa que força que hagi de ser $G = N_1$, és a dir, $n = 1$. En aquest cas, en el pas inductiu es fan afirmacions del tipus "suposem que la fórmula d'Euler es compleix per a tot graf connex, planari, de $m' < m$ arestes", i se sobreentén que n varia de totes les maneres possibles, és per a tots els n possibles, sempre dintre de la compatibilitat amb les propietats sobre els grafs que s'han de demostrar (planaritat i connexió, en aquest exemple).

Repetim la demostració de la fórmula d'Euler segons aquesta variant, sempre amb l'intent d'analitzar els matisos diferencials de la demostració inductiva. La fem per inducció sobre a , nombre d'arestes. Ara no considerem n fixat, sinó lliure.

Pas 1. El valor més petit possible és $a = 0$, cosa que obliga que sigui $n = 1$, per mantenir la connexió. Aleshores, $c = 1$ i òbviament es compleix la fórmula.

Pas 2. Sigui $a \geq 1$. Considerem el graf G planari connex de n vèrtexs, a arestes i c cares d'una representació planària. Suposem la fórmula vàlida per a tot graf planari connex de $a - 1$ (o fins a un màxim de $a - 1$, tot i que aquí no cal) arestes (hipòtesi d'inducció). Hem de considerar dos casos possibles:

- G no és un arbre. Aleshores, atès que és connex, ha de ser cíclic, i sigui C un cicle

de G . Sigui α una aresta del cicle. S'elimina per formar $G' = G - \alpha$, al qual se li pot aplicar la hipòtesi d'inducció i se'n pot afirmar la fórmula d'Euler, seguint exactament les argumentacions de la variant demostrativa anterior.

- G és un arbre. Aleshores $m = n - 1$, $c = 1$ (la cara C_∞) i podem comprovar amb aquests valors que es compleix la fórmula d'Euler.

2.5.3 Inducció respecte del nombre de cares

Vegem una variant més de demostració de la fórmula d'Euler, ara per inducció sobre el nombre de cares c :

Pas 1. Sigui $c = 1$. Aleshores tenim que només hi ha la cara no fitada C_∞ . El graf és, doncs, acíclic i, essent connex, és arbre, amb la qual cosa resulta $a = n - 1$. Per tant, ara justificar la fórmula és només una comprovació de rutina: $c + n = 1 + (n - 1) = n$.

Pas 2. Sigui ara $c \geq 2$ i suposem la fórmula vàlida per a grafs connexos planaris amb un nombre estrictament inferior de cares $c' < c$ (hipòtesi d'inducció). Per tal de poder aplicar la hipòtesi d'inducció al nostre graf farem una operació destructiva consistent a derivar algun graf a partir del nostre, amb menys cares, de tal forma que se li pugui aplicar la hipòtesi d'inducció, escriure la fórmula d'Euler per a aquest graf i esperar poder obtenir-la per al nostre.

La idea és considerar una aresta comuna de dues cares, és a dir, de la frontera comuna, eliminar-la i així provocar la fusió de les dues cares en una. Aquesta és una part delicada, ja que s'ha de mantenir la connexió, cosa que ens guia cap a l'eliminació d'una aresta que no sigui aresta pont, és a dir, que pertanyi a algun cicle.

Si $c \geq 2$, atès que només hi ha una cara no fitada, n'hi ha com a mínim una de fitada, per exemple C . També per aquest motiu, la frontera de la cara C conté algun cicle, ja que en cas contrari tindríem un arbre. Escollirem una aresta a de la frontera de C que pertanyi a un cicle.

En el nou graf creat per l'eliminació de l'aresta en qüestió és aplicable la hipòtesi d'inducció, ja que és planari, connex, i amb una cara menys. Tenim $c' = c - 1$, $n' = n$, $a' = a - 1$. Aleshores podem escriure $c' + n' = a' + 2$, és a dir, $(c - 1) + n = (a - 1) + 2$, d'on $c + n = a + 2$.

2.5.4 Inducció respecte de paràmetres inusuals

Seguim amb el tema de la fórmula d'Euler per a grafs planaris connexos, de la qual presentarem una nova demostració inductiva, però respecte d'un paràmetre inesperat.

Proposem un conjunt mínim d'operacions constructives en grafs (però dibuixades en el pla) que permetin construir grafs planaris connexos a partir d'un vèrtex, és a dir,

a partir de N_1 , amb la idea addicional que d'aquesta manera es pugui arribar a tot graf connex planari (de fet, una representació planària). Les construccions es fan amb criteri de construcció planària, de manera que no es construirà una aresta que travessi o talli arestes preexistents.

Es pren com a punt de partida el graf nul d'un vèrtex. Aleshores les operacions grafo-gràfiques que considerem són:

- *Operació 1.* Afegiment d'un nou vèrtex per connectar-lo per una aresta a un vèrtex preexistent.
- *Operació 2.* Subdivisió elemental d'una aresta preexistent o, equivalentment, inserció en una aresta d'un vèrtex de grau 2.
- *Operació 3.* Creació de cicle per tancament de trajecte. Tancar amb una aresta un subgraf trajecte T_n , és a dir, crear un cicle C_n , sempre que no talli cap aresta existent.

El lector s'ha de convèncer (o ho pot provar per inducció) que un graf planari connex o bé és N_1 o bé es pot generar per l'aplicació, a partir de N_1 , d'una seqüència finita d'algunes de les operacions descrites anteriorment.

Una possible prova de la fórmula d'Euler serà *sobre el nombre t d'operacions de les anteriors* per construir un graf connex planari (una per una!).

Pas 1. El cas més petit correspon a $t = 1$, és a dir, a fer una operació a partir de N_1 , un vèrtex. En aquest cas només és aplicable l'operació 1 i el resultat és el graf T_2 , per al qual es compleix la fórmula d'Euler.

Pas 2. Suposem que la fórmula d'Euler es compleix per a tots els grafs connexos planaris que es poden construir amb t operacions de les anteriors, és a dir, que es compleix $c + n - a - 2 = 0$. Construïm d'un graf arbitrari d'aquest tipus un nou graf amb una operació més d'entre les disponibles. Vegem que se segueix complint la fórmula. Per a això hem de veure que la fórmula es manté quan es realitzen cadascuna de les tres operacions, analitzant quines són les variacions en les quantitats c, n, a per a cada una d'elles i comprovant que per a cada operació, si partim de $c + n - a - 2 = 0$, continuem tenint la igualtat.

- *Operació 1.* Tenim: $n' = n + 1, c' = c, a' = a + 1$. Aleshores $c' + n' - a' - 2 = c + (n + 1) - (a + 1) - 2 = c + n - a - 2 = 0$, per hipòtesi d'inducció.
- *Operació 2.* Tenim: $n' = n + 1, c' = c, a' = a + 1$. Aleshores $c' + n' - a' - 2 = c + (n + 1) - (a + 1) - 2 = c + n - a - 2 = 0$, per hipòtesi d'inducció.
- *Operació 3.* Tenim: $n' = n, c' = c + 1, a' = a + 1$. Aleshores $c' + n' - a' - 2 = (c + 1) + n - (a + 1) - 2 = c + n - a - 2 = 0$, per hipòtesi d'inducció.

Per tant, queda provada la fórmula.

2.6 Aspectes diversos

2.6.1 Distinció de casos segons paritat

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $|V| = p$. Si G no conté triangles C_3 , proveu que $|A| \leq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$.

Una primera observació sobre l'enunciat: el significat precís és que no existeix al graf cap subgraf isomorf al cicle C_3 .

Un aspecte important del problema és com utilitzar la hipòtesi de no contenir triangles. La idea bàsica és que si els vèrtexs u, v són adjacents, aleshores no pot existir cap vèrtex que sigui adjacent a tots dos, ja que en aquest cas existiria algun triangle. Considerant la col·lecció de vèrtexs adjacents a u , aquests queden exclosos com a possibles vèrtexs adjacents a v i, en conseqüència, sembla que ha de ser possible trobar alguna relació entre els graus dels vèrtexs u, v .

Un possible mètode demostratiu que es pot intentar usualment en teoria de grafs és per inducció. La demostració d'aquest resultat la farem per inducció sobre l'ordre del graf.

Per a valors $p = 1, p = 2$ el resultat és obvi. Ara bé, un primer intent de demostració per inducció no sembla portar fàcilment a cap conclusió.

Podem fer una demostració per inducció *separadament* per a valors de p senars i parells. Això equival a plantejar i resoldre dos subproblemes diferents:

Problema 1: Tot graf sense triangles d'ordre parell r conté, com a màxim, $\lfloor \frac{r^2}{4} \rfloor$ arestes.

Problema 2: Tot graf sense triangles d'ordre senar r conté, com a màxim, $\lfloor \frac{r^2}{4} \rfloor$ arestes.

Demostrem-ho per a grafs d'ordre parell; es faria anàlogament per a grafs d'ordre senar, cosa que queda pendent per al lector.

Sigui G doncs un graf d'ordre *parell* $p = 2n + 2$, sense triangles C_3 , i suposem el resultat cert per a qualsevol graf sense triangles d'ordre $q \leq 2n = p - 2$, amb q parell.

Si $G = N_{2n+2}$, el problema està resolt; en cas contrari, $A \neq \emptyset$ i, per tant, hi haurà dos vèrtexs adjacents com a mínim. Siguin u, v vèrtexs adjacents i sigui $a = \{u, v\}$ l'aresta corresponent. Podem suposar que efectivament n'existeixen, ja que en cas contrari seria $|A| = 0$ i trivialment seria certa la conclusió.

Com que volem poder aplicar la hipòtesi d'inducció, ens cal obtenir a partir de G algun graf d'ordre estrictament inferior al qual sigui aplicable aquesta hipòtesi (necessitem, per tant, que sigui d'ordre parell i sense triangles); considerem el graf

$G_1 = (V_1, A_1) = G - S$, amb $S = \{u, v\} \subset V$, que s'obté eliminant els vèrtexs u, v i les arestes corresponents; en tot cas G_1 , com a subgraf de l'original G , no conté triangles i, a més, el seu ordre és $q = 2n$. Per hipòtesi d'inducció,

$$|A_1| \leq \lfloor \frac{(2n)^2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{4n^2}{4} \rfloor = n^2.$$

Ara tornarem a considerar G , que pot obtenir-se a partir de G_1 restituint u, v i totes les arestes incidents a u, v .

Avaluem ara el nombre d'arestes incidents amb u o v . No pot existir cap vèrtex w adjacent a u, v al mateix temps, ja que aleshores existiria algun triangle. Això significa que si el grau de u és $g(u) = k$, aleshores, atès que els vèrtexs adjacents a u no poden ser adjacents a v , resultarà $g(v) \leq 2n + 2 - k$ (cal excloure com a possibles adjacents els k vèrtexs que ja ho són a u).

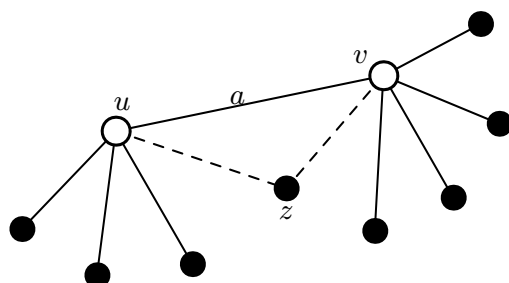


Figura 2.7

Convé tenir present que l'aresta a es compta dues vegades i, per tant, restarem 1 per aquest doble còmput:

$$\begin{aligned} |A| &= |A_1| + \text{nombre d'arestes incidents amb } u \text{ o } v \\ &= |A_1| + g(u) + g(v) - 1 \\ &\leq n^2 + g(u) + g(v) - 1 \\ &= n^2 + k + 2n + 2 - k - 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &\stackrel{(p=2n+2)}{=} \frac{p^2}{4} = \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor, \end{aligned}$$

com s'havia de provar.

2.6.2 Passos base múltiples

En algunes ocasions s'ha de provar més d'un cas base. En podem posar un exemple relacionat amb una recurrència, com la de Fibonacci, que té dos passos base a la

definició:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ per a } n \geq 3. \end{aligned}$$

Demostrem per inducció l'expressió del terme general de la successió de Fibonacci.

El terme general de la successió de Fibonacci és

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Per simplificar el desenvolupament posterior denotarem $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) i $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, de manera que cal provar que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi_1^n - \varphi_2^n).$$

Observeu que $\varphi_i^2 = \varphi_i + 1$, $i = 1, 2$.

Demostrarem la igualtat per inducció completa:

Pas 1a. Cal provar el resultat per a $n = 1$, cosa que és una comprovació rutinària, veient la coincidència de valors quan fem la substitució $n = 1$.

Pas 1b. Cal provar el resultat per a $n = 2$, cosa que és també una comprovació rutinària.

Pas 2. Suposem ara que $k \geq 2$ i que la fórmula es compleix per a tot i amb $1 \leq i \leq k$. Essent $k + 1 \geq 3$, estem en el cas general. Apliquem la hipòtesi d'inducció per k i $k - 1$ i podrem escriure, reagrupant termes i efectuant càlculs,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^k - \varphi_2^k) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^{k-1} - \varphi_2^{k-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^{k-1}(\varphi_1 + 1) - \varphi_2^{k-1}(\varphi_2 + 1)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^{k-1}(\varphi_1^2) - \varphi_2^{k-1}(\varphi_2^2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^{k+1} - \varphi_2^{k+1}) \end{aligned}$$

Naturalment, aquesta demostració pressuposa que ja hem sospitat el resultat per algun mitjà o ens l'han comunicat, cosa que és un inconvenient de les demostracions inductives: cal saber el resultat que s'ha de demostrar... En aquest cas s'hauria pogut deduir no inductivament a partir de resultats relatius a successions recurrents lineals a coeficients constants homogènies o per altres mètodes.

2.6.3 Alternatives a la inducció

No sempre és estrictament imprescindible recórrer a la inducció per demostrar una propietat. És possible que siguem capaços de provar-la per altres mètodes, no inductius.

Aquest és també un exemple en què tampoc no és imprescindible efectuar una demostració per inducció. En efecte, si coneixem el resultat que diu que en un arbre és $m = n - 1$, essent m el nombre d'arestes i n el nombre de vèrtexs, podem provar directament:

Sigui $G = (V, A)$ graf acíclic, amb $c \geq 2$ components connexos. Sigui $m = |A|$ i $n = |V|$. Aleshores $m = n - c$.

En efecte, siguin G_1, \dots, G_c els components connexos de G . Efectuem la construcció del nou graf següent: sigui H el graf que s'obté afegint una nova aresta connectant un vèrtex de G_i amb un vèrtex de G_{i+1} , per a $i = 1, \dots, c - 1$. D'aquesta manera, hem construït un graf H d'ordre n , amb $m' = m + (c - 1)$ arestes, connex i acíclic (arbre). Per tant, es compleix $m' = n - 1$ i, per tant, $m + (c - 1) = n - 1$, d'on $m = n - c$.

Encara podem trobar una segona demostració alternativa a la inducció. En efecte, cadascun dels components connexos G_i és un arbre i, per tant, $m_i = n_i - 1$, essent m_i el nombre d'arestes i n_i el nombre de vèrtexs de G_i . Ara bé, $m = m_1 + \dots + m_c = (n_1 - 1) + \dots + (n_c - 1) = n - c$.

Això es podria provar per inducció.

O encara un altre exemple, depenent del bagatge de resultats que coneguem. Anteriorment s'ha provat per inducció el resultat que afirma que "tot arbre és 2-acolorible", cosa que és equivalent a dir "tot arbre és bipartit". Ara bé, si coneixem el resultat que caracteritza els grafs bipartits com els grafs tals que tots els seus cicles són de longitud parella, es pot aplicar en aquest cas, admetent que, en no haver-hi cicles, tots són de longitud zero, parell.

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $|V| = p$. Si G no conté triangles C_3 , proveu que $|A| \leq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$.

Una primera observació sobre l'enunciat: el significat precís és que no existeix al graf cap subgraf isomorf al cicle C_3 .

L'aspecte principal del problema és com utilitzar la hipòtesi de no contenir triangles. La idea bàsica és que si els vèrtexs u, v són adjacents, aleshores no pot existir cap vèrtex que sigui adjacent a tots dos, ja que en aquest cas existiria algun triangle. Considerant la col·lecció de vèrtexs adjacents a u , aquests queden exclosos com a possibles vèrtexs adjacents a v i, en conseqüència, sembla que ha de ser possible trobar alguna relació entre els graus dels vèrtexs u, v .

Mètode 1. Un possible mètode demostratiu que es pot intentar usualment en teoria

de grafs és per inducció. Aquest mètode s'ha presentat anteriorment en aquest mateix capítol.

Mètode 2. Intentarem una demostració alternativa que no utilitzi inducció.

Siguin $x, y \in V$ vèrtexs adjacents i sigui $a = \{x, y\}$. Essent x, y adjacents, cap vèrtex no pot ser adjacent a x, y , ja que aleshores G contindria un triangle C_3 .

Suposem que $k = g(x)$ és el grau de x . Poden ser adjacents a y com a màxim $n - 1$ vèrtexs restants, dels quals s'han d'excloure els que ho són a x , és a dir $g(x)$:

$$g(y) \leq n - 1 - g(x).$$

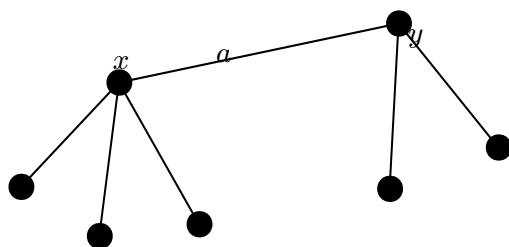


Figura 2.8

Ara bé, el vèrtex x ja ha estat comptat entre els $n - 1$ vèrtexs diferents de y i, en conseqüència, l'aresta a s'ha comptabilitzat dues vegades i, per tant, de fet:

$$g(y) \leq n - 1 - (g(x) - 1) = n - g(x).$$

Per tant, si x, y són vèrtexs adjacents, és

$$g(x) + g(y) \leq n.$$

Ara podem considerar la suma estesa a totes les arestes $\{x, y\} \in A(G)$:

$$\sum_{\text{arestes}\{x,y\}} (g(x) + g(y)).$$

El nombre de sumands és $|A|$ i, per tant,

$$\sum_{\text{arestes}} (g(x) + g(y)) \leq \sum_{\text{arestes}} n = n|A|.$$

D'altra banda, pel que fa a

$$\sum_{\text{arestes}} (g(x) + g(y)),$$

si fixem un vèrtex $x \in V$, el nombre de sumands del tipus

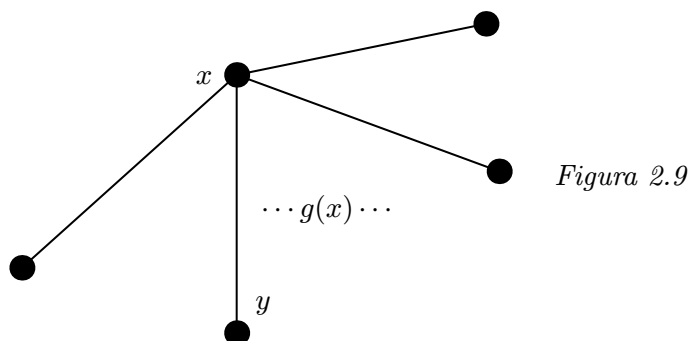
$$g(x) + g(y)$$

és exactament el nombre de vèrtexs y per als quals existeix l'aresta $\{x, y\}$, és a dir, exactament $g(x)$; per tant, si $N(x)$ és el conjunt de vèrtexs adjacents a x ,

$$\begin{aligned} \sum_{\{x,y\} \in A} (g(x) + g(y)) &= \sum_{x \in V} (\sum_{y \in N(x)} (g(x) + g(y))) \\ &\geq \sum_{x \in V} (\sum_{y \in N(x)} g(x)) = \sum_{x \in V} (|N(x)|g(x)) \\ &= \sum_{x \in V} (g(x))^2. \end{aligned}$$

En conclusió,

$$\sum_{x \in V} (g(x))^2 \leq n|A|.$$



Podem ara aplicar la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|,$$

amb el producte escalar ordinari a R^n i la norma derivada del producte escalar $\|z\| = \sqrt{(z|z)}$, amb $u = (1, \dots, 1)$, $v = (g(x), \dots, g(x))$.

Per tant,

$$\left(\sum_{x \in V} (g(x))^2 \right) = \left(\sum_{x \in V} (g(x) \cdot 1) \right)^2 \leq \sum_{x \in V} (g(x))^2 \sum_{x \in V} 1^2 = n \sum_{x \in V} (g(x))^2.$$

En conseqüència, i aplicant a més la desigualtat anterior i el lema de les encaixades,

$$\frac{1}{n} 2|A|^2 = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} (g(x) \cdot 1)^2 \leq \sum_{x \in V} (g(x))^2 \leq n|A|,$$

d'on

$$\frac{4}{n}|A|^2 \leq n|A|,$$

d'on

$$|A| \leq \frac{n^2}{4},$$

i evidentment, com que $|A|$ és enter, es compleix:

$$|A| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

2.6.4 “Demostració” inductiva falsa

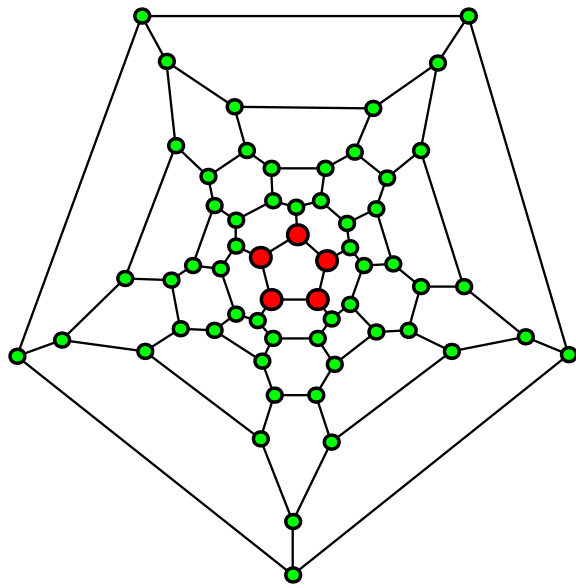
Un parany amagat. Les demostracions inductives s'han de fer amb molta cura pel que fa a la validesa de la hipòtesi d'inducció quan s'aplica. Vegem un exemple de “demostració” de la “ propietat ” següent: *tot nombre natural $n \geq 1$ és senar*. Procedim a “demostrar” per inducció sobre n . En el pas base considerem el cas de $n = 1$, cas en el qual efectivament es compleix la propietat. En el pas inductiu, suposem que $k \geq 1$ i que la propietat és certa per a tot j tal que $1 \leq j \leq k$, és a dir, que tot j , amb $1 \leq j \leq k$, és senar (hipòtesi d'inducció). Provem-ho per a $k + 1$. Escrivim $k + 1 = (k - 1) + 2$; aplicant la hipòtesi d'inducció a $k - 1$, és $k - 1$ senar i, per tant, també ho és $k + 1$... On és l'error de la falsa demostració? La hipòtesi d'inducció no és aplicable si $k - 1$ no pertany al rang al qual li és aplicable, és a dir si no és ≥ 1 ; però això falla en el cas que sigui $k = 1$, ja que aleshores $k - 1 = 0$ i aquí no es pot aplicar la hipòtesi d'inducció.

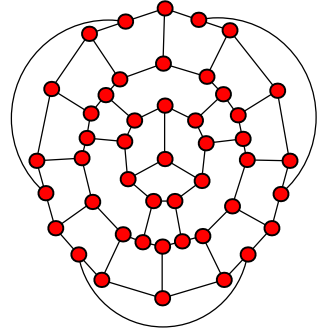
Observeu que aquí s'ha fet la “demostració” per inducció completa o forta, però també s'hauria pogut formular una variant segons l'esquema $P(n - 1) \implies P(n)$.

En general, per tant, el lector ha d'extremar les precaucions a l'hora d'aplicar el mètode inductiu.

Part II

Teoria de Grafos





Capítol 3

Grafs: aspectes bàsics

3.1 Objectius

En aquest capítol es presenta una mostra de problemes de tipus elemental, en el sentit que requereixen poc desenvolupament teòric previ. Amb els conceptes bàsics, n'hi ha prou per a la seva comprensió i resolució. Un aspecte que cal tenir en compte és que molts problemes són difícilment classificables i poden correspondre a més d'un concepte d'interès que es vulgui il·lustrar.

Diversos problemes que es podrien ubicar en aquest capítol s'han inclòs en el capítol d'introducció. Problemes de connexitat i recorreguts s'han posposat al capítol posterior.

3.2 Apliqueu el lema de les encaixades

El lema de les encaixades és un dels resultats més bàsics de la teoria de grafs. Si $G = (V, A)$ és un graf i indiquem per $g(u)$ el grau del vèrtex u en el graf G , el lema de les encaixades és el resultat següent:

$$2|A| = \sum_{u \in V} g(u).$$

Una conseqüència immediata és que en un graf *el nombre de vèrtexs de grau senar és parell*.

Recordem que un graf és r -regular si tots els vèrtexs són de grau r .

Problema 3.1

Proveu que en un graf 2-regular el nombre de vèrtexs i d'arestes coincideixen.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf 2-regular. Pel lema de les encaixades es compleix:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} 2 = 2|V|,$$

d'on la conclusió: $|A| = |V|$.

Problema 3.2

Pot haver-hi grafs 3-regulars d'ordre 5?

Resolució

Aplicant el fet que la suma de graus d'un graf $G = (V, A)$ és el doble del nombre d'arestes, pel lema de les encaixades, resulta:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 5 \cdot 3 = 15,$$

resultat contradictori, ja que no és múltiple de 2. En conseqüència, no existeixen grafs amb aquestes característiques.

O, també, per aplicació directa del corollari del lema de les encaixades, que afirma que el nombre de vèrtexs de grau senar és parell.

Problema 3.3

Demostreu que no pot existir cap graf amb vèrtexs de graus 3,3,3, i 1.

Resolució

Aquest és un problema simple, que resoldrem amb molt de detall formal.

Observem que no podem utilitzar com a test negatiu que el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell, recurs que sol ser útil en problemes d'aquest tipus. També pot utilitzar-se la propietat $g(v) \leq |V| - 1$ com a criteri negatiu, però en aquest cas tampoc no s'arriba a cap conclusió.

Mètode A

Suposem que existeix un graf $G = (V, A)$ amb la seqüència de graus donada, i siguin v_1, v_2, v_3 i v_4 els vèrtexs de G , de graus, respectivament,

$$g(v_1) = 3, g(v_2) = 3, g(v_3) = 3, g(v_4) = 1.$$

Experimentalment (dibuixant!) és clar que l'afirmació és certa. La demostració podria anar de la manera següent.

Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que el vèrtex v_3 és l'adjacent a v_1 .

Considerem el graf auxiliar $G_1 = (V_1, A_1)$ obtingut eliminant el vèrtex v_4 i, per tant, l'única aresta $\{v_4, v_3\}$ que hi és incident. Aleshores, en G_1 :

$$g_{G_1}(v_1) = 3, g_{G_1}(v_2) = 3, g_{G_1}(v_3) = 2.$$

Tenint en compte que a G_1 es compleix el *lema de les encaixades*, és

$$g_{G_1}(v_1) + g_{G_1}(v_2) + g_{G_1}(v_3) = 2|A_1|$$

i, per tant, resulta $|A_1| = 4$. Ara bé, en general tenim $|A_1| \leq \binom{|V_1|}{2} = 3$ i així arribem a un absurd.

Una manera alternativa d'arribar a contradicció: el graf G_1 no pot existir com a graf simple, ja que s'ha de complir, per a tot vèrtex $w \in V(G_1)$, la desigualtat $g_{G_1}(w) < |V_1| = 3$. En conseqüència, no pot existir G .

Observem que si aplicàvem el mateix argument a G no s'arribava a cap contradicció.

Mètode B

Un altre mètode consisteix a considerar el graf complementari G^c de G . Si existís el graf G amb la seqüència de graus donada, aleshores també hauria d'existir el complementari G^c , que tindria la seqüència de graus donada per 0,0,0,2, cosa que evidentment és absurda.

Mètode C

Si existís un graf amb aquestes característiques, cada vèrtex de grau 3 hauria de ser adjacent als tres vèrtexs restants, en particular al vèrtex de grau 1. Això significa que el vèrtex de grau 1 seria adjacent als tres vèrtexs de grau tres, amb la qual cosa hauria de ser com a mínim de grau 3, cosa que és contradictòria.

3.3 Problemes de reunions

Hi ha “problemes de reunions” que es poden estudiar mitjançant la teoria de grafs, encara que inicialment no ho semblin. Es tracta de formular el model en termes de

teoria de grafs que s'ajusti al problema i convertir les preguntes en preguntes de grafs.

Imaginem una reunió de n persones en la qual es produeixen salutacions per encaixades de mans (així la salutació és obligadament mútua, bidireccional). Com podem provar l'afirmació sobre què ha passat a la reunió referent a les salutacions: *el nombre de persones que ha saludat un nombre senar de persones és parell?*

O bé aquesta altra: *Hi ha com a mínim 2 persones que han saludat el mateix nombre de persones.*

Si considerem el graf $G = (V, A)$ en què els vèrtexs són les persones de la reunió i les arestes són les salutacions, relació establerta entre vèrtexs, aleshores la primera afirmació equival a dir que *el nombre de vèrtexs de grau senar és parell*. La segona equival a afirmar que en un graf hi ha un mínim de dos vèrtexs amb el mateix grau.

El problema següent és una mostra més.

Problema 3.4

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre $|V| = 6$, demostreu que G o el seu complementari G^c contenen algun triangle (3-cicle) C_3 . Equivalentment: proveu que en una reunió de 6 persones sempre n'hi ha o bé 3 que es coneixen mútuament o bé n'hi ha 3 que no es coneixen mútuament.

Resolució

Considerem $w \in V$. Podem suposar que w és adjacent com a mínim a 3 vèrtexs de G . En efecte, si no fos així, hi hauria com a màxim dos vèrtexs adjacents amb w i, per tant, en quedarien un mínim de tres no adjacents amb w en el graf G , els quals serien adjacents a w en el graf complementari G^c .

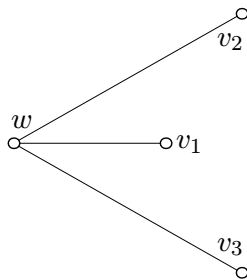


Figura 3.1

Per tant, fixat $w \in G$, existeixen tres vèrtexs adjacents amb w en el graf G o bé existeixen 3 vèrtexs adjacents amb w a G^c . En qualsevol dels casos, seguiríem raonaments semblants. Per això podem suposar que w és adjacent amb tres vèrtexs a G com a mínim, ja que en cas contrari raonaríem sobre el graf complementari G^c d'entrada.

Siguin v_1, v_2, v_3 vèrtexs adjacents amb w al graf G (figura 3.1).

Tenim dues possibilitats:

- Si algun dels v_i és adjacent a algun altre dels v_i , aleshores ja tenim el 3-cicle o triangle, l'existència del qual s'havia de provar (figura 3.2).

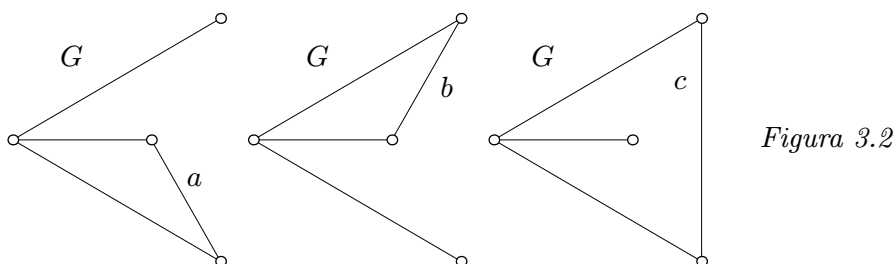


Figura 3.2

- En cas contrari, tindrem al graf complementari G^c que els vèrtexs v_1, v_2, v_3 són adjacents dos a dos. Cap de les arestes a, b, c existeixen en G , raó per la qual existeixen a G^c . Demostrem així l'existència d'un 3-cicle en G^c .

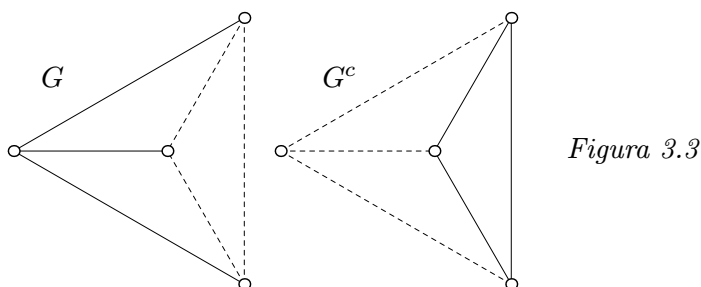


Figura 3.3

3.4 Seqüències de graus

Un problema típic de la teoria de grafs elemental és trobar (si n'hi ha) tots els grafs amb una determinada seqüència de graus donada.

Un bon consell per resoldre alguns problemes que signifiquin tractar amb un volum considerable d'arestes o bé amb graus força elevats consisteix a passar al graf complementari. Si $G = (V, A)$, el graf complementari G^c es defineix com $G^c = (V, A') = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus A)$. L'ordre és el mateix. Es compleix $|A| + |A'| = \binom{|V|}{2}$. A més, $g_{G^c}(w) = |V| - 1 - g_G(w)$.

Problema 3.5

Per a cada una de les seqüències de nombres següents, trobeu tots els grafs (llevat d'isomorfisme) que tinguin els nombres com a graus respectius dels seus vèrtexs o bé demostreu que no existeix cap graf amb aquestes característiques:

- a) 4, 4, 4, 3, 3;
- b) 4, 4, 3, 3, 3;
- c) 4, 3, 2, 1;
- d) 5, 5, 4, 3, 2, 1;
- e) 6, 3, 4, 1.

Resolució

Aplicarem a cada cas els tests bàsics:

1. el grau de cada vèrtex ha de ser estrictament inferior a l'ordre del graf;
2. el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell;
3. aplicant el lema de les encaixades, s'obté el nombre d'arestes, el qual no pot superar $\binom{|V|}{2}$.

Si la seqüència de graus supera tots els tests, aleshores considerarem la possibilitat que existeixin grafs amb aquesta seqüència.

- a) Aplicant els tests (1), (2), (3) no s'arriba a cap contradicció. Vegem que efectivament existeixen grafs amb aquesta seqüència de graus.

Un possible mètode seria el següent: la seqüència de graus del possible complementari és més fàcil d'estudiar, ja que és 0,0,0,1,1. Els grafs que tenen aquesta seqüència de graus són $H = N_3 \cup K_2$.

Ara bé, $G \simeq (G^c)^c$ i, per tant, existirà G i serà $G = (N_3 \cup K_2)^c = N_3^c + K_2^c = K_3 + N_2$.

Un altre possible mètode seria el següent: els vèrtexs de grau 4 han d'ésser adjacents a tots els altres vèrtexs del graf; l'únic esquema possible és el del graf $C_3 + N_2$.

El resultat és clarament el mateix.

- b) 4,4,3,3,3. No n'existeix cap, ja que hi ha un nombre senar de vèrtexs de grau senar.
- c) 4,3,2,1. No n'existeix cap, ja que per a tot vèrtex $v \in V$ ha de ser $g(v) < |V| = 4$.

d) 5,5,4,3,2,1. No n'existeix cap. Vegem dos arguments possibles:

Argument A: Havent-hi 2 vèrtexs del grau màxim possible $g(u) = 5 = g(w)$, aleshores ambdós han de ser adjacents a tots els altres i, per tant, per a tot vèrtex v ha de ser $g(v) \geq 2$.

Argument B: Si existís un graf G d'ordre 6 amb aquesta seqüència de graus, aleshores la corresponent del graf complementari G^c seria 0,0,1,2,3,4; si se'n considera el subgraf dels vèrtexs de graus 1,2,3,4 s'arriba a un absurd (directament o aplicant el resultat de c).

e) 6,3,4,1. No n'hi ha cap, pel criteri 1.

Vegem a continuació un exemple on es passa al complementari.

Problema 3.6

Obtenu tots els grafs 4-regulars d'ordre 6.

Resolució

Observem que es tracta d'obtenir els grafs amb seqüència de graus 444444. De fet, en principi, no està garantida l'existència de grafs d'aquestes característiques.

El problema sembla més abordable si passem al complementari, atès que els grafs d'aquestes característiques tenen un nombre relativament alt d'arestes.

Suposem que sigui $G = (V, A)$ un graf d'aquestes característiques. Considerem el graf complementari $H = G^c$, també regular de graus $6 - 1 - 4 = 1$, de seqüència de graus 1,1,1,1,1,1. Aleshores es pot veure fàcilment que $H = T_2 \cup T_2 \cup T_2$.

Obtenim el complementari: $G = (G^c)^c = H^c = (T_2 \cup T_2 \cup T_2)^c = T_2^c + T_2^c + T_2^c = N_2 + N_2 + N_2 = K_{2,2,2}$.

Com s'observa, a més, aquesta argumentació també en demostra l'existència, per la via d'obtenir-ne exemples.

Vegem un exemple en què no resulta útil passar al graf complementari. És també un exemple d'un cas simple de problema de seqüències de graus.

Problema 3.7

Trobeu tots els grafs de seqüència de graus 1,1,1,1,1,2,3,5.

Resolució

Sigui G un graf amb aquestes característiques, si existeix.

En primer lloc observem que no resulta d'utilitat recórrer al pas al graf complementari G^c , que tindria la seqüència de graus 3,5,6,7,7,7,7,7, que no sembla fàcil de tractar atès que els graus són molt elevats.

Procedirem a un estudi directe prenent com a punt de partida el fet de considerar el vèrtex de grau màxim. Intuïtivament podem sospitar que el que passi localment a l'entorn del vèrtex d'aquest grau tant alt definirà en gran part l'estructura del graf. Després s'haurà d'efectuar un ajust final de col·locació per als altres vèrtexs. Naturalment, aquestes són idees només qualitatives, però poden ajudar l'anàlisi, juntament amb la representació gràfica.

Sigui w el vèrtex de grau 5. Serà adjacent a un mínim de 3 vèrtexs de grau 1. Els altres dos vèrtexs adjacents a w poden ser de graus 1,2,3. L'estructura local es pot veure a la figura 3.4, on s'ha indicat el grau de cada vèrtex. Depenent de quins siguin els valors de x, y s'obtidran, si n'hi ha, els diversos grafes amb la seqüència donada.

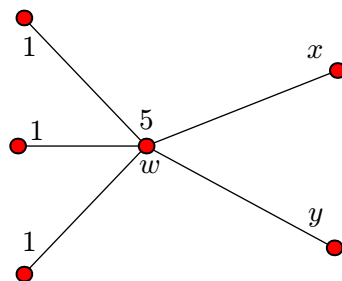


Figura 3.4

Considerem els diversos casos possibles.

Cas 1: $x = 1; y = 1$. En aquest cas, el graf hauria de ser $G = K_{1,5} \cup H$, on H seria un graf amb seqüència de graus 3,2,1, que no pot existir.

Per a cada un dels altres casos existeixen els grafes que s'indiquen a les figures posteriors.

Cas 2: $x = 1; y = 3$. Indiquem per G_1 el graf de la figura 3.5.

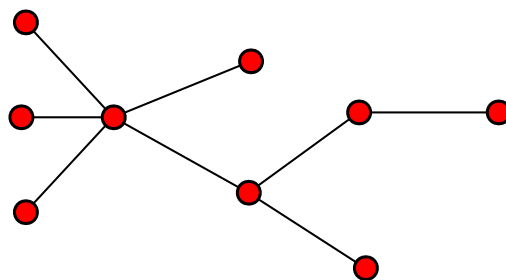


Figura 3.5

Cas 3: $x = 1; y = 2$. Indiquem per G_2 el graf de la figura 3.6.

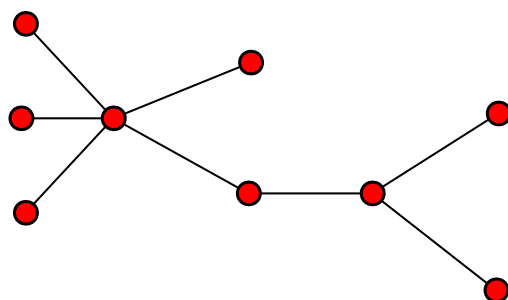


Figura 3.6

Cas 4: $x = 2; y = 3$. Indiquem per G_3 el graf de la figura 3.7.

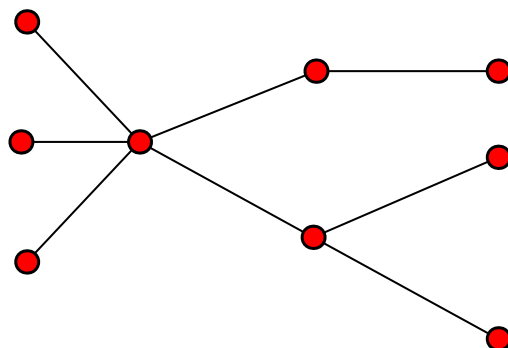


Figura 3.7

No hi ha més possibilitats que les anteriors. Aquesta anàlisi prova que n'hi ha, de grafs, amb la seqüència donada. Resta per aclarir si n'hi ha tres, els anteriors, essencialment diferents, és a dir, no isomorfs, o bé hi ha alguna parella de grafs isomorfs.

És molt fàcil d'estudiar aquest problema en aquest cas senzill. En efecte, en el graf G_3 el vèrtex de grau 5 és adjacent al vèrtex de grau 2, cosa que no succeix en G_1 , i és adjacent al vèrtex de grau 3, cosa que no ocorre en G_2 . Per tant, G_3 no és isomorf ni a G_1 ni a G_2 . Només resta per escatir si G_1, G_2 són isomorfs. Ara bé, atès que a G_1 el vèrtex de grau 5 és adjacent al vèrtex de grau 3 i aquesta propietat no es dona a G_3 , podem concloure que no són isomorfs. La no isomorfia de G_3 amb G_1, G_2 també s'hauria pogut deduir de l'adjacència 2-3 en G_1, G_2 , mentre que en G_3 aquests vèrtexs són no adjacents.

Un exemple combinat amb un problema de "reunions".

Problema 3.8

Proveu que en qualsevol graf $G = (V, A)$ amb un mínim de 2 vèrtexs sempre hi ha un

mínim de 2 vèrtexs amb el mateix grau.

Hi ha un enunciat paral·lel: en una reunió de n persones en la qual es produeixen salutacions mútues, sempre hi ha un mínim de dues persones que han saludat el mateix nombre de persones.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf i sigui $p = |V| \geq 2$. Aleshores, per a cada vèrtex $v \in V$ és $0 \leq g(v) \leq p - 1$, i, en conseqüència, en principi hi poden haver els graus $0, 1, \dots, p - 1$, i, si tots fossin *diferents*, aquests haurien de ser els graus corresponents als vèrtexs del graf.

Podem arribar ara a la conclusió de dues maneres diferents, essencialment dues variants per a la mateixa argumentació de fons:

Mètode A

Sigui $V = \{v_0, \dots, v_{p-1}\}$, amb $g(v_i) = i$, i considerem el graf auxiliar $G_0 = G - v_0 = (V_0, A_0)$, amb $V_0 = V \setminus \{v_0\}$, $A_0 = A$ (ja que $g(v_0) = 0$), és a dir, eliminem el vèrtex de grau 0.

Aleshores, considerant G_0 , és $|V_0| = p - 1$ i, en canvi, resulta en aquest graf G_0 que $g(v_{p-1}) = p - 1$, que és absurd, si no s'admeten arestes múltiples ni llaços.

Això prova, doncs, que hi ha d'haver com a mínim 2 vèrtexs amb el mateix grau.

Mètode B

Provem que en un graf $G = (V, A)$ d'ordre $|V| = p$ no pot haver-hi un vèrtex isolat (de grau 0) i un vèrtex de grau $p - 1$.

Sigui $g(v_0) = 0$, $g(v_{p-1}) = p - 1$.

Els altres vèrtexs són els $p - 2$ restants:

$$v_1, \dots, v_{p-2}.$$

Per tant, $p - 1 = g(v_{p-1}) \leq p - 2 < p - 1$, contradicció.

3.5 Isomorfisme

Els grafs $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ són *isomorfs* si i només si existeix una aplicació $f : V_1 \mapsto V_2$ amb les propietats.

1. f és bijectiva,
2. $u \sim v$ si i només si $f(u) \sim f(v)$.

Observem que això significa que f conserva les adjacències i també les no adjacències.

Una propietat important, derivada de la conservació de les adjacències (i de les no adjacències) és la conservació del grau entre vèrtexs que es corresponen per l'aplicació f , en cas d'isomorfisme. És a dir, que tenim $g_{G_1}(u) = g_{G_2}(f(u))$. En relació amb aquest tema es planteja el problema de si dos grafs són isomorfs o no.

No és un problema de dibuix, tot i que la representació en el pla pot enfosquir la qüestió, i encara complicar-la. En més d'un problema se'ns donen dues representacions de grafs, com per exemple a la figura 3.8, i se'ns demana si són o no isomorfs.

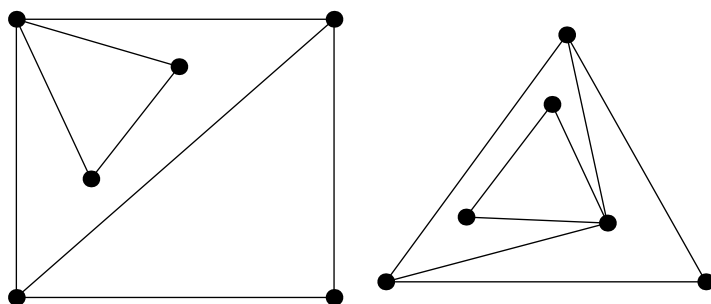


Figura 3.8

Els vèrtexs s'han de suposar etiquetats, com a la figura 3.9.

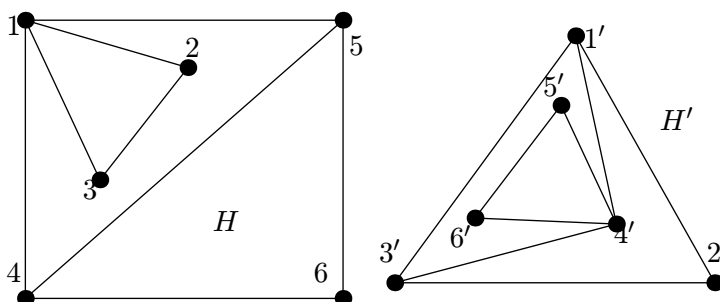


Figura 3.9

El problema és definir la correspondència entre etiquetes que tingui les propietats indicades en el cas d'isomorfisme. De vegades, una manipulació gràfica, un “redibuix”, de fet suggereix quina podria ser una possible correspondència.

Segons el problema concret hi ha diverses maneres de tractar-lo, i això depenent també de si finalment els grafs ho són o no, d'isomorfs. Enumerem a continuació una llista de possibles actuacions en aquest sentit.

- Sotmetre els grafs a una bateria de tests, la no superació d'un dels quals significa descartar l'isomorfisme. La superació de qualsevol d'ells no significa res.
- Posar de manifest que ambdós grafs tenen propietats estructurals diferents que n'impedeixen la isomorfia.
- Tractar d'establir f amb les propietats requerides per a l'isomorfisme i veure que és impossible (perquè s'arriba a algun tipus de contradicció), amb la qual cosa es demostra que no són isomorfs.
- Finalment establir, si és el cas, una aplicació (n'hi pot haver més d'una) que compleixi les propietats anteriors, requerides per poder afirmar que els grafs són isomorfs.
- Convertir el problema en un altre per al qual l'estudi sigui més simple (per exemple, passant al graf complementari).

Vegem alguns exemples d'aquestes estratègies d'estudi de la isomorfia. Considerem els grafs de la figura 3.10, dels quals volem estudiar si són isomorfs.

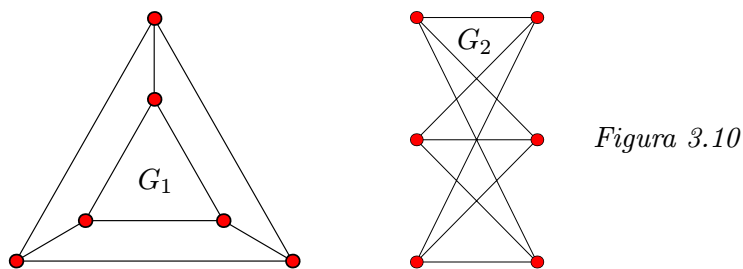


Figura 3.10

3.5.1 Bateria de tests

Es poden plantejar diversos tests, que de fet són condicions necessàries, és a dir, condicions que s'han de complir si els dos grafs són isomorfs. Per aquest motiu, no passar un test ja permet descartar la isomorfia. Passar-lo no implica res.

Enumerem-ne alguns:

1. *Test 1*: Els ordres han de coincidir, és a dir, $|V_1| = |V_2|$. En efecte, només si els ordres coincideixen es pot establir una bijecció f . De manera que si dos grafs tenen ordres diferents, ja es pot afirmar que són no isomorfs. En el cas que els ordres coincideixin, per exemple, en el cas de la figura 3.10, aleshores no podem afirmar res.

2. *Test 2:* Les seqüències de graus han de coincidir. Això és conseqüència de la conservació del grau dels vèrtexs, entre vèrtexs corresponents, per isomorfisme, propietat ja esmentada abans. Naturalment, dos grafs poden tenir la mateixa seqüència de graus i no ser isomorfs. En particular, per exemple, poden ser ambdós regulars i no ser isomorfs. Superar el test no significa res: per exemple, els grafs de la figura 3.10 són ambdós 3-regulars i, per aquest motiu, no podem concloure res, a partir d'aquest test, sobre la isomorfia. Considerem els grafs $H_1 = T_4$, $H_2 = K_2 \cup K_2$. Són del mateix ordre (passen el test 1) i també són de la mateixa mida, però les seqüències de graus són $1, 2, 2, 1$; $1, 1, 1, 1$ i, per tant no són isomorfs.
3. *Test 3:* Les mides o el nombre d'arestes han de coincidir. És obvi per raons d'identitat estructural, i també com a conseqüència de la conservació de les seqüències de graus i el lema de les encaixades. Hi pot haver grafs amb els mateixos nombres d'arestes i no ser isomorfs (per exemple, $N_1 \cup T_2$ i $T_2 \cup T_2$). Naturalment, la propietat en qüestió es compleix si els grafs passen el test 2, però pot ser útil fer directament una comprovació sobre el nombre d'arestes per simple inspecció visual.

3.5.2 Identitat estructural

La idea de fons que està al darrere de la definició formal d'isomorfisme és que dos grafs isomorfs expressen la mateixa estructura de relacions entre els vèrtexs respectius. Abans ens hem fixat en propietats que podíem comptar immediatament, com l'ordre, la mida, els graus. Ens referim aquí a propietats més d'ordre qualitatiu, propietats que s'han de conservar per isomorfisme. Per exemple, si un graf és bipartit i l'altre no, no són isomorfs. Si un graf és acíclic i l'altre no, no poden ser isomorfs. Podem prendre, de fet, totes les propietats que es puguin establir per a l'un i que no siguin vàlides per a l'altre per tal de descartar la isomorfia: per exemple, la connexió, el nombre de components connexos, la presència o absència d'un determinat tipus de cicles, d'entre molts altres possibles. Així, doncs, en el cas dels grafs de la figura 3.10, el graf G_1 conté cicles C_3 , mentre que el graf G_2 no en té, cosa que podem afirmar en aquest cas senzill per simple observació visual o bé, tenint en compte que és $K_{3,3}$, com a conseqüència d'una caracterització dels grafs bipartits, que es caracteritzen com els grafs que tenen tots els seus cicles de longitud parella.

De vegades, l'observació de l'estructura i la necessitat d'haver-la de mantenir ens poden ajudar a establir l'aplicació f per a la isomorfia. Per exemple, a la figura 3.10, el vèrtex 6 del graf H és l'únic vèrtex de grau 2 d'un C_4 , concretament, el $6 - 5 - 1 - 4$. Per tant, se li ha de fer correspondre l'únic vèrtex de H' de grau 2 d'un C_4 , és a dir, $2'$, únic vèrtex de grau 2 de l'únic C_4 , $1' - 2' - 3' - 4'$.

3.5.3 Conservació dels graus dels vèrtexs

La propietat de conservació dels graus per isomorfisme és molt útil com a guia per establir una aplicació f (amb les propietats anteriors) o bé per demostrar que no n'hi ha cap, ja que implica restriccions importants a les imatges o correspondències que es poden assignar. La pitjor situació és aquella en la qual els grafs són ambdós regulars, amb el mateix grau comú. La situació més favorable és aquella en la qual hi ha vèrtexs amb graus destacats respecte dels altres: per exemple, si existeix un únic vèrtex de grau 4 a cada un dels grafs, aleshores qualsevol aplicació candidata a definir un isomorfisme ha de fer correspondre el vèrtex de grau 4 d'un graf amb el del mateix grau de l'altre. O bé si, per exemple, existeixen exactament 2 vèrtexs de grau 3 a cada graf, aleshores qualsevol correspondència isomòrfica ha de fer correspondre el subconjunt de vèrtexs de grau 3 de l'un en el subconjunt de vèrtexs de grau 3 de l'altre i, en haver-n'hi 2 de vèrtexs de grau 3, això es pot fer de dues maneres possibles.

Com a aplicació del que s'ha dit anteriorment sobre la conservació dels graus en el cas d'isomorfisme, estudiem si els grafs de la figura 3.11 són isomorfs.

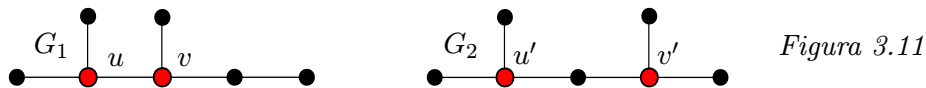


Figura 3.11

Observem que, en aquest cas, tots els tests anteriors no permeten arribar a conclusió.

Si fossin isomorfs, existiria una bijecció $f : V_1 \mapsto V_2$ que conservaria les adjacències (i també les no-adjacències). Si G_1, G_2 fossin isomorfs, existiria una bijecció f amb les propietats pròpies de l'isomorfisme. Per la conservació dels graus, les imatges dels vèrtexs u, v , de grau 3 han de ser els dos vèrtexs del mateix grau, u', v' del graf G_1 , per a la qual cosa hi ha dues possibilitats. Una d'elles és $f(u) = u', f(v) = v'$. Ara bé, u, v són adjacents en G_1 . Per la conservació de les adjacències, haurien de ser $f(u), f(v)$, és a dir, u', v' , adjacents, cosa que no succeeix i s'arriba a contradicció. En el cas de l'altra possibilitat, és a dir, que $f(u) = v', f(v) = u'$, el raonament pot ser similar i anàlogament s'arriba a contradicció.

Es pot formular un argument alternatiu. Considerem l'únic vèrtex w de grau 2 del graf G_1 . Si w' és l'únic vèrtex de grau 2 de G_2 , ha de ser necessàriament $f(w) = w'$. Ara bé, si z és el vèrtex de grau 1 adjacent a w en G_1 , aleshores $f(z)$ ha de ser de grau 1 i adjacent a $f(w) = w'$ en G_2 , però un tal vèrtex no existeix. S'arriba a contradicció i, per tant, G_1, G_2 no són isomorfs.

Vegem-ne ara un exemple addicional, on la propietat sobre els graus és una guia per establir una aplicació f amb les propietats d'isomorfisme. Considerem els grafs de la

figura 3.12.

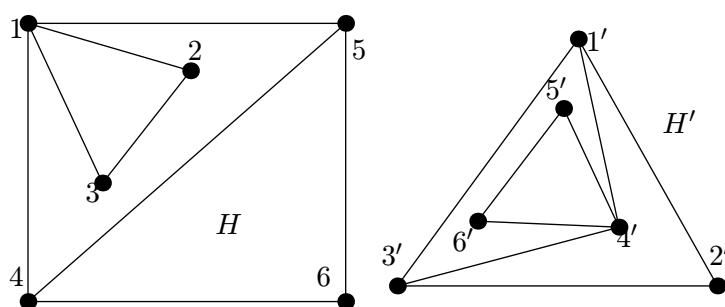


Figura 3.12

Vegem que són isomorfs. Establirem una correspondència f amb les propietats requerides, amb la cura constant de mantenir les adjacències i les no-adjacències (cosa que el lector ha de comprovar amb detall). En primer lloc, s'haurien de fer les comprovacions sobre l'ordre, la mida i les respectives seqüències de graus o altres propietats per veure que poden ser isomorfs. Els únics vèrtexs de grau 4 respectivament s'han de correspondre. Per tant, $f(1) = 4'$. Hi ha en ambdós grafs un únic vèrtex de grau 2, adjacent als dos vèrtexs de grau 3. Per tant, s'han de correspondre, és a dir, $f(6) = 2'$. Als vèrtexs 2,3 de grau 2 adjacents al vèrtex 1 de grau 4 els han de correspondre els vèrtexs 5',6', hi ha dues maneres possibles: o bé $f(2) = 5'$; $f(3) = 6'$, o bé $f(2) = 6'$; $f(3) = 5'$. Argumentacions similars poden fer-se per a les parelles 4,5 i 1',3'. Novament tenim dues possibilitats: $f(4) = 3'$; $f(5) = 1'$ o bé $f(4) = 1'$; $f(5) = 3'$.

Considerem ara els de la figura 3.13. Veurem que, malgrat les diferències d'“aspecte”, també són isomorfs. Per establir l'isomorfisme ens podem guiar per criteris similars als anteriors.

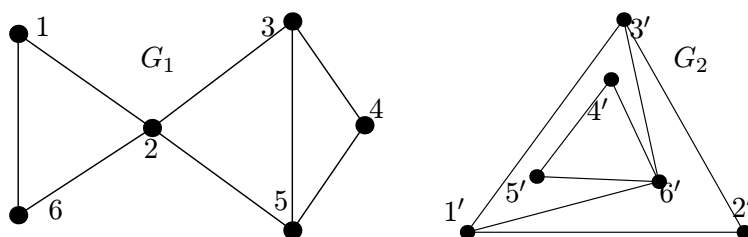


Figura 3.13

Un possible isomorfisme ve donat per $f(2) = 6'$; $f(4) = 2'$ (únics vèrtexs de grau 2 adjacents comuns als vèrtexs de grau 3); $f(1) = 4'$; $f(6) = 5'$; $f(3) = 3'$; $f(5) = 1'$. Hi ha altres possibilitats.

3.5.4 Pas al complementari

Atès que la bijecció a través de la qual es concreta l'isomorfisme de dos grafs conserva les adjacències i també les no-adjacències, resulta que el problema de la isomorfia de dos grafs es pot plantejar equivalentment per als respectius complementaris, és a dir, que $G_1 \simeq G_2$ si i només si $G_1^c \simeq G_2^c$. Això pot ser útil en el cas que resulti més fàcil estudiar la isomorfia dels complementaris respectius.

Il·lustrem aquesta idea amb un exemple. Considerem els grafs de la figura 3.12, ja estudiats directament a la subsecció 3.5.2, prenent en consideració propietats estructurals.

Passem als respectius complementaris (figura 3.14). Veiem que $G_1^c = C_6$ i, en canvi, $G_2^c = C_3 \cup C_3$. L'un és connex i l'altre no, raó per la qual els complementaris no són isomorfs i tampoc no ho són els grafs originals.

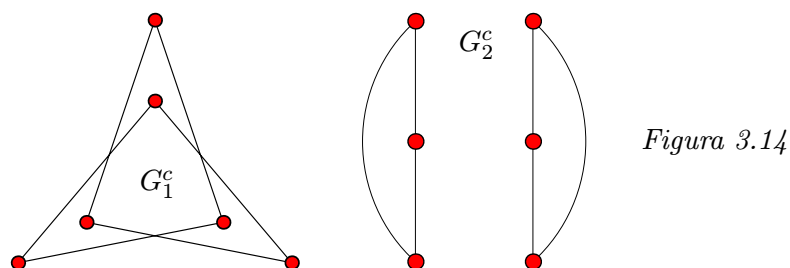


Figura 3.14

Es poden pensar exemples més complexos, en els quals aquest mètode pugui ser de molta utilitat. Per exemple, quan el nombre d'arestes de G_1, G_2 és molt alt, cas en el qual hi ha “poques” arestes en els complementaris respectius i previsiblement l'estudi de si són isomorfs o no és més fàcil.

3.5.5 Problemes addicionals d'isomorfisme

Problema 3.9

Sigui G_1, G_2, G_3 grafs de 4 vèrtexs i 2 arestes. Demostreu que, com a mínim, dos són isomorfs.

Resolució

Estudiem, en primer lloc, els grafs de 4 vèrtexs i 2 arestes.

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb $|V| = 4$, $|A| = 2$, i siguin g_1, g_2, g_3, g_4 els graus respectius dels vèrtexs.

De l'aplicació del lema de les encaixades resulta $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 2|A| = 4$ i de

la restricció $0 \leq g_i \leq 2, \forall i = 1, \dots, 4$, deguda al fet que $|A| = 2$, es deriva que les possibilitats que tenim per a les seqüències de graus són:

- i) 1,1,1,1
- ii) 2,2,0,0
- iii) 2,1,1,0

Per al cas (i), els grafs corresponents són isomorfs al graf $K_2 \cup K_2$, unió de dues còpies disjuntament isomorfs a K_2 : $G = K_2 \cup K_2$.

Per al cas (iii), els grafs corresponents són els isomorfs al graf $G = T_3 \cup N_1$.

En canvi, no existeix cap graf corresponent al cas (ii), cosa que es pot justificar intuïtivament, però també de manera rigorosa: eliminant els vèrtexs de grau 0, resta un graf de 2 vèrtexs amb 2 arestes, la qual cosa és impossible (per exemple, perquè no es compliria en el subgraf corresponent que el grau de cada vèrtex sigui estrictament menor que l'ordre).

La conclusió és, doncs, que existeixen en el conjunt dels grafs de 4 vèrtexs i 2 arestes, *dues* classes d'equivalència *per isomorfisme* i, en conseqüència, d'entre els *tres* grafs G_1, G_2, G_3 , n'hi ha d'haver necessàriament dos d'isomorfs.

Problema 3.10

Per a quins enters n el graf n -cicle C_n és autocomplementari?

Resolució

El significat de la pregunta és el següent. Hem d'identificar n , si existeix, tal que C_n^c sigui isomorf a C_n , és a dir, cal trobar n tal que el complementari de C_n sigui novament un cicle del mateix ordre.

Hi ha més d'un mètode per trobar el valor n possible.

Si C_n i C_n^c han de ser isomorfs, aleshores en particular han de tenir la mateixa seqüència de graus. El cicle C_n és 2-regular, amb seqüència $2, \dots, 2$. El graf complementari també és regular, amb tots els graus $g_{C_n^c}(v) = |V| - 1 - g_{C_n}(v) = n - 1 - 2 = n - 3$. Ara, ha de ser $2 = n - 3$.

Per tant, $n = 5$, i això significa que l'únic C_n que *pot* ser autocomplementari és C_5 .

Caldrà veure si efectivament ho és. Vegem a la figura 3.15 el graf C_5 i el seu complementari.

Hi ha diverses maneres de justificar-ho:

Mètode 1. Observem que C_5^c és connex 2-regular. Com es veu més endavant (4.2), per la caracterització de connexos 2-regulars com a cicles, ha de ser C_5^c un cicle, d'on $C_5^c \simeq C_5$.

Mètode 2. Construcció d'un isomorfisme efectiu.

Considerem els dos grafs amb l'enumeració dels vèrtexs respectius donada a la figura 3.15.

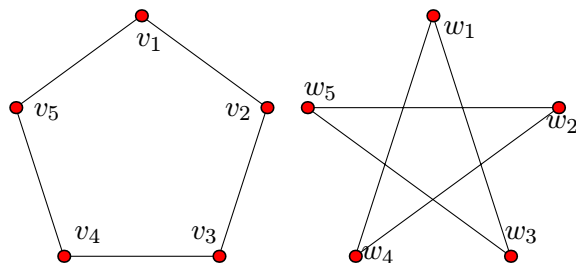


Figura 3.15

Definim la bijecció següent:

$$\begin{aligned} \varphi &: V \longrightarrow W \\ \varphi(v_1) &= w_1 \\ \varphi(v_2) &= w_3 \\ \varphi(v_3) &= w_5 \\ \varphi(v_4) &= w_2 \\ \varphi(v_5) &= w_4 \end{aligned}$$

Ara caldria comprovar que φ conserva les adjacències i les no-adjacències, cosa que és rutinària per a aquest cas senzill. Hi hauria més possibilitats de definir correspondències bijectives que conserven les adjacències i les no-adjacències.

Observació addicional: hi ha altres maneres d'obtenir $n = 5$. D'acord amb una argumentació general relativa al pas al complementari, tenim $G = (V, A)$, $n = |V|$, $G^c = (V, A^c)$. Es compleix $|A| = |A^c|$ i $|A| + |A^c| = |A(K_n)| = \binom{n}{2}$. Si $G = C_n$, aleshores $|A| = |V| = n$ i, per tant, $2n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, d'on $n^2 - 5n = 0$. S'ha d'excloure el cas $n = 0$ i, per tant, resulta $n = 5$.

Problema 3.11

Estudieu si existeixen grafs trajecte T_n autocomplementaris.

Resolució

Si $n = 2$, aleshores és immediat comprovar que $T_2^c = N_2 \neq T_2$. Per tant, suposem que $n \geq 3$. Llavors la seqüència de graus de T_n és $1, 2, \dots, 2, 1$. La seqüència de

graus del complementari T_n^c és $n-1-1, n-1-2, \dots, n-1-2, n-1-1$, és a dir, $n-2, n-3, \dots, n-3, n-2$.

Suposem que T_n és un graf trajecte isomorf a T_n^c . Aleshores T_n^c és de ser un graf trajecte i, per tant, de seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$. Per aquest motiu ha de ser $n-3=1$, $n-2=2$, és a dir, $n=4$.

Per tant, l'únic candidat a ser trajecte autocomplementari és T_4 . Ara només cal comprovar si efectivament ho és. Una comprovació rutinària ens indica que sí i, per tant, l'únic graf trajecte autocomplementari és T_4 .

Problema 3.12

Estudieu si són isomorfs els grafes de la figura 3.16.

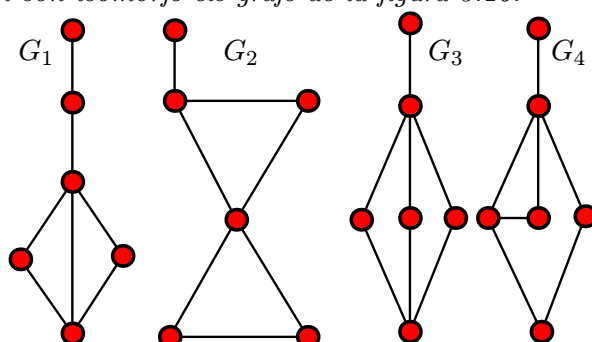


Figura 3.16

Resolució

Observeu que tots tenen el mateix ordre i la mateixa seqüència de graus. Tots són també connexos. Per tant, aquestes característiques no ens són útils per estudiar si hi ha parelles isomorfs.

Estudiarem el problema de la isomorfia per dos mètodes.

Mètode 1: Analitzant l'estructura de cicles. Des d'aquest punt de vista, tenim que G_1 té exactament dos cicles C_3 i un cicle C_4 ; G_2 té exactament dos cicles C_3 ; G_3 té exactament tres cicles C_4 i G_4 té exactament un cicle C_3 , un cicle C_4 i un cicle C_5 . Per tant, no n'hi ha dos d'isomorfs.

Mètode 2: Per correspondència de graus.

En tots els grafes hi ha un únic vèrtex de grau 1. Aquests vèrtexs han d'estar en correspondència per qualsevol isomorfisme. Atès que les adjacències s'han de conservar, en G_1, G_2, G_3 no hi ha cap parell de grafes isomorfs, ja que el vèrtex de grau 1 és respectivament adjacent a un vèrtex de grau 2, 3, 5. Pel mateix motiu, en G_1, G_2, G_4 no hi ha cap parell de grafes isomorfs. Restava per estudiar el parell G_3, G_4 ; ara bé, G_4 té dos vèrtexs de grau 2 adjacents, cosa que no succeeix en G_3 . Per tant, no són isomorfs.

3.6 Altres problemes

Problema 3.13

Proveu que el graf de la figura 3.17 és bipartit. Existeixen cicles de longitud senar?

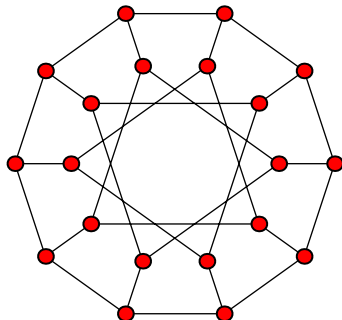


Figura 3.17

Resolució

És fàcil veure a la pràctica si un graf és bipartit o no. Una k -coloració d'un graf és una assignació de colors als vèrtexs (d'entre els k colors disponibles), de manera que vèrtexs adjacents rebin colors diferents. És fàcil veure que un graf és bipartit si i només si és 2-acolorible.

A la figura 3.18 hem acolorit amb 2 colors (blanc-negre) els vèrtexs del graf, de manera que n'ha resultat una coloració en el sentit precís que abans s'ha donat. Resta per indicar quina és la partició del conjunt de vèrtexs $V = V_1 \cup V_2$. Prenem V_1 com el conjunt dels vèrtexs d'un dels colors, per exemple el blanc, i prenem com V_2 , la resta de vèrtexs, de color negre.

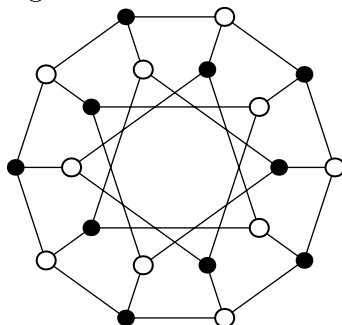
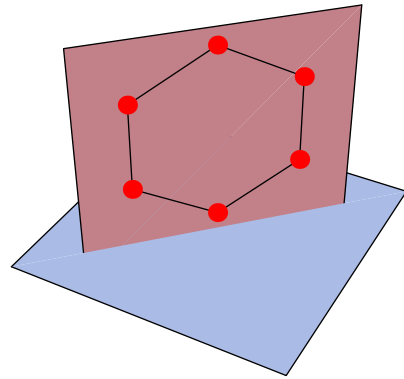


Figura 3.18

Pel que fa a la pregunta sobre els cicles, recordem que un graf és bipartit si i només si tots els cicles són de longitud parella. Per tant, no hi ha cicles de longitud senar.



Capítol 4

Connexitat i recorreguts

4.1 Objectius

En aquest capítol es presenten diversos problemes relatius al concepte de connexió i de recorreguts. Els recorreguts amb propietats específiques, com els eulerians o hamiltonians, es tracten a part, al capítol següent. Destaquen, per la seva utilitat, com es veurà en problemes posteriors, les caracteritzacions dels cicles C_n com a grafs connexos 2-regulars i la caracterització dels grafs trajecte T_n .

4.2 Caracterització dels grafs 2-regulars

Un problema essencial per a la resolució de molts altres problemes és tenir caracteritzats els grafs que són 2-regulars, és a dir, els de seqüència de graus $2, \dots, 2$. Vegem-ne la caracterització. És un bon exemple, a més, de demostració inductiva en teoria de grafs i de les tècniques destructives i de reconstrucció que s'utilitzen per poder aplicar la hipòtesi d'inducció.

Molts problemes poden resoldre's utilitzant aquesta caracterització.

Problema 4.1

Demostreu que els grafs cicle C_n són els grafs connexos 2-regulars.

Resolució

L'afirmació suposa dues implicacions per a un graf G :

- En primer lloc, si G és un cicle, aleshores és 2-regular connex.

- En segon lloc, cal veure que si G és un graf connex d'ordre n 2-regular, aleshores G és isomorf al cicle C_n .

La primera de les implicacions és trivial.

Vegem com es pot provar la segona. En farem la demostració per inducció sobre l'ordre del graf. Per fixar la notació, sigui $G = (V, A)$, $|V| = n$, graf 2-regular. Vegem que és C_n . Veurem aquí un exemple més de demostració per inducció, que farem molt detallat.

Pas 1 (base). Com és típic en les demostracions inductives, demostrarem la implicació per a grafs connexos 2-regulars de l'ordre mínim possible. Atès que hi ha vèrtexs de grau 2, l'ordre ha de ser com a mínim 3 ja que, en termes formals, tenim $g(v) \leq |V| - 1$, d'on $|V| \geq g(v) + 1 = 2 + 1 = 3$. Siguí, doncs, $n = 3$. No resulta difícil veure que l'única estructura possible és C_3 . També en podríem donar un argument formal (realment innecessari en aquest cas). Considerem un vèrtex qualsevol, de grau 2, adjacent forçosament als altres dos restants. Si l'eliminem, el graf que ens queda és de seqüència de graus 1,1, necessàriament T_2 . Restituïnt el vèrtex eliminat, resulta l'estructura. O bé, alternativament, passant al complementari, G^c és seqüència de graus 0,0,0, i, per tant, $G^c = N_3$, d'on $G = (G^c)^c = N_3^c = K_3 = C_3$.

Pas 2 (inductiu). Suposem, doncs, que $n \geq 4$. Com a hipòtesi d'inducció, suposem que la propietat és certa per a grafs connexos 2-regulars d'ordre $n' < n$, és a dir, que és vàlida la implicació

$$H \text{ graf connex 2-regular d'ordre } n' < n \implies H = C_{n'}.$$

Considerem, doncs, el “nostre” graf $G = (V, A)$ d'ordre $n = |V| \geq 4$. Atès que volem estar en condicions d'aplicar la hipòtesi d'inducció, intentarem realitzar alguna operació destructiva que en disminueixi l'ordre, com per exemple eliminar algun vèrtex. Siguí $u \in V$ un vèrtex qualsevol de G , de grau 2 com tots. Siguin v, w els dos vèrtexs als quals u és adjacent, ambdós també de grau 2 (figura 4.1).

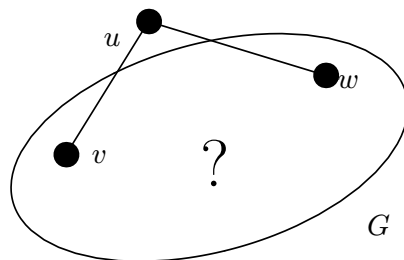


Figura 4.1

Eliminem el vèrtex u . Així es crea un nou graf $G' = G - u$, d'ordre $n' = n - 1 < n$

(figura 4.2).

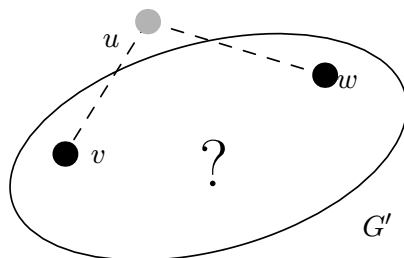


Figura 4.2

Ara el problema és que no podem aplicar a G' la hipòtesi d'inducció, ja que la seqüència de graus és $1, 2, \dots, 2, 1$ i, d'altra banda, es pot haver produït desconexió. La manera de restablir la 2-regularitat i la connexió, si s'havia perdut, és afegir una aresta $a = vw$, i així crear un nou graf $G'' = G' + a$, sense que augmenti l'ordre (figura 4.3).

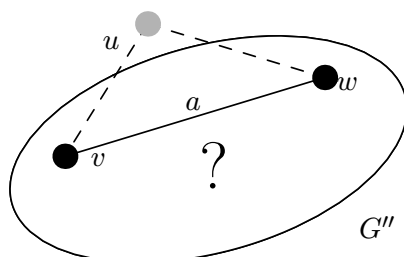


Figura 4.3

Ara G'' és 2-regular i hem reparat la possible desconexió, ja que si un recorregut en el graf original G utilitzava la concatenació de vèrtexs $v - u - w$, ara la mateixa connexió s'estableix alternativament en G'' mitjançant l'aresta uv . Només queda un problema perquè es pugui aplicar la hipòtesi d'inducció: que amb l'afegit de l'aresta $a = vw$ no hàgim sortit del domini per al qual és vàlida la hipòtesi d'inducció, el dels grafs (simples, és a dir, sense arestes múltiples ni bucles). Per tant, hem de justificar que amb l'afegit de a no es crea una aresta doble, és a dir, que v, w no són adjacents en G . En efecte, si ho fossin, aleshores, atès que tots els graus són 2, els vèrtexs u, v, w formarien un cicle C_3 i, atès que $n \geq 4$, quedarien vèrtexs fora no connectables per cap recorregut a cap dels anteriors, contra la hipòtesi de connexió.

Podem, doncs, aplicar la hipòtesi d'inducció a G'' , amb la qual cosa la seva estructura resta completament aclarida: $G'' = C_{n-1}$ (figura 4.4).

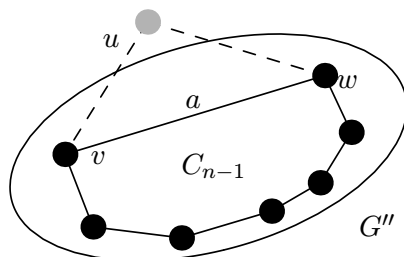


Figura 4.4

Ara podem reconstruir el nostre graf, desfent les operacions constructives i destructives anteriors, en ordre invers:

$$G = (G'' - vw) + vu + wu = (C_{n-1} - vw) + vu + wu = T_{n-1} + vu + wu = C_n.$$

En primer lloc, reconstruïm G' (figura 4.5).

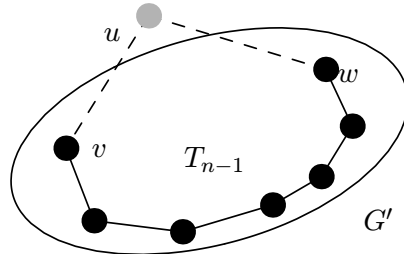


Figura 4.5

Finalment, reconstruïm G (figura 4.6).

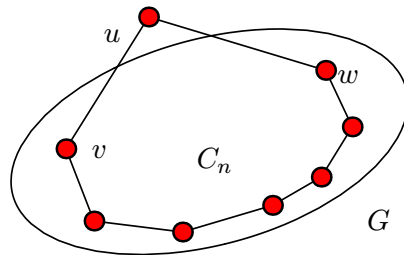


Figura 4.6

Observeu que la propietat no és certa en el cas dels multigracs.

En el cas no connex, cada component connex és, com a graf, un graf connex amb la mateixa seqüència de graus, de manera que és connex 2-regular. S'aplica el que s'acaba de provar i d'aquesta manera resulta que l'estructura de cada component d'ordre k és isomorfa a un cicle C_k .

En resum, tenim a partir d'aquí una caracterització dels gracs 2-regulars, que són els cicles (cas connex) o les reunions de cicles (cas no connex, on cada component connex és isomorf a un cicle).

Apliquem el resultat de caracterització de gracs 2-regulars a un exemple, el del problema següent.

Problema 4.2

Assisteixen a una reunió n persones. Cadascuna coneix exactament dues persones de la reunió (i se suposa que la coneixença és mutua). Proveu que es poden asseure en

rotllanes a l'entorn d'una o més taules rodones de manera que cadascú sigui al costat de les dues persones que coneix.

Resolució

És un problema de “reunions” típic que es pot formular i resoldre per teoria de grafs.

Reinterpretem el problema o formulem-lo en termes de teoria de grafs, atès que sembla relacionat amb la caracterització dels grafs 2-regulars. Considerem el graf $G = (V, A)$, amb V format pel conjunt de les persones. Dos vèrtexs són adjacents si i només si les persones que representen es coneixen; d'aquesta manera es defineixen les arestes i el conjunt d'arestes del graf. Que cadascú conegui exactament dues persones és el mateix que dir que tots els graus són 2, és a dir, que és un graf 2-regular.

La conclusió a la qual s'ha d'arribar no és més que l'expressió de la caracterització dels grafs 2-regulars: si el graf és connex, aleshores és un cicle C_n (una sola taula); si el graf no és connex, aleshores és una reunió de cicles, i els assistents a la reunió es poden distribuir en rotllana a l'entorn de dues taules o més, complint la condició requerida.

Sembla difícil donar una justificació formal de la possibilitat d'aquesta distribució sense la caracterització dels 2-regulars.

Vegem un altre exemple d'aplicació (és també un exemple de la tècnica de passar al complementari).

Problema 4.3

Obteniu els grafs 5-regulars d'ordre 8.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'aquestes característiques. Considerem el complementari $H = G^c$, de seqüència de graus 2,2,2,2,2,2,2,2. Podem aplicar ara la caracterització dels 2-regulars.

Hem de distingir dos casos possibles, depenent de si H és connex o no.

- Si H és connex, aleshores és un cicle i, per tant, $H = C_8$. En conseqüència, és $G = (G^c)^c = H^c = C_8^c$.
- Si H no és connex, aleshores és reunió de cicles; atès que com, a mínim, hi ha d'haver 3 vèrtexs en un cicle, hi ha dues descomposicions possibles: $H_1 = C_3 \cup C_5$ i $H_2 = C_4 \cup C_4$. Per tant, hi ha dos possibles grafs:

1. $G_1 = H_1^c = (C_3 \cup C_5)^c = C_3^c + C_5^c = N_3 + C_5 = N_2 + R_6$.

2. $G_2 = H_2^c = (C_4 \cup C_4)^c = C_4^c + C_4^c = (T_2 \cup T_2) + (T_2 \cup T_2)$

Per tant, hi ha, llevat d'isomorfisme, tres grafs 5-regulars de 8 vèrtexs. Resta finalment la demostració que els grafs anteriors pertanyen a classes d'isomorfia diferents, és a dir, són dos a dos no isomorfs, cosa que és trivial. De fet, l'estudi d'isomorfia es pot fer equivalentment, i resulta més fàcil en aquest cas, no sobre G_1, G_2, G_3 , sinó sobre H_1, H_2, H_3 . Ara bé, és trivial que $C_8, C_3 \cup C_5, C_4 \cup C_4$ són dos a dos no isomorfs.

4.3 Caracterització dels trajectes

Problema 4.4

Demostreu que els grafs connexos amb seqüència de graus $1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(n-2)}, 1$

són els grafs trajecte.

Resolució

En primer lloc, si tenim $G = (V, A)$ graf d'ordre $n = |V|$, pot succeir que $n = 2$ i que de fet no hi hagi cap vèrtex de grau 2. En aquest cas, la seqüència seria 1,1, que també considerem vàlida. La idea és, doncs, que hi ha exactament dos vèrtexs de grau 1 i la resta, si n'hi ha, de grau 2.

Hem de provar que són equivalents, per a un graf $G = (V, A)$ connex d'ordre n :

1. La seqüència de graus de G és 1,2, ..., 2, 1.
2. $G = T_n$ (isomorf).

Observem que la implicació (2) \Rightarrow (1) és de justificació trivial. El que no és obvi és (1) \Rightarrow (2).

Demostrem ara (1) \Rightarrow (2). Ho farem per inducció sobre n , l'ordre del graf. Aquesta és una bona idea quan no sabem com demostrar una propietat determinada, que es formula en termes de n , l'ordre del graf.

Com sempre, considerem dos passos:

Pas 1 (base). En aquest primer pas demostrarem la propietat per al valor de n més petit per al qual tingui sentit la propietat, que en aquest cas és $n = 2$. Això significa que la seqüència és 1,1 i, per tant, trivialment, $G = T_2$.

Pas 2 (inductiu). Suposem, doncs, que $n \geq 3$, és a dir, que hi ha algun vèrtex de grau 2. *Hipòtesi d'inducció:* Suposem per hipòtesi d'inducció que la implicació que volem demostrar és certa per a grafs connexos amb seqüència de graus 1,2, ..., 2,1 i d'ordre

$n' < n$. Més concretament: “si un graf connex d'ordre $n' < n$ té seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$, aleshores és $T_{n'}$ (isomorf).

Considerem, doncs, el nostre graf G , connex, d'ordre $n > 2$, amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$. Per tal d'aplicar la hipòtesi d'inducció, cal derivar de G algun o alguns grafs d'ordre estrictament inferior que siguin connexos i amb la mateixa seqüència de graus. Per a això efectuarem una operació destructiva, que consistirà a eliminar vèrtexs amb la cura suficient perquè estiguem en condicions d'aplicar la hipòtesi d'inducció i posteriorment reconstruir el nostre graf, però ara ja amb l'estructura aclarida.

Hi ha diverses maneres possibles de fer-ho. Tot i que lògicament amb una n'hi ha prou, n'exposarem més d'una, a benefici del lector.

Mètode 1: Eliminem un vèrtex de grau 1. Sigui w_1 un dels vèrtexs de grau 1. La seva eliminació no produeix desconexió, de manera que $G_1 = G - w_1$ continua essent connex i és d'ordre $n' = n - 1 < n$. Per tal de poder aplicar la hipòtesi d'inducció a G_1 , ens cal garantir que és de seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$. En efecte, si w_1 és adjacent a v_1 , aleshores v_1 no pot ser de grau 1 en G ja que, si ho fos, formarien un component connex T_2 i, atès que $n \geq 3$, el graf G original seria no connex. Per tant, v_1 és de grau 2 en G i, en conseqüència, de grau 1 en G_1 ; d'altra banda, pel que fa a la resta de vèrtexs de G_1 , hereten el grau que tenien en G , de manera que la seqüència de graus de G_1 és $1, 2, \dots, 2, 1$. Li podem aplicar la hipòtesi d'inducció i aleshores la seva estructura queda desvel·lada: és $G_1 = T_{n'}$, amb v_1 com un dels extrems. Ara bé, reconstruïm G restablint el vèrtex w_1 i l'aresta w_1v_1 i així resulta $G = G_1 + v_1w_1 = T_n$.

Mètode 2: Eliminem els dos vèrtexs de grau 1.

Siguin w_1, w_2 els dos vèrtexs de grau 1, respectivament adjacents als vèrtexs v_1, v_2 .

Per connexió, els dos vèrtexs de grau 1 no són adjacents, ja que $n \geq 3$. Si $n = 3$, aleshores els dos vèrtexs de grau 1 són adjacents a un vèrtex comú de grau 2 i, en aquest cas, és $G = T_3$. Suposem, doncs, que $n \geq 4$. Aleshores ja no és possible que els vèrtexs de grau 1 siguin adjacents a un mateix vèrtex de grau 2, és a dir, ha de ser $v_1 \neq v_2$, ja que en cas contrari es formaria un component connex T_3 i restarien vèrtexs fora, amb la qual cosa no hi hauria connexió. Eliminem ara els vèrtexs de grau 1. Aleshores el graf G_1 resultant continua essent connex i amb els vèrtexs v_1, v_2 que han passat a ser de grau 1 i, en conseqüència, la seqüència de graus de G_1 és $1, 2, \dots, 2, 1$. A més, l'ordre de G_1 és $n' = n - 2 < n$ i li és aplicable la hipòtesi d'inducció, per tot el que hem dit. D'aquesta manera, la seva estructura queda immediatament aclarida. És $G_1 = T_{n-2}$. Ara reconstruïm el graf $G = T_n$.

Mètode 3: Eliminem un vèrtex de grau 2.

Cal estudiar separatament el cas $n = 3$ i després suposar que $n \geq 4$:

Sigui w_0 un vèrtex qualsevol de grau 2, adjacent als vèrtexs v_1, v_2 . No és possible que v_1, v_2 siguin ambdós de grau 1 ja que, si fos així, tindriem un component connex T_3 i

restarien vèrtexs, amb la qual cosa G no seria connex. Per tant, un dels dos és de grau 2. Hi ha dos casos per considerar:

Cas 1. El vèrtex v_1 és de grau 1 i el v_2 és de grau 2 (i anàlogament si fos a l'inrevés). Eliminem w_0 i creem el graf $G_1 = G - w_0 = N_1 \cup H_1$, amb N_1 format per v_1 . Aleshores H_1 és connex, d'ordre $n' = n - 2 < n$ i amb seqüència de graus 12...21, ja que els vèrtexs diferents de v_2 hereten el grau que tenien i v_2 , abans de grau 2 excepte un, de grau 1, ara és de grau 1 en G_1 , i també en H_1 . Podem aplicar la hipòtesi d'inducció a H_1 , que serà, per tant, un T_{n-2} . Ara només resta, amb aquesta part de l'estructura aclarida, reconstruir el graf original, amb la qual cosa queda finalment $G = T_n$.

Cas 2. Els vèrtexs v_1, v_2 són de grau 2. Eliminem el vèrtex w_0 ; el graf resultant és format per dos components connexos $G = H_1 \cup H_2$, amb $v_1 \in V(H_1)$, $v_2 \in V(H_2)$, de grau 1. D'altra banda, si els vèrtexs de grau 1 en G són w_1, w_2 , s'han d'haver repartit cadascun a cada un dels components connexos, ja que en cas contrari els components connexos H_1, H_2 tindrien nombres senars, 1 i 3, de vèrtexs de grau senar 1, cosa impossible en un graf. Per tant, els components connexos tenen graus 1,2,...,2,1 i, per hipòtesi d'inducció, són trajectes, de manera que $H_1 = T_{m_1}$, $H_2 = T_{m_2}$. Reconstruint el graf original G , resulta $G = T_n$.

Què passa si no és connex? En aquest cas, el graf serà reunió de components connexos. Ara bé, cada component connex és, per si mateix, un graf i en satisfà les propietats generals. En particular, cada component ha de tenir un nombre parell de vèrtexs de grau senar; per aquest motiu, els dos vèrtexs de grau 1 no es poden distribuir en components connexos diferents, sinó que han de pertànyer al mateix component connex. Per tant, tindrem un component connex amb la seqüència que el caracteritza com a trajecte i la resta de vèrtexs de grau 2, que es distribueixen en diversos components connexs, reunió de cicles per la caracterització de grafs 2-regulars, que hem vist anteriorment en un problema de caracterització, a la secció 4.2.

$$T_m \cup (C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_p}), \quad m + \sum_{j=1}^p i_j = n, m \geq 2.$$

Com a exemples d'aplicació immediata, vegeu els següents:

- *Estudieu els grafs de seqüència de graus 1,2,2,1.* Els dos vèrtexs de grau 1 han d'estar en un mateix component connex, ja que en un graf el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell. Amb la resta de vèrtexs no n'hi ha prou per formar un segon component connex, ja que són de grau 2. Per tant, el graf és connex i, per la caracterització, és el trajecte d'ordre 4, T_4
- *Estudieu els grafs amb seqüència de graus 1,2,2,2,2,2,1.* En primer lloc, si el graf és connex, és isomorf a T_7 . Si és no connex, aleshores els vèrtexs de grau 1 han d'estar en un mateix component connex, que tindrà, per tant, la seqüència de graus

$1, 2, \dots, 2, 1$ (eventualment amb cap vèrtex de grau 2), i, per la caracterització dels connexos amb aquest tipus de seqüències, és un trajecte. La resta de vèrtexs, de grau 2, es repartirà en un o més components connexos, de 3 vèrtexs com a mínim, i sobre cada un d'aquests actuarà la caracterització que hem vist anteriorment dels 2-regulars, de manera que restarà un cicle o una reunió de cicles. Resumint, i com a resultat d'aquestes argumentacions, la solució és $T_7, T_2 \cup C_5, T_3 \cup C_4, T_4 \cup C_3$.

Observeu que l'argumentació de la caracterització no depèn de la caracterització dels 2-regulars. Ara bé, si es dóna per coneguda, aleshores la podem utilitzar per a una argumentació alternativa, com es veu tot seguit.

Com provar la implicació anterior $(2) \Rightarrow (1)$ en el cas connex a partir de *la caracterització dels cicles com a connexos 2-regulars*?

Sigui G un graf connex d'ordre n amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$. Vegem que $G = T_n$. En primer lloc, considerem el cas $n = 2$, cas en el qual, de fet, la seqüència és $1, 1$, d'on directament s'infereix que $G = T_2$. Suposem, doncs, que $n \geq 3$. Siguin u, v els vèrtexs de grau 1; aquests vèrtexs no són adjacents, ja que si ho fossin no hi hauria connexió. Considerem el graf G_1 resultat d'afegir l'aresta uv a G , és a dir, $G_1 = G + uv$, cosa que podem fer sense crear cap aresta doble. D'aquesta manera, el graf auxiliar G_1 continua essent connex òbviament i és 2-regular. Aplicant el teorema de caracterització de connexos 2-regulars, resulta ser un cicle $G_1 = C_n$. Si ara restablim el graf original eliminant l'aresta uv , resulta un trajecte: $G = G_1 - uv = C_n - uv = T_n$.

També es podria provar la caracterització dels cicles com els connexos 2-regulars a partir de la caracterització dels trajectes. La idea és: donat un graf connex amb seqüència de graus $2, \dots, 2$, n'eliminem una aresta qualsevol. No es pot produir desconexió: en efecte, els vèrtexs extrems de l'aresta quedarien amb grau 1 i la resta, amb grau 2. Si es formessin dos components connexos o més, els dos vèrtexs de grau 1 haurien de pertànyer al mateix component, perquè un graf no pot tenir un nombre senar de vèrtexs de grau senar; restablint l'aresta es restaura el graf original, amb la qual cosa no podien haver quedat vèrtexs fora d'aquest component. Justificat això, el graf que resulta de l'eliminació de l'aresta és connex amb seqüència $1, 2, \dots, 2, 1$. Per la caracterització, és un trajecte. A partir d'aquest trajecte, afegint l'aresta eliminada inicialment, es restaura el graf, que és, per tant, un cicle.

4.4 Passeu al complementari

Com ja s'ha vist anteriorment (i també es veurà més endavant), en ocasions tenim problemes que es poden resoldre si passem al graf complementari. Per exemple, pot donar-se que en el complementari el problema derivat el tinguem ja resolt o sapiguem com resoldre'l.

Vegeu un exemple en què justament fem servir la caracterització dels grafs connexos 2-regulars, utilitzant, doncs, que aquest problema el tenim resolt.

En general, és un “bon consell” provar amb el pas al complementari en problemes de seqüències de graus, tot i que naturalment és possible que no se’n pugui treure cap conclusió de valor.

Problema 4.5

Obteniu els grafs de seqüència de graus 6,5,5,5,5,5,6 amb la condició que les de grau 6 no siguin adjacents.

Resolució

No sabem si existeix cap graf amb aquestes característiques. D’entrada, la seqüència de graus passa amb èxit el primer test de contenir un nombre parell de vèrtexs de grau senar (per tant, podria existir un graf amb aquestes característiques). Suposem que n’existeix algun i o bé arribem a una contradicció (i a la conclusió que no n’existeixen) o bé arribem a esbrinar-ne l’estructura i a obtenir-los tots, llevat d’isomorfisme.

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb seqüència de graus donada, és a dir, amb seqüència 6,5,5,5,5,5,6. Atès que se suposa que els vèrtexs de grau 6 no són adjacents, han de ser adjacents a tots el vèrtexs de grau 5. Podem fer una operació destructiva i considerar H el graf que resulta de suprimir els dos vèrtexs de grau 6. Aleshores, la seqüència de graus de H és 3,3,3,3,3,3, que tampoc no sembla d’estudi immediat, ja que no hi ha cap grau destacat.

Alternativament, el que farem és passar al graf complementari i considerar, doncs, $F = H^c$, que serà de seqüència de graus 2,2,2,2,2,2. Aleshores, només hi ha dues possibilitats, segons si F és connex o no:

- F és connex. Essent 2-regular, per la caracterització que n’hem vist (4.2), és un cicle, és a dir, $F = C_6$. Per tant, $H = F^c = C_6^c$.

Ara que ja tenim aclarida l’estructura de H , cal restaurar o reconstruir el graf original i tenim, per tant, $G = N_2 + C_6^c$.

- F és no connex. En aquest cas, per la caracterització dels 2-regulars, és reunió de cicles. Ara bé, en el cas de 6 vèrtexs només es poden formar 2 cicles, que són triangles, de manera que resulta: $H = F^c = (C_3 \cup C_3)^c = C_3^c + C_3^c = N_3 + N_3 = K_{3,3}$. Reconstruint el graf original tenim: $G = N_2 + K_{3,3}$.

Resta per veure que són no isomorfs, cosa que deixem per al lector.

Mètode 2. Estudiem ara el problema directament, passant al complementari la seqüència completa. Aleshores, si existís algun graf Q d’aquestes característiques, n’hi hauria

d'haver algun a la seqüència 1,2,2,2,2,2,1, amb la propietat que els dos vèrtexs de grau 1 siguin adjacents (ho han de ser en el complementari, ja que no ho són en el graf).

Això últim només pot passar si els vèrtexs de grau 1 formen un component connex T_2 . La resta estarà format per vèrtexs de grau 2, i poden formar un component o dos. Per la caracterització dels cicles en resulten dues possibilitats.

Per tant, $Q_1 = T_2 \cup C_6$, $Q_2 = T_2 \cup (C_3 \cup C_3) = T_2 \cup C_3 \cup C_3$. La resposta al problema és Q_1^c, Q_2^c .

Amb aquest exemple hem pretès il·lustrar diverses idees, tot i que la primària ha estat la idea de passar al graf complementari i convertir així el problema en un de pràcticament resolt.

En més d'una ocasió se'ns demana provar resultats o estudiar un graf amb un nombre elevat d'arestes o amb una seqüència de graus molt alts respecte de l'ordre del graf. En aquestes situacions pot ser difícil fer l'estudi corresponent o arribar a conclusions, atesa la complicació combinatoria de l'objecte. En aquest cas, pot ser recomanable (sense que sigui cap garantia d'arribar al final) considerar el graf complementari, ja que aleshores previsiblement tindrem "poques" arestes i les seqüències de graus seran de graus "petits".

Vegem, com a exemple, la resolució del problema anterior en tota la seva generalitat, sense la restricció sobre les adjacències dels vèrtexs de grau 6.

Problema 4.6

Obteniu els grafs de seqüència de graus 6,5,5,5,5,5,6.

Resolució

En primer lloc, abans hem vist una resolució, per al cas d'una hipòtesi més forta.

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb seqüència de graus donada, és a dir, amb seqüència 6,5,5,5,5,5,6. Sigui $H = G^c$ el graf complementari, que ha de ser de seqüència de graus 1,2,2,2,2,2,1. L'estudi sembla ara més abordable, ja que el graf té menys arestes i els graus són molt baixos.

Fem, en primer lloc, una distinció depenent de si H és o no connex.

Si H és connex, aleshores, per la caracterització dels grafs trajecte, és $H = T_8$ i, per tant, $G = H^c = T_8^c$.

El cas H no connex és més complicat. En aquest cas, H és reunió de components connexos. Atès que hi ha dos vèrtexs de grau 1, senar, i tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar, els vèrtexs de grau 1 han de pertànyer a un mateix component connex ja que, en cas contrari, dos components connexos, que són grafs, tindrien un

nombre senar de vèrtexs de grau senar, un cada un.

Hi ha diverses agrupacions possibles, corresponents a l'estructura de components conexas. Analitzem a continuació els casos que es poden produir.

- Suposem que existeix un component connex Q_1 format pels vèrtexs de grau 1, de seqüència 1,1. Per connexió, $K_2 = T_2$ i resten 6 vèrtexs de grau 2, que es poden distribuir tots en un sol component connex, que serà aleshores $Q_2 = C_6$, o bé en més d'un component connex. Ara bé, en aquest últim cas, donat que un graf amb un vèrtex de grau 2 ha de tenir un mínim de 3 vèrtexs, l'única repartició possible és 222 i 222 i, per tant, la resta és $C_3 \cup C_3$. Hi ha, doncs, dos possibles grafs: $H_1 = T_2 \cup C_6$ i $H_2 = T_2 \cup C_3 \cup C_3$. Per tant, passant al complementari per reobtenir l'original, resulta $G_1 = H_1^c = (T_2 \cup C_6)^c = T_2^c + C_6^c = N_2 + C_6^c$ i $G_2 = (T_2 \cup C_3 \cup C_3)^c = T_2^c + C_3^c + C_3^c = N_2 + N_3 + N_3 = K_{2,3,3}$.
- A partir d'ara podem anar afegint vèrtexs de grau 2 al component que conté els dos vèrtexs de grau 1, que donaran lloc a grafs trajecte, fins al màxim que permeti el fet que als altres components hi ha d'haver un mínim de 3 vèrtexs, dels vèrtexs restants de grau 2. Les possibilitats de distribució són, doncs, les següents, necessàriament en dos components conexas:

1. Distribució 121, 22222. Correspon a $H = T_3 \cup C_5$. Per tant, $G = H^c = (T_3 \cup C_5)^c = T_3^c + C_5^c = (T_2 \cup N_1) + C_5$.
2. Distribució 1221, 2222. Correspon a $H = T_4 \cup C_4$. Aleshores, $G = H^c = (T_4 \cup C_4)^c = T_4^c + C_4^c = T_4 + (T_2 \cup T_2)$.
3. Distribució 12221, 222. Correspon a $H = T_5 \cup C_3$, d'on resulta $G = H^c = (T_5 \cup C_3)^c = T_5^c + C_3^c = T_5^c + N_3$.

Els complementaris són $T_3 \cup C_5, T_4 \cup C_4, T_5 \cup C_3$ i tenen estructures de cicles diferents. No hi ha, per tant, cap parella isomorfa. En conseqüència, els grafs demanats són tres, els anteriors.

4.5 Problemes addicionals

Problema 4.7

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $|V| = p \geq 2$ i suposem que el grau de cada vèrtex $v \in V$ satisfà $g(v) \geq \frac{1}{2}(p-1)$. Proveu que G és un graf connex. Podem afirmar que són conexas els grafs amb seqüències de graus:

2,2,2,2; 2,2,2,2,2; 3,3,3,3,3; 3,3,3,3,3,3; 3,3,3,3,3,3,3?

Resolució

Suposem que G no és connex i siguin, per tant, G_1, \dots, G_k , $k \geq 2$, els components connexos de G , amb conjunts de vèrtexs V_1, \dots, V_k , respectivament, i sigui $q_i = |V_i|$, per a $i = 1, \dots, k$.

Evidentment, és $q_1 + \dots + q_k = p$.

Considerem dos vèrtexs u, w que pertanyen a dos components connexos diferents. Suposem, per exemple, que $u \in G_i$, $w \in G_j$, $i \neq j$.

Aleshores, u pot ser adjacent com a màxim als $q_i - 1$ vèrtexs restants al component connex al qual pertany, i anàlogament per a w .

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{2} &\leq g(u) \leq q_i - 1, \\ \frac{p-1}{2} &\leq g(w) \leq q_j - 1. \end{aligned}$$

D'aquí obtindríem

$$p - 1 = \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2} \leq g(u) + g(w) \leq q_i + q_j - 2 \leq p - 2,$$

que és una conclusió absurda.

Pel que fa a la segona part, trivialment es veu com a aplicació de la primera que els grafs corresponents han de ser connexos.

Problema 4.8

Caracteritzeu els grafs $G = (V, A)$ d'ordre $n \geq 4$ que satisfan les condicions:

- a) G és 2-connex,
- b) la seqüència de graus de G és: $3, 3, \dots, 3, n - 1$,

com els grafs roda R_n .

Resolució

Una observació prèvia que cal fer és que ha d'ésser $n \geq 4$; això es deriva de la seqüència de graus (ja que $|V| \geq g(v) + 1, \forall v$) i és, d'altra banda, condició inherent a la definició del graf roda R_n .

Per provar la caracterització que es demana cal veure dues coses:

1. Que el graf roda R_n satisfà les condicions a i b ,
2. Que si un graf G d'ordre n satisfà les condicions a i b , aleshores és isomorf al graf roda R_n .

Vegem-ne la primera part (la trivial).

La condició b es compleix clarament. Pel que fa a la propietat a de 2-connexió, R_n és certament 2-connex, ja que l'eliminació d'un vèrtex no pot produir cap increment en el nombre de components connexos; això es pot comprovar directament estudiant per separat què passaria si eliminéssim el vèrtex de grau $n - 1$ o qualsevol dels altres, o bé aplicant el teorema de Whitney de caracterització de 2-connexos.

Vegem-ne la segona part.

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $n \geq 4$ per al qual se satisfan les condicions a i b . Vegem que aleshores és isomorf al graf roda R_n . Sigui $w \in V$ tal que $g(w) = n - 1$. Per la 2-connexió, el graf $G' = G - w$ continua essent connex. Ara bé, pel fet que $g(w) = n - 1 = |V| - 1$, w és adjacent a la resta de vèrtexs del graf i, per tant, la seqüència de graus de $G' = G - w$ és $2, \dots, 2$. Resulta, doncs, que $G' = G - w$ és:

- d'ordre ≥ 3 ,
- connex,
- amb seqüència de graus: $2, \dots, 2$.

Per una caracterització prèviament coneguda (secció 4.2) dels grafs *cicle*, coneixem l'estructura de $G' = G - w$:

$$G' = G - w \simeq C_{n-1}.$$

Per tant, l'estructura de G serà

$$G \simeq N_1 + G' \simeq N_1 + C_{n-1} \simeq R_n.$$

Problema 4.9

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $|V| = p$, amb dos components connexos que són grafs complets. Proveu que es compleix

$$|A| \geq \frac{1}{4}(p^2 - 2p).$$

Resolució*Mètode 1*

Considerem els dos components connexos C_1, C_2 del graf amb, respectivament, x i $p-x$ vèrtexs. Per tant, tenim per hipòtesi

$$C_1 \simeq K_x, \quad C_2 \simeq K_{p-x},$$

i, en conseqüència, els nombres d'arestes són, respectivament,

$$\begin{aligned} |A(C_1)| &= |A(K_x)| = \binom{x}{2}, \\ |A(C_2)| &= |A(K_{p-x})| = \binom{p-x}{2}. \end{aligned}$$

El nombre total d'arestes del graf G dependrà de x , i serà la funció

$$F(x) = \binom{x}{2} + \binom{p-x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(p-x)(p-x-1)}{2}.$$

Calculem ara la distribució de vèrtexs entre els dos components per a la qual s'assoleix el valor mínim possible per al nombre d'arestes. Si el mínim s'assoleix a x_0 , aleshores serà

$$|A| \geq F(x_0).$$

Estudiem, doncs, $F(x)$. De $F(x) = x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - p)$ resulta $F'(x) = 2x - p$ i, per tant, el possible mínim relatiu serà $x_0 = \frac{p}{2} = k$. És efectivament mínim ja que $F''(x) = 2 > 0$. El valor mínim corresponent és

$$\begin{aligned} |A| &\geq F(x_0) = F(k) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(2k-k)(2k-k-1)}{2} \\ &= k(k-1) = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right) = \frac{1}{4}(p^2 - 2p). \end{aligned}$$

El mínim d'arestes correspon a l'equidistribució de vèrtexs als dos components; qualsevol altra configuració incrementa el nombre d'arestes.

Mètode 2

Podem plantejar una via alternativa de resolució.

Sigui $G = (V, A)$, amb $|V| = p$. Considerem $G = G_1 \cup G_2$, amb $G_1 = (V_1, A_1) = K_x$, $G_2 = (V_2, A_2) = K_{p-x}$.

Pel lema de les encaixades podem escriure

$$2|A| = \sum_{v \in V_1} g(v) + \sum_{v \in V_2} g(v) = x(x-1) + (p-x)(p-x-1).$$

És a dir,

$$|A| = \frac{1}{2}(x(x-1) + (p-x)(p-x-1)) = \frac{2}{4}(x(x-1) + (p-x)(p-x-1)).$$

Atès que cal veure $|A| \geq \frac{1}{4}(p^2 - 2p)$, si considerem

$$H(x) = 2(x(x-1) + (p-x)(p-x-1)),$$

cal veure que $H(x) \geq p^2 - 2p$.

Ara bé, això es redueix pràcticament a un simple càlcul rutinari:

$$\begin{aligned} H(x) &= 2(x^2 - x + (p-x)^2 - (p-x)) = 4x^2 - 4px + 2p^2 - 2p \\ &= (4x^2 - 4px + p^2) + (p^2 - 2p) = (2x - p)^2 + (p^2 - 2p) \geq p^2 - 2p, \end{aligned}$$

ja que $(2x - p)^2 \geq 0$, per ser quadrat.

Problema 4.10

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $|V| = n$. Proveu que si es compleix

$$g(x) + g(y) \geq n - 1, \quad \forall x, y \in V, \quad x \neq y,$$

aleshores és connex.

Resolució

Podem resoldre el problema de més d'una manera.

Mètode 1

Suposem que el graf $G = (V, A)$ és no connex. Siguin $x, y \in V$ pertanyents a components connexos diferents, que podem suposar que són, respectivament, G_i, G_j , és a dir, $x \in V(G_i)$, $y \in V(G_j)$. Els graus dels vèrtexs en els components connexos són els mateixos que en el graf general. Ara bé, cada component connex és un graf i, per tant, el grau

d'un vèrtex és limitat pel nombre de vèrtexs disponibles en el component. Per això podem escriure

$$g(x) \leq |V(G_i)| - 1, \quad g(y) \leq |V(G_j)| - 1.$$

La hipòtesi sobre els graus suggereix que sumem

$$g(x) + g(y) \leq |V(G_i)| + |V(G_j)| - 2 \leq n - 2,$$

i així s'arriba a

$$n - 1 \leq g(x) + g(y) \leq n - 2,$$

que és absurd.

Mètode 2

Donats $x, y \in V$ arbitraris, cal veure que existeix algun recorregut $x - y$.

Hi ha dos casos possibles.

Cas 1. Els vèrtexs x, y són adjacents. Aleshores trivialment hi ha un camí que els connecta.

Cas 2. Els vèrtexs x, y no són adjacents. Considerem la notació següent per al conjunt de vèrtexs adjacents a un vèrtex donat $z \in V$: $N(z) = \{t \in V \mid t \sim z\}$. Observem que $g(z) = |N(z)|$.

De $y \notin N(x)$, $x \notin N(y)$ i òbviament $x \notin N(x)$, $y \notin N(y)$, resulta que $x, y \notin N(x) \cup N(y)$ i, per tant, havent-hi aquests dos elements exclosos, $|N(x) \cup N(y)| \leq n - 2$.

Si demostrem que $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$ resoldrem el problema. Ara bé,

$$\begin{aligned} n - 2 &\geq |N(x) \cup N(y)| = |N(x)| + |N(y)| - |N(x) \cap N(y)| \\ &= g(x) + g(y) - |N(x) \cap N(y)| \geq n - 1 - |N(x) \cap N(y)| \end{aligned}$$

i, en conseqüència,

$$|N(x) \cap N(y)| \geq n - 1 - (n - 2) = 1.$$

Amb això provem que existeix un vèrtex w que és adjacent comú a x, y i, en conseqüència, existeix un recorregut, el $x - w - y$.

Observem que amb aquest mètode 2 demostrem més del que ens demanen. Què demostrem sobre el diàmetre del graf?

Problema 4.11

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb $|V| = n$ vèrtexs i m components connexos. Proveu que es compleix

$$|A| \leq \frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$$

Resolució

Estem buscant una fita superior per al nombre d'arestes del graf. Si $G = G_1 \cup \dots \cup G_m$ és l'expressió del graf com a reunió de components connexos, suposem que $G_i = (V_i, A_i)$, per a $i = 1, \dots, m$, i sigui $p_i = |V_i|$. Es compleix, per una banda, $p_1 + \dots + p_m = n$ i, per una altra, $|A(G)| = \sum_{i=1}^m |A(G_i)|$.

És clar que dins de cada component connex el nombre màxim d'arestes és el que correspon al graf complet construït amb els vèrtexs del component, de manera que, fixada una distribució dels n vèrtexs en els m components connexos, tenim

$$|A(G)| = \sum_{i=1}^m |A(G_i)| \leq \sum_{i=1}^m |A(K_{p_i})| = \sum_{i=1}^m \binom{p_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i(p_i - 1).$$

Es tracta de veure quina és la distribució de vèrtexs possible en m components que pot produir un nombre màxim possible d'arestes, superior al d'altres configuracions, en el cas més favorable per tal de tenir el màxim d'arestes, que és aquell per al qual els components connexos són grafs complets. La fita superior seria la de la desigualtat de la fórmula anterior.

Donada una configuració $H = K_{p_1} \cup \dots \cup K_{p_m}$, vegem com afecta el nombre màxim possible d'arestes la variació d'algun p_i . Evidentment, una disminució de p_i ha de produir variacions d'alguns dels altres p_j , atès que $p_1 + \dots + p_m = n$.

Considerem una parella i, j , amb $i \neq j$, i suposem $p_i \geq p_j$, $G_i = K_{p_i}$, $G_j = K_{p_j}$ i considerem el graf G' , resultat de treure un vèrtex de G_j i afegir-lo a G_i , és a dir:

$$G' = G_1 \cup \dots \cup G_{i-1} \cup G'_i \cup \dots \cup G'_j \cup \dots \cup G_m,$$

on cada component és un graf complet de l'ordre respectiu, amb $p'_i = |V(G'_i)| = |V(G_i)| + 1$ i $p'_j = |V(G'_j)| = |V(G_j)| - 1$.

Intuïtivament s'ha eliminat un vèrtex de G_j i s'ha incrementat G_i amb un vèrtex, i sobre els conjunts de vèrtexs subjacents s'han construït els grafs complets.

És immediat comprovar que, atès que $p_i \geq p_j$, és

$$\binom{p'_i}{2} + \binom{p'_j}{2} \geq \binom{p_i}{2} + \binom{p_j}{2},$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} |A(G')| &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{i-1} p_r(p_r - 1) + \binom{p'_i}{2} + \frac{1}{2} \sum_{r=i+1}^{j-1} p_r(p_r - 1) + \binom{p'_j}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=j+1}^m p_r(p_r - 1) \geq |A(G)|. \end{aligned}$$

És clar, doncs, que amb aquesta operació s'incrementa el màxim nombre possible d'arestes del graf. Es pot iterar, i després d'un nombre finit d'iteracions, s'arribarà a la configuració que produeix el màxim nombre d'arestes amb m components i n vèrtex, que és aquella en la qual tots els components són grafs nuls, excepte l'últim, que és complet:

$$G_0 = N_1 \cup \overset{m-1}{\cdots} \cup N_1 \cup K_{n-(m-1)}.$$

Aleshores,

$$|A(G_0)| = |A(K_{n-m+1})| = \frac{1}{2}(n-m+1)(n-m).$$

Per a qualsevol altre graf G és

$$|A(G)| \leq |A(G_0)| = \frac{1}{2}(n-m)(n-m+1).$$

Problema 4.12

Descriviu, llevat d'isomorfisme, tots els grafs connexos d'ordre 5 amb tots els graus parells.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb les característiques anteriors.

En primer lloc, per connexió, $g(v) > 0$. En segon lloc, és vàlida la fita superior genèrica $g(v) \leq |V| - 1 = 4$ i, per tant, $g(v) \leq 4$, per a tot $v \in V$. En conseqüència, els únics graus possibles són 2 i 4.

En principi, doncs, les possibles seqüències de graus són:

Tipus A: 2,2,2,2,2.

Tipus B: 2,2,2,2,4.

Tipus C: 2,2,2,4,4.

Tipus D: 2,2,4,4,4.

Tipus E: 2,4,4,4,4.

Tipus F: 4,4,4,4,4.

Analitzem cada un dels tipus anteriors (des del punt de vista de l'isomorfisme). Exemples corresponents a diferents tipus seran no isomorfs, ja que tindran seqüències de graus diferents (i, com a conseqüència, nombres d'arestes diferents).

En el *tipus A*, el graf és 2-regular. Tenint en compte la caracterització dels grafs connexos 2-regulars (4.2), és $G = C_5$ (isomorf).

En el *tipus B*, sigui v_0 el vèrtex de grau 4, és a dir, $g(v_0) = 4$, adjacent a la resta. Si $G' = G - v_0$, és $G = N_1 + G'$ (N_1 correspon al vèrtex de grau 4). Ara bé, la seqüència de graus de G' és 1,1,1,1, d'on $G' = K_2 \cup K_2$. Per tant, $G = N_1 + (K_2 \cup K_2)$ (figura 4.7).

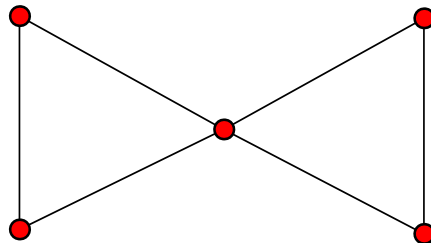


Figura 4.7

També s'hauria pogut estudiar passant al complementari. Si $H = G^c$, la seqüència de graus és 2,2,2,2,0, d'on $H = C_4 \cup N_1$. Per tant, $G = H^c = C_4^c + N_1 = (K_2 \cup K_2) + N_1$.

En el *tipus C*, podem passar al complementari, que tindrà seqüència de graus 2,2,2,0,0.

Aleshores, $G^c = C_3 \cup N_2$, d'on $G = C_3^c + N_2^c = N_3 + K_2$.

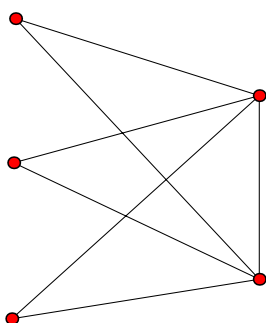


Figura 4.8

També es pot estudiar el problema directament. En efecte, cada vèrtex de grau 4 és adjacent a la resta, de manera que els vèrtexs de grau 2 són adjacents als dos vèrtexs de grau 4, amb la qual cosa queda completament aclarida l'estructura d'adjacències. Per tant, $G = N_3 + T_2$ (N_3 correspon als vèrtexs de grau 2; T_2 és el subgraf generat pels vèrtexs de grau 4 en G).

Encara es pot plantejar la resolució segons una tercera variant. Si u és un dels vèrtexs de grau 4, i considerem $G' = G - u$, aleshores $G = N_1 + G'$. Ara estudiem l'estructura de G' , que té seqüència de graus 1113. L'estructura corresponent és $N_3 + N_1 = K_{1,3}$. Per tant, $G = N_1 + K_{1,3} = N_3 + T_2$, plenament coincident amb els resultats anteriors.

En el tipus D , considerem el complementari, de seqüència 2,2,0,0,0. No existeix cap graf amb aquesta seqüència de graus.

En el tipus E , considerem el complementari, de seqüència 2,0,0,0,0. No existeix cap graf que la tingui com a seqüència.

En el tipus F , l'única possibilitat és $G = K_5$.

Problema 4.13

Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$ tal que $g(v) \geq \frac{n-1}{2}$, per a tot vèrtex v . Proveu que $D(G) \leq 2$ (diàmetre).

Resolució

Considerem dos vèrtexs qualssevol u, v . Atès que hem de provar que $D(G) \leq 2$, cal veure que $d(u, v) = 1$ o que $d(u, v) = 2$. Hi ha dues possibilitats:

Cas 1. Si u, v són adjacents, aleshores $d(u, v) = 1$.

Cas 2. Suposem que u, v no són adjacents. Vegem que $d(u, v) = 2$. Per a això només cal provar que existeix un $z \in V$ tal que és adjacent a u, v , de manera que es crea un

camí $u - z - v$ de longitud 2. Hem de provar, equivalentment, que v ha de ser adjacent a algun dels vèrtexs que són adjacents a u .

Què passaria si v no fos adjacent a cap dels vèrtexs als quals és adjacent u ? Essent u adjacent a $\frac{n-1}{2}$ o més vèrtexs, queda exclosa per a ser adjacent a v una quantitat més gran o igual que $\frac{n-1}{2} + 1$, ja que també n'hem d'excloure el vèrtex u . Per tant, $g(v) \leq n - 1 - (\frac{n-1}{2} + 1) = \frac{n-1}{2} - 1$ (observem que, amb caràcter general, el grau ha de ser menor o igual que $n - 1$). Aplicant aquest resultat i la hipòtesi de l'enunciat a $g(v)$, arribem a una contradicció:

$$\frac{n-1}{2} \leq g(v) \leq \frac{n-1}{2} - 1,$$

és a dir,

$$\frac{n-1}{2} \leq \frac{n-1}{2} - 1.$$

Problema 4.14

Si G és no connex, proveu que el complementari G^c és connex i de diàmetre menor o igual que 2.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$. Si és no connex, es pot expressar com a reunió de $k \geq 2$ components connexos, és a dir, $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$.

Siguin u, v dos vèrtexs qualssevol de G^c (també de G , ja que els conjunts de vèrtexs coincideixen). Es tracta de veure que existeix en G^c un recorregut que els connecta. És més, si veiem que existeix un camí de longitud 1 o 2 haurem provat l'afirmació sobre el diàmetre.

Són possibles dos casos:

1. Els vèrtexs u, v pertanyen a components connexos diferents de G , és a dir, $u \in V(G_i)$ i $v \in V(G_j)$, $i \neq j$. Aleshores no són adjacents en G , és a dir, no existeix en G l'aresta uv . Però això significa que l'aresta existeix en G^c , és a dir, que u, v són adjacents en el graf complementari G^c .
2. Els vèrtexs u, v pertanyen al mateix component connex de G , per exemple G_i . Atès que $k \geq 2$, existeix un altre component connex diferent, per exemple G_j . Sigui $z \in V(G_j)$. Aleshores en G els vèrtexs u, v són no adjacents a z , perquè estan en components connexos diferents. Però això implica que ho són en G^c , és a dir, que existeixen en G^c les arestes uz, vz . Per tant, en G^c existeix el camí $u - z - v$.

Problema 4.15

Sigui G un graf connex amb tots els vèrtexs de grau igual o superior a 2. Proveu que G conté algun cicle.

Resolució

Utilitzem el fet que un graf connex admet sempre algun vèrtex que no és d'articulació. Aquest resultat es veu com a problema resolt al capítol 6. Sigui w_0 un vèrtex que no és d'articulació. Per tant, $G' = G - w_0$ és connex.

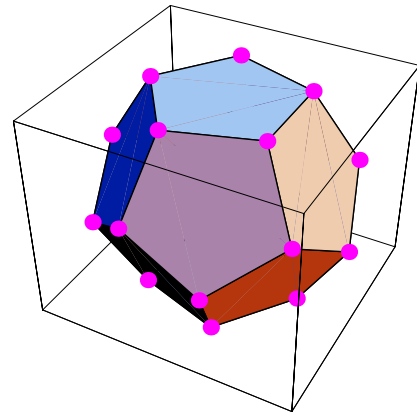
Essent $g_G(w_0) \geq 2$, existeix un mínim de dos vèrtexs adjacents a w_0 en G . Siguin u_1, u_2 aquests vèrtexs, i siguin $a_1 = w_0u_1$, $a_2 = w_0u_2$.

Essent G' connex, existeix en G' un $u_1 - u_2$ camí C que és format per arestes que també són de G . Si reconstruïm $G = G' + w_0 + a_1 + a_2$, aleshores tenim en G el camí $C \cup a_1 \cup a_2$, que és un cicle. Per tant, el graf conté un cicle.

Observeu que un cop provat per a grafs connexos, la propietat es pot estendre a qualsevol graf, no necessàriament connex. En efecte, en cada component connex d'un no connex es continua complint la propietat sobre els graus i s'aplica el que s'ha vist a cada component connex.

Capítol 5

Problemes eulerians i hamiltonians



5.1 Objectius

En aquest capítol es presenten problemes lligats a un tipus especial de recorreguts en un graf, recorreguts que tenen en compte si hi ha o no repetició d'arestes (problemes eulerians) o de vèrtexs (problemes hamiltonians). Al nivell que els tractarem, els problemes eulerians resulten sorprenentment simples. Menys simples són els problemes hamiltonians: donarem una sèrie de mètodes per estudiar el problema i, sobretot, per justificar que un graf és no hamiltonià, si aquest és el cas.

5.2 Problemes eulerians

Un graf és eulerià si i només si admet un circuit eulerià. Un circuit eulerià és un recorregut tancat que conté totes les arestes sense repetició. Hi ha una caracterització extraordinàriament senzilla del caràcter eulerià d'un graf (òbviament connex). Un graf connex és eulerià si i només si tots els graus són parells. Com es veu, donat un graf, aquesta és una propietat de comprovació immediata.

Podem donar, però, una caracterització més completa de l'eulerianitat d'un graf connex. Considerem el teorema de caracterització següent de grafs eulerians.

Teorema 5.1 *Per a un graf G connex, són equivalents*

1. G és eulerià.

2. El grau de qualsevol vèrtex és parell.
3. El conjunt de les arestes es descompon en reunió de cicles arestodisjunts.

A continuació es presenten problemes diversos.

Problema 5.1

Donat un graf regular que conté un nombre senar d'arestes i un nombre parell de vèrtexs, demostreu que no pot contenir cap circuit eulerià.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf regular de grau comú r , amb $|V| = 2k$. Pel lema de les encaixades, es compleix:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} r = |V|r = 2kr.$$

Aleshores $|A| = kr$. Atès que $|A|$ és senar, també ha de ser-ho r i, per tant, no es compleix la propietat de caracterització dels grafs eulerians (un graf és eulerià si i només si el grau de cada vèrtex és parell) i, en conseqüència, no existeix cap circuit eulerià.

Problema 5.2

Sigui G un graf connex que conté només vèrtexs de grau parell. Demostreu que G no pot contenir cap aresta-pont.

Resolució

Mètode A

Suposem que $G = (V, A)$ és connex i sigui $a = \{v, w\}$ una aresta-pont. Considerem el graf auxiliar $G_1 = (V_1, A_1)$, amb $V_1 = V$ i $A_1 = A \setminus \{a\}$, és a dir, el graf que s'obté a partir de G eliminant l'aresta $a = \{v, w\}$.

Si al graf G teníem $g_G(v) = 2k \geq 2$ i $g_G(w) = 2k' \geq 2$, al nou graf G_1 tindrem

$$\begin{aligned} g_{G_1}(v) &= 2k - 1, \\ g_{G_1}(w) &= 2k' - 1. \end{aligned}$$

La resta de graus no ha variat.

Essent $a = \{u, w\}$ una aresta-pont, ha de ser G_1 ha de ser un graf no connex; sigui C el component connex que conté el vèrtex v (per exemple). Aleshores C és un graf (subgraf de G) tal que, si $u \in V(C)$:

$$\begin{aligned} g(u) &= 2k'' \text{ parell, } \forall u \neq v, \quad i \text{ és} \\ g(v) &= 2k - 1 \quad \text{senar,} \end{aligned}$$

i s'arribarà a la contradicció que al graf C existeix un nombre senar de vèrtexs de grau senar, cosa que és impossible en virtut del lema de les encaixades.

Mètode B

Pel teorema de caracterització de grafs eulerians, G és eulerià; en conseqüència, per una ben coneguda caracterització dels grafs eulerians, segons la qual el conjunt de les arestes és reunió de cicles arestodisjunts (vegeu el teorema de caracterització que s'ha recordat al principi del capítol), tota aresta està en algun cicle i, per tant, la seva eliminació no pot produir desconexió del graf. Per tant, cap aresta és aresta-pont.

Problema 5.3

Proveu que, si un graf té tots els vèrtexs de grau 2, aleshores existeix un cicle.

Resolució

Són possibles diverses alternatives per a la resolució.

Mètode 1. Si tenim demostrada la caracterització dels grafs 2-regulars com a reunió de cicles, hem acabat. El lector en pot veure la demostració a la secció 4.2.

Mètode 2. Podem utilitzar la teoria de grafs eulerians. En efecte, cada component connex és un graf eulerià perquè tots els vèrtexs són de grau parell. En un component connex qualssevol les arestes es distribueixen en reunió de cicles arestodisjunts, amb la qual cosa queda provada l'afirmació.

Mètode 3. Podem aplicar la teoria d'arbres. A cada component connex del graf els vèrtexs continuen essent de grau 2. Per tant, hi ha un mínim de 2 vèrtexs i, en canvi, no hi ha cap vèrtex de grau 1. En conseqüència, un component connex qualsevol no és arbre, ja que tot arbre amb un mínim de 2 vèrtexs té un mínim de vèrtexs de grau 1 i, per tant, conté cicles.

A l'exemple següent es planteja essencialment un problema de *modelització*. En efecte, es formula un model del problema en termes de teoria de grafs i es reformula la pregunta en termes de grafs eulerians (o hamiltonians).

Problema 5.4

Considerem un joc de dòmino format per les fitxes que contenen puntuacions que van de blanc-blanc a sis-sis.

Es planteja el problema de saber si es pot trobar una disposició de les fitxes, de manera que se situïn sobre un cercle tancat i amb la condició que dues fitxes estan en contacte amb la mateixa puntuació (coincideixen una puntuació de la primera amb una de la segona), com per exemple:

...23|36|65|53|30...

Existeix solució al problema?

Resolució

Observeu que de la pròpia situació resulta que no es poden repetir fitxes, que no estan repetides en el joc.

Observeu també que la condició circular és equivalent a una distribució en seqüència lineal, de manera que els extrems tinguin puntuacions coincidents.

Aquest és un exemple de formulació d'un problema en termes de teoria de grafs i, més encara, en termes de grafs eulerians o hamiltonians.

Formulem el problema en termes de teoria de grafs. Per a això cal buscar un model adequat en termes de teoria de grafs que permeti de plantejar-lo i resoldre'l.

El lector pot intentar formular una versió hamiltoniana del problema.

Versió euleriana

El model que considerem és el següent. Cada puntuació possible (de 0 a 6) es representa per un vèrtex del nou graf $H = (V, A)$, de manera que $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les arestes són les fitxes. Donat que hi ha una fitxa doble per a tota puntuació, resulta que per a cada vèrtex hi ha un llaç. Ara bé, atès que les dobles no representen cap problema, ja que sempre poden intercalar-se, podem considerar el graf H' , resultat d'eliminar tots els llaços (i així H' és un graf). Atès que existeix per a cada parella de puntuacions la fitxa corresponent, no repetida, $H' = K_7$.

El problema és construir un recorregut tancat, sense repetició d'arestes (aquí forçadament, perquè són les fitxes) de manera que contingui totes les arestes.

El que es demana és precisament un circuit eulerià (tancat); existeix solució si H' és eulerià. Ara bé, es compleixen les condicions del teorema que en caracteritza l'existència, ja que $g(v)$, $\forall v \in V$ és parell ($g(v) = 6$, per a tot v en H').

Per tant, el problema admet solució.

5.3 Problemes hamiltonians

Descrivim en aquesta secció una sèrie de mètodes per abordar l'estudi del caràcter hamiltonià d'un graf.

5.3.1 Quin és el problema?

Suposem que tenim un graf $G = (V, A)$ connex.

Un *cicle hamiltonià* és un camí tancat que passa per tots els vèrtexs del graf sense repetició. Un graf connex que admet algun cicle hamiltonià és un *graf hamiltonià*.

El graf del dodecèdredre és hamiltonià. Els grafs de la figura 5.1 mostren l'existència de diversos cicles hamiltonians en el graf del dodecèdredre (arestes de traç gruixut).

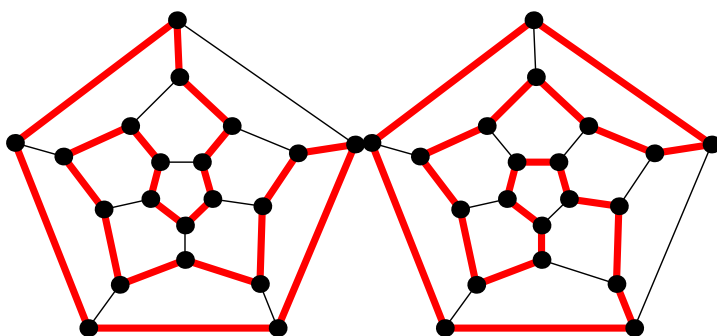


Figura 5.1

El problema més típic és esbrinar si un graf connex donat és o no hamiltonià. En aquest cas, o bé es troba algun cicle hamiltonià, cas en el qual es conclou que el graf és hamiltonià, o bé es prova que no n'hi pot haver cap, i en aquest cas es conclou que no és hamiltonià.

Malgrat les similituds en la formulació, els problemes de grafs hamiltonians no tenen res a veure amb els seus homòlegs eulerians. No disposem de cap criteri similar o d'aplicació igual de senzilla que permeti decidir si un graf és hamiltonià o no ho és.

5.3.2 La condició suficient sobre la suma de graus de vèrtexs no adjacents

Hi ha alguns resultats generals que garanteixen el caràcter de hamiltonià d'un graf, però solen ser d'aplicació *molt limitada* en casos pràctics com els que podem haver de tractar, i tampoc no es plantegen en termes d'equivalència, tot i que són d'indiscutible interès teòric. Un dels més coneguts és el resultat que s'enuncia a continuació.

Teorema 5.2 *Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $n = |V| \geq 3$. Suposem que $g(u) + g(v) \geq n$ per a cada parella de vèrtexs u, v no adjacents. Aleshores G és hamiltonià.*

Vegem un exemple d'ús del teorema anterior.

Problema 5.5

Demostreu que si G és un graf d'ordre n i de mida $|A| \geq \binom{n-1}{2} + 2$, aleshores G és hamiltonià.

Resolució

Aquest és un problema en què podem intentar veure que, per a vèrtexs u, v no adjacents, tenim $g(u) + g(v) \geq n$, cas en el qual podem deduir que G és hamiltonià.

Vegem, doncs,

$$u \not\sim v \implies g(u) + g(v) \geq n.$$

Fixem, doncs, els vèrtexs u, v , no adjacents.

Considerem el graf resultant d'eliminar els vèrtexs anteriors, és a dir, $G' = G \setminus \{u, v\}$. Vegem quants vèrtexs i quantes arestes té aquest graf auxiliar. Pel que fa als vèrtexs, $|V(G')| = n - 2$. Pel que fa a les arestes, en eliminar u , eliminem $g(u)$ arestes. En eliminar v , n'eliminem $g(v)$. D'entre aquestes, no n'hi ha cap de compartida, ja que no són adjacents, de manera que no n'hem eliminat cap de comuna. Per tant, el nombre total d'eliminades és $g(u) + g(v)$. Així, $|A(G')| = |A(G)| - g(u) - g(v)$.

Ara bé, tenim la fitació general $|A(G')| \leq \binom{|V(G')|}{2}$, que podem aplicar:

$$\binom{n-2}{2} = \binom{|V(G')|}{2} \geq |A(G')| = |A(G)| - g(u) - g(v)$$

També apliquem la hipòtesi de l'enunciat:

$$\binom{n-2}{2} \geq |A(G)| - g(u) - g(v) \geq \binom{n-1}{2} + 2 - g(u) - g(v),$$

d'on

$$g(u) + g(v) \geq \binom{n-1}{2} - \binom{n-2}{2} + 2 = n.$$

En aplicació del resultat teòric anterior podem formular una altra condició suficient per a la hamiltoneïtat, corollari de l'anterior.

Teorema 5.3 *Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $n = |V|$. Si per a cada vèrtex v es compleix $g(v) \geq \frac{n}{2}$, aleshores G és hamiltonià.*

Cal dir que aquests resultats són d'aplicabilitat pràctica molt limitada, ja que la condició sobre la suma de graus no es compleix la majoria de les vegades en què hem d'estudiar si un graf és hamiltonià.

Atesa l'aplicabilitat escassa dels resultats anteriors, donarem alguns criteris que es poden seguir, principalment amb la idea d'arribar a un resultat negatiu, és a dir, de no hamiltonià per part d'un graf. Donarem condicions necessàries senzilles de hamiltonià; si no es compleixen, es podrà afirmar que el graf en qüestió no és hamiltonià.

5.3.3 “Bons consells”

Donem en aquesta secció una col·lecció de mètodes que permeten abordar la pregunta de si un graf és hamiltonià o no.

5.3.3.1 “Estructura circular” d'un graf hamiltonià

La *idea essencial* és que si un graf $G = (V, A)$ d'ordre $n = |V|$ és hamiltonià, aleshores admet un cicle hamiltonià C i això significa que tots els vèrtexs estan distribuïts sobre un cicle, naturalment d'ordre n , i, a més, hi poden haver altres arestes, com es mostra a la figura 5.2. Observem que aleshores $V(C) = V(G)$, atès que tots els vèrtexs del graf han d'estar sobre el cicle. En general, si tenim un n -cicle, aquest conté exactament n arestes, de manera que $|A(C)| = n$ en un graf hamiltonià d'ordre n , amb cicle hamiltonià C .

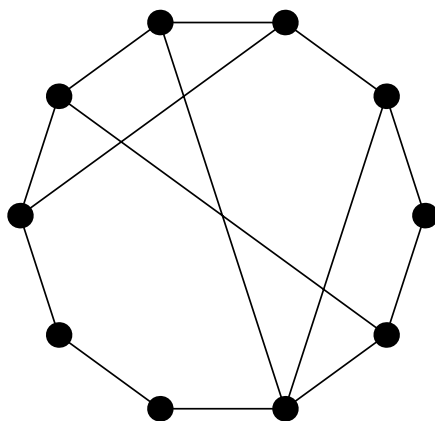


Figura 5.2

A la figura 5.3 es concreta la idea anterior de distribució cíclica en el cas d'un graf hamiltonià concret, el corresponent a l'octàedre. A la subfigura de l'esquerra tenim un

cicle hamiltonià: 1,2,3,4,5,6,1. A la dreta veiem la corresponent “presentació circular” del graf, amb els vèrtexs en la seqüència donada pel cicle hamiltonià. Observeu com hi ha altres arestes, a més de les del cicle exterior.

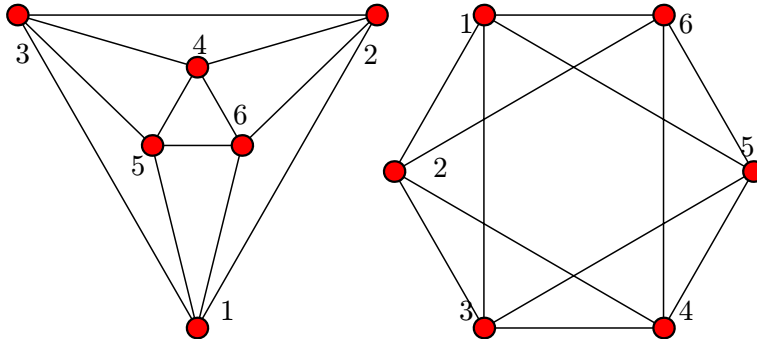


Figura 5.3

D'aquesta manera de veure un graf hamiltonià deriva la majoria de mètodes per estudiar si un graf ho és o no. Aquests mètodes són conseqüència de l'estructura circular en el cas hamiltonià.

Hi ha algunes idees que es poden utilitzar per decidir, donat un graf concret, si és hamiltonià o no.

En aquesta exposició utilitzarem el graf de la figura 5.4, al qual anirem aplicant diversos mètodes d'anàlisi. Nogensmenys, aquest és un cas especial, ja que a no tots els grafs els són aplicables tots els mètodes possibles. L'aplicació d'alguns mètodes en alguns casos serà conclouent, des del punt de vista de poder afirmar la no-hamiltoneïtat; en d'altres no serà útil l'aplicació del mètode que sigui. Molts dels criteris són de tipus negatiu.

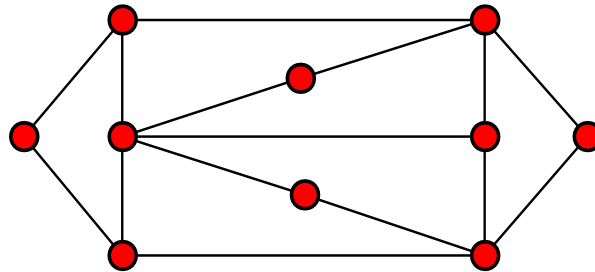


Figura 5.4

5.3.3.2 Test 1: és 2-connex?

La primera cosa que ha de passar perquè un graf pugui ser hamiltonià és, per descomptat, que sigui connex. De manera que el primer test que ha de superar és el de la connexió, que donem per obvi. Per tant, la pregunta sobre el caràcter hamiltonià només s'aplica als grafs connexos.

En relació amb la connectivitat, de fet s'ha de complir una propietat més forta, la 2-connexió, és a dir: si G és hamiltonià, és 2-connex. En conseqüència, si un graf és

no 2–connex, aleshores és no hamiltonià.

La raó d'això és novament l'estructura cíclica d'un graf hamiltonià. En un graf amb aquesta propietat tots els vèrtexs estan situats en un cicle, i és ben sabut que eliminant un vèrtex d'un cicle mai es produeix desconexió. Aleshores, si el graf no és 2–connex, essent connex, això significa que es pot produir desconexió eliminant un vèrtex adequat, cosa que no pot ocórrer en un cicle.

Per tant, el test és:

Test: G no 2–connex $\implies G$ no hamiltonià.

Equivalentment, un graf hamiltonià no té vèrtexs d'articulació:

Test: G té vèrtexs d'articulació $\implies G$ no hamiltonià.

Si un graf no passa aquest test, queda descartat automàticament com a possible graf hamiltonià.

En el cas del graf de la figura 5.4, no podem afirmar res, des del punt de vista d'aquest test, sobre si el graf és hamiltonià o no, ja que és 2–connex. En canvi, si considerem els grafs de la figura 5.5, aleshores, atès que no són 2–connexos, podem afirmar que no són hamiltonians.

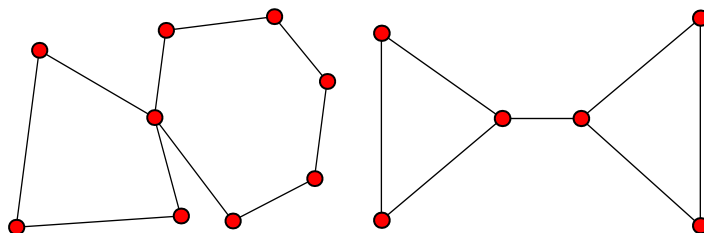


Figura 5.5

5.3.4 Cada vèrtex contribueix amb 2 arestes...

Suposem que el graf $G = (V, A)$ és hamiltonià, i sigui C un cicle hamiltonià. Aquest cicle conté tots els vèrtexs i cada vèrtex del graf aporta al cicle C exactament 2 arestes, de manera que de forma més precisa podem escriure, si considerem C com a graf, que $g_C(v) = 2$. Un cop “aportades” dues arestes, les altres arestes incidents que pugui tenir el vèrtex ja no poden ser del cicle C (per descomptat, en podrien ser d'un altre) i, per tant, s'han de descartar (per a C).

En un graf en el qual busquem obtenir algun cicle hamiltonià, una propietat que es pot utilitzar és que, com a conseqüència dels arguments anteriors i de l'estructura circular, les arestes d'un vèrtex de grau 2 han de ser necessàriament incloses en *tot* cicle hamiltonià, cosa que ens pot proporcionar les primeres peces per a una construcció progressiva d'un cicle, si n'hi ha, ja que així obtenim arestes que, si hi ha algun cicle hamiltonià, hi han de ser incloses forçosament.

La inclusió obligada de les arestes de vèrtexs de grau 2 també pot ser útil quan es tracta de veure que no hi ha cicles hamiltonians. Se suposa que n'existeix algun, que ha d'incloure necessàriament les arestes incidents a vèrtexs de grau 2 i s'intenta arribar a alguna contradicció.

Vegem-ne un exemple d'aplicació.

Estudieu si és o no hamiltonià el graf de la figura 5.6, amb les arestes etiquetades per a referència.

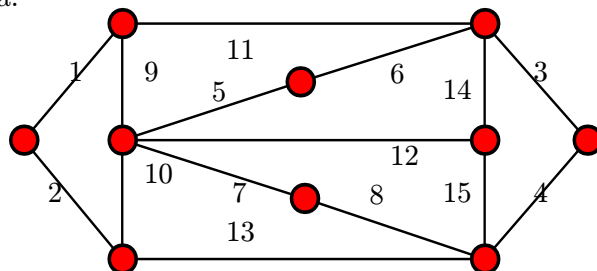


Figura 5.6

Suposem que el graf sigui hamiltonià. Sigui C un cicle hamiltonià. Aleshores aquest cicle ha de contenir les arestes incidents als vèrtexs de grau 2. Per tant, hi han de ser incloses necessàriament les arestes 1,2,3,4,5,6,7,8. Podem arribar a contradicció per diverses vies a partir d'aquí.

Vegem-ne una. La inclusió de les arestes 3,6 força l'exclusió del cicle C de les arestes 11,14, ja que el vèrtex comú al qual són incidents només hi pot aportar 2 arestes. L'exclusió de l'aresta 11 produeix la inclusió de la 9, ja que el vèrtex extrem comú de les arestes 1,9,11 hi ha d'aportar 2 arestes al cicle C . Ara bé, la inclusió de la 5,7 produeix l'exclusió de les arestes 10,12,9. Per tant, s'arriba a l'absurd que l'aresta 9 és inclosa i exclosa al mateix temps. En conseqüència, no pot haver-hi cap cicle hamiltonià.

5.4 Trobar cicles hamiltonians: el graf del dodecàedre és hamiltonià

Aplicar les idees anteriors pot ser útil per obtenir cicles hamiltonians concrets.

Obtindrem ara un cicle hamiltonià, provant, doncs, que el graf del dodecàedre és hamiltonià.

La idea essencial és tenir en compte que si existeix un cicle hamiltonià, cada vèrtex aporta al cicle exactament 2 arestes. Això produeix en el procés d'obtenció d'un possible cicle una cascada d'inclusions i d'eliminació d'arestes per a l'hipotètic cicle que es va construint. En efecte, si d'un vèrtex han quedat dues arestes incidents seleccionades, la resta s'han d'eliminar, ja que no poden pertànyer a cap cicle hamiltonià que contingui les altres dues. Ara bé, l'eliminació d'aquestes pot fer que s'hagin d'incloure arestes

incidentes als altres extrems de les eliminades.

El cicle hamiltonià que construïrem (si finalment tenim èxit!) contindrà tots els vèrtexs. Per tant, no representa cap inconvenient prendre com a punt de partida el vèrtex blanc de la figura 5.7. Aquest vèrtex aporta dues arestes al cicle hamiltonià que s'està construint, i per a això hi ha 3 possibilitats. En aquest cas, escollim les dues indicades a la figura 5.7 (subfigura dreta), cosa que significa que estem buscant cicles hamiltonians que continguin aquestes arestes. Altres decisions en aquest punt ens portarien a buscar un altre tipus de cicles hamiltonians.

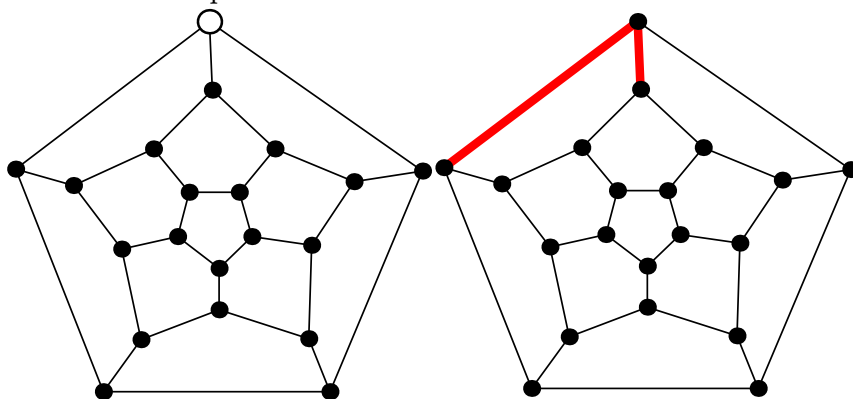


Figura 5.7

L'elecció de les dues anteriors arestes força l'eliminació de la tercera adjacent al vèrtex, ja que no podrà pertànyer a cap cicle hamiltonià que contingui les altres dues, com es veu a la figura 5.8 (subfigura esquerra). Però aleshores això força la necessària inclusió al cicle final, si existeix, de les dues arestes addicionals que es mostren a la figura 5.8 (subfigura dreta).

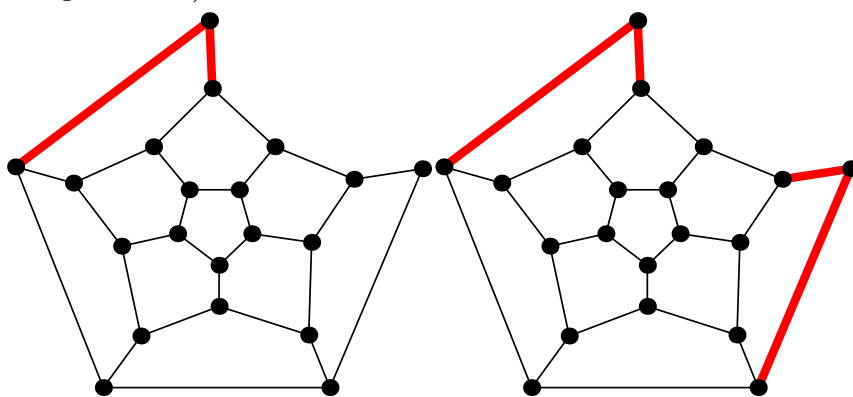


Figura 5.8

A la figura 5.9 (esquerra) prenem una decisió sobre quina nova aresta incorporarem. Hi ha una altra possibilitat, però aleshores això ens portaria a una nova ramificació, en la qual, si hi hagués èxit, obtindríem tipus diferents de cicles hamiltonians. En tot cas,

aquesta decisió força l'eliminació de la tercera aresta incident (subfigura dreta).

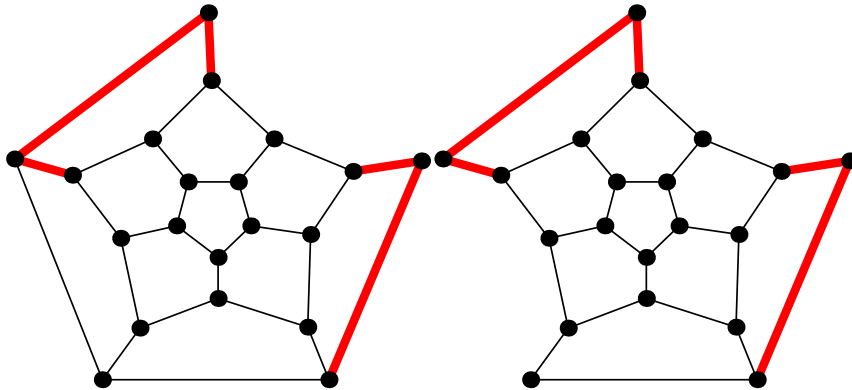


Figura 5.9

Com es mostra a la figura 5.10, la decisió anterior força la incorporació de dues noves arestes (subfigura esquerra) i, com a conseqüència, l'exclusió d'una aresta (subfigura dreta).

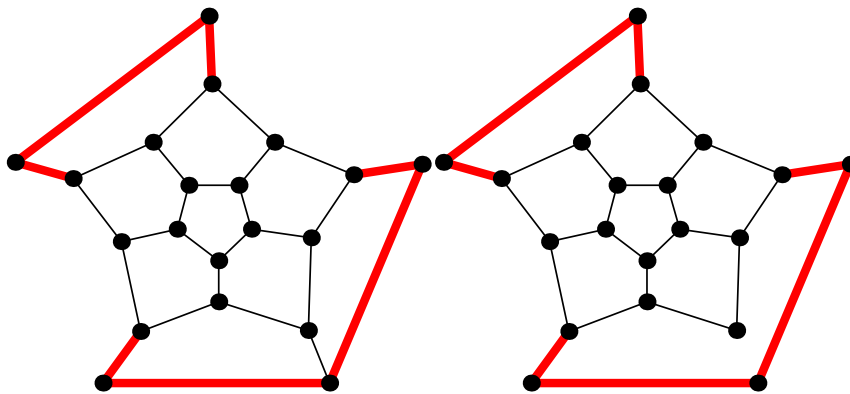


Figura 5.10

La decisió anterior propicia la incorporació de dues noves arestes, com es veu a la subfigura esquerra de la figura 5.11. A la subfigura dreta prenem una decisió d'incorporació d'una aresta, entre les dues possibles.

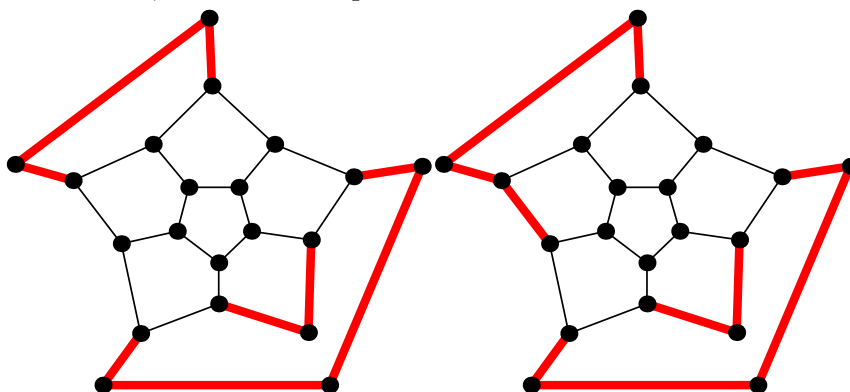


Figura 5.11

L'elecció anterior força l'eliminació d'una aresta, cosa que força la incorporació de dues noves arestes, com es veu a la figura 5.12.

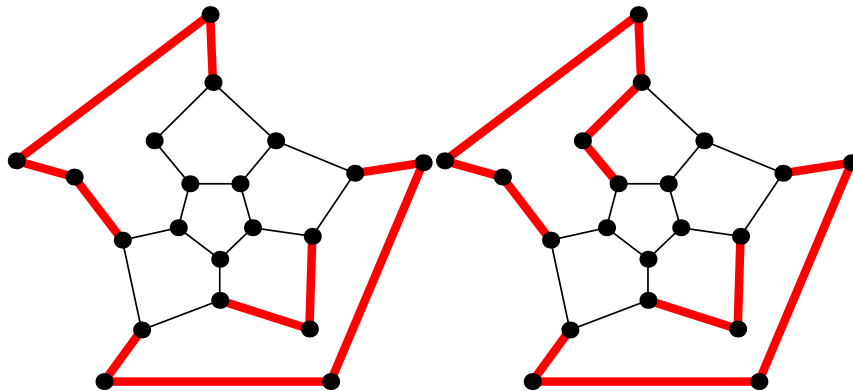


Figura 5.12

A partir d'aquest moment, tot el procés és similar al que s'ha seguit fins aquí.

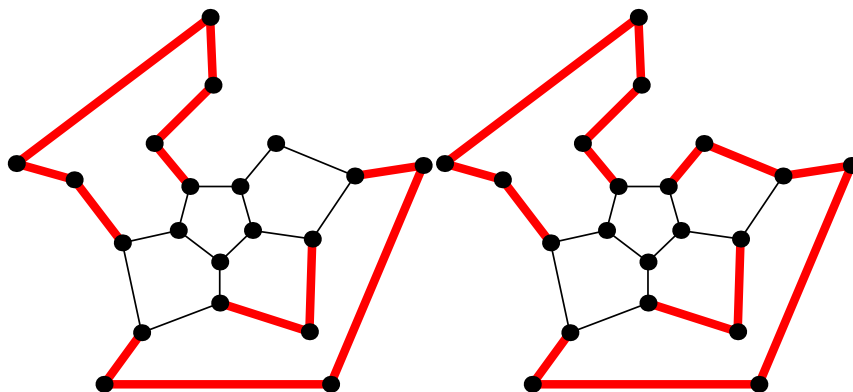


Figura 5.13

Segueix el procés "automàtic" d'inclusió i exclusió d'arestes.

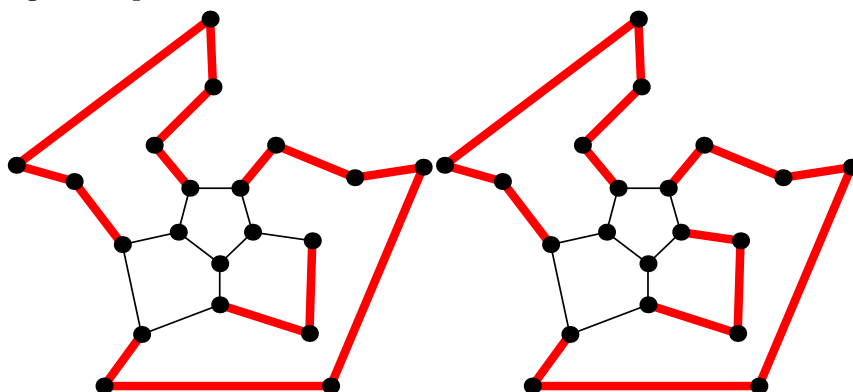


Figura 5.14

En aquest punt, a la figura 5.15 (dreta) prenem una decisió d'inclusió d'una nova aresta,

d'entre dues possibilitats.

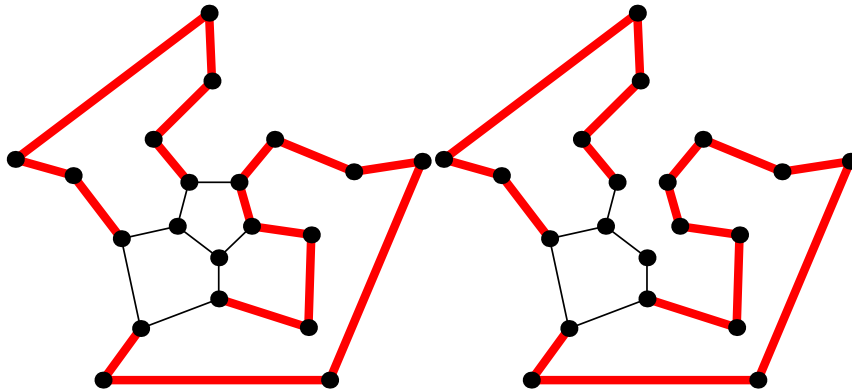


Figura 5.15

A partir d'aquí, tot el procés acaba automàticament, amb inclusions i exclusions d'arestes en cascada.

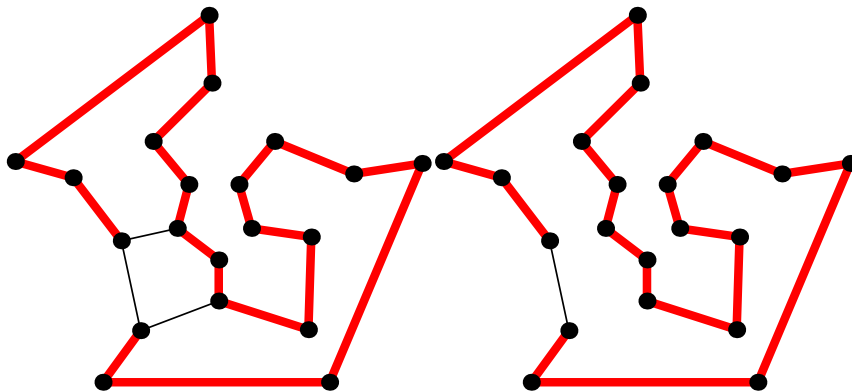


Figura 5.16

Mostrem a la figura 5.17 el resultat final del procés, que demostra que existeix un cicle hamiltonià (obtingut de manera efectiva) i això prova, al mateix temps, que el graf és hamiltonià. A la subfigura dreta tenim la superposició amb el graf original.

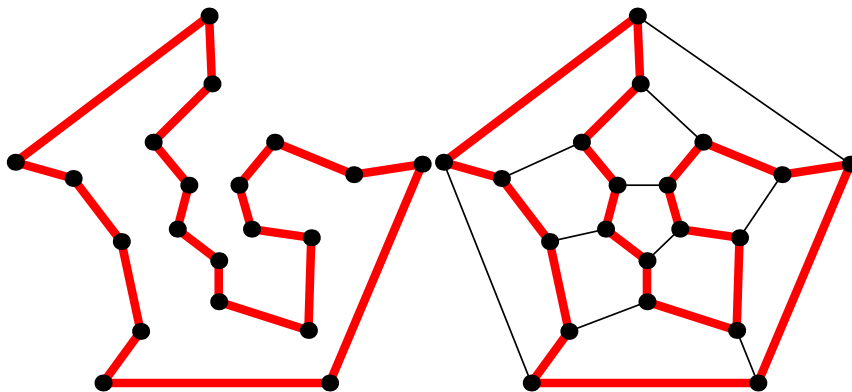


Figura 5.17

A la figura 5.18 es mostren els vèrtexs en els quals s'han pres decisions d'inclusió d'arestes (inici de bifurcacions). Altres decisions ens haurien portat a d'altres possibles cicles hamiltonians, cosa que podria ser la base d'una estratègia per obtenir-ne de forma sistemàtica en exemples concrets. En altres exemples ens poden portar també a atzucacs, cosa que demostra que no existeixen cicles hamiltonians que continguin les arestes que s'han anat escollint.

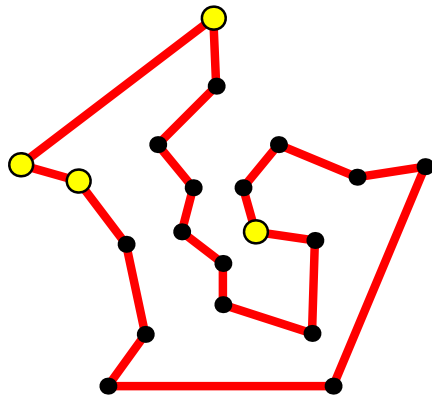


Figura 5.18

5.4.1 Si tenim la sort que sigui bipartit...

En el cas d'un graf del qual hem d'esbrinar si és o no hamiltonià, si és bipartit, en alguns casos podem utilitzar al nostre favor aquesta propietat.

Suposem que el graf $G = (V, A)$ sigui bipartit, i concretament sigui (V_1, V_2) -bipartit. Suposem que és hamiltonià. Això significa que tots els vèrtexs estan distribuïts en un cicle. Ara bé, un cicle és bipartit o 2-acolorible si i només si l'ordre és parell i, en aquest cas, el nombre de vèrtexs de cada color coincideix. Si el cicle és bipartit, aleshores $|V_1| = |V_2|$.

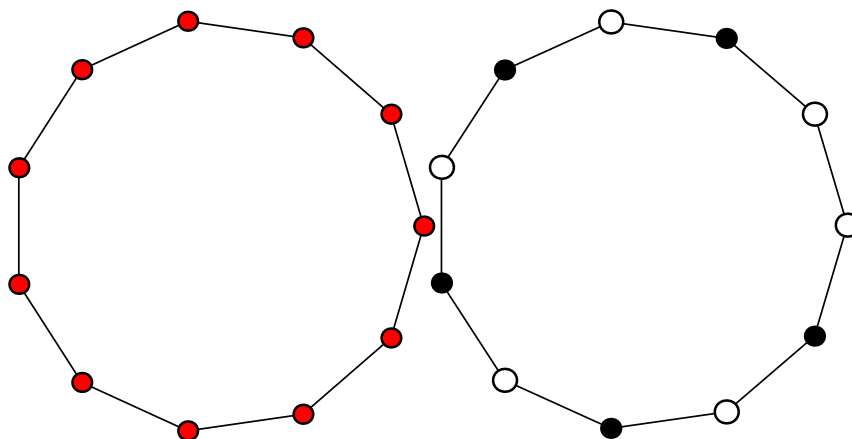


Figura 5.19

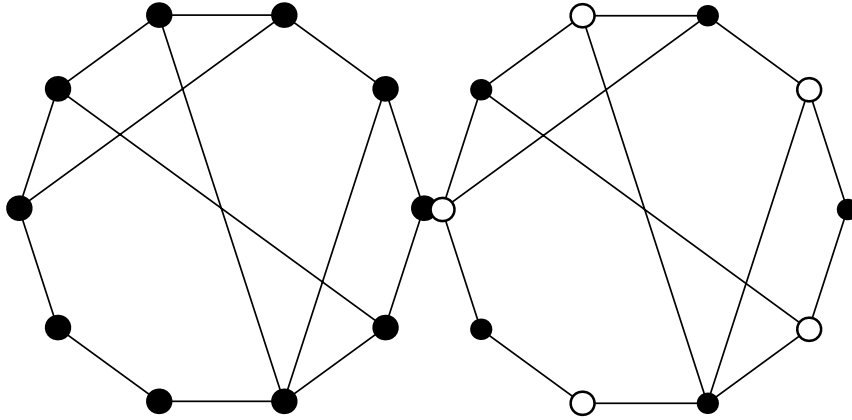


Figura 5.20

A la pràctica, és fàcil saber si un graf és bipartit: intentem biacolorir-lo. Això és possible si i només si és bipartit. Només ens resta comparar els cardinals dels vèrtexs d'un color ($|B|$, blanc, per exemple) i els de l'altre ($|N|$, negre, per exemple). Si coincideixen, no podem afirmar res sobre el graf des del punt de vista de la hamiltoneïtat. En canvi, *si no coincideixen, ja podem afirmar que el graf no és hamiltonià*.

Com a exemple, estudiem si el graf de la figura 5.21 és hamiltonià.

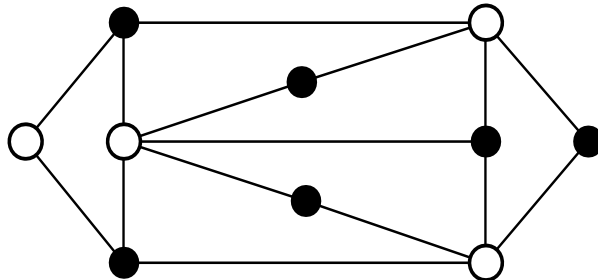


Figura 5.21

Observem que es pot 2-acolorir, com es veu a la figura 5.21. Sigui B el conjunt de vèrtexs blancs i N el conjunt de vèrtexs negres. Si fos hamiltonià hauria de ser $|B| = |N|$. Ara bé, en aquest cas, $|B| = 4$, $|N| = 6$. Per tant, no és hamiltonià.

5.4.2 Treure vèrtexs i comptar els components connexos

Indiquem per $c(G)$ el nombre de components connexos d'un graf. Observem que, en un cicle C l'eliminació de k vèrtexs mai produeix un nombre de components connexos estrictament superior a k . En alguns casos no es produeix ni tan sols desconnexió. De manera que si $F \subset V(C)$ és el conjunt de vèrtexs que s'elimina, tenim que $c(C - F) \leq$

$|F|$.

Si un graf $G = (V, A)$ és hamiltonià, aleshores tots els vèrtexs estan en un cicle C . L'eliminació d'un conjunt F de vèrtexs de G és tal que $c(G - F) \leq |F|$, ja que tots els vèrtexs són del cicle. Per tant, si en un graf podem trobar un conjunt F de vèrtexs tal que la seva eliminació produeixi un nombre estrictament superior de components connexos que el cardinal de F , és a dir, $c(G - F) > |F|$, ja podem afirmar que el graf no és hamiltonià.

Considerem com a exemple el cas del graf G de la figura 5.22, del qual volem estudiar si és hamiltonià.

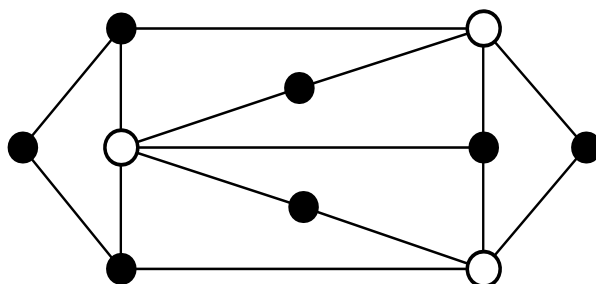


Figura 5.22

Escollim com a conjunt F , conjunt dels vèrtexs que volem eliminar, els vèrtexs que estan indicats en blanc. Aleshores tenim $|F| = 3$ i, en canvi, $c(G - F) = 5$. Atès que $c(G - F) > |F|$, G és no hamiltonià.

5.4.3 Conjunts independents de vèrtexs

Sigui $G = (V, A)$ un graf. Un subconjunt $S \subset V$ es diu que és un subconjunt *independent* de vèrtexs si els vèrtexs de S són dos a dos no adjacents, és a dir, $x, y \in S \implies x \not\sim y$.

Si el graf G és hamiltonià, aleshores tots els vèrtexs estan en un cicle C i serà, per tant, $V(C) = V(G)$. Atès que és un cicle, necessitem el mateix nombre d'arestes, és a dir, $|A(C)| = |V(C)| = |V(G)|$. La idea consisteix a veure que no hi ha prou arestes per formar el cicle, és a dir, que hi ha un nombre d'arestes disponibles estrictament inferior al necessari. D'aquesta manera es pot concloure que el graf és no hamiltonià.

Donat un vèrtex $u \in V$, és $g(u) \geq 2$, en el cas 2-connex. Per cada vèrtex es poden descartar $g(u) - 2$ arestes, ja que només pot contribuir al cicle amb exactament 2 arestes. La resta no pot ser-hi, tot i que no podem afirmar quines queden descartades, sinó que només sabem quantes són les que s'han de descartar. El problema seria que, en descartar arestes incidents a dos vèrtexs, no poguéssim garantir que no es descarten repetidament, com pot passar en el cas d'adjacència, depenent del graf concret. Això només es pot garantir si els vèrtexs són no adjacents. Però això és precisament el que ocorre en conjunts independents de vèrtexs: tenim la garantia que una mateixa aresta

no es descarta dues vegades, una vegada per cada vèrtex extrem.

Aleshores, el nombre d'arestes descartades és $D = \sum_{u \in S} (g(u) - 2)$. Per tant, el nombre d'arestes disponibles per formar cicle és $|A| - D$. I ha de ser, perquè es pugui formar, $|A| - D \geq |V|$. Si $|A| - D < |V|$, ja podem afirmar que el graf no és hamiltonià.

Per aquest motiu interessa considerar vèrtexs de graus alts.

Atès que volem poder descartar el màxim nombre d'arestes, l'estratègia haurà de consistir a escollir el màxim nombre de vèrtexs, i vèrtexs del màxim grau possible. En els casos pràctics, quan ambdues coses no siguin possibles, s'haurà d'establir un cert compromís entre els dos criteris. Resulta inútil (però innocu) incloure vèrtexs de grau 2 en conjunts independents de vèrtexs, ja que no donen lloc a descartar cap aresta.

Considerem com a exemple el cas del graf G de la figura 5.23, del qual volem estudiar si és hamiltonià.

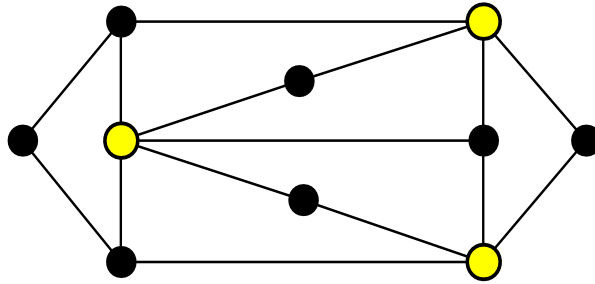


Figura 5.23

Suposem que G és hamiltonià, i sigui C un cicle hamiltonià. Recordem que $V(C) = V(G) = 10$.

Escollim com a conjunt independent de vèrtexs els que estan acolorits amb color clar. Hem intentat incloure el nombre màxim de vèrtexs dels graus més alts. Hi ha un vèrtex de grau 5: podem (i hem de) descartar 3 arestes d'entre les que li són incidents. Hi ha 2 vèrtexs de grau 4: de cada un d'ells hem de descartar 2 arestes. Per tant, el nombre d'arestes (com a mínim) que no poden formar part de qualsevol cicle hamiltonià és $D = |A| - 3 - 2 - 2 = |A| - 7 = 15 - 7 = 8$. Ara bé, hi haurà prou arestes disponibles per formar cicle? Si hi hagués un cicle hamiltonià C , hauria de tenir 10 vèrtexs. Atès que en un cicle el nombre de vèrtexs i d'arestes coincideix, és $|A(C)| = 10$, però aleshores això és impossible, ja que només hi ha 8 arestes disponibles per formar cicle.

Per tant, el graf G no és hamiltonià.

No sempre es pot escollir un conjunt independent de vèrtexs amb el qual es pugui arribar a alguna conclusió.

5.5 Quan tots els mètodes són inaplicables: el graf de Petersen no és hamiltonià

Vegem un exemple en el qual fallen tots els mètodes indicats fins aquí.

En el cas del graf de Petersen no podem aplicar cap dels mètodes anteriors. En efecte, és 2-connex, no és bipartit, no podem trobar un nombre convenient de vèrtexs, l'eliminació dels quals produeixi un nombre superior de components connexos, i no podem trobar cap conjunt de vèrtexs independent que permeti arribar a una conclusió negativa.

L'únic mètode que ens resta és veure que no existeix cap cycle hamiltonià, utilitzant el fet que, si n'existís un, tot vèrtex hauria de "col·laborar-hi" amb dues arestes exactament.

Suposem que existeix algun cycle hamiltonià C . Recordem que ha de contenir tots els vèrtexs. Centrarem la nostra anàlisi inicialment en el vèrtex destacat de la figura 5.24.

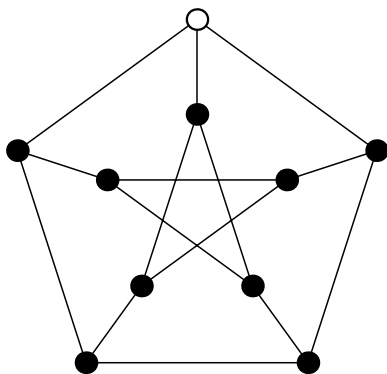


Figura 5.24

Si el cycle hamiltonià C contingués les arestes seleccionades (de gruix superior) de la figura 5.25, aleshores la tercera aresta no podria formar part del cycle C . Aquesta possibilitat (*cas 1*) és la que analitzarem, i arribarem a la conclusió que no hi pot haver cap cycle hamiltonià que contingui aquestes dues arestes.

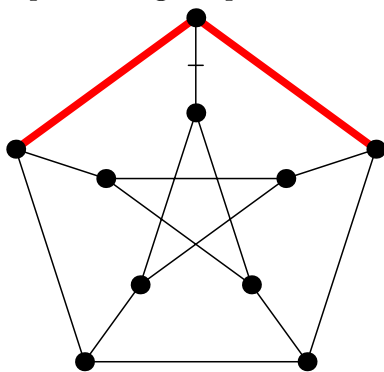


Figura 5.25

Naturalment, això no demostra que no n'hi pugui haver un altre que contingui una de les altres dues parelles. Això correspondria a dos casos més, cas 2 i cas 3, que són

els que es mostren a la figura 5.26. Per raons de simetria, aquí ens podríem limitar a estudiar-ne només un. Ara bé, seria repetitiu respecte del cas 1, i no en farem aquí l'anàlisi, totalment similar. Tanmateix, pot fer-ho el lector. Avancem, però, que el resultat és similar: no hi ha cap cicle hamiltonià que correspongui a la tipologia dels casos 2 i 3. Com que això esgota totes les possibilitats, la conclusió és que no hi ha cap cicle hamiltonià en el graf de Petersen. Per tant, el graf de Petersen no és hamiltonià.

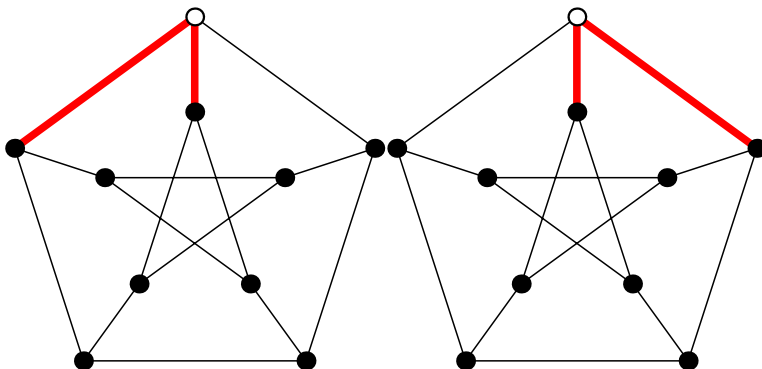


Figura 5.26

En els esquemes que segueixen indicarem les arestes que es van seleccionant amb traç gruixut, i les eliminades amb línia discontinua.

Tornant a l'anàlisi del cas 1, la inclusió de les dues arestes força l'exclusió de la tercera, cosa que al seu torn força la inclusió de les altres dues seleccionades a la dreta de la figura 5.27.

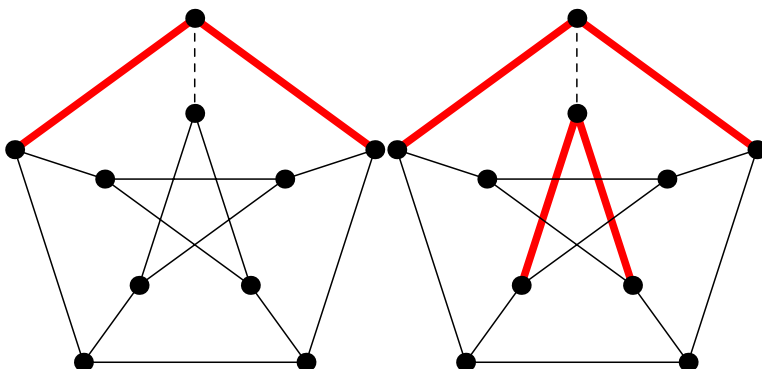


Figura 5.27

En aquest moment prenem una decisió d'inclusió d'una aresta, com es mostra a la figura 5.28. Aquesta decisió ens porta a estudiar el subcas 1a, i l'altra decisió portaria a estudiar el subcas 1b. No seguirem per aquesta segona ramificació, tot i que òbviament s'ha de fer: ja avancem que s'arriba a una contradicció, cosa que pot comprovar el

lector.

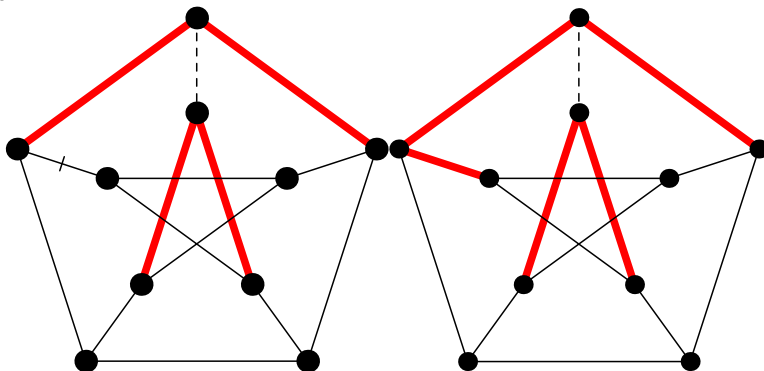


Figura 5.28

La decisió anterior (subcas 1a) porta a la corresponent cascada d'exclusions i d'inclusions d'arestes (figura 5.29).

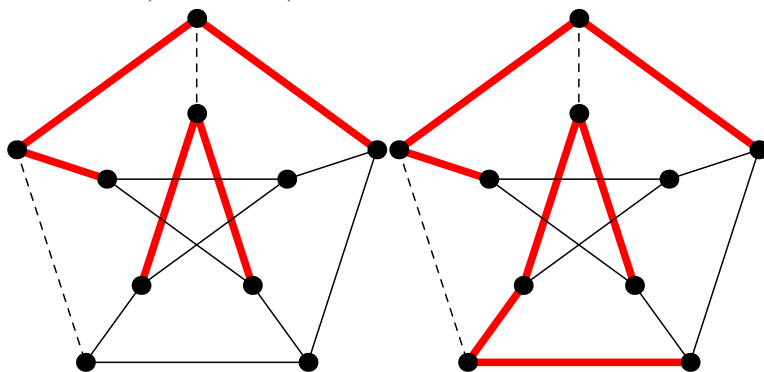


Figura 5.29

Això ens porta a una nova exclusió obligada, que força a una posterior inclusió, com es veu a la figura 5.30.

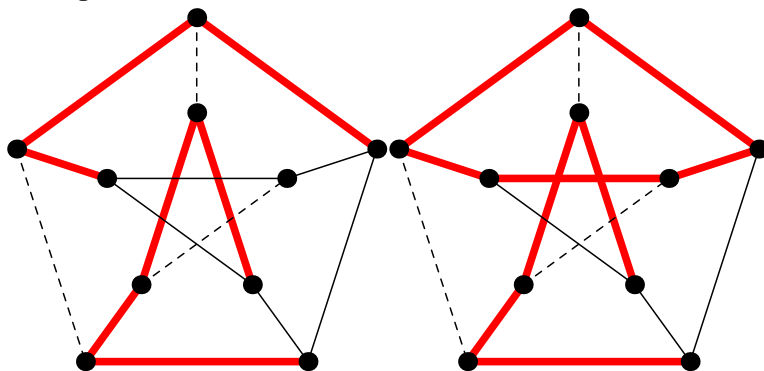


Figura 5.30

El resultat final és que el "cicle" C és reunió de dos cicles, cosa que és contradictòria

(figura 5.31).

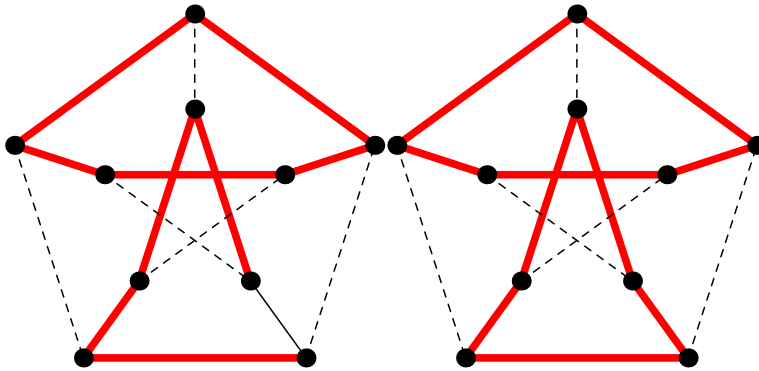


Figura 5.31

Per tant, no hi ha cap cicle hamiltonià de la tipologia cas 1 - subcas 1a. Anàlogament és veuria que les altres bifurcacions en la casuística tampoc no aportarien cap cicle hamiltonià.

5.6 Problemes diversos

Problema 5.6

Sigui G un graf amb dos vèrtexs no adjacents de grau 3 i la resta de grau menor o igual que 2. Proveu que no és hamiltonià.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ i siguin $u, v \in V$ tal que $g(u) = g(v) = 3$.

Pel lema de les encaixades,

$$2|A| = \sum_{y \in V} g(y) = 3 + 3 + \sum_{i=3}^n x_i \leq 3 + 3 + 2(n - 2) = 2 + 2n,$$

aplicant que els graus x_i dels vèrtexs diferents de u, v són $x_i \leq 2$. Per tant, $|A| \leq n + 1$.

Si existís un cicle hamiltonià C , aleshores hauria de contenir exactament 2 arestes incidents a cada vèrtex; la resta d'arestes no hi són, i això ho podem afirmar en particular per a u, v . Per tant, atès que u, v no són adjacents, podem eliminar $(g(u) - 2) + (g(v) - 2) = 2$ arestes, que amb tota seguretat no poden pertànyer al cicle C . De manera que queden disponibles per formar el cicle C un nombre d'arestes $|A| - 2$; ara bé, $|A| - 2 \leq (n - 1) - 2 = n - 1$.

Amb aquest nombre d'arestes no es pot formar el cicle C d'ordre n , que requereix exactament n arestes.

Per tant, no és hamiltonià.

Problema 5.7

Estudieu, pel màxim de mètodes possibles, si el graf de la figura 5.32 és hamiltonià.

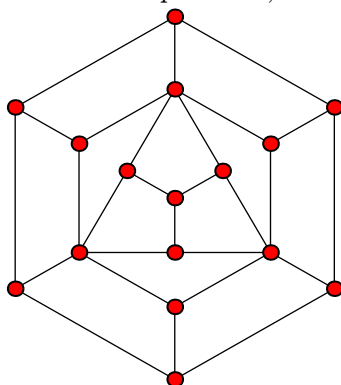


Figura 5.32

Resolució

Vegem com, en aquest exemple, es pot arribar a la conclusió que el graf no és hamiltonià per pràcticament tots el mètodes descrits. No és necessàriament així en tots els casos. Naturalment, amb un mètode n'hi ha prou!

S'observa en primer lloc que el graf és 2-connex. Podria ser, doncs, en principi, hamiltonià.

Mètode 1: És bipartit?

Una de les primeres coses que podem fer és veure si el graf és bipartit. A la figura 5.33 es mostra clarament que, en efecte, el graf és bipartit. Per argumentacions que hem vist anteriorment, si el nombre de vèrtexs "blancs" és diferent del dels vèrtexs de l'altre color, no és hamiltonià. Tenim $|B| = 9$ i $|N| = 7$. El graf no és, doncs, hamiltonià.

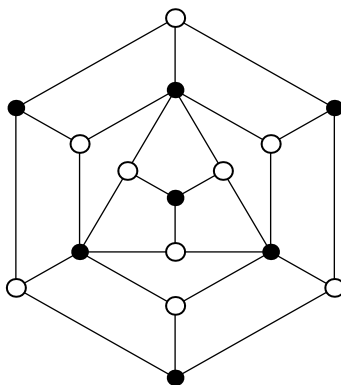


Figura 5.33

Mètode 2: Nombre de components connexos en eliminar vèrtexs.

Si es poden trobar vèrtexs adequats tals que la seva eliminació produeixi un nombre de

components connexos superior al nombre d'aquest vèrtexs, el graf no és hamiltonià. A la figura 5.34 eliminem els 6 vèrtexs blancs i es produeixen, així, 7 components connexos. El graf és, doncs, no hamiltonià.

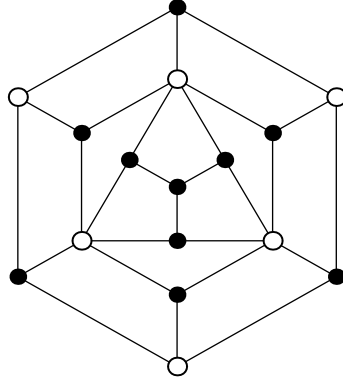


Figura 5.34

Mètode 3: Conjunts de vèrtexs independents.

Vegem que podem trobar un conjunt de vèrtexs independent que ens permeti descartar arestes (en nombre) i arribar a la conclusió que no n'hi ha suficients per formar un cicle hamiltonià. Considerem els vèrtexs blancs de la figura 5.35. Si existís un cicle hamiltonià, cada vèrtex del graf hi aportaria exactament 2 arestes. Atenent als vèrtexs d'aquest conjunt independent, es poden descartar $-3 - 3 - 3 - 1 - 1 - 1 - 1 = -13$ arestes. El graf té 27 arestes; en queden $27 - 13 = 14$ disponibles per formar un cicle hamiltonià. Ara bé, això és impossible ja que, en haver-hi 16 vèrtexs, en calen 16. Per tant, el graf no és hamiltonià.

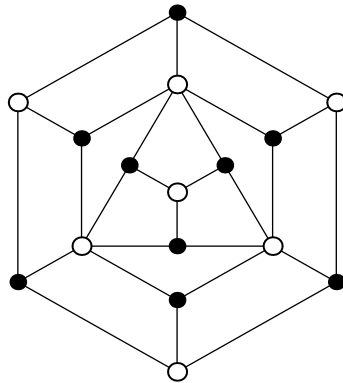


Figura 5.35

Mètode 4: Cada vèrtex aporta exactament dues arestes a un cicle hamiltonià.

Es tracta de provar que no hi pot haver cicles hamiltonians pel procediment d'incloure, per a cada vèrtex, exactament dues arestes en un hipotètic cicle hamiltonià i produir, així, una seqüència d'incorporacions i exclusions d'arestes al cicle, per arribar finalment a la conclusió que no n'hi pot haver cap.

No farem una discussió completa, que deixem per al lector. A les figures 5.36 i 5.37

mostrem una seqüència d'inclusions i exclusions en cascada. Les arestes de traç gruixut seran les arestes incloses, les marcades en seran les excloses.

Considerem el vèrtex w . Si pertany a algun cicle hamiltonià, hi aporta exactament 2 arestes. N'escollim dues, les de traç gruixut (subfigura esquerra de la figura 5.36) i, de fet, anem a provar que no hi ha cap cicle hamiltonià que les contingui. S'hauria de provar el mateix per a les altres dues eleccions restants possibles, però, en aquest cas, ens ho podem estalviar per raons de simetria.

L'elecció d'aquestes arestes força l'exclusió de la tercera aresta incident amb w i la inclusió de dues arestes més (subfigura central). A la subfigura dreta efectuem una elecció, la de l'aresta a , una de les dues alternatives possibles. El lector analitzarà l'altra alternativa. Acabarem demostrant, doncs, que no hi ha cicles hamiltonians contenint les tres arestes escollides fins ara.

Hem d'excloure l'aresta b per evitar que es formi un cicle, ja que en cas contrari no tindriem un cicle hamiltonià.

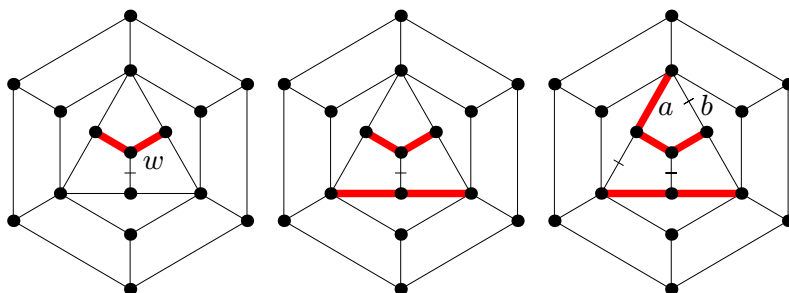


Figura 5.36

A la figura 5.37 es veu la seqüència derivada d'inclusions i exclusions d'arestes al cicle hamiltonià que ens porta a la contradicció d'un cicle "hamiltonià" que no conté tots els vèrtexs.

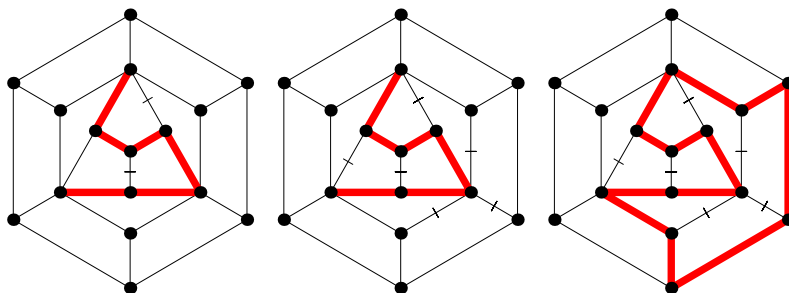


Figura 5.37

El lector completarà l'anàlisi amb l'estudi de les diverses alternatives.

Estudieu si el graf de la figura 5.38 és hamiltonià.

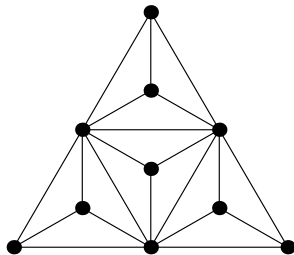


Figura 5.38

Resolució

Observem que el graf és 2-connex i, per tant, no s'exclou la possibilitat que sigui hamiltonià. En aquest cas, tampoc no és bipartit, com es pot veure fàcilment, atès que té cicles C_3 , de longitud senar. També es pot veure que no existeix cap conjunt independent de vèrtexs que ens permeti arribar a la conclusió de no-hamiltonicitat.

Estudiem si podem aplicar el mètode dels components conexas. Observem a la figura 5.39 que l'eliminació dels 3 vèrtexs blancs produeix un nombre superior de components conexas (4). Per tant, el graf no és hamiltonià.

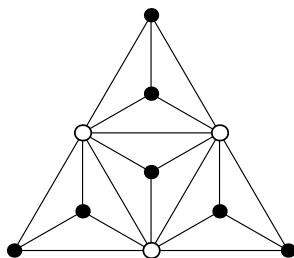


Figura 5.39

A la figura 5.40 es presenta un nou graf modificat al qual és aplicable, en canvi, el mètode dels conjunts independents de vèrtexs.

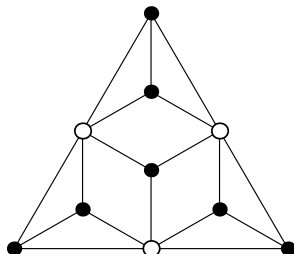
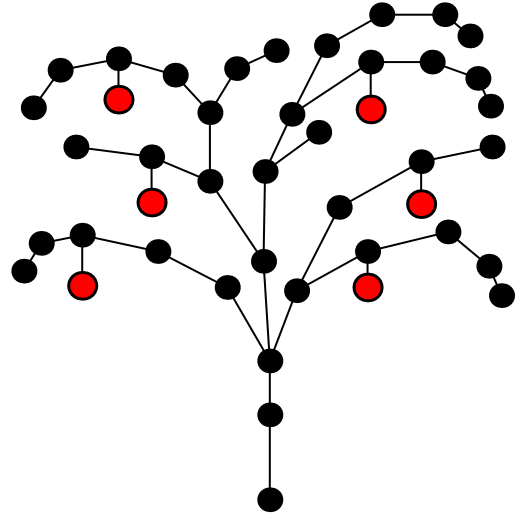


Figura 5.40

En efecte, el conjunt dels vèrtexs de color blanc és un conjunt independent, de vèrtexs de grau 5; per cada un d'ells podem descartar 3 arestes (9 en total). Hi ha 10 vèrtexs i, per tant, calen 10 arestes per formar un cicle hamiltonià. El graf té 18 arestes, de les quals se'n poden utilitzar $18 - 9 = 9$, quantitat insuficient per formar cicle. Per tant, el graf de la figura 5.40 no és hamiltonià.

Capítol 6

Arbres



6.1 Objectius

En aquest capítol es presenten problemes diversos relatius a una de les estructures més importants en teoria de grafs, especialment des del punt de vista de la connexió amb la informàtica. En primer lloc, es recorda un resultat que resumeix diverses caracteritzacions dels arbres, i posteriorment es resolen problemes que s'enuncien en termes d'arbres i d'altres que no són explícitament problemes d'arbres, però que es poden resoldre amb el concurs de resultats provinents de la teoria d'arbres.

6.2 Preliminars teòrics i exemples

El graf $T = (V, A)$ és un *arbre* si és *connex* i *acíclic* (és a dir, no té cicles). Un *bosc* és una reunió d'arbres o bé, simplement, un graf acíclic.

Indiquem aquí un resultat de caracterització d'arbres:

Teorema 6.1 *Sigui $T = (V, A)$ un graf d'ordre $n = |V|$. Són equivalents:*

1. *T és connex i acíclic (és a dir, no té cicles).*
2. *T és acíclic i $|A| = n - 1$.*
3. *T és connex i $|A| = n - 1$.*
4. *T és connex i cada aresta és aresta-pont.*
5. *Hi ha un únic camí $x - y$ per a cada parella de vèrtexs $x, y \in V(T)$.*

6. T no té cicles i amb l'afegiment d'una aresta es crea un únic cicle.

A continuació, se'n fan alguns comentaris.

La primera de les propietats és la que usualment es prenen com a definició d'arbre. Qualsevol de les altres és equivalent i podrien ser preses, un cop vista l'equivalència, com a definicions d'arbre.

Un dels resultats més útils de la teoria d'arbres és que *si un arbre és d'ordre n , aleshores té $n - 1$ arestes*, la mínima quantitat d'arestes possible per mantenir la connexió. Tota aresta d'un arbre és aresta-pont, ja que no pertany a cap cicle. Si afegim una aresta a un arbre, deixa de ser-ho. Un altre resultat que també és molt utilitzat és el que garanteix l'existència d'un *mínim de 2 fulles* per a tot arbre amb un mínim de dos vèrtexs. Una *fulla* és un vèrtex de grau 1.

Un resultat que també pot ser útil és la caracterització dels trajectes T_n com els grafs connexos amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$, que s'ha vist anteriorment (secció 4.3).

Un graf és connex si, i només si, *admet algun arbre generador*.

6.2.1 Aplicació del teorema de caracterització

Tot i que al llarg del capítol veurem aplicades les diverses caracteritzacions d'arbres, vegem-ne a continuació alguns exemples.

Problema 6.1

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex amb seqüència de graus $4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$. Proveu que és un arbre. Obteniu tots els arbres amb aquesta seqüència de graus, llevat d'isomorfisme.

Resolució

En aquest cas, l'ordre és $n = 14$. Calculem el nombre d'arestes aplicant el lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 4 \cdot 4 + 10 = 26$, és a dir, $|A| = 13$. Ara bé, és justament $|A| = n - 1$. Com que és connex, apliquem la propietat (3) de la caracterització per justificar que és un arbre.

Al marge de la qüestió anterior, aprofitarem per obtenir tots els arbres amb la seqüència de graus anterior.

Analitzem en quina configuració podem trobar els vèrtexs de grau 4. Considerem un vèrtex w_0 de grau 4, qualsevol però fixat, sense que això signifiqui pèrdua de generalitat, com es veurà en les argumentacions.

Els grafs que s'han de construir han de ser connexos. A més, no hi pot haver cicles, condició que en guia la construcció.

Hi ha diverses possibilitats:

Cas 1. El vèrtex w_0 és adjacent als altres 3 vèrtexs de grau 4. El quart vèrtex al qual és adjacent és de grau 1. Atès que no hi pot haver cicles, hem de descartar possibles arestes entre la resta de vèrtexs de grau 4, per la qual cosa han de ser adjacents a vèrtexs de grau 1. Es pot veure que s'utilitzen tots els vèrtexs de grau 1. El graf resultant és necessàriament el de la figura 6.1 (subfigura esquerra).

Cas 2. El vèrtex w_0 és adjacent a exactament 2 vèrtexs de grau 4; els altres vèrtexs al qual és adjacent són necessàriament de grau 1. Atès que no hi pot haver cicles, el graf que en resulta és el de la figura 6.1 (subfigura dreta).

No hi ha realment més casos possibles, ja que si considerem la possibilitat d'un vèrtex de grau 4 adjacent a exactament 1 vèrtex de grau 4, aquesta ja és coberta pels casos 1, 2, com es pot veure a la figura 6.1.

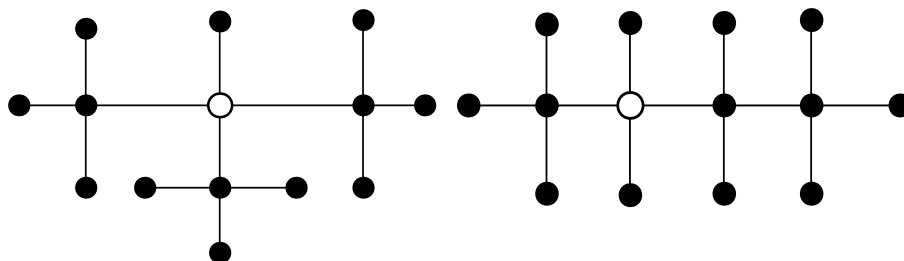


Figura 6.1

Encara ens cal comprovar que així hem produït grafes de classes d'isomorfisme diferents. Ara bé, en aquest cas és molt simple, ja que en un graf hi ha un vèrtex adjacent a 3 vèrtexs de grau 4 i a l'altre graf no hi cap vèrtex amb aquestes característiques. Per tant, hi ha essencialment 2 grafes amb les característiques de l'enunciat. El lector pot proposar una justificació més formal de la no-isomorfia.

Vegem en el problema següent, que de fet és continuació de l'anterior (tot i que l'enunciat no involucri explícitament els arbres), com s'utilitza el teorema de caracterització per extreure informació sobre el graf.

Problema 6.2

Obteniu els grafes no connexos amb seqüència de graus 44441111111111 (si n'hi ha).

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb aquestes característiques. Estudiem quines condicions

s'haurien de complir i quina estructura hauria de tenir un graf amb aquestes propietats. Si en trobem almenys un exemplar demostrarem que existeixen.

Observem que l'ordre és $n = 14$. Aplicant el lema de les encaixades podem calcular el nombre d'arestes: $|A| = \frac{1}{2}(4 \cdot 4 + 10) = 13 = n - 1$. Essent no connex, G no és arbre. Pel teorema de caracterització d'arbres, tenint en compte que $|A| = n - 1$, no pot ser acíclic. Per tant, el graf ha de contenir cicles, propietat que ens permet descartar una bona quantitat de casos i permet fer més fàcil l'estudi de les diverses configuracions possibles. També s'hauria pogut deduir el caràcter de cíclic del resultat que diu que en un graf acíclic el nombre d'arestes és $n - k$, essent k el nombre de components connexos. En aquest cas, $n - 1 = n - k$, d'on $k = 1$, la qual cosa contradiu la hipòtesi de no-connexió.

Si hi ha d'haver cicles, atès que un vèrtex de grau 1 no pot pertànyer a un cicle, han d'estar formats per vèrtexs de grau 4, en un mínim de 3. Això permet considerar diversos casos:

Cas 1. Existeix un cicle C_3 de vèrtexs de grau 4. Per al quart vèrtex de grau 4 hi ha diverses possibilitats:

1. No és adjacent a cap vèrtex de grau 4, cas en el qual formarà part d'un altre component connex. Només cal saturar els components connexos amb vèrtexs de grau 1 fins a esgotar-ne la provisió (graf G_1 de la figura 6.2).

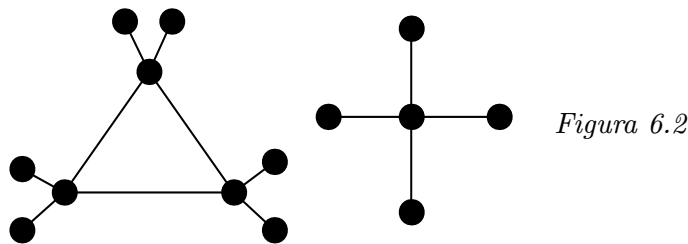


Figura 6.2

2. És adjacent a exactament un vèrtex de grau 4 (graf G_2 de la figura 6.3).

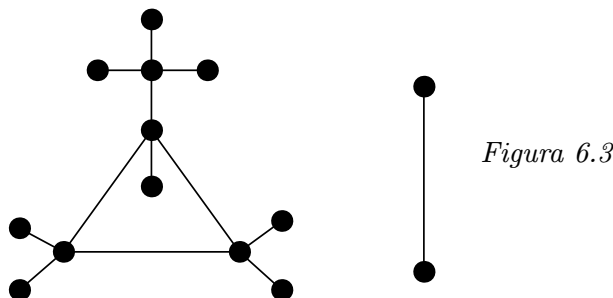
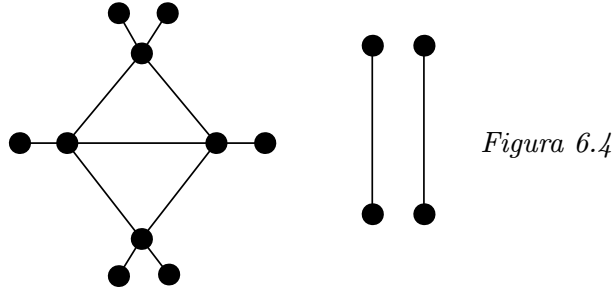
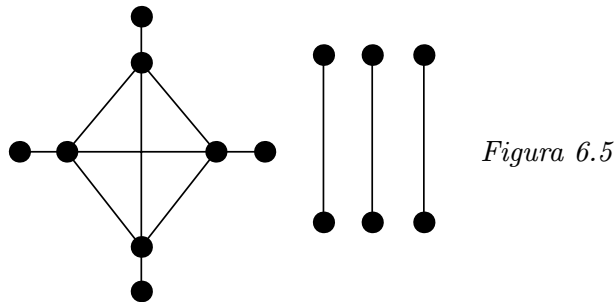


Figura 6.3

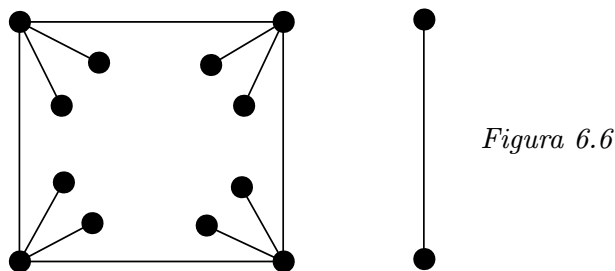
3. És adjacent a exactament 2 vèrtexs de grau 4. En aquest cas, el subgraf generat pels vèrtexs de grau 4 és $N_2 + K_2$ (graf G_3 de la figura 6.4).



4. És adjacent a exactament 3 vèrtexs de grau 4. El subgraf generat pels vèrtexs de grau 4 és K_4 (graf G_4 de la figura 6.5).



Cas2. Existeix un cicle C_4 de vèrtexs de grau 4 i cap cicle C_3 , amb la qual cosa ja queda esgotada la provisió de vèrtexs de grau 4. El subgraf generat pels vèrtexs de grau 4 és C_4 . Saturem el component corresponent amb vèrtexs de grau 1 i distribuïm la resta en altres components connexos (graf G_5 de la figura 6.6).



Queda provat que existeixen grafs amb les característiques de l'enunciat. Ara es podria

veure fàcilment que els que s'han obtingut són no isomorfs.

El graf G_4 té 4 components connexos, propietat estructural que no és compartida per cap altre. Per tant, és no isomorf a cap altre. G_3 té 3 components connexos. Per tant, tampoc no és isomorf a cap altre. G_5 no conté cap cicle C_3 , raó per la qual no és isomorf a cap dels G_1, G_2, G_3 . Només resta veure si G_1, G_2 són isomorfs. A G_2 tenim (en un component connex) dos vèrtexs de grau 1 adjacents. Per qualsevol correspondència isomòrfica f , a aquests dos vèrtexs els hauria de correspondre a G_1 una parella de vèrtexs de grau 1 també adjacents, cosa que és impossible. Per tant, no són isomorfs.

Observeu que aquest problema també es podria considerar com a exemple de l'ús de la teoria d'arbres per resoldre problemes en àmbits més generals de la teoria de grafs.

6.2.2 Existeix un mínim de dues fulles

Aquesta propietat, que es pot afirmar per a tot arbre no trivial, és a dir, amb un mínim de 2 vèrtexs, permet plantejar demostracions inductives, ja que eliminant una fulla w_0 d'un arbre T , l'existència de la qual és garantida, podem crear un graf d'ordre estrictament inferior T' , que continua essent arbre. Depenent del problema i de les propietats amb què tractem, potser podrem aplicar la hipòtesi d'inducció a T' . La figura 6.7 il·lustra aquesta idea.

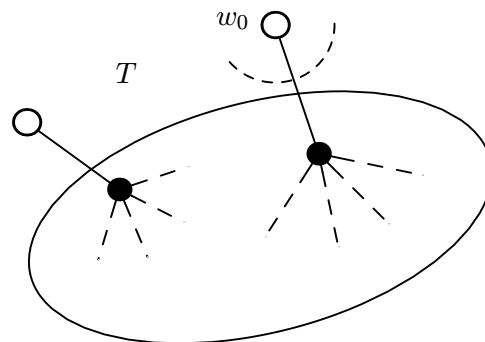


Figura 6.7

Si ens convingués, en canvi, eliminar dues fulles (l'existència de les quals és garantida), aleshores hauríem d'adoptar l'esquema inductiu de la inducció completa.

Al capítol 2, dedicat a la inducció, se n'han presentat alguns exemples. Se'n veuran d'addicionals posteriorment. Presentem-ne un exemple, però, a continuació.

També es pot utilitzar aquest resultat per facilitar l'obtenció dels graus dels vèrtexs, ja que en tenim dos com a mínim que són de grau 1. Això pot simplificar la discussió. Es pot aplicar en el lema de les encaixades.

Problema 6.3

Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$ i de grau màxim $\Delta = 2$. Proveu que és el graf trajecte T_n .

Resolució

De fet, si és T un graf trajecte i $n \geq 3$, el grau màxim és 2. Aquesta és una afirmació trivial d'establir analitzant la seqüència de graus en un trajecte.

L'afirmació no trivial és justament la de l'enunciat del problema. Vegem, doncs, $\Delta = 2 \implies T \simeq T_n$.

Sigui $T = (V, A)$, arbre amb $|V| = n$.

Mètode 1.

Tenint en compte que T és arbre, és connex. D'acord amb la caracterització dels grafs trajecte (4.3), n'hi ha prou a provar que la seqüència de graus és $1, 2, \dots, 2, 1$.

Donat que T és connex, perquè és arbre, no hi ha vèrtexs de grau 0. Per tant, els únics graus són 1 (ja que hi ha un mínim de 2 fulles) i 2, ja que hi ha algun vèrtex amb aquest grau, atès que el màxim dels graus és 2.

Siguin F el conjunt de les fulles i D el conjunt dels vèrtexs de grau 2. Tenim, doncs, la partició $V = F \cup D$ i, per tant, $n = |F| + |D|$. Hem de provar que hi ha exactament 2 fulles, és a dir, que $|F| = 2$.

Apliquem el lema de les encaixades i la propietat $|A| = n - 1$:

$$2(n - 1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in F \cup D} g(v) = \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \in D} g(v) = |F| + 2|D|.$$

Per tant, $2(|F| + |D| - 1) = |F| + 2|D|$. Simplificant, $|F| = 2$.

Mètode 2: per inducció.

Provem de demostrar la propietat per inducció sobre n . Utilitzarem que un arbre amb un mínim de 2 vèrtexs té un mínim de 2 fulles, resultat que suposarem conegut i que, com hem explicat, forma part de la teoria general d'arbres. Per contra, no serà necessària la caracterització dels grafs trajecte mitjançant la seqüència de graus de la secció 4.3.

Pas 1 (base). Donat que hi ha vèrtexs de grau 2, l'ordre és com a mínim 3. Suposem, doncs, $n = 3$. Aleshores, essent T arbre i tenint en compte l'existència d'un mínim de 2 vèrtexs de grau 1, resulta la seqüència de graus $1, 2, 1$, que correspon a T_3 .

Pas 2 (inductiu). Sigui $n \geq 4$. Considerem el nostre arbre $T = (V, A)$ d'ordre n amb $\Delta = 2$ i suposem per hipòtesi d'inducció que tot arbre d'ordre $n' = n - 1$ amb grau màxim 2 és isomorf a $T_{n'} = T_{n-1}$.

Sigui w_0 un vèrtex de grau 1 en T . Suposem que és adjacent a u_0 en T . Tenim que el grau de u_0 en T no pot ser 1 ja que, si ho fos, aleshores qualsevol dels vèrtexs que resten no es podria connectar per un camí a u_0 i el graf seria no connex. Per tant, $g_T(u_0) = 2$. Considerem $T' = T - w_0$. Aleshores resulta T' arbre d'ordre $n - 1$. Tenim que $g_{T'}(u_0) = 1$. A T' els graus dels vèrtexs són 1 o 2. Vegem que no tots són 1, amb la qual cosa estaríem en condicions d'aplicar la hipòtesi d'inducció. Si no hi hagués cap vèrtex de grau 2 a T' , tots serien de grau 1 i, atès que $n' \geq 3$, T' seria no connex. Per tant, l'estructura de T' és la de T_{n-1} , essent u_0 un dels dos vèrtexs de grau 1 en T' . Reconstruint el graf T obtenim que la seva estructura és T_n .

Mètode 3. Tornem a utilitzar, amb una argumentació diferent, el resultat que garanteix l'existència de 2 fulles si hi ha un mínim de 2 vèrtexs i la caracterització dels trajectes en termes de la seqüència de graus. Vegeu la figura 6.8.

Siguin w_1, u_1 vèrtexs de grau 1. Si $n \geq 3$, els vèrtexs w_1, u_1 no són adjacents, ja que hi hauria desconexió.

Sigui w_2 un vèrtex adjacent a w_1 ; sigui u_2 un vèrtex adjacent a u_1 . Si $n = 3$, aleshores $w_2 = u_2$ i el graf és T_3 . Sigui, doncs, $n \geq 4$; per connexió tenim $w_2 \neq u_2$ i són de grau 2, el màxim dels graus.

Per connexió existeix un $w_2 - u_2$ recorregut \mathcal{C} en T , recorregut que no conté els vèrtexs w_1, u_1 . D'acord amb la caracterització de grafs trajecte, hem de veure que la resta de vèrtexs, si $n \geq 4$, són tots de grau 2, és a dir, hem de veure que no n'hi pot haver de grau 1. Suposem que n'hi ha algun i sigui v_0 vèrtex de grau 1 de T . Per aquest motiu, no és del camí \mathcal{C} . Per connexió existeix un $v_1 - w_1$ recorregut \mathcal{D} . Si aquest recorregut no té vèrtexs en comú amb \mathcal{C} , aleshores connecta directament amb w_1 , amb la qual cosa $g(w_1) > 2$, que és contradictori. Per tant, \mathcal{C}, \mathcal{D} han de compartir algun vèrtex diferent de w_1, z_0 , que serà de grau $g(z_0) > 2$, cosa que contradiu la hipòtesi.

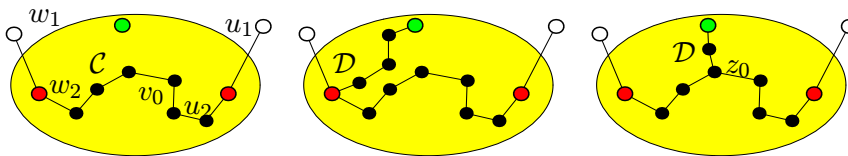


Figura 6.8

6.2.3 Aplicació de la teoria d'arbres a l'estudi de grafs

En diverses ocasions és possible utilitzar resultats d'arbres per estudiar grafs o obtenir propietats de grafs que no són arbres. Vegem-ne només una mostra.

Problema 6.4

Proveu que tot graf connex té almenys un vèrtex que no és d'articulació.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex d'ordre n . Hem de veure que existeix algun vèrtex tal que la seva eliminació no produeix desconexió del graf, és a dir, que existeix $w_0 \in V$ tal que $G' = G - w_0$ continua essent connex.

Naturalment, suposem que $n \geq 2$. El problema es podria resoldre per més d'un mètode. Ara bé, es tracta de veure aquí que podem utilitzar resultats de teoria d'arbres per obtenir propietats de grafs, en l'enunciat de les quals no es fa cap esment als arbres.

Donat un arbre d'ordre $n \geq 2$, existeix un mínim de dues fulles, és a dir, vèrtexs de grau 1, l'eliminació de les quals no produeix desconexió a l'arbre, és a dir, que el resultat continua essent connex.

Es tracta d'utilitzar aquesta propietat. Però el problema és relacionar un graf connex, que és el que tenim, amb algun arbre apropiat, per tal d'aplicar raonaments en la línia anterior. Afortunadament tenim el resultat que afirma que tot graf connex admet un arbre generador.

Sigui, doncs, $T = (V, A')$ un arbre generador de G , amb $A' \subset A$ i amb el mateix conjunt de vèrtexs que G . Sigui w_0 una fulla de T . Essent una fulla de T , $T' = T - w_0$ és connex. Vegem que és un vèrtex que no és d'articulació de G , és a dir, que $G' = G - w_0$ continua essent connex. Siguin x, y vèrtexs de G' . Són també vèrtexs de T' i, essent T' connex, existeix un $x - y$ camí en T' . Ara bé, les arestes de T' són arestes de G' i, per tant, existeix un $x - y$ camí en G' , amb la qual cosa queda provat que G' és connex. Vegeu-ne a la figura 6.9 un esquema explicatiu.

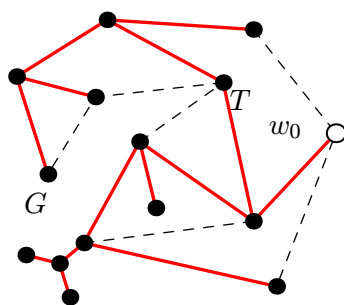


Figura 6.9

Suposant aquesta propietat, ara és possible simplificar algunes demostracions que s'han vist en altres contextos. En particular, aquelles en les quals cal garantir la conservació de la connexió quan s'elimina un vèrtex, sempre que es mantinguin les altres propietats

requerides pel problema, amb l'objectiu de poder aplicar la hipòtesi d'inducció.

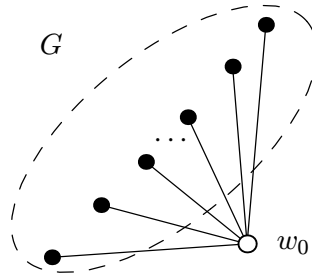


Figura 6.10

Per exemple, la demostració inductiva de la propietat que afirma que en un graf connex $G = (V, A)$ d'ordre n hi ha com a mínim $n - 1$ arestes, és a dir, $|A| \geq n - 1$, es pot simplificar sabent el resultat anterior.

Procedirem per inducció sobre n .

Pas 1 (base). La comprovació és trivial per a $n = 1$.

Pas 2 (inductiu). Suposem que $n \geq 2$. Suposem, com a hipòtesi d'inducció, que la propietat és certa per a grafs connexos amb $n - 1$ vèrtexs. Considerem el nostre graf $G = (V, A)$ d'ordre n , i sigui w_0 un vèrtex que no és d'articulació. Aleshores tenim que $G' = G - w_0 = (V', A')$ és connex i d'ordre $n - 1$, amb la qual cosa li és aplicable la hipòtesi d'inducció. Per tant, podem afirmar $|A'| \geq |V'| - 1 = (n - 1) - 1 = n - 2$. Ara bé, és $|A| = |A'| + g(w_0) \geq (n - 2) + g(w_0)$. Essent G connex, no hi ha vèrtexs de grau 0 i, per tant, és $g(w_0) \geq 1$. Substituint a la desigualtat anterior resulta $|A| \geq n - 2 + g(w_0) \geq n - 2 + 1 = n - 1$.

Problema 6.5

Proveu que un graf connex d'ordre n té, com a mínim, $n - 1$ arestes.

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex, amb $n = |V|$. Hem de demostrar que $|A| \geq n - 1$. La demostració típica d'aquest resultat és per inducció sobre n , com s'ha vist al capítol 2. Ara bé, podem utilitzar alternativament la teoria d'arbres mitjançant el resultat que afirma que en un graf connex existeix sempre un arbre generador.

Sigui $T = (V, A')$ un arbre generador de G , l'existència del qual és garantida pel resultat esmentat. Recordem que $A' \subset A$.

Essent T un subgraf generador, $V(T) = V(G)$. Essent T arbre, és $|A'| = |A(T)| = |V(T)| - 1$ i, per tant, tindrem $|A| \geq |A'| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1 = n - 1$. Per tant, $|A| \geq n - 1$.

Observem que el resultat ens indica que $n - 1$ és el mínim d'arestes requerides si hi ha d'haver connexió. Per sota d'aquest valor no hi pot haver connexió en un graf de n vèrtexs. També sabem que aquest valor mínim justament s'assoleix per als arbres. Finalment, no és condició suficient de connexió, com es pot comprovar amb $N_1 \cup K_n$, per a $n \geq 3$.

Problema 6.6

Proveu que, si un graf té tots els vèrtexs de grau igual o superior a 2, aleshores ha de contenir algun cicle.

Resolució

Considerem $G = (V, A)$ un graf amb aquesta propietat. Sigui $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 1$, la descomposició de G en reunió de components connexos. Cada un dels G_i és un graf amb la propietat de tenir els graus dels vèrtexs més grans o iguals a 2, cosa que en particular implica que cada component ha de tenir un mínim de 2 vèrtexs. Considerem un component qualsevol, per exemple G_i , que com a graf és connex, perquè és un component connex. Ara bé, recordem que un arbre amb un mínim de 2 vèrtexs té un mínim de 2 fulles, és a dir, de vèrtexs de grau 1, cosa que no es compleix per a G_i , ja que tots els vèrtexs són de grau superior o igual a 2. Per tant, G_i no pot ser un arbre. Un arbre és un graf connex i acíclic. Atès que G_i és connex, la propietat que falla és l'aciclicitat. Per tant, G_i té algun cicle, que serà també cicle de G .

Problema 6.7

Proveu que, si $G = (V, A)$ és un graf connex, amb $|V| = |A|$, aleshores G conté un únic cicle.

Resolució

En primer lloc, vegem que té algun cicle. Observem que $|A| \neq |V| - 1$ i, per tant, G no pot ser arbre. Ara bé, essent connex, ha de contenir algun cicle, ja que si fos acíclic seria arbre. Per tant, el graf conté cicles.

Vegem que només n'hi ha un. Considerem C un cicle de G i sigui $a \in A(C)$ una aresta del cicle C . L'eliminació de l'aresta a per formar el graf $G' = G - a$ manté la connexió, perquè és d'un cicle. Ara bé, pel que fa a G' , és connex i $A(G') = |A(G)| - 1 = |V(G)| - 1 = |V(G')| - 1$. Per una de les caracteritzacions dels arbres, G' és un arbre. Restituint l'aresta a tornem a obtenir el graf original $G = G' + a$. Ara bé, quan s'afegeix una aresta a un arbre es crea un únic cicle, propietat que caracteritza també els grafs que són arbres.

6.2.4 Problemes de seqüències de graus en arbres

En el cas dels arbres, els problemes típics de seqüències de graus es poden tractar amb més facilitat, ateses les propietats addicionals de l'estructura. L'existència garantida d'un mínim de 2 vèrtexs de grau 2 pot ser vital per a la resolució del problema o, com en aquest cas, pot ser útil simplement per facilitar-ne la resolució disminuint els casos que cal considerar.

Problema 6.8

Sigui T un arbre d'ordre 12. Suposem que T té exactament tres vèrtexs de grau 3 i exactament un vèrtex de grau 2.

1. Obteniu la seqüència de graus de T .
2. Trobeu dos exemples d'arbres no isomorfs amb la seqüència de graus anterior. Justifiqueu la no-isomorfia.

Resolució

Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre $n = 12$.

(1) Utilitzem el lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$. En primer lloc, com que T és un arbre, és $|A| = |V| - 1 = 12 - 1 = 11$. Essent $n \geq 2$, hi ha un mínim de 2 vèrtexs de grau 1, cosa que podem aprofitar per simplificar raonaments posteriors, tot i que no és estrictament necessari. Aleshores podem escriure, pel lema de les encaixades:

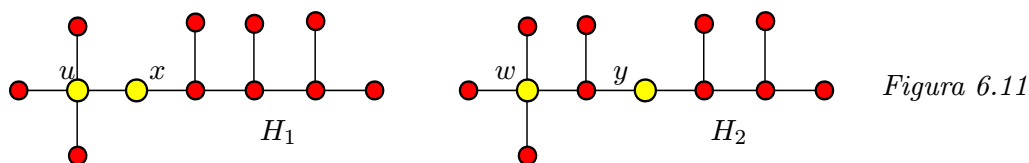
$$22 = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12},$$

on $x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ són els graus desconeguts de la resta de vèrtexs.

De la igualtat anterior resulta: $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 9$. Atès que tot arbre és connex, el grau d'un vèrtex no pot ser zero i, en conseqüència, $x_i \geq 1$, $i = 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Per hipòtesi, els graus que resten per trobar no poden ser 2,3. Per tant, o bé són 1 o bé més grans o iguals que 4. Donat que s'ha de complir la igualtat anterior, es pot veure que no tots poden ser 1; no n'hi pot haver cap més gran o igual que 5 (atès que la resta són més grans o iguals que 1). Per tant, hi ha d'haver com a mínim un vèrtex de grau 4, però no més d'un ja que aleshores no es compliria la igualtat. Només existeix, doncs, una possibilitat per als graus pendents d'obtenir: 4,1,1,1,1,1. En conclusió, la seqüència de graus és 4,2,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1.

(2) Per guiar l'obtenció d'exemplars d'arbres amb aquestes característiques (i veure, així, que n'existeix algun) podem fer construccions procurant de mantenir sempre la

connexió i evitant formar cicles, com a guia de construcció. Hi ha moltes maneres de fer-ho. Podem considerar, per exemple, el vèrtex de grau 4. No pot ser adjacent a 4 vèrtexs de grau 1, ja que aleshores es crearia un graf no connex. Estudiem si pot ser adjacent a exactament 3 vèrtexs de grau 1; el quart vèrtex ha de ser de grau 2 o 3. Hi ha diverses possibilitats, de les quals en presentem només dues, a la figura 6.11.



De manera sistemàtica, podríem obtenir fàcilment tots els grafs no isomorfs amb les hipòtesis de l'enunciat.

Vegem formalment que $H_1 = (V_1, A_1)$, $H_2 = (V_2, A_2)$ no són isomorfs. Si ho fossin, existiria una bijecció $f : V_1 \rightarrow V_2$ que, en particular, conservaria les adjacències. Ara bé, com a conseqüència, f conserva graus i això implica que la imatge de l'únic vèrtex de grau 4 de H_1 ha de ser necessàriament l'únic vèrtex de grau 4 del graf H_2 , i el mateix podem dir per als vèrtexs de grau 2. Per tant, $f(u) = w$, $f(x) = y$. Ara bé, u, x són adjacents en H_1 i, en conseqüència, $f(u), f(x)$ també ho han de ser en H_2 , és a dir, w, y han de ser adjacents en H_2 , la qual cosa és una contradicció!

Problema 6.9

Sigui T un arbre amb vèrtexs de grau 1 i 3. Calculeu el nombre de fulles en termes de l'ordre.

Resolució

Sigui $T = (V, A)$, amb $n = |V|$.

El propi enunciat suggereix considerar x_1 el nombre de fulles o vèrtexs de grau 1 i x_3 el nombre de vèrtexs de grau 3.

Aplicant el lema de les encaixades i la propietat específica d'arbres segons la qual és $|A| = n - 1$, podem escriure $2(n - 1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = x_1 + 3x_3 = x_1 + 3(n - x_1)$. Per tant, $2n - 2 = 3n - 2x_1$, d'on $x_1 = \frac{n+2}{2}$.

Problema 6.10

Quin és el nombre de vèrtexs d'un arbre que té 3 vèrtexs de grau 2, 2 vèrtexs de grau 3, 1 vèrtex de grau 4 i la resta de grau 1?

Resolució

Donat l'arbre $T = (V, A)$, tenim, per la propietat $|A| = |V| - 1$ i pel lema de les encaixades, el següent:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A| = 2(|V| - 1) = 2n - 2.$$

Si k és el nombre de fulles o vèrtexs de grau 1, és $n = 3 + 2 + 1 + k = 6 + k$. Aleshores, aplicant l'anterior, és $2(6 + k) - 2 = 2n - 2 = \sum_{v \in V} g(v) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 + k$. Resolent l'equació en k resulta $k = 6$ i, per tant, $n = 12$.

Problema 6.11

Sigui T un arbre d'ordre $n = 8$. Proveu que si T té 5 vèrtexs de grau 2, aleshores és isomorf al graf trajecte T_8 .

Resolució

Tenint en compte la caracterització de grafs trajectes, només cal provar, atès que T és connex, que la seqüència de graus és $1, 2, \dots, 2, 1$.

Sabem que si un arbre té un nombre de vèrtexs superior o igual a 2, aleshores hi ha d'haver un mínim de 2 vèrtexs de grau 1. Per tant, la seqüència de graus serà $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, x$. Per obtenir x podem utilitzar el lema de les encaixades i el fet que, per a un arbre, $|A(T)| = |V(T)| - 1 = n - 1$:

$$2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + x = \sum_{v \in V} g(v) = 2|A| = 2n - 2.$$

Per tant, $x = 2$. Això prova el que calia.

6.3 Problemes diversos**Problema 6.12**

Proveu que tot arbre d'ordre $n \geq 2$ és 2-acolorible.

Resolució

Tot i que ja s'ha vist abans una versió d'aquest problema (al capítol 2, dedicat a la inducció), en veurem aquí una altra. Proposem una demostració per inducció sobre

l'ordre de l'arbre, i encara en més d'una modalitat. Sigui $T = (V, A)$ arbre d'ordre $n = |V|$.

Pas 1 (base). Considerem el cas $n = 2$. Per connexió ha de ser $T = T_2$, òbviament 2-acolorible

Pas 2 (inductiu). Sigui $n \geq 3$ i suposem la propietat certa per a arbres d'ordre $n' < n$, és a dir, els arbres d'ordre $n' < n$ són 2-acoloribles.

Mètode 1: Eliminem una aresta. Sigui $a \in A$ una aresta qualsevol, que és aresta pont, perquè és aresta d'un arbre. Suposem que és $a = uv$. Vegeu la figura 6.12.

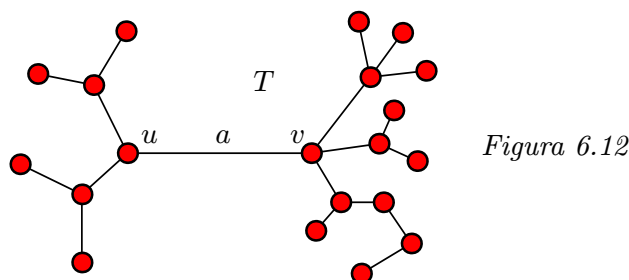


Figura 6.12

Eliminem a per crear el graf $T' = T - a$. Ara bé, com és sabut, aleshores es produeixen dos components connexos exactament, de manera que $T' = H_1 \cup H_2$, amb $H_1 = (V_1, A_1)$, $H_2 = (V_2, A_2)$ i, a més, $u \in V_1$, $v \in V_2$ (o a l'inrevés). Com que són connexos i hereten el caràcter acíclic, H_1, H_2 són arbres, d'ordres respectius $n_1 = |V_1|$, $n_2 = |V_2|$. Els és aplicable la hipòtesi d'inducció i, per tant, cadascun és 2-acolorible, amb els colors B, N per exemple (figura 6.13).

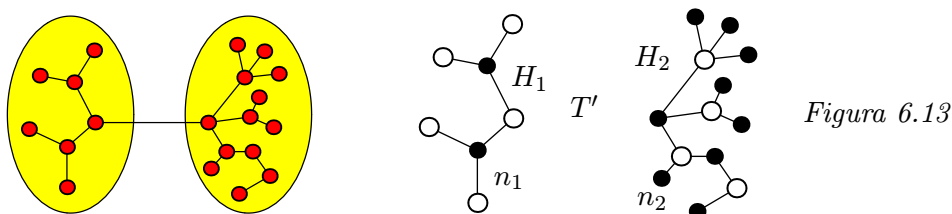


Figura 6.13

Si un d'ells és N_1 , se li assigna un color arbitràriament. En reconstruir el nostre graf tornant a afegir l'aresta a eliminada, és a dir, fent $T = T' + a$, poden donar-se dues situacions:

1. *Cas 1.* Els vèrtexs extrems u, v han rebut colors diferents en les coloracions de H_1, H_2 , respectivament. Aleshores, mantenint les coloracions respectives, amb

l'afegit (restauració) de l'aresta a obtenim una coloració global de T (figura 6.14).

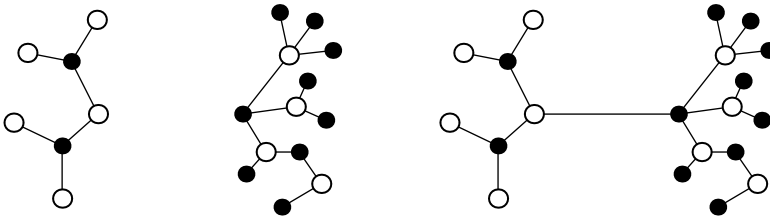


Figura 6.14

2. *Cas 2.* Els vèrtexs extrems u, v han rebut colors idèntics en les coloracions de H_1, H_2 , respectivament. Ara no podem restablir l'aresta a , ja que hi hauria col·lisió de colors. Construïm un 2-acoloriment per a T de la manera següent: mantenim la coloració de H_1 (per exemple) i intercanviem els colors dels vèrtexs de H_2 , és a dir, els que són blancs passen a negres, i viceversa. Això crea una bicoloració en H_2 , però ara u, v tenen colors diferents i ja podem restablir l'aresta a , per recuperar T , que queda ara globalment 2-acolorit (figura 6.15).

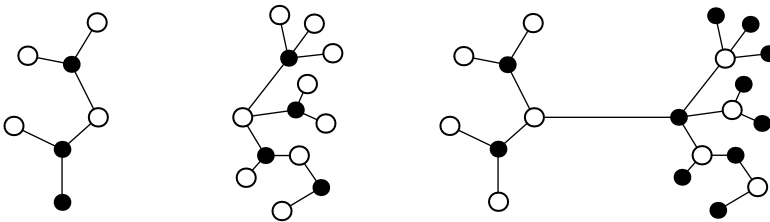


Figura 6.15

Mètode 2: Eliminem un vèrtex. Una variant de resolució, seguint el mateix esquema inductiu, consistiria a eliminar un vèrtex w , de grau k . Si $k=1$, aleshores $T' = T - w$ és 2-acolorible per inducció i, si v és el vèrtex adjacent a w , assignem a w color diferent del que ha rebut v en la coloració inductiva. Si $k \geq 2$, aleshores és $T' = T - w = H_1 \cup \dots \cup H_k$, reunió de k components connexos, que són arbres d'ordres inferiors estrictament a n i, per tant, inductivament 2-acoloribles. Si els vèrtexs adjacents a w en T són w_1, \dots, w_k , hauran rebut un dels dos colors. Assignem a w un color diferent del color de w_1 . Sigui ara $w_i, i \geq 2$, un qualsevol dels altres vèrtexs. Si el color de w_i és diferent del de w , no cal fer res. En cas contrari, intercanviem els dos colors a H_i , component que conté w_i . Això produeix una 2-coloració en H_i i, procedint anàlogament per a la resta de vèrtexs, tenim finalment una 2-coloració global de l'arbre T .

Problema 6.13

Estudieu si existeixen arbres autocomplementaris.

Resolució

En primer lloc, analitzem què se'ns està demanant. Si $T = (V, A)$ és un arbre, estem interessats a saber si pot ser isomorf al seu complementari T^c . Amb aquest objectiu, vegem si podem identificar possibles candidats a ser arbres autocomplementaris. Posteriorment analitzarem cada cas que en pugui haver resultat.

En primer lloc, vegem què podem deduir simplement del fet que un graf sigui autocomplementari, amb independència de propietats addicionals, com la de ser arbre, que s'aplicaria posteriorment.

Suposem que el graf és d'ordre n , és a dir, $|V| = n$. Tenim en general que $T^c = (V, A')$. Ara bé, per isomorfisme, resulta en particular que $|A| = |A'|$. Atès que per al graf complementari és $A' = \mathcal{P}_2(V) - A$, resulta $|A'| = \binom{n}{2} - |A|$ i, per tant, $|A| = \binom{n}{2} - |A|$, d'on $|A| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

Ara podem aplicar que T és un arbre i, per tant, $|A| = n - 1$, amb la qual cosa podem escriure $n - 1 = \frac{n(n-1)}{4}$, d'on $(n - 1)(\frac{n}{4} - 1) = 0$. Per tant, és $n = 1$ o bé $n = 4$. D'aquesta manera tenim extraordinàriament limitat el ventall de possibles candidats. Per tant, acabem d'obtenir una condició necessària, condició que s'ha de complir perquè un arbre pugui ser autocomplementari, cosa que no significa que tot arbre d'ordre 4 hagi de ser-ho, com tindrem ocasió de comprovar en l'anàlisi que segueix.

Pel que fa a $n = 1$, l'única possibilitat és $T = N_1$, òbviament autocomplementari.

Estudiem ara l'altre cas possible, $n = 4$. Anem a obtenir els arbres d'ordre 4.

Si considerem la seqüència de graus, serà del tipus $1, 1, x_3, x_4$, ja que hi ha d'haver un mínim de dues fulles, és a dir, de vèrtexs de grau 1. Aplicant el lema de les encaixades, $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 1 + 1 + x_3 + x_4$, i tenint en compte que, com que és arbre, $|A| = n - 1 = 4 - 1 = 3$, resulta finalment que $2 + x_3 + x_4 = 6$, és a dir, $x_3 + x_4 = 4$. Enumerem les possibilitats per als graus que són incògnita. Atès que T és arbre, T' és connex i, per tant, no hi ha vèrtexs de grau zero, amb la qual cosa és $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 1$. Només hi ha dues possibilitats essencialment diferents: $x_3 = 1, x_4 = 3$ i $x_3 = 2, x_4 = 2$, cosa que ens porta a les seqüències de graus $1, 2, 2, 1$; $1, 1, 1, 3$. Observeu que l'altra possibilitat, $x_3 = 3, x_4 = 1$, és essencialment la primera, ja que estem interessats en isomorfisme, i els vèrtexs no es consideren etiquetats.

En el primer cas, atesa la connexió i la caracterització dels grafs trajecte, és $T = T_4$. Es pot comprovar que $T_4 = T_4^c$, és a dir, que és autocomplementari, com es pot veure a la figura 6.16.



Figura 6.16

Pel que fa a la seqüència 1,1,1,3, és immediat veure que es tracta del graf estrella $T = E_4$. Ara bé, $T^c = C_3 \cup N_1$, no isomorf a T , com podem veure a la figura 6.17.

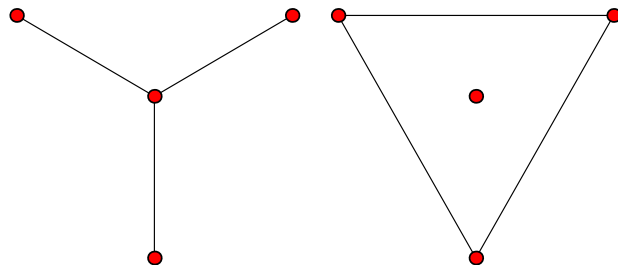


Figura 6.17

Per tant, en conclusió, els únics arbres autocomplementaris són N_1, T_4 .

Problema 6.14

Sigui T un arbre amb un nombre parell d'arestes. Proveu que T té almenys un vèrtex de grau parell.

Resolució

És un problema que sembla abordable utilitzant el lema de les encaixades i la propietat que diu que el nombre d'arestes d'un arbre d'ordre n és $n - 1$.

Suposem que no es compleix el que s'ha de demostrar, és a dir, suposem que tots els vèrtexs són de grau senar.

Sigui $T = (V, A)$, amb $|V| = n$ i $|A|$ parell.

Si $v \in V$, aleshores el seu grau és de la forma $g(v) = 2k_v + 1$. Aplicant el lema de les encaixades,

$$2(n - 1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} (2k_v + 1) = 2 \sum_{v \in V} k_v + \sum_{v \in V} 1 = \text{parell} + n$$

Per tant, n parell. Ara bé, de $n = |A| + 1$ resulta n senar, la qual cosa és contradictòria.

Vegem un procediment més immediat. Essent T arbre, és $n = |A| + 1$. Si el nombre d'arestes és parell, aleshores l'ordre n és senar. Ara bé, si no hi hagués vèrtexs de grau parell, tots serien de grau senar i n'hi hauria, per tant, una quantitat senar, l'ordre. Ara bé, això es contradia amb el resultat ben conegut que afirma que el nombre de vèrtexs de grau senar en un graf és parell.

Problema 6.15

Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Proveu que el nombre f de fulles és

$$f = 2 + \sum_{g(v) \geq 3} (g(v) - 2).$$

Resolució

Sigui $T = (V, A)$ arbre amb $n = |V|$.

Atès que a l'enunciat es fan consideracions sobre vèrtexs de graus diversos, concretament vèrtexs de grau 1 (fulles) i vèrtexs de grau superior o igual a 3, sembla raonable considerar els conjunts de vèrtexs respectius i establir-ne la notació corresponent. Donat que un arbre és connex, no hi ha vèrtexs de grau 0, de manera que els vèrtexs que considerarem seran els de graus 1, 2 i superior o igual a 3.

Siguin, doncs, $F = \{v \in V | g(v) = 1\}$, $R = \{v \in V | g(v) = 2\}$ i $S = \{v \in V | g(v) \geq 3\}$, cosa que determina una partició del conjunt de vèrtexs. És $V = F \cup R \cup S$ i és $n = |F| + |R| + |S|$.

Apliquem el lema de les encaixades i el fet que $|A| = n - 1$, perquè T és arbre. També descomponem la suma de graus concordantment a la partició del conjunt de vèrtexs:

$$2(n - 1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \in R} g(v) + \sum_{v \in S} g(v) = |F| + 2|R| + \sum_{g(v) \geq 3} g(v).$$

Si indiquem $|F| = f$, $|R| = r$, $|S| = s$, podem escriure, substituint a la fórmula anterior,

$$2((f + r + s) - 1) = f + 2r + \sum_{g(v) \geq 3} g(v).$$

Simplifiquem i reestructurem:

$$\begin{aligned} f &= 2 - 2s + \sum_{g(v) \geq 3} g(v) = 2 + \sum_{g(v) \geq 3} g(v) - 2s \\ &= 2 + \left(\sum_{g(v) \geq 3} g(v) \right) - \left(\sum_{g(v) \geq 3} 2 \right) = 2 + \sum_{g(v) \geq 3} (g(v) - 2). \end{aligned}$$

Problema 6.16

Obteniu tots els arbres d'ordre n amb grau màxim $n - 3$.

Resolució

Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre $|V| = n$ tal que el màxim dels graus és $n - 3$. Això significa que hi ha com a mínim un vèrtex per al qual s'assoleix aquest màxim, és a dir, de grau $n - 3$. Sigui, doncs, $w_0 \in V$ tal que $g(w_0) = n - 3$. Perquè això tingui sentit, i tenint en compte que els arbres són connexos i, per tant, no hi ha vèrtexs isolats, ha de ser $n - 3 \geq 1$, és a dir, $n \geq 4$, cosa que suposarem a partir d'ara.

Per tant, hi ha $n - 3$ vèrtexs adjacents a w_0 , vèrtexs que denotarem per v_1, \dots, v_{n-3} . No hi pot haver cap adjacència $v_i \sim v_j$, ja que si hi fos, es formaria un cicle C_3 , $w_0 - v_i - v_j$, que no és possible per l'aciclicitat de l'arbre T .

Resten encara dos vèrtexs més per considerar, que podem denotar per z, t , no adjacents a w_0 , ja que els adjacents a w_0 són els v_i (figura 6.18).

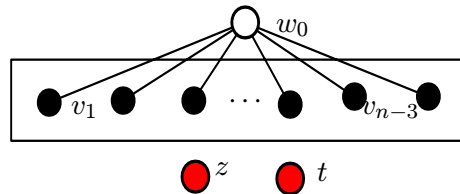


Figura 6.18

Per connexió, han d'existir recorreguts que connectin z, t amb algun o alguns dels vèrtexs v_i .

Són possibles ara tres modalitats:

Cas 1. Els vèrtexs z, t són adjacents a un mateix vèrtex s d'entre els v_i . Aleshores z, t no poden ser adjacents, ja que es formaria el cicle $s - z - t$. En aquest cas, l'estructura del graf T seria la de la figura 6.19.

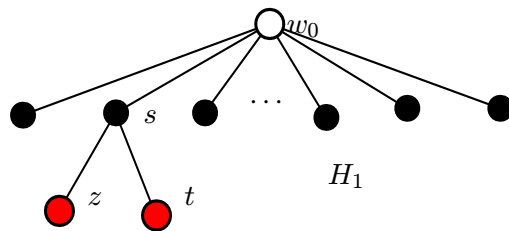
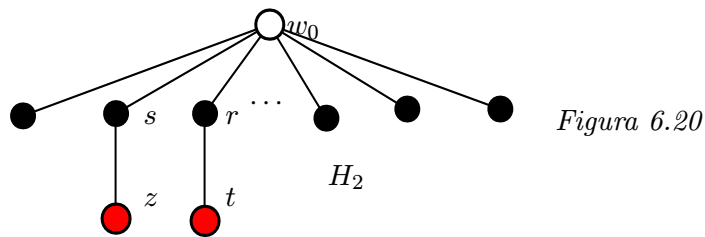


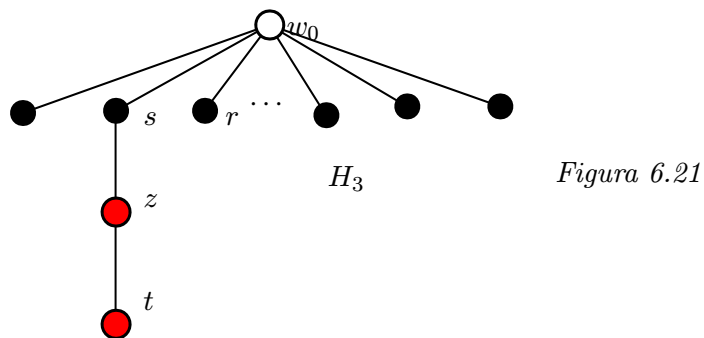
Figura 6.19

Cas 2. Els vèrtexs z, t són adjacents, respectivament, a vèrtexs diferents d'entre els v_i . Siguin $z \sim s, t \sim r, s \neq r$. En aquest cas, z, t no són adjacents, ja que si ho fossin es formaria el cicle $w_0 - s - z - t - r$, en contradicció amb l'aciclicitat. En aquest cas, el

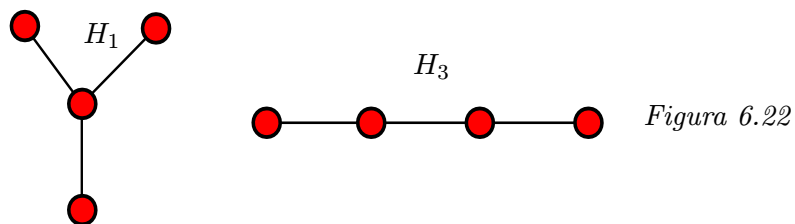
graf té l'estructura que es mostra a la figura 6.20.



Cas 3. Només un dels vèrtexs z, t és adjacent a algun dels v_i . Sigui, per exemple, $z \sim s$. Si s'ha de mantenir la connexió, ha de ser $t \sim z$. A la figura 6.21 es mostra el graf corresponent.



En el cas $n = 4$, s'obtenen els grafs de la figura 6.22, on els casos H_2 i H_3 són el mateix. Atenent a les diferents seqüències de graus, són no isomorfs.



Per a $n = 5$ s'obtenen els grafs de la figura 6.23. Observeu que $H_2 = H_3$. Atenent a

les diferents seqüències de graus, H_1, H_2 són no isomorfs.

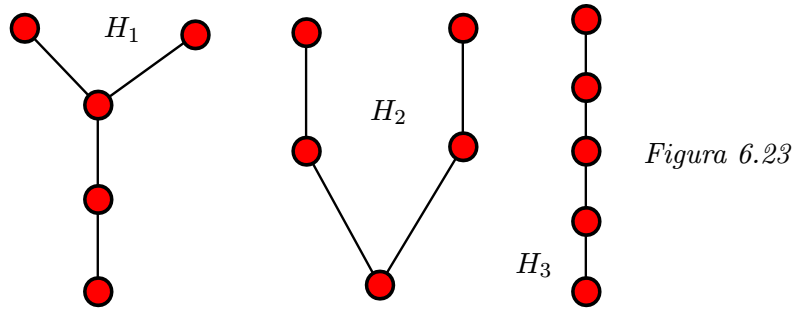


Figura 6.23

Vegem a la figura 6.24 el cas de $n = 6$.

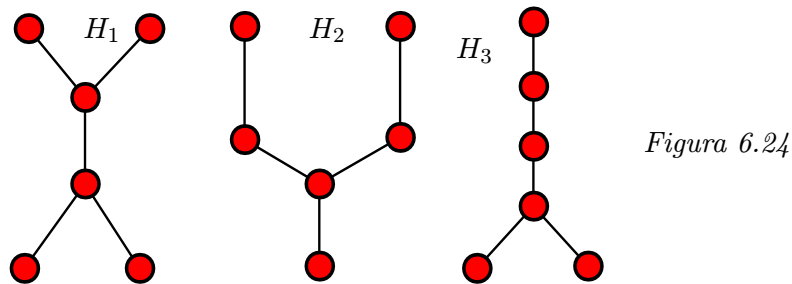


Figura 6.24

A la figura 6.25 es representen els tres grafs obtinguts per a $n \geq 6$.

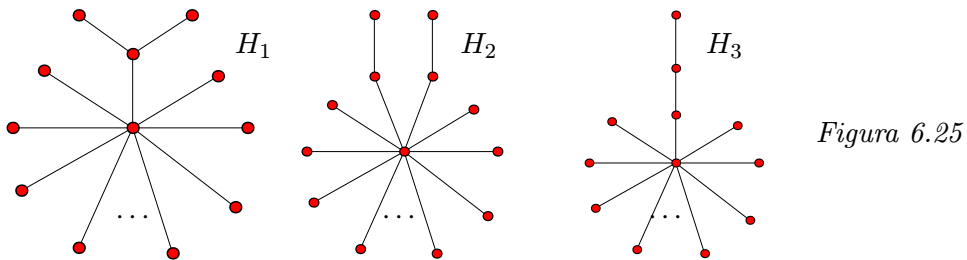


Figura 6.25

Estudiem si hi ha alguna parella de grafs isomorfs, per a $n \geq 6$. El graf H_1 , a diferència dels altres, no té vèrtexs de grau 2. Per tant, H_1 no és isomorf a cap dels altres. Els grafs H_2, H_3 no són isomorfs perquè els dos únics vèrtexs de grau 2 són no adjacents i adjacents, respectivament. Per tant, H_1, H_2, H_3 són grafs essencialment diferents, dos a dos no isomorfs.

Mètode alternatiu. Hi ha una altra possibilitat de resolució del problema. Es tracta d'obtenir inicialment la seqüència de graus del graf. Siguin $x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ els graus del graf. Com a mínim un d'ells ha de ser $n - 3$, per exemple $x_n = n - 3$.

Escrivim el lema de les encaixades i utilitzen que $|A| = n - 1$:

$$(n-3) + x_{n-1} + \cdots + x_1 = 2|A| = 2(n-1),$$

és a dir, $x_1 + \cdots + x_{n-1} = n+1$. Ara bé, com que G és arbre, és connex i, per tant, $x_i \geq 1$. Si expressem $x_i = 1 + x'_i$, per a $i = 1, \dots, n-1$, serà $x'_i \geq 0$. Substituint a la igualtat anterior resultarà

$$(n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} x'_i = n+1,$$

d'on $\sum_{i=1}^{n-1} x'_i = 2$. Això dóna dues possibilitats per a la seqüència de x'_i : $0, 0, \dots, 0, 2$; $0, 0, \dots, 0, 1, 1$. Les seqüències corresponents per als graus són: $n-3, 1, \dots, 1, 3$; $n-3, 1, \dots, 1, 2, 2$.

El lector pot estudiar els casos $n = 4, 5$ i podem suposar, per no haver de fer excepcions, $n \geq 6$.

En el cas $n-3, 1, \dots, 1, 3$, el vèrtex de grau $n-3$ no pot ser adjacent a només vèrtexs de grau 1, ja que aleshores restarien vèrtexs en un segon component, cosa que és contrària a la connexió. Ha de ser adjacent al vèrtex de grau 3 i a $n-4$ vèrtexs de grau 1. Aquesta configuració dóna lloc a H_1 .

En el cas $n-3, 1, \dots, 1, 2, 2$, per raonaments anàlegs al cas anterior, el vèrtex de grau $n-3$ ha de ser adjacent com a mínim a un vèrtex de grau 2. Això dóna lloc a dues possibilitats, segons si és adjacent als dos vèrtexs de grau 2 o només a un. D'aquestes possibilitats es deriven els grafs H_2, H_3 .

El lector completarà els raonaments que el portaran a les mateixes conclusions que en el primer mètode.

Problema 6.17

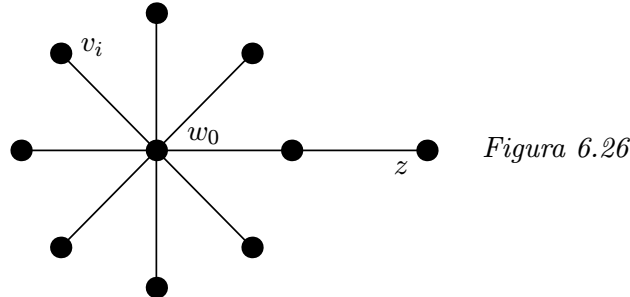
Obteniu tots els arbres d'ordre $n \geq 4$ amb grau màxim $n-2$.

Resolució

Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre $|V| = n$ tal que el màxim dels graus és $n-2$. Això significa que hi ha, com a mínim, un vèrtex per al qual s'assoleix aquest màxim, és a dir, de grau $n-2$. Sigui, doncs, $w_0 \in V$ tal que $g(w_0) = n-2$.

Per tant, hi ha $n-2$ vèrtexs adjacents a w_0 , vèrtexs que denotarem per v_1, \dots, v_{n-2} . No hi pot haver cap adjacència $v_i \sim v_j$, ja que, si hi fos, es formaria un cicle C_3 , $w_0 - v_i - v_j$, que no és possible per l'aciclicitat de l'arbre T .

Resta encara un vèrtex més per considerar, que podem denotar per z , no adjacent a w_0 , ja que els adjacents a w_0 són els v_i . Per la connexió ha de ser adjacent a un dels v_i . Per tant, hi ha un únic graf, que correspon al de la figura 6.26.



En els casos d'ordres inferiors a 4 s'obtenen grafs trajectes.

Podem considerar un *mètode alternatiu* per obtenir els arbres amb la propietat esmentada, basat en l'obtenció de la seqüència de graus.

Apliquem el lema de les encaixades, el fet que hi ha un mínim de 2 vèrtexs de grau 1 i que $|A| = n - 1$. Si indiquem per x_1, \dots, x_{n-3} graus desconeguts, podem escriure:

$$2(n - 1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = x_1 + \dots + x_{n-3} + 1 + 1 + (n - 3).$$

Efectuant operacions resulta $x_1 + \dots + x_{n-3} = n - 2$. Ara bé, per connexió en un arbre no hi ha cap vèrtex de grau 0 i, per tant, $x_i \geq 1$. L'única possibilitat és que un grau sigui 2 i la resta 1 ($n \geq 4$).

Per tant, la seqüència de graus de l'arbre és: $1, \dots, 1, 2, n - 2$. Si el vèrtex de grau $n - 2$ fos adjacent als vèrtexs de grau 1, aleshores restaria un vèrtex de grau 2 que no podria ser adjacent a cap dels altres vèrtexs, la qual cosa és contradictòria. Per tant, el vèrtex de grau màxim és adjacent al vèrtex de grau 2 i a $n - 3$ vèrtexs de grau 1, amb la qual cosa arribem a l'estructura del graf de la figura 6.26.

Problema 6.18

Proveu que si el nombre de fulles d'un arbre d'ordre $n \geq 3$ és 2, aleshores l'arbre és isomorf al graf trajecte T_n .

Resolució

Sigui $T = (V, A)$ arbre d'ordre $n \geq 3$. Recordem que és garantit un mínim de 2 fulles. Vegem que si és el màxim, aleshores ha de ser necessàriament un trajecte. Observeu que els trajectes tenen aquesta propietat, de manera que és una caracterització dels

trajectes d'entre els arbres. O també, equivalentment, els trajectes són els arbres amb exactament 2 vèrtexs de grau 1.

Tenint en compte que tot arbre és connex i atenent la caracterització dels grafs trajecte (secció 4.3) com els grafs connexos amb seqüència de graus $1, 2, \dots, 2, 1$, és suficient provar que la seqüència de graus és la indicada.

Intentem determinar la seqüència de graus de l'arbre T utilitzant les eines al nostre abast: lema de les encaixades, existència d'un mínim de 2 fulles, nombre d'arestes igual a $n - 1$.

Podem escriure:

$$2(n - 1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 1 + 1 + x_3 + \dots + x_n.$$

Atès que per connexió no hi pot haver graus nuls, en haver-hi exactament dos vèrtexs de grau 1, ha de ser $x_i \geq 2$, per a $i = 3, \dots, n$. El nostre problema és veure que $x_3 = \dots = x_n = 2$. Si no fos així, algun d'ells com a mínim, per exemple x_{i_0} , seria estrictament més gran que 2 i, per tant,

$$2(n - 1) = 1 + 1 + x_3 + \dots + x_n > 1 + 1 + 2 + \dots + 2 = 2 + 2(n - 2),$$

cosa que ens porta a l'absurd $-2 > -2$.

Observem que això es podria justificar alternativament escrivint $x_i = x'_i + 2$, amb $x'_i \geq 0$, per $i = 3, \dots, n$. Aleshores podem reescriure a l'equació derivada anteriorment del lema de les encaixades:

$$2(n - 1) = 1 + 1 + x_3 + \dots + x_n = 2 + 2(n - 2) + \sum_{i=3}^n x'_i,$$

d'on $\sum_{i=3}^n x'_i = 0$. Per tant, essent cada sumant no negatiu, ha de ser $x'_3 = \dots = x'_n = 0$.

Mètode 2: Per inducció. Podem intentar demostrar el resultat per inducció sobre n i encara amb més d'una variant.

Considerem l'esquema de demostració inductiva $P(n - 1) \implies P(n)$, que utilitza la propietat, que suposem coneguda, que tot arbre amb més de dos vèrtexs té un mínim de dues fulles.

Pas 1 (base). Considerem el cas corresponent al valor mínim de n . Atès que hi ha vèrtexs de grau 2, necessàriament $n \geq 3$. Suposem, doncs, $n = 3$. La seqüència de graus és $1, 2, 1$. Necessàriament ha de ser $T = T_3$.

Pas 2 (inductiu). Sigui $n \geq 4$. Suposem per hipòtesi d'inducció la propietat certa per a ordre $n' = n - 1$, és a dir, que si un arbre d'ordre $n - 1$ té exactament 2 fulles, aleshores és isomorf a T_{n-1} . Per poder utilitzar la hipòtesi d'inducció, efectuarem una operació destructiva sobre el nostre arbre T eliminant un vèrtex convenient, de tal manera que es conservi el caràcter d'arbre i la propietat de tenir exactament 2 fulles.

Sigui $w_0 \in V$ un vèrtex de grau 1, adjacent a $v_0 \in V$. Sigui w_1 l'altra fulla de T (i no n'hi ha més). Considerem $T' = T - w_0$. El graf T' continua essent arbre, és d'ordre $n - 1$ i hereta una fulla, el vèrtex w_1 . Qualsevol altre vèrtex diferent de v_0, w_1 és de grau superior o igual a 2, ja que si algun fos de grau 1, l'arbre T original hauria tingut més de 2 fulles. Per tant, l'únic candidat a ser una fulla en T' és v_0 , i ho ha de ser, ja que T' ha de tenir un mínim de 2 fulles.

Aplicant la hipòtesi d'inducció a T' resulta $T' = T_{n-1}$. Ara podem reconstruir el graf T , desfent l'operació d'eliminació de w_0 , i obtenir finalment $T = T_n$.

Una segona variant utilitzaria el fet que un arbre amb un mínim de 2 vèrtexs té un mínim de 2 fulles, però aleshores l'esquema demostratiu és la inducció completa. Es basaria a eliminar els dos únics vèrtexs de grau 1, w_0, w_1 , i així crear un arbre G , d'ordre $n - 2$, on els dos únics vèrtexs de grau 1 són els vèrtexs v_0, v_1 adjacents a w_0, w_1 , respectivament, en T (ja que si fossin altres vèrtexs, també serien fulles de T , que deixaria de tenir-ne exactament dues).

Problema 6.19

Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Proveu que si té $n - 1$ fulles, aleshores és el graf estrella $E_n = K_{1, n-1}$.

Resolució

El recíproc és òbviament cert. Vegem, doncs, el que es demana a l'enunciat. El resultat és certament intuïtiu, però estem buscant una justificació formal.

Hi ha una argumentació senzilla, que és la que segueix a continuació. Siguin v_1, \dots, v_{n-1} les fulles de l'arbre. Sigui w_0 el vèrtex restant. És fàcil veure que, tractant-se de vèrtexs de grau 1, no hi ha dues fulles adjacents, ja que seria T no connex, donat que $n \geq 3$.

Per tant, si no hi pot haver cap aresta entre les parelles de vèrtexs v_i , tots han de ser adjacents (essent de grau 1) a l'únic vèrtex que resta, w_0 , que resulta ser, per tant, de grau $n - 1$. Així, doncs, $T = N_1 + N_{n-1}$.

També es podria formular un argument inductiu, eliminant un vèrtex de grau 1, cosa que es deixa per al lector.

Problema 6.20

Sigui T un arbre de grau màxim Δ . Proveu que té un mínim de Δ fulles (vèrtexs de grau 1).

Resolució

Hi ha diversos mètodes d'abordar aquest problema. Algun d'ells pot ser molt més directe i ràpid que els altres. Això no té importància: el lector no ha d'oblidar que val la pena explorar el màxim de possibilitats possibles (dintre del que és raonable), ja que l'objectiu és l'entrenament en el raonament i la manipulació combinatòria, en teoria de grafs en aquest cas.

Mètode 1: Per inducció. Considerem el nostre arbre $T = (V, A)$ d'ordre n , amb grau màxim Δ . Anem a provar el resultat per inducció sobre n .

Pas 1 (base). Sigui $n = 2$. Aleshores, per connexió, és $T = T_2$, cas en el qual $\Delta = 1$ i podem comprovar que hi ha un mínim de $\Delta = 1$ vèrtexs de grau 1 (dos, de fet).

Pas 2 (inductiu). Sigui $n \geq 3$. Aleshores T té un mínim de 2 fulles, vèrtexs de grau 1. Sigui w_0 vèrtex de grau 1 de T . Quina és la hipòtesi d'inducció en aquest cas? En aquest cas, atès que es pretén eliminar un dels vèrtexs de grau 1, resulta: tot arbre d'ordre $n' = n - 1$ i de grau màxim Δ' té un mínim de Δ' fulles. L'estratègia és, doncs, eliminar els vèrtexs w_0 i així crear el graf $T' = T - w_0$. Aleshores T' continua essent arbre, d'ordre $n' = n - 1$, i se li pot aplicar la hipòtesi d'inducció: el nombre de fulles de T' és superior o igual a Δ' , màxim dels graus de T' . Ara bé, suposem que w_0 és adjacent a v_0 en T .

Si el grau màxim Δ de T s'assoleix en un(s) vèrtex(s) $u_0 \neq v_0$ de T (i òbviament, $u_0 \neq w_0$), aquest màxim no varia en passar a T' , que és Δ . En aplicació de la hipòtesi d'inducció, resulta que T' té un mínim de Δ fulles. Ara, pensant en la restitució de T , poden passar dues coses: si el grau de v_0 en T' no és 1, aleshores no és una fulla en T' i, en restituir el vèrtex w_0 , resulta que T queda amb un mínim de $\Delta + 1$ fulles (w_0 i el mínim garantit de Δ fulles de T'); si, al contrari, és $g_{T'}(v_0) = 1$, aleshores resta un mínim de $\Delta - 1$ fulles a T' , que també ho seran de T . En afegir w_0 s'obté la fulla suplementària que calia per assolir un mínim de Δ fulles.

Una argumentació similar funciona també si el grau màxim Δ s'assoleix en T a v_0 i a algun altre vèrtex.

Si el grau màxim Δ de T s'assoleix a exactament a v_0 , que serà de grau Δ i la resta de vèrtexs, de grau estrictament inferior a Δ , aleshores el grau màxim de T' és $\Delta - 1$ (i certament es pot assolir a més d'un vèrtex, a part de v_0). En aplicació de la hipòtesi inductiva, T' té un mínim de $\Delta - 1$ fulles. Si v_0 no és una fulla de T' , aleshores, restituint w_0 (fulla de T) obtenim per a T un mínim de $(\Delta - 1) + 1 = \Delta$ fulles. Si v_0 és una fulla de T' , aleshores el grau màxim de T' és $\Delta - 1 = 1$, cosa que, per connexió, implica que ha de ser reduït a T_2 , amb un vèrtex de T_2 , el vèrtex v_0 . Per tant, $T = T_3$, cas en el qual es compleix la propietat.

Mètode 2: Immediat! El mètode es basa a considerar que si Δ és el grau màxim, aquest grau s'assoleix com a mínim en un vèrtex, per exemple w_0 , que serà adjacent a Δ vèrtexs, per exemple: v_1, \dots, v_Δ . L'eliminació del vèrtex w_0 produeix un bosc de Δ components connexos, $T = G_1 \cup \dots \cup G_\Delta$; cadascun d'aquests components és un arbre, ja que hereten l'aciclicitat de T . Vegem que cada component connex "aporta" a l'arbre original T una fulla com a mínim, amb la qual cosa tenim que hi ha un mínim de Δ fulles. Considerem un component connex G_i .

Considerem dos casos possibles. Si G_i és format per un vèrtex, aleshores és una fulla de T i, per tant, aquest component aporta una fulla al còmput general quan es reconstitueixi el graf T . Si G_i és un arbre de dos o més vèrtexs, aleshores hi ha un mínim de 2 fulles en G_i . Podria ser que una de les fulles fos v_i , l'altra serà una fulla també de T i, en conseqüència, el component connex G_i aportarà un mínim d'una fulla a T quan es faci la reconstrucció. Per tant, a cada G_i hi ha com a mínim un vèrtex que és fulla de T . En conseqüència, T té un mínim de Δ fulles.

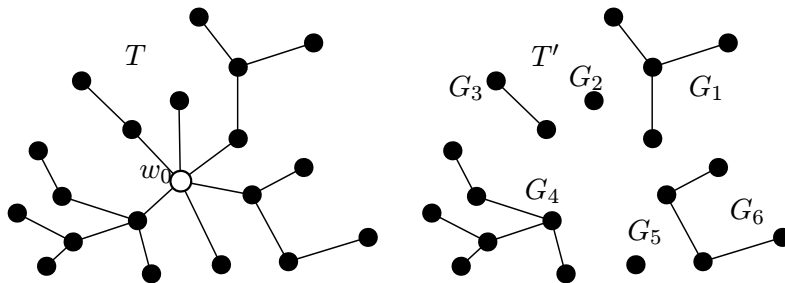


Figura 6.27. En aquest graf es poden veure les diverses situacions que es poden donar, corresponents a la discussió anterior

Mètode 3: Analitzant els graus dels vèrtexs.

Establím una notació mínima que ens permetrà efectuar manipulacions amb els graus dels vèrtexs. Siguin $F = \{v \in V | g(v) = 1\}$, conjunt de les fulles; $D = \{v \in V | g(v) = \Delta\}$, conjunt de vèrtexs de grau màxim Δ , no buit per hipòtesi, de manera que $d = |D| \geq 1$; $P = \{v \in V | 2 \leq g(v) \leq \Delta - 1\}$, la resta de vèrtexs. Observem que per connexió no hi ha vèrtexs de grau 0. Tenim la partició $V = F \cup D \cup P$, d'on es deriva que $n = |F| + d + |P|$, o, equivalentment, $|P| = n - d - |F|$. El nostre problema és provar que $|F| \geq \Delta$.

Com que T és arbre, $|A| = n - 1$ i pel lema de les encaixades podem escriure:

$$\begin{aligned}
 2(n - 1) &= 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \in D} g(v) + \sum_{v \in P} g(v) \\
 &= |F| + d\Delta + \sum_{v \in P} g(v) \geq |F| + d\Delta + 2|P| \\
 &= |F| + d\Delta + 2(n - d - |F|).
 \end{aligned}$$

Per tant,

$$2n - 2 \geq |F| + d\Delta + 2n - 2d - 2|F|,$$

d'on

$$|F| \geq d\Delta - 2d + 2 = (\Delta - 2)d + 2 \geq (\Delta - 2)1 + 2 = \Delta,$$

com s'havia de veure.

Variant B. Podem seguir una altra variant argumental a l'entorn de la mateixa aproximació a la resolució del problema.

Sigui x_i el nombre de vèrtexs de grau i de l'arbre T . Essent T connex, $x_0 = 0$. Considerem, doncs, x_1, \dots, x_Δ , per a Δ el màxim dels graus. Donat que hi ha un vèrtex de grau Δ , és $x_\Delta \geq 1$. Hem de veure que $x_1 \geq \Delta$.

En primer lloc, podem escriure una relació immediata: $n = x_1 + \dots + x_\Delta$. D'altra banda, per ser T arbre, és $|A| = n - 1 = x_1 + \dots + x_\Delta - 1$. Aplicant el lema de les encaixades podem escriure $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + ix_i + \dots + \Delta x_\Delta$

Per tant, $2(x_1 + \dots + x_\Delta - 1) = 2|A| = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + ix_i + \dots + \Delta x_\Delta$

Ara, efectuant simplificacions a la igualtat anterior,

$$x_1 = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta} ix_i - \sum_{i=3}^{\Delta} 2x_i = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta} (i-2)x_i \geq 2 + (\Delta-2)x_\Delta \geq 2 + (\Delta-2)1 = \Delta.$$

Problema 6.21

Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Proveu que $D(T) = 2$ (diàmetre) si i només si T és isomorf al graf estrella E_n .

Resolució

Si $T = E_n$, amb $n \geq 3$, aleshores trivialment és $D(T) = 2$.

Suposem que $D(T) = 2$. Anem a veure que $T = E_n = K_{1,n-1}$.

Vegem, en primer lloc, que existeix un vèrtex que és adjacent a la resta. Siguin x, y vèrtexs no adjacents, és a dir, $d(x, y) \neq 1$. Una parella de vèrtexs no adjacents ha d'existir, ja que en cas contrari, si això no passés, seria el graf K_n i, per ser arbre, seria el graf $K_2 = T_2$, cas en el qual $D(T) = 1$, cosa que seria contradictòria amb la hipòtesi.

Atès que $1 < d(x, y) \leq D(T) = 2$, tindrem que $d(x, y) = 2$ i, en conseqüència, existeix un vèrtex z adjacent a x, y . Si no hi ha més vèrtexs, aleshores $T = T_3$, determinat per

la seqüència $x - z - y$. Si existeix algun altre vèrtex, per exemple t , aleshores veurem que t és adjacent a z (figura 6.28). Si no ho fos, veurem que s'arriba a contradicció. Per connexió, existeix un $t - z$ recorregut C , que a més és únic, perquè T és arbre. Si el recorregut és format per una única aresta, aleshores hem acabat. Suposem que el recorregut és format per més d'una aresta. No pot contenir cap dels vèrtexs x, y ; si, per exemple, contingués el vèrtex x , aleshores, per unicitat de camins entre dos vèrtexs en un arbre, $t - C - x - z - y$ seria l'únic $t - y$ recorregut, de longitud com a mínim 3, de manera que $d(y, t) \geq 3$ i, en conseqüència, seria $D(T) \geq 3$. Aleshores, el recorregut $t - C - z - y$ (per exemple; seria el mateix amb x) seria l'únic $t - y$ recorregut i la seva longitud seria com a mínim 3, d'on per la unicitat seria $d(t, y) \geq 3$ i, per tant, $D(T) \geq 3$.

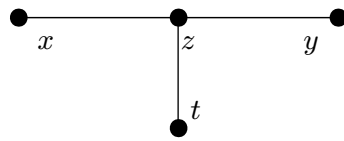


Figura 6.28

Existeix, per tant, un vèrtex z que és adjacent a la resta. Si w és un vèrtex diferent de z , aleshores no pot ser adjacent a cap altre vèrtex s , ja que en cas contrari es formaria un cicle $w - z - s$, cosa que és contradictòria amb l'aciclicitat.

Mètode 2: Per inducció. Anem a demostrar la propietat per inducció sobre n . La idea és suggerida pel fet que existeix un mínim d'una fulla i la seva eliminació produeix un graf d'ordre inferior que continua essent arbre, tot i que caldrà que continuï tenint diàmetre 2.

Com sempre, cal considerar dos passos en aquest mètode de demostració.

Pas 1 (base). Considerem $n = 3$. Aleshores, com que T és arbre, és $T = T_3$, és $D(T_3) = 2$ i es compleix que T és el graf estrella, concretament $T = T_3 = K_{1,2}$.

Pas 2 (inductiu). Suposem $n \geq 4$. La hipòtesi d'inducció és la propietat: "Tot arbre d'ordre $n' = n - 1$ de diàmetre 2 és isomorf a $E_{n-1} = K_{1,n-2}$ ". Considerem ara el nostre arbre T d'ordre n , de diàmetre 3. Sigui w_0 una fulla de T , adjacent a v_0 (figura 6.29).

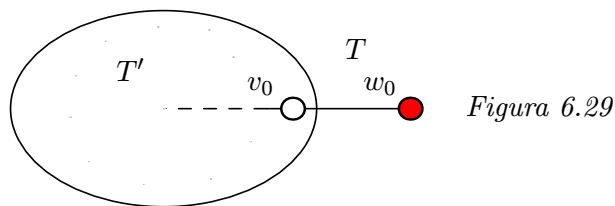


Figura 6.29

Considerem l'arbre resultant $T' = T - w_0$, d'ordre $n' = n - 1$. Li podrem aplicar la hipòtesi d'inducció si justifiquem que és de diàmetre 2. Atès que hem eliminat una

fulla de T , és $D(T') \leq D(T) = 2$. Atès que $n \geq 4$, és $D(T') \geq 1$. Si fos $D(T') = 1$, dos vèrtexs qualsevol de T' serien adjacents i es tractaria, per tant, del graf complet, és a dir, $T' = K_{n-1}$. En conseqüència, com que és arbre, seria K_2 , cosa que significaria que $n = 3$. Per tant, $D(T') > 1$ i, en conseqüència, $D(T') = 2$. En aplicació de la hipòtesi d'inducció resulta que $T' = K_{1,n-1}$, amb un vèrtex central que denotem u_0 . Si $u_0 \neq v_0$, aleshores tindriem en T el recorregut $w_0 - v_0 - u_0 - t_0$, on t_0 és un dels vèrtexs restants de T' . El recorregut és únic, perquè és arbre, i, en conseqüència, $d(w_0, t_0) = 3$, cosa que contradiu la propietat $D(T) = 2$. En conseqüència, $u_0 = v_0$, vèrtex central, al qual també és adjacent w_0 . Per tant, T és l'estrella E_n (figura 6.30).

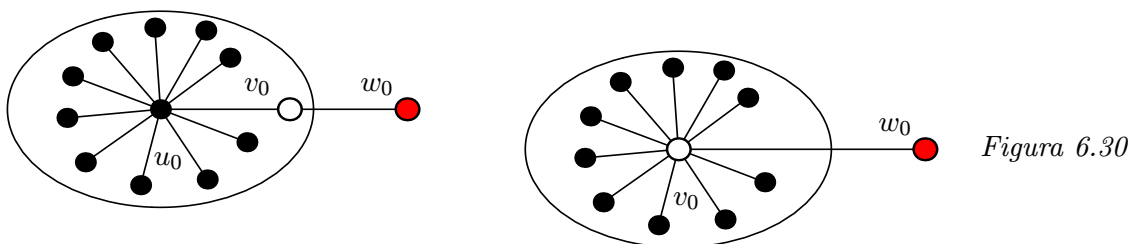


Figura 6.30

Problema 6.22

Calculeu el nombre de fulles d'un arbre amb arrel binari complet d'ordre n , $n \geq 3$, en funció de n .

Resolució

En primer lloc, descrivim la situació sobre la base de les hipòtesis de l'enunciat. Sigui T l'arbre amb arrel donat i sigui $\bar{T} = (V, A)$ l'arbre subjacent. Sigui f el nombre de fulles i i el nombre de vèrtexs interns (arrel inclosa) de T . Aleshores el graf subjacent \bar{T} té f vèrtexs de grau 1, un de grau 2 i $i - 1$ de grau 3, tal com es veu a la figura 6.31. Sigui els conjunts de vèrtexs respectius F, D, W .

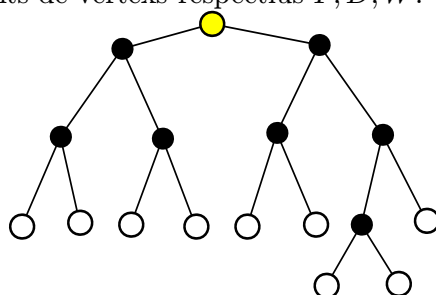


Figura 6.31

Escrivim el lema de les encaixades, utilitzant que, per ser arbre, $|A| = n - 1$:

$$2(n-1) = 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \in D} g(v) + \sum_{v \in W} g(v) = f + 2 + 3(i-1) = f + 3i - 1.$$

Ara bé, encara podem escriure una relació més, $i = n - f$, que substituïrem a l'equació anterior: $2n - 2 = f + 3(n - f) - 1$. Per tant, $f = \frac{n+1}{2}$.

Problema 6.23

Sigui T un arbre tal que cada vèrtex adjacent a una fulla és de grau 3, com a mínim. Proveu que existeixen dues fulles que són adjacents a un mateix vèrtex.

Resolució

Sigui $T = (V, A)$. Implícitament resulta de la condició dels graus que hi ha més de 3 vèrtexs, d'on existeix un mínim de 2 fulles. Això exclou també que dues fulles siguin adjacents, cas en què seria $T = T_2$, la qual possibilita alguns raonaments posteriors. Suposem que T té f fulles, que denotem per v_1, \dots, v_f , i suposem que cada fulla v_j és adjacent al vèrtex w_j , amb $g(w_j) \geq 3$. Els vèrtexs w_j són els que són adjacents a alguna fulla.

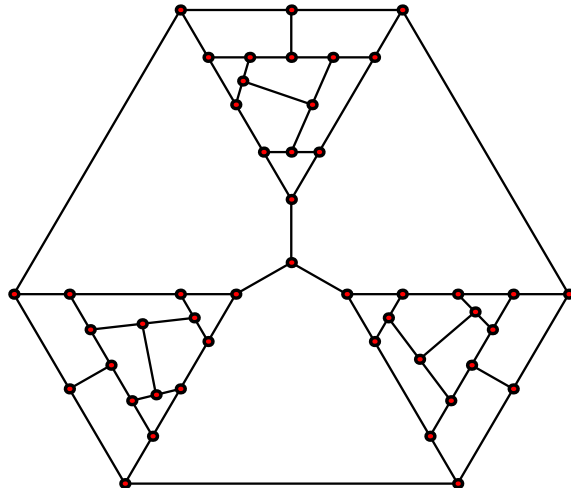
Suposem que no es compleix la propietat que es vol demostrar. Això significa que no hi ha dues fulles que siguin adjacents a un mateix vèrtex i, per tant, tots els vèrtexs w_1, \dots, w_f són diferents i cadascun d'ells és adjacent a només una de les fulles (els vèrtexs que són adjacents a una fulla, ho són només exactament a una).

La idea és “podar” l'arbre de totes les fulles, és a dir, considerar el graf $T' = T - \{v_1, \dots, v_f\}$, resultat d'eliminar totes les fulles. En la mesura que eliminen vèrtexs de grau 1, el graf resultant manté la connexió i, per descomptat, l'aciclicitat. Per tant, T' és un arbre.

Analitzem quins són els graus dels vèrtexs en T' . Per connexió no hi ha vèrtexs de grau zero. Els vèrtexs w_1, \dots, w_f , inicialment de grau superior o igual a 3, ara són en T' de grau superior o igual a 2, ja que eren adjacents a no més d'una fulla. Pel que fa a la resta de vèrtexs, no s'han alterat les adjacències en l'operació d'eliminació de les fulles i, per tant, conserven el grau que tenien en T . Ara bé, atès que no eren vèrtexs isolats ni fulles, el grau era superior o igual a 2. En conseqüència, i com a resum, tots els vèrtexs de T' són de grau superior o igual a 2, cosa que està en contradicció amb el fet que T' sigui arbre, que ha de tenir un mínim de 2 vèrtexs de grau 1 (fulles).

Capítol 7

Planaritat



7.1 Objectius

Tractem el tema dels *grafs planaris* des del punt de vista dels *problemes*. A través dels problemes volem fer veure com es pot treballar en teoria de grafs planaris i de quina forma entren en joc els diversos resultats teòrics que ja s'han exposat prèviament; volem també que el lector adquireixi habilitats en aquest tipus de problemes i en com modelitzar, en el marc de la teoria de grafs planaris, determinats problemes, que en principi en semblen allunyats, com ara problemes combinatoris de disseccions geomètriques (que posteriorment es tornaran a tractar, des d'altres punts de vista) o problemes de geometria tridimensional relatius a estructures polièdriques.

Els objectius pel que fa al contingut a cobrir són els següents: planaritat en general, teorema de Kuratowski, fitació superior lineal de la mida i el nombre de cares, fórmula d'Euler, fórmula d'Euler per a políedres, resolució de problemes de polièdrica mitjançant teoria de grafs, tractament dels aspectes de combinatòria i de comptatge d'objectes en determinades estructures geomètriques com triangulacions o disseccions per rectes, com ja s'ha dit, cosa que és d'interès per a l'algorísmica geomètrica.

7.2 Grafs planaris: revisió teòrica i exemples

7.2.1 Aspectes bàsics

Recordem, en primer lloc, alguns conceptes relatius a corbes de Jordan, en la mesura que poden ser a la base de raonaments per estudiar la planaritat d'alguns grafs.

Corbes de Jordan en el pla. Una corba γ del pla es diu que és *de Jordan* si és contínua

i no té autointerseccions.

Les arestes d'un graf es representen mitjançant aquest tipus de corbes.

El teorema de la corba de Jordan és de molta utilitat en algunes demostracions de planaritat o de no-planaritat. Recordem-ne l'enunciat, del qual podeu veure una il·lustració a la figura 7.1:

Teorema de la corba de Jordan. Si C és una corba de Jordan tancada, aleshores $\mathbb{R}^2 - C$ es descompon en dues parts disjunctes E, I (exterior i interior, respectivament), de manera que si $x \in E$, $y \in I$, tota corba de Jordan C' d'extremes x, y talla almenys en algun punt la corba de Jordan C .

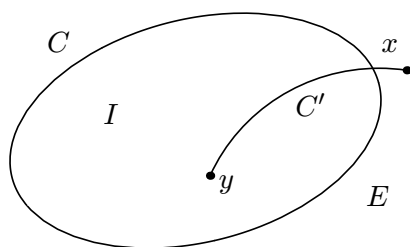


Figura 7.1

Representacions d'un graf en el pla. Com és sabut, un graf $G = (V, A)$ és una estructura combinatoria abstracta que expressa unes relacions (arestes) entre elements d'un conjunt donat (vèrtexs). Malgrat aquesta visió abstracta, moltes vegades representem el graf en el pla, d'acord amb el criteri usual: els vèrtexs es representen per punts del pla i les arestes es representen mitjançant corbes que uneixen punts que representen vèrtexs. A la teoria de grafs planaris estem interessats per les propietats d'aquestes representacions en el pla.

Una representació plana d'un graf és una representació en el pla si les arestes no es creuen en punts diferents dels vèrtexs. Un graf és planari si admet alguna representació plana, com es pot veure, per exemple, en els casos de K_4 , C_n , T_n o qualsevol arbre.

No tot graf admet una representació plana i, per tant, no tot graf és planari. No són planaris, per exemple, els grafs K_5 i $K_{3,3}$. Aquest resultat es demostra formalment, cosa que veurem com a exemple posteriorment, però és fàcil convèncer-se de l'afirmació (tot i que això no demostra res!) efectuant diverses maniobres combinatories per intentar dibuixar planàriament els grafs indicats, maniobres que acaben en fracàs, com es pot

veure en alguns esquemes, com els de la figura 7.2.

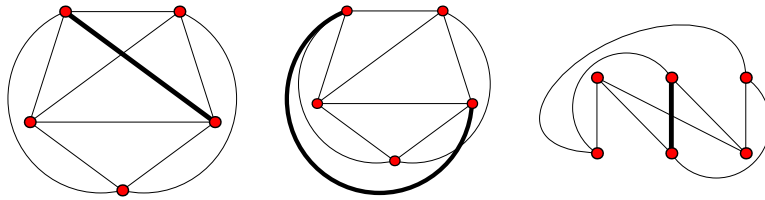


Figura 7.2

Els grafs K_5 i $K_{3,3}$ no són uns simples exemples de no-planaritat. De fet, juguen un paper fonamental en la caracterització de la planaritat, ja que el teorema corresponent (teorema de Kuratowski) es formula en termes de K_5 i $K_{3,3}$.

Cares d'un graf planari. Un concepte lligat a una representació plana d'un graf planari és el de *cara*, que només té sentit en la teoria de grafs planaris. Si tenim un graf planari i considerem una representació planària, es produeix una dissecció del pla. Les parts connexes bidimensionals són les cares.

Existeix una única cara no fitada, que denotarem per C_∞ . A la figura 7.3 en tenim un exemple. A part dels vèrtexs i les arestes, podem parlar de *cares* de la representació planària, entre les qual s'inclou l'única no fitada, que indiquem per C_∞ .

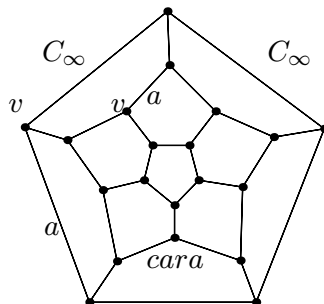


Figura 7.3. Observeu com la frontera de la cara no fitada C_∞ és un polígon, concretament un pentàgon.

No sempre les cares són poligonals, com es veu als exemples següents de la figura 7.4.

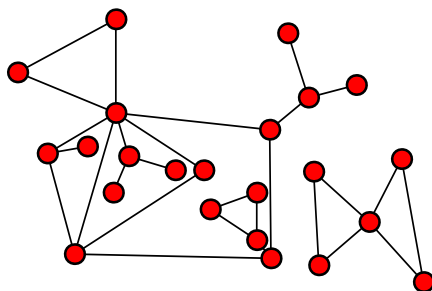


Figura 7.5. Exemples de grafs planaris **no** poligonals; en el graf de la dreta la frontera de la cara C_∞ no és poligonal.

En el còmput del nombre de cares, hi és normalment comptada la C_∞ , i així ho supo-

sarem sempre, llevat d'indicació en sentit contrari.

En el graf de la figura 7.6 veiem un exemple de quines serien les cares.

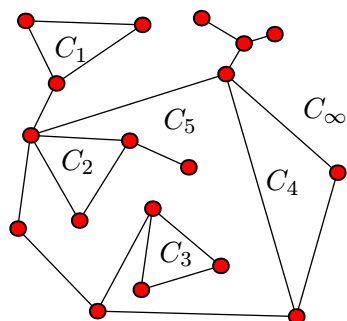


Figura 7.6

7.2.2 Caracterització del grafs planaris

Existeix una caracterització de la planaritat donada pel teorema de Kuratowski. Abans d'enunciar-lo cal de recordar algunes definicions.

Subdivisió elemental. Descrivim intuïtivament una operació que es pot fer en un graf per obtenir-ne un de nou. Donat un graf, una *subdivisió elemental d'una aresta* és la inserció d'un vèrtex de grau 2 a l'aresta. En podem veure un exemple als grafs de la figura 7.7, on veiem el resultat d'efectuar diverses operacions de subdivisió elemental del graf de l'esquerra.

Homeomorfisme de grafs. Es diu que dos grafs són *homeomorfs* si són o bé isomorfs o bé ambdós provenen d'un graf, ancestre comú, per subdivisió elemental d'arestes (l'ancestre pot ser eventualment un d'ells, i aleshores l'altre ha derivat del primer per iteració de subdivisions elementals). Per exemple, els dos grafs de la dreta de la figura 7.7 no són isomorfs, però en canvi són homeomorfs, ja que es poden obtenir per seqüències de subdivisions elementals a partir d'un mateix graf, el de l'esquerra (que resulta ser també homeomorf a qualsevol dels altres dos).

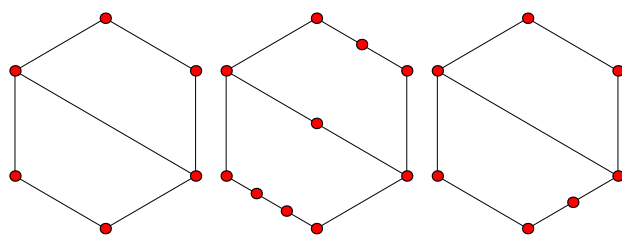


Figura 7.7

Teorema de Kuratowski. El teorema de Kuratowski caracteritza completament la planaritat en termes dels grafs $K_{3,3}$ i K_5 .

Teorema 7.1 *Un graf és planari si i només si no conté cap subgraf homeomorf a K_5*

o a $K_{3,3}$.

7.2.3 El graf dual

Donat un graf planari connex G , sense 2-cicles ni llaços, i una representació plana del graf, es pot realitzar la construcció del graf (pseudograf) dual G^* de la manera següent: els vèrtexs del nou graf corresponen a les cares del graf inicial i dos vèrtexs són adjacents si i només si les cares corresponents compartien una aresta. Si els graus són com a mínim 3, les cares del dual són “com a mínim triangles”. Si hi ha vèrtexs de grau 2, aleshores es crea al dual un 2-cicle. A la figura 7.8 es mostra el procés de construcció.

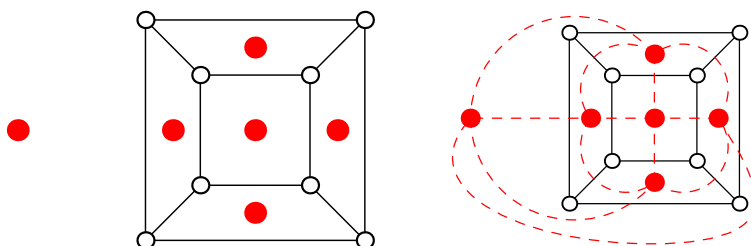


Figura 7.8

Per a la resolució de problemes és interessant veure que el nombre d'arestes de la frontera d'una cara poligonal és el grau del vèrtexs corresponent al graf dual, i viceversa, cosa que és útil per convertir problemes d'un tipus a l'altre. Així, per exemple, si un graf planari té totes les cares pentagonals, el dual és 5-regular. O, per exemple, si tenim un enunciat com el següent: *Sigui G un graf connex i planari amb $c < 12$, on c és el nombre de cares, i tal que tots els vèrtexs tenen grau ≥ 3 . Proveu que existeix una cara limitada per 4 arestes com a màxim*, aleshores provarem el resultat si provem que en el graf dual existeix algun vèrtex de grau ≤ 4 .

Al capítol 1 hem presentat exemples d'ús del graf dual.

7.2.4 La fórmula d'Euler

La fórmula d'Euler és un resultat per a grafs planaris connexos.

Teorema 7.2 *Sigui $G = (V, A)$ un graf planari connex, amb v vèrtexs, a arestes i c cares (comptant-hi la no fitada C_∞). Aleshores es compleix*

$$c + v = a + 2 \quad (7.1)$$

Si el graf no és connex, amb k components connexos, aleshores $c + v = a + k + 1$ n'és una generalització. Observem que, si $k = 1$, s'obté la fórmula que ja teníem: $v + c = a + 2$.

7.2.5 Fitació superior de la mida i del nombre de cares

Un resultat important de la teoria de grafs planaris és el que segueix. És fonamental en la resolució de molts problemes, en especial la primera de les desigualtats.

Teorema 7.3 *Per a un graf planari amb n vèrtexs, a arestes i c cares (comptant-hi la no fitada C_∞) es compleixen les relacions següents:*

1. $a \leq 3n - 6$.
2. $c \leq 2n - 4$.

Es pot formular, de fet, un resultat més general:

Teorema 7.4 *Per a un graf planari, connex, d'ordre n , mida a , tal que totes les cares tenen una frontera formada per $k \geq 3$ arestes com a mínim, es compleix $a \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$.*

7.3 Com estudiar si un graf és planari...

Un dels problemes típics que es poden donar és decidir si un graf és planari o no, amb mètodes artesans, sense l'aplicació de cap algorisme (hi ha algorismes per tractar el problema, però estan fora del nostre interès en aquesta publicació). Una idea general que pot guiar els nostres intents és suposar que el graf és planari, aplicar propietats i relacions que es compleixen per planaritat i arribar a algun tipus de contradicció, i així provar que no és planari, si aquest és el cas.

7.3.1 Dibuixeu i experimenteu

En algunes ocasions en què el graf és planari, si no és molt complicat se'n pot intentar fer una representació planària en el pla, modificant convenientment la posició de determinats vèrtexs clau.

Problema 7.1

Dibuixeu en forma planària el graf de la figura 7.9.

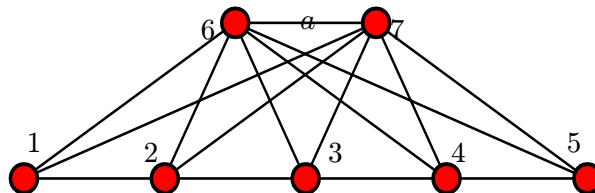


Figura 7.9

Resolució

La il·lustració de la figura 7.10 presenta una possible representació plana del graf.

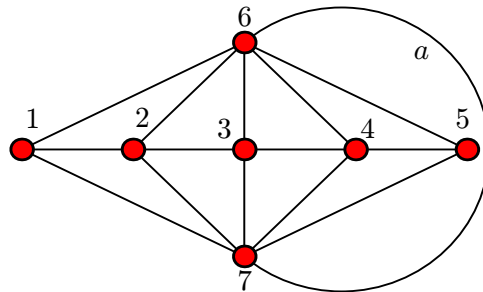


Figura 7.10

Problema 7.2

Dibuixeu en forma planar el graf de la figura 7.11.

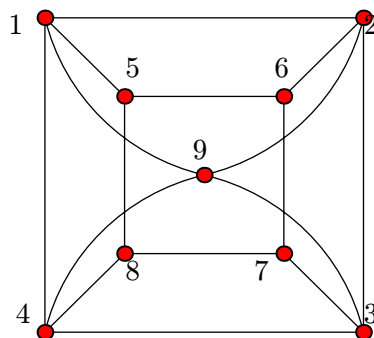


Figura 7.11

Resolució

La il·lustració de la figura 7.12 presenta una possible representació plana del graf.

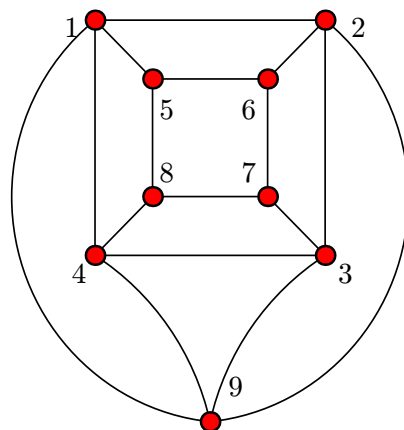


Figura 7.12

S'exposen a continuació diversos mètodes que es poden intentar per demostrar la no planaritat.

7.3.2 Apliqueu el teorema de la corba de Jordan

Vegeu un exemple d'aplicació del teorema de la corba de Jordan per provar que un graf és no planari. Concretament, demostrem que el graf $K_{3,3}$ és no planari.

Problema 7.3

Proveu que el graf $K_{3,3}$ no és planari (mètode 1).

Resolució

Considerem l'esquema de la figura 7.13 (subfigura dreta), en el qual distribuïm el màxim nombre de vèrtexs en un cicle C , és a dir, tots els vèrtexs en aquest cas, representant d'aquesta manera planàriament un subgraf del graf (1-4-2-5-3-6). Integrem successivament en la representació planària les arestes 1-5, 2-6. Resta per situar l'aresta 3-4. Els vèrtexs 3,4 pertanyen, respectivament, a regions diferents d'entre les dues determinades per la corba de Jordan tancada C' , donada per 1-5-2-6-7-1. Pel teorema de Jordan, qualsevol corba de Jordan que connecti els vèrtexs 3,4 interseca necessàriament la frontera de C' (vegem a la figura 7.13 una il·lustració d'una de les diverses possibilitats). Això demostra que el graf no és planari.

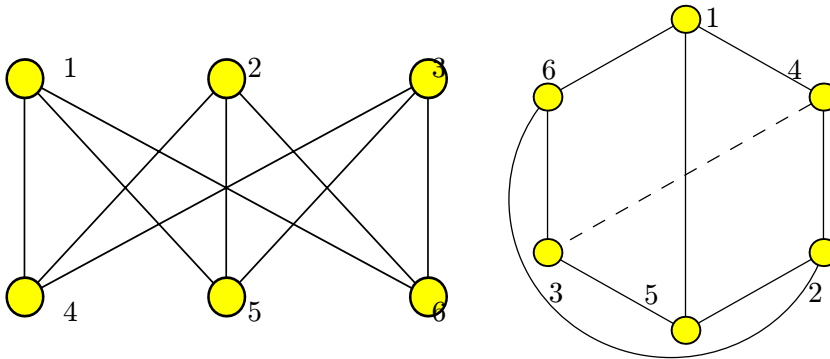


Figura 7.13

7.3.3 Apliqueu contracció d'arestes

Il·lustrem a continuació el mètode de contracció d'arestes per veure que un graf no és planari. Concretament, provarem que *el graf de Petersen no és planari*. La idea bàsica és que l'operació de contracció d'arestes no destrueix la planaritat, de manera que, si s'aplica a un graf planari, el graf o pseudograf resultant també ha de ser planari.

Problema 7.4

Proveu que el graf de Petersen no és planari (mètode 1).

Resolució

En el cas del graf de Petersen, es contrauen les arestes amb gruix que s'indiquen a la figura 7.14. Si el graf de Petersen fos planari, també ho seria el resultat de la contracció múltiple. Ara bé, el resultat és precisament K_5 , que no és planari, com és ben sabut.

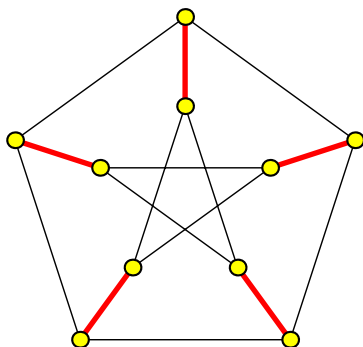


Figura 7.14

7.3.4 Apliqueu el teorema de Kuratowski

Vegem uns exemples d'utilització de la caracterització donada pel teorema de Kuratowski.

Problema 7.5

Estudieu si els grafs de la figura 7.15 són planaris.

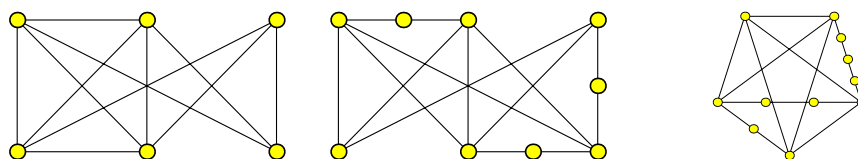


Figura 7.15

Resolució

Una simple inspecció ocular ens convenç que el graf de l'esquerra conté un subgraf $K_{3,3}$, que el del centre conté un subgraf homeomorf a $K_{3,3}$ i que el de la dreta és homeomorf a K_5 i, en conseqüència, no són planaris.

Podem utilitzar el teorema de Kuratowski per estudiar (per una via alternativa a l'anterior) si el graf de Petersen és planari o no:

Problema 7.6

Proveu que el graf de Petersen no és planari (mètode 2).

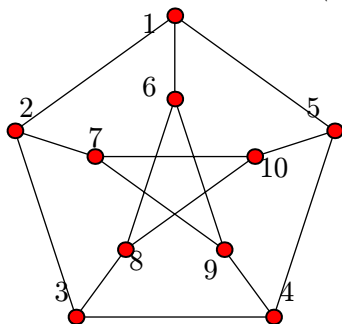


Figura 7.16

Resolució

Efectuarem diverses manipulacions de construcció gràfica en el pla fins que resulti obvi que el graf de Petersen conté un subgraf homeomorfe a $K_{3,3}$ i, en conseqüència, no pot ser planari. A la figura 7.17 es redibuixa en forma alternativa el graf de Petersen.

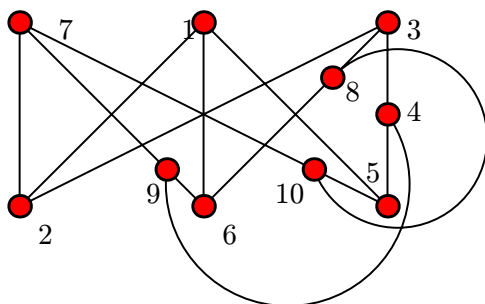


Figura 7.17

El graf de Petersen conté el subgraf de la figura 7.18, que és homeomorfe a $K_{3,3}$.

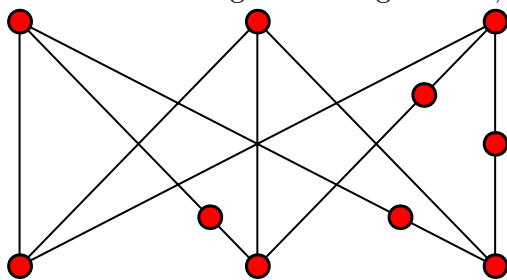


Figura 7.18

Problema 7.7

Demostreu que, en un graf planari, en tota col·lecció de 5 vèrtexs n'hi ha com a mínim dos que no són adjacents.

Resolució

Considerem una col·lecció de 5 vèrtexs en el graf planari. Si tots fossin adjacents dos a dos, aleshores el subgraf generat seria K_5 i, pel teorema de Kuratowski de caracterització de grafs planaris, no ho podria ser. Per tant, hi ha d'haver un mínim de 2 vèrtexs no adjacents.

7.3.5 Apliqueu la fitació superior del nombre d'arestes

Podem proposar una prova de la no-planaritat de K_5 diferent de la clàssica, no aplicant el teorema de la corba de Jordan.

Problema 7.8

Proveu que K_5 no és planari (mètode 2).

Resolució

En efecte, si K_5 fos planari, es compliria $a \leq 3n - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Ara bé, en aquest cas és $a = \binom{n}{2} = \binom{5}{2} = 10$, la qual cosa és una contradicció.

Aquest mètode no sempre funciona. Per exemple, si volguéssim aplicar-lo en aquesta forma a la demostració de la no-planaritat de $K_{3,3}$, no arribaríem a cap contradicció, ja que $9 = a \leq 3n - 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 12$. Però en podem aplicar una versió més forta en aquest cas:

Problema 7.9

Proveu que $K_{3,3}$ no és planari (mètode 2).

Resolució

Essent $K_{3,3}$ bipartit, tots els cicles són de longitud parella (també es pot veure directament per a aquest graf en particular, sense recórrer a la condició de bipartit) i, en conseqüència, els cicles estan formats com a mínim per 4 arestes. Si el graf fos planari, existiria una representació plana tal que la frontera de cada cara tindria, com a mínim, $k = 4$ arestes. Ara, aplicant la fórmula general que ens dóna una fitació del nombre d'arestes, podem escriure $a \leq \frac{k}{k-2}(n-2) = \frac{4}{4-2}(6-2) = 8$, però $a = 9$, contradicció.

Tampoc no funcionaria intentar utilitzar la desigualtat $a \leq 3n - 6$ per demostrar alternativament que el graf de Petersen no és planari, com es pot comprovar immediatament, però podem aplicar la generalització d'aquesta fórmula:

Problema 7.10

Proveu que el graf de Petersen no és planari (mètode 3).

Resolució

Si el graf de Petersen fos planari, s'hauria de complir $a \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$. Ara bé, per a aquest graf es pot prendre $k = 5$, que és la mínima de les longituds dels cicles, i aleshores s'arriba a una contradicció, ja que $a = 15$ i, en canvi, $a \leq \frac{k}{k-2}(n-2) = \frac{5}{3}(10-2)$, d'on $a \leq 13$.

7.4 Comptar en geometria i teoria de grafs planaris

En algorísmica geomètrica, en CAD o, simplement, en geometria, és necessari moltes vegades comptar objectes i subobjectes d'una determinada configuració. En molts casos, aquests problemes es poden formular en termes de la teoria de grafs planaris.

Presentarem tres tipus de problemes: les disseccions del pla, les triangulacions del pla i els políedres (deformables a esfera).

Algunes de les idees que es presenten aquí s'han presentat als capítols dedicats a inducció (2), a la introducció (1), i es tornaran a tractar en el capítols posteriors de combinatòria (8, 10).

Disseccions geomètriques

En geometria, podem considerar *configuracions geomètriques* formades per rectes, plans, rectangles, circumferències, esferes o altres objectes menys "regulars". Aquestes configuracions descomponen l'espai en parts i produeixen el que anomenarem *disseccions geomètriques*, com es pot veure en algunes de les il·lustracions de les figures 7.19 i 7.20.

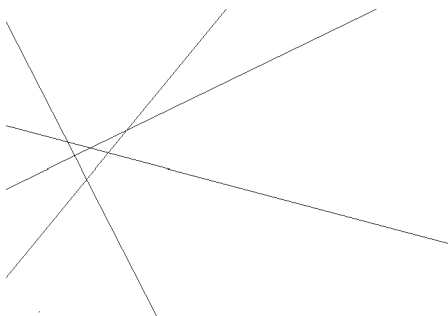


Figura 7.19. Dissecció geomètrica en el pla creada per un conjunt de rectes. Aquesta estructura s'anomena *arranjament*. En aquest cas, no correspon a un graf planari.

Els objectes que generen disseccions poden ser més complexos, com per exemple cercles (figura 7.20).

Aquestes configuracions generen disseccions geomètriques de l'espai, donen lloc a elements geomètrics tals com *vèrtexs*, *cares* i *arestes*, i pot ser d'interès saber-los *comptar*

o almenys avaluar-ne l'ordre de magnitud o tenir-ne alguna fita superior (vegeu la figura 7.20). Aquesta presentació és intuïtiva, però no anirem més enllà en la definició formal dels conceptes de cara, vèrtexs i arestes, lligats essencialment a la dimensió.

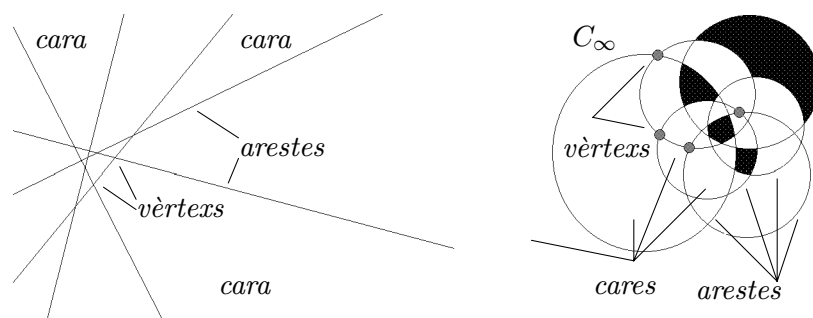


Figura 7.20. Disseccions amb vèrtexs, arestes, cares (algunes les hem indicat gràficament omplint-les de negre), algunes fitades i d'altres no. En el cas que hi hagi una única cara no fitada, la indicarem per C_∞ . En el cas de les circumferències, la dissecció es pot veure com un graf planari.

A la dissecció per rectes en el pla es formen vèrtexs (interseccions de rectes), “arestes” (segments i semirectes) i “cares”, que poden ser fitades o no. A la dissecció per circumferències es formen vèrtexs, arestes (arcs de circumferència), totes fitades i “cares” (parts del pla limitades per arestes).

En aquest tipus de dissecció hi ha una única cara no fitada; la resta són cares fitades.

Moltes disseccions planes són de fet grafs planaris i, per tant, els seran aplicables la fórmula d'Euler i altres relacions. Vegem-ne un exemple a continuació.

Problema 7.11

Es considera la figura 7.21 formada per un cercle sobre el qual tracem n segments, amb els extrems situats sobre la circumferència corresponent, que poden intersecar-se o no, de tal manera que no comparteixen extrems sobre la circumferència, és a dir, que cada extrem ho és només d'un segment. Suposem que es produeixen p interseccions dels segments a l'interior del cercle i que cada intersecció ho és d'exactament 2 segments diferents (és a dir, que no hi ha 3 segments que passin pel mateix punt). Es tracta de

calcular el nombre de regions internes que es formen.

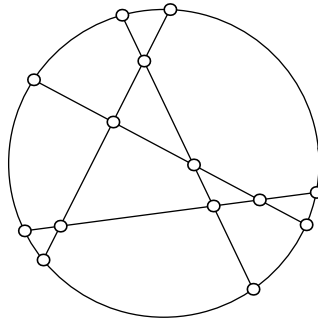


Figura 7.21

Resolució

Calculem el nombre de vèrtexs v : hi ha p vèrtexs interiors a la circumferència, i $2n$ sobre la circumferència. Per tant, $v = 2n + p$. Pel que fa al nombre d'arestes a raonem de la manera següent: p vèrtexs interiors aporten 4 arestes cadascun (les incidents amb cada vèrtex) i els $2n$ vèrtexs perifèrics n'aporten 3 cadascun. Ara bé, comptant d'acord amb aquesta idea, comptem duplicadament totes les arestes, ja que cada aresta hi és comptada per cada un dels seus dos extrems, que són vèrtexs; per tant, $4p + 3(2n) = 2a$, d'on resulta $a = 3n + 2p$. Ara aplicarem la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$ i, per tant, $c = (3n + 2p) + 2 - (2n + p) = n + p + 2$. Finalment, el nombre de cares interiors c_i serà $c_i = c - 1 = n + p + 1$. També es pot calcular immediatament el nombre d'arestes interiors, ja que de perifèriques n'hi ha $2n$ i, en conseqüència, d'interiors n'hi haurà $a_i = a - 2n = n + 2p$.

En cas que totes les cares, la no fitada inclosa, siguin triangulars, aleshores es pot obtenir un resultat més precís que les desigualtats enunciades amb anterioritat, i les desigualtats del teorema anterior es converteixen en igualtats:

Problema 7.12

Per a un grafi planari connex amb n vèrtexs, a arestes i c cares (comptant-hi la no fitada C_∞), amb totes les cares triangulars, es compleixen les relacions següents: $a = 3n - 6$ i $c = 2n - 4$.

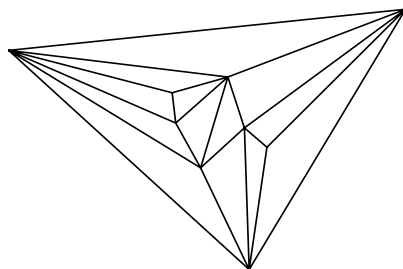


Figura 7.22

Resolució

Podem fer una argumentació directa tenint en compte que totes les cares són triangulars i, en conseqüència cada cara “aporta” 3 arestes, les de la frontera, al còmput general d’arestes, que d’aquesta manera resulten comptades duplicadament i, en conseqüència, $3c = 2a$, $c = \frac{2}{3}a$, que utilitzem a la fórmula d’Euler:

$$a + 2 = c + n = \frac{2}{3}a + n,$$

Operant a partir de $a + 2 = \frac{2}{3}a + n$ i simplificant s’obté la relació que volíem: $a = 3n - 6$.

Pel que fa a la segona de les igualtats, utilitzant novament la fórmula d’Euler i la igualtat anterior: $c + n = a + 2 = (3n - 6) + 2 = 3n - 4$, d’on $c = 2n - 4$.

7.4.1 Arranjaments o disseccions planes per rectes

Hi ha un tipus especial de dissecció plana anomenada *arranjament de rectes*. Un arranjament de n rectes és la dissecció produïda per n rectes del pla en *posició general*. Direm que un conjunt de rectes estan en posició general si es compleix: (1) no n’hi ha dues de paral·leles i (2) no n’hi ha tres que passin per un mateix punt.

En particular, això significa que els vèrtexs són interseccions d’exactament dues rectes, cada parella de rectes es tallen (tota recta talla totes les altres). En podem veure un exemple a les figures 7.20 i 7.19. Els vèrtexs són les interseccions de les rectes, les arestes són els segments i les semirectes.

Aquesta configuració garanteix el màxim nombre de subobjectes: el màxim de vèrtexs, d’arestes i de cares. En particular, amb aquesta configuració és més fàcil calcular el nombre d’aquests subobjectes de la dissecció; per al cas de posició no general (posició degenerada), aquests nombres són fites superiors (figura 7.23).

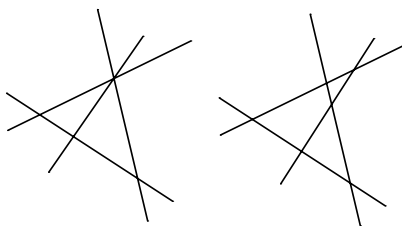


Figura 7.23

El que ens pot interessar calcular és el nombre de vèrtexs, arestes i cares de la dissecció. El càlcul d’aquestes quantitats per mètodes directes es realitza als capítols de combinatòria, al de successions recurrents ($v_n = \binom{n}{2}$, $a_n = n^2$ i $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$). També n’hem vist algun resultat al capítol d’inducció (cap. 2). Ara bé, vegem com es pot utilitzar la teoria de grafs planaris per calcular el nombre de cares un cop coneguts el nombre de vèrtexs i el nombre d’arestes (secció 7.5.6).

7.4.2 Triangulacions

Un cas particular de dissecció geomètrica en el pla és una triangulació d'un polígon simple (de contorn sense autointerseccions) i sense forats.

Donat un polígon P , una *diagonal interna* és un segment determinat per dos vèrtexs no consecutius continguts en el polígon, com a la figura 7.24.

Una *triangulació d'un polígon* és una descomposició del polígon en reunió de triangles obtinguda mitjançant diagonals internes (vegeu la figura 7.24). En particular, això significa que els triangles no se solapen sinó és en conjunts d'àrea nul·la (vèrtexs o arestes).

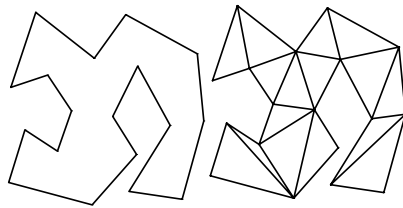


Figura 7.24

Se suposa que *no* s'utilitzen punts interns auxiliars, sinó només els vèrtexs del polígon per traçar les diagonals internes.

Podem afirmar alguna cosa sobre el nombre de triangles i de diagonals internes de qualsevol triangulació d'un polígon simple?

Formulem un model en termes de teoria de grafs planaris per tal d'obtenir propietats de les triangulacions a partir de la teoria de grafs planaris. Aquest és també un exemple de modelització:

Graf associat a una triangulació d'un polígon simple. Suposem que tenim una triangulació del polígon P , formada per triangles i diagonals internes. Això determina una descomposició planària del pla, és a dir, una estructura de graf planari poligonal (connex) $\mathcal{T} = (V, A)$ on els vèrtexs V són els vèrtexs dels polígons, les arestes A del graf són els costats del polígon i les diagonals internes de la triangulació i les cares C són els triangles més l'exterior del polígon, que s'assimila a la cara no fitada C_∞ .

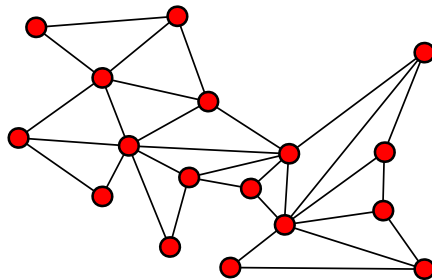


Figura 7.25

Nombre de triangles i diagonals. L'enunciat següent és sorprenent, ja que afirma que, per a un polígon simple fixat, totes les triangulacions tenen el mateix nombre de triangles i de diagonals internes. Dit d'una altra manera, aquest nombre és independent de les peculiaritats de la forma del polígon i també de la triangulació concreta (pot haver-n'hi més d'una) i només depèn del nombre de vèrtexs.

Problema 7.13

Tota triangulació d'un polígon simple P de n costats té exactament $n - 2$ triangles i $n - 3$ diagonals internes.

Resolució

La idea és aplicar la fórmula d'Euler al graf de la triangulació. Sigui una triangulació del polígon P de n costats, formada per t triangles i m diagonals internes, i sigui $\mathcal{T} = (V, A)$ el graf planari poligonal corresponent a la triangulació, amb \mathcal{C} com a conjunt de les cares, la no fitada inclosa.

Aleshores tenim

$$v = |V| = n, \quad a = |A| = n + m, \quad c = |\mathcal{C}| = t + 1.$$

Comptem les arestes del graf de la manera següent, com a arestes "aportades" per cada triangle: cada triangle aporta al còmput general 3 arestes, que es compten repetidament 2 vegades per a les que són frontera comuna de 2 triangles, i només una vegada pel que fa a les fronteres amb C_∞ . Per tant, si a $3t$ li sumem les arestes del polígon (per acabar de "fer el pes") haurem duplicat el nombre d'arestes, és a dir, $2a = 3t + n$, d'on podem escriure $a = \frac{1}{2}(3t + n)$. Substituint ara els valors anteriors a la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$ podem escriure

$$(t + 1) + n = \frac{3t + n}{2} + 2,$$

d'on resulta $t = n - 2$.

Finalment, substituint pel valor que acabem d'obtenir

$$n + m = a = \frac{3t + n}{2} = \frac{3(n - 2) + n}{2} = 2n - 2,$$

resulta el que volíem: $m = n - 3$.

7.4.3 Políedres i grafs planaris

El tema que ens ocupa s'ha tractat anteriorment; remetem el lector al capítol 1.

Donem per suposat que el lector coneix els objectes geomètrics tridimensionals denominats políedres, objectes sòlids limitats per superfícies formades per polígons i amb determinades regles de bona formació; ens limitarem a aquells que són deformables a esfera, cosa que en particular vol dir que s'exclouen les superfícies sòlides, limitades per polígons, però amb forats "que travessen completament" el sòlid. No cal que siguin necessàriament convexos; per exemple, els políedres estrellats estan en la categoria dels "topològicament deformables" o homeomorfs a esfera i, en canvi, no convexos.

En aquestes estructures geomètriques podem observar tres elements: les *cares*, que són els polígons de la superfície limitant, les *arestes*, que són els segments frontera comuna de dues cares, i els *vèrtexs*, interseccions d'arestes.

El graf d'un políedre. Donat un políedre, es pot definir l'anomenat graf del políedre, que és el graf que té com a vèrtexs els vèrtexs del políedre, i dos vèrtexs són adjacents en el graf si i només si són extrems d'una aresta del políedre.

Però podem anar encara més lluny i fer correspondre a tot políedre (deformable a esfera) un graf planari, mitjançant una projecció que passi de l'espai 3D al pla. La formalització d'aquesta correspondència es pot fer tècnicament amb l'anomenada *projecció estereogràfica*, que descrivim a continuació. Amb aquesta projecció els vèrtexs, les arestes i les cares del políedre donen lloc, respectivament, als vèrtexs, les arestes i les cares del graf planari associat.

Projecció estereogràfica. Amb una projecció adequada (tècnicament, una projecció possible és la *projecció estereogràfica*), podem traslladar l'estructura de connectivitat del políedre (vèrtexs, arestes i cares) al pla, i així formar una dissecció plana i traslladar a propietats dels políedres algunes propietats que es puguin obtenir a la dissecció. En aquesta projecció tenim una esfera i un pla de projecció. El pla de projecció és tangent a la superfície esfèrica per un punt, que podem considerar "pol sud". El centre de projecció és el punt diametralment oposat o "pol nord" N i la projecció de qualsevol punt $P \neq N$ de l'esfera és la intersecció del pla amb la recta NP .

N'hi ha prou de saber que aquest procés és possible. A la pràctica, no cal realitzar per a cada cas la projecció estereogràfica efectiva: podem suposar que està fet i utilitzar per a políedres algunes propietats dels grafs planaris.

Problemes de políedres i problemes de planaritat

En virtut d'aquesta correspondència que es pot establir a través de la projecció estereogràfica, es poden traslladar resultats de la teoria de grafs planaris a políedres a l'espai, com són per exemple la fórmula d'Euler i les fitacions vàlides per a la mida i el nombre de cares.

Molts d'enunciats de grafs planaris donen lloc a enunciats relatius a políedres, i a l'inrevés.

Molts problemes (combinatoris, no mètrics) es poden tractar com a grafs planaris i es poden convertir a problemes dins d'aquesta teoria, cosa que recomanem al lector com a estratègia per a la resolució de problemes combinatoris i d'estructura en políedres.

Fórmula d'Euler i fitacions derivades per a políedres

Com a conseqüència del que s'ha dit, la fórmula d'Euler es pot traslladar a políedres deformables a esfera:

Teorema 7.5 *En els condicions anteriors, si C és el nombre de cares, A el nombre d'arestes i V el nombre de vèrtexs, aleshores*

$$C + V = A + 2 \quad (7.2)$$

En general, també són vàlides les desigualtats $A \leq 3V - 6$, $C \leq 2V - 4$. Si totes les cares són triangles, aleshores hi ha igualtat (això succeeix, per exemple, en el cas de l'icosàedre).

Exemple . Si ens diuen que el dodecàedre té 20 vèrtexs i 12 cares, el nombre d'arestes no pot ser altre que $a = c + v - 2 = 30$, i això també és vàlid per a qualsevol deformació "topològica" de la figura.

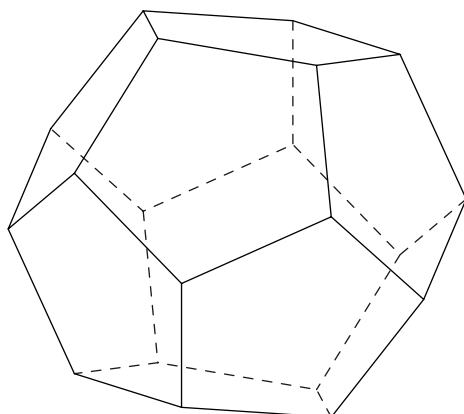


Figura 7.26

Problema 7.14

Demostreu que, per a un políedre, són equivalents les igualtats $A = 3V - 6$ i $C = 2V - 4$.

Indicació. Substituiu a la fórmula d'Euler.

Problema 7.15

Considerem un políedre convex de 10 vèrtexs tal que cada vèrtex és incident amb 3 arestes. Calculeu el nombre de cares i d'arestes. Proposeu algun exemple de políedre amb aquestes característiques.

Resolució

En efecte, considerem un graf planari poligonal associat, per al qual $v = 10$. Comptem el nombre d'arestes a partir de les que “aporta” cada vèrtex, que és precisament 3. Ara bé, aquesta manera de comptar ens dóna el doble del nombre d'arestes, de manera que podem escriure $3v = 2a$, d'on $a = 15$. Ara apliquem la fórmula d'Euler per obtenir $c = a + 2 - v = 7$. El cub escapçat de la figura 7.27 demostra que existeixen políedres amb aquestes característiques.

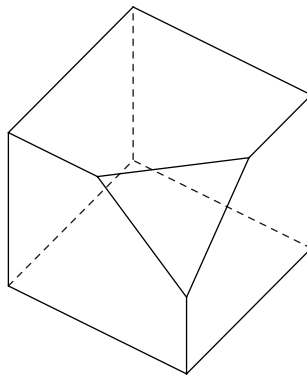


Figura 7.27

Políedres regulars. Direm que un políedre és “regular” si tots els vèrtexs són incidents al mateix nombre d'arestes i totes les cares són polígons del mateix tipus. Aquest és un concepte topològic de políedre regular, on només interessa la forma de les cares i les connectivitats entre vèrtexs i, per tant, s'admet deformació. Si, a més, s'exigeix que les cares siguin polígons regulars del mateix tipus, aleshores estem fent intervenir aspectes mètrics i obtenim els *políedres regulars en sentit clàssic*, dels quals es pot demostrar que n'existeixen cinc i no més.

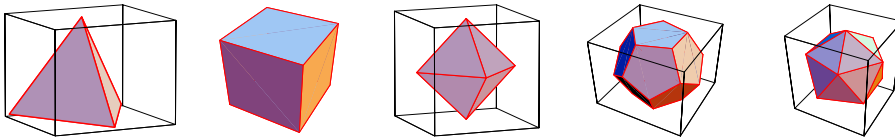


Figura 7.28

Problema 7.16

Demostreu que els únics políedres regulars que existeixen són el cub, el tetraèdre, l'octaèdre, el dodecàedre i l'icosaèdre.

Resolució

Només tractarem parcialment els aspectes combinatoris del problema. Formulem el problema en termes de teoria de grafs, considerant el graf planari corresponent a un políedre regular. Atès que en un políedre regular tots els vèrtexs són incidents al mateix nombre d'arestes, el graf corresponent és regular, r -regular, per exemple, amb $r \geq 3$. Tots els polígons són d'un mateix tipus, cosa que significa que cada cara és poligonal, té el mateix nombre d'arestes a la frontera, m per exemple, amb $m \geq 3$. Siguin v, a, c el nombre de vèrtexs, d'arestes i de cares, respectivament.

Comptem les arestes a partir de les que aporten els vèrtexs, cosa que condueix a la relació $rv = 2a$, o equivalentment $v = \frac{2}{r}a$. Ara podem comptar-les com a arestes aportades per les cares i podem escriure $2a = mc$, o bé $c = \frac{2}{m}a$.

Si substituïm a la fórmula d'Euler:

$$0 < 2 = c + v - a = \frac{2}{m}a + \frac{2}{r}a - a = a\left(\frac{2r - mr - 2m}{mr}\right).$$

Essent $a, r, m > 0$, és $2r - mr - 2m > 0$ o equivalentment $mr - 2r - 2m < 0$. Ara bé, podem reescriure $mr - 2r - 2m = (m-2)(r-2) - 4$ i, per tant, $0 < (m-2)(r-2) < 4$, ja que $m, r \geq 3$. Com que són quantitats enteres, és $1 \geq (m-2)(r-2) \geq 3$, d'on $m-2, r-2 \in \{1, 2, 3\}$. La taula que segueix descriu totes les possibilitats. S'indica a la dreta quin dels grafs dels políedres les satisfà.

$m-2$	$r-2$	m	r	v	a	c	Grafs
1	1	3	3	4	6	4	tetràedre
2	1	4	3	8	12	6	cub
1	2	3	4	6	12	8	octàedre
3	1	5	3	20	30	12	dodecàedre
1	3	3	5	12	30	20	icosàedre

Quedaria per veure que no hi ha més grafs, llevat d'isomorfisme, amb les característiques anteriors que els grafs del cub, el tetràedre, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre, respectivament. Posteriorment restaria per tractar encara l'aspecte mètric del problema.

7.5 Algunes tècniques per resoldre problemes en grafs planaris

En el que s'ha dit anteriorment ja s'han posat de manifest diverses tècniques per a la resolució de problemes en teoria de grafs. En aquesta secció procurarem sistematitzar algunes de les tècniques que ja s'han presentat.

7.5.1 Utilitzeu la fórmula d'Euler

Molts dels problemes que ens plantejarem de teoria de grafs planaris es poden tractar utilitzant la fórmula d'Euler. Sempre és convenient plantejar-se si la podem utilitzar (per exemple, quan el graf sigui connex).

Problema 7.17

Si un graf planari connex té tots els vèrtexs de grau 3, proveu que $a = 3c - 6$ i $v = 2c - 4$. Observeu que es pot formular un enunciat alternatiu en termes de políedres: si un políedre té tots els seus vèrtexs de grau 3, aleshores $A = 3C - 6$. Alguns exemples concrets són el cub, el tetràedre, el dodecàedre i el cub truncat, entre d'altres. Generalitzeu el resultat al cas r -regular, amb $r \geq 3$.

Resolució

Pel lema de les encaixades, és $3v = 2a$, d'on $v = \frac{2}{3}a$. Ara, substituint aquest valor de v a la fórmula d'Euler s'obté $a = 3c - 6$. Per obtenir l'altra igualtat, tornem a utilitzar la fórmula d'Euler substituint a per $a = 3c - 6$ i s'obté $v = 2c - 4$.

La generalització es deixa per al lector.

7.5.2 Supposeu que no és cert o que és cert... i arribeu a contradicció

Problema 7.18

Estudieu si pot existir un graf planari d'11 cares (la no fitada inclosa) amb tots els vèrtexs incidents amb 5 arestes. Observeu que es podria reformular demanant si existeix algun graf planari 5-regular d'11 cares.

Resolució

Suposem que existeix un graf amb les condicions de l'enunciat. Tenim per hipòtesi que $c = 11$ i que, del fet que tots els vèrtexs són de grau 5, comptant les arestes a través de les quals aporta cada vèrtex, es pot escriure la relació $5v = 2a$. Podem ara aplicar la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$, utilitzant les relacions anteriors i arribem a la conclusió que $v = 6$, i utilitzant novament la fórmula d'Euler o directament amb la relació $5v = 2a$ s'obté finalment la dada que faltava: $a = 15$. Ara bé, això està en contradicció amb la desigualtat $a \leq 3v - 6$ i, en conseqüència, no pot existir un graf d'aquestes característiques.

7.5.3 Utilitzeu la fita superior de la mida

Problema 7.19

Quin és el nombre mínim de vèrtexs que ha de tenir un graf planari connex 4-regular?

Resolució

Sigui $G = (V, A)$ planari connex 4-regular, amb $n = |V|$.

Com utilitzar la hipòtesi de 4-regularitat? Apliquem el lema de les encaixades, per obtenir $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} 4 = 4n$, d'on $|A| = 2n$.

Un altre resultat que podem aplicar és $|A| \leq 3n - 6$, d'on $2n \geq 3n - 6$. D'aquí resulta $n \geq 6$. A la figura 7.29 podem veure un graf amb aquestes característiques i amb el mínim dels ordres possibles, $n = 6$, cosa que resol la pregunta de si n' existeixen amb aquest ordre mínim.

Observeu que, substituint $|A| = 2n$ a la fórmula d'Euler $c + n = |A| + 2$, s'obté $c = n + 2$.

Vegeu grafs planaris connexos 4-regulars a les figures 7.29 i 7.30.

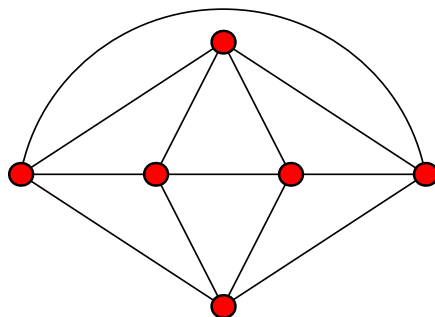


Figura 7.29

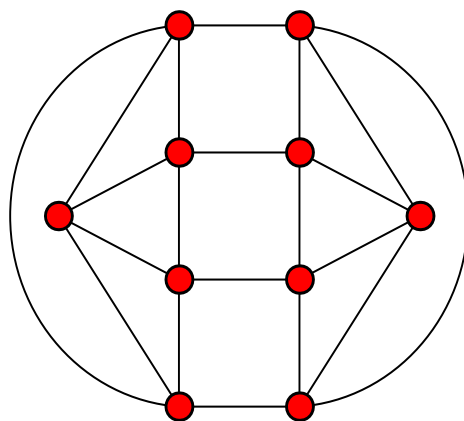


Figura 7.30

7.5.4 Compteu les arestes de dues maneres

En més d'una ocasió pot resultar útil comptar objectes, usualment arestes de dues maneres diferents, com a arestes aportades pels vèrtexs i com a arestes aportades per les fronteres de les cares. Vegem-ne un exemple.

Problema 7.20

Considerem un políedre convex tal que, per a tot vèrtex, hi ha exactament 3 arestes incidents i les cares són hexagonals o pentagonals. Proveu que ha de tenir exactament 12 cares pentagonals.

Resolució

Considerem el graf planari associat al políedre.

Siguin v, a, c el nombre de vèrtexs, d'arestes i de cares, respectivament.

Tenim, per la hipòtesi de ser cada vèrtex incident amb 3 arestes, que $3v = 2a$. Això és conseqüència d'aplicar el lema de les encaixades o bé, indirectament, calculant el nombre d'arestes comptant les incidents amb cada vèrtex, però aleshores es compten per duplicat.

Atès que hi ha dos tipus de cares, sembla raonable fer una distinció formal entre ambdós tipus, distinció que ens permetrà operar i escriure relacions. Sigui c_5 el nombre de cares pentagonals i c_6 el nombre de cares hexagonals.

Aleshores, $c_5 + c_6 = c$, ja que no hi ha més cares que les pentagonals i les hexagonals.

Ara comptem el nombre d'arestes d'una altra manera, a partir de les que aporta cada cara a la frontera, tenint en compte que així també es compten per duplicat, ja que cada aresta és compartida per dues cares exactament, de les quals és aresta comuna (i és comptada dues vegades, una per cada cara a la qual pertany). Per aquest motiu, $5c_5 + 6c_6 = 2a$, d'on $a = \frac{1}{2}(5c_5 + 6c_6)$ i ara, de $3v = 2a$: $v = \frac{1}{3}(2a) = \frac{1}{3}(5c_5 + 6c_6)$, amb la qual cosa ja ho tenim tot preparat per substituir a la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$:

$$(c_5 + c_6) + \frac{1}{3}(5c_5 + 6c_6) = \frac{1}{2}(5c_5 + 6c_6) + 2$$

Operant a la igualtat anterior, s'obté $c_5 = 12$, cosa que és un resultat sorprenent!

Vegem un exemple d'aquest tipus de políedres: la "pilota de futbol" (figura 7.31). També hi ha el més obvi, el dodecàedre, del qual ja no cal comptar les cares: són 12,

segons aquest resultat.

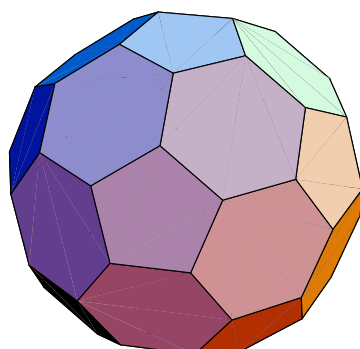


Figura 7.31

7.5.5 Passeu al graf dual

Problema 7.21

Sigui G un graf planari connex amb $c < 12$ (c és el nombre de cares) i tal que tots els vèrtexs són de grau superior o igual a 3. Proveu que existeix una cara limitada per 4 arestes, com a màxim.

Resolució

Essent tots els vèrtexs de grau superior o igual a 3 garantim que en el dual no hi ha llaços ni cares formades per dues arestes, sinó que les cares del dual són, com a mínim, triangulars. Això garanteix que no és ni un multigraf ni un pseudograf. Considerem, doncs, G^* el graf dual, d'ordre $p = c < 12$.

Hem de veure que existeix en el dual algun vèrtex w de grau $g_{G^*}(w) \leq 4$. Suposem que no n'hi ha cap, és a dir, que per a tot vèrtex u del dual, $g_{G^*}(u) \geq 5$.

Aplicant el lema de les encaixades podem escriure, en el dual: $2|A| = \sum_{u \in V(G^*)} g_{G^*}(u) \geq 5|V(G^*)| = 5p$. Ara bé, aplicant en el dual la desigualtat $|A| \leq 3p - 6$, resulta $5p \leq 2|A| \leq 2(3p - 6)$, d'on $12 \leq p$, cosa que és una contradicció.

Observeu que, en no haver-hi arestes múltiples, tenim garantida la validesa de la desigualtat $|A| \leq 3|V| - 6$. Observeu que, per exemple, no es compliria per a un multigraf de 2 vèrtexs connectat per una aresta múltiple.

7.5.6 Reduïu el problema a grafs planaris

En determinades ocasions, un problema no és de teoria de grafs planaris, és a dir, que en presència no tenim cap graf planari al qual puguem aplicar propietats, desigualtats, la fórmula d'Euler, per exemple. En algunes ocasions, es pot fer una construcció auxiliar que ens redueixi el problema a un problema de grafs planaris, com per exemple, en el següent, relatiu a disseccions del pla per rectes en posició general.

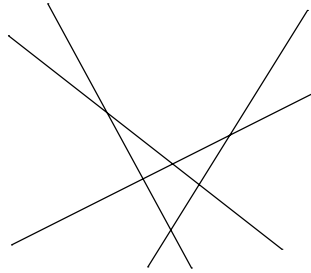


Figura 7.32

En algunes ocasions s'ha de treballar amb disseccions geomètriques planes que no corresponen exactament a grafs planaris poligonals, normalment a causa de la presència de més d'una cara no fitada, o de semirectes en comptes d'arestes, com per exemple els casos de la figura 7.32.

En aquesta situació, amb l'objectiu d'utilitzar teoremes vàlids per a grafs planaris poligonals, el que es pot fer és una construcció auxiliar d'un graf planari poligonal associat a la dissecció, aplicar els resultats a aquest graf i després obtenir-ne conseqüències per a la dissecció original (sempre que sigui possible).

Problema 7.22

Sigui \mathcal{A} una dissecció del pla per $n \geq 1$ rectes en posició general. La dissecció produeix un nombre v_n de vèrtexs, un nombre a_n d'arestes (segments de longitud no nul·la o semirectes) i un nombre c_n de regions poligonals o cares. Obteniu una relació entre c_n , a_n i v_n .

Resolució

Mètode 1. No podem aplicar directament la fórmula d'Euler a la dissecció. El que fem és construir un graf auxiliar, derivat de l'arranjament, al qual sigui aplicable la fórmula esmentada. Introduïm un vèrtex fictici W , al qual connectem totes les semirectes i així generem cares d'un graf planari poligonal ordinari corresponent a les regions de \mathcal{A} ; indiquem per \mathcal{A}' el nou graf planari poligonal, que tindrà v' vèrtexs, a' arestes i c'

cares, com es veu a la figura 7.33.

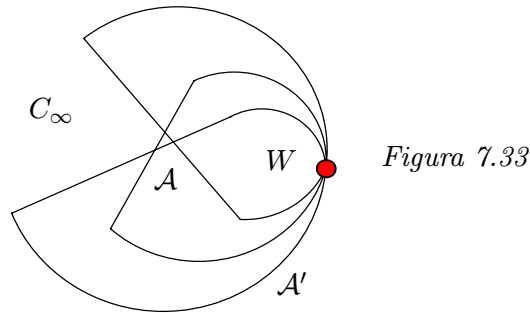


Figura 7.33

Observeu que $v' = v_n + 1$, $c' = c_n$, $a' = a_n$. Substituint a la fórmula d'Euler per a \mathcal{A}' i utilitzant els valors obtinguts prèviament, resulta:

$$\begin{aligned} c' + v' &= a' + 2 \\ c_n + (v_n + 1) &= a_n + 2 \\ c_n &= a_n - v_n + 1. \end{aligned}$$

Mètode 2. Hi ha una manera alternativa de reduir el problema a la teoria de grafs planaris. S'encercla la part de la dissecció per un cercle prou gran de manera que contingui a l'interior tots els vèrtexs de la dissecció (això es pot fer perquè hi ha un nombre finit de vèrtexs: podem agafar com a centre un vèrtex qualsevol i com a radi una longitud estrictament superior al màxim de les distàncies del centre als altres vèrtexs), creant una estructura de grafi planari similar a la de la figura 7.34, en la qual s'escapcen les semirectes i l'exterior del cercle es converteix en l'única cara C_∞ del grafi.

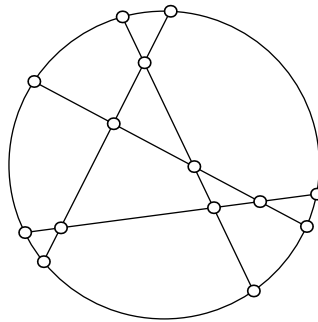


Figura 7.34

Indiquem per v'_n , a'_n , c'_n els nombres de vèrtexs, d'arestes i de cares, respectivament, de la nova estructura. S'ha produït un increment d'una cara, la no fitada, i l'aparició de nous vèrtexs i arestes sobre el contorn circular, degudes a les interseccions de les rectes. Per tant, tenim $v'_n = v_n + 2n$, $a'_n = a_n + 2n$, $c'_n = c_n + 1$ i podem ara aplicar la fórmula d'Euler a aquest grafi planari auxiliar i escriure: $c'_n + v'_n = a'_n + 2$, d'on $(c_n + 1) + (v_n + 2n) = (a_n + 2n) + 2$, d'on finalment $c_n + v_n = a_n + 1$.

L'existència d'aquesta relació ja és interessant per si mateixa. A més, i atès que el nombre de vèrtexs es pot obtenir trivialment, pot utilitzar-se per obtenir qualsevol de les quantitats c_n , a_n , coneguda l'altra.

El nombre de vèrtexs, interseccions de rectes, és fàcil de calcular. Atesa la condició que no n'hi ha dues de paral·leles, dues rectes qualssevol determinen un d'aquests vèrtexs i, per l'altra condició, cada vèrtex és intersecció d'exactament dues rectes. Per tant, els vèrtexs són exactament les interseccions de totes les parelles de rectes que es puguin formar, sense que importi l'ordre, i, en conseqüència, és $\binom{n}{2}$.

7.6 Problemes addicionals resolts

S'inclouen en aquesta secció problemes variats addicionals no classificats temàticament.

Problema 7.23

Sigui $G = (V, A)$ un graf planari (simple). Demostreu que G té un vèrtex de grau menor o igual a 5.

Resolució

Podem suposar que $|V| \geq 7$, ja que en cas contrari el resultat seria cert trivialment, atès que si un graf és d'ordre n , aleshores $g(v) \leq n - 1$, per a tot $v \in V$.

Suposem també d'entrada que el graf és connex. Així mateix, podem suposar que hi ha com a mínim dues arestes, ja que en cas contrari hi hauria trivialment vèrtexs de grau inferior a 5.

Suposem que no hi ha cap vèrtex v amb $g(v) \leq 5$. Per tant, per a tot $v \in V$, és $g(v) > 5$, o bé $g(v) \geq 6$, $\forall v \in V$.

Aleshores, d'una banda tenim, aplicant el lema de les encaixades, $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) \geq 6|V|$. D'altra banda, com que és planari connex i $|A| \geq 2$, és $|A| \leq 3|V| - 6$ i, per tant, d'ambdues desigualtats resulta:

$$6|V| \leq 2|A| \leq 6|V| - 12,$$

o bé $0 \leq -12$, conclusió que evidentment és absurda.

Per tant, ha d'existir algun $v \in V$ amb $g(v) \leq 5$.

Vegem un resultat similar a continuació.

Problema 7.24

Si un graf és planari connex, amb els vèrtexs de grau més gran o igual a 3, aleshores existeix un mínim de 4 vèrtexs de grau menor o igual a 5.

Resolució

Observem que existeixen grafs com els de la hipòtesi. Per exemple, grafs 3-connexos planaris. Qualsevol projecció estereogràfica d'un políedre (deformable a esfera) satisfarà aquestes condicions. De fet, es pot formular un resultat paral·lel per a políedres (cosa que es deixa per al lector).

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb les característiques de la hipòtesi. Sigui $V_5 = \{w \in V \mid g(w) \leq 5\}$ (eventualment buit). Tenim $V = V_5 \cup V_5^c$. Sigui $n = |V|$. Hem de veure que $|V_5| \geq 4$.

Observem que $V_5^c = \{w \in V \mid g(w) \geq 6\}$.

Apliquem, en primer lloc, el lema de les encaixades, utilitzant la partició anterior del conjunt de vèrtexs.

$$\begin{aligned} 2|A| &= \sum_{w \in V} g(w) = \sum_{w \in V_5} g(w) + \sum_{w \in V_5^c} g(w) \\ &\geq \sum_{w \in V_5} g(w) + \sum_{w \in V_5^c} 6 = \sum_{w \in V_5} g(w) + 6|V_5^c| \\ &= \sum_{w \in V_5} g(w) + 6(n - |V_5^c|). \end{aligned}$$

Ara bé, de $|A| \leq 3n - 6$ i de la desigualtat anterior podem escriure

$$\sum_{w \in V_5} g(w) + 6n - 6|V_5^c| \leq 6n - 12,$$

d'on

$$\sum_{w \in V_5} g(w) \leq 6|V_5^c| - 12,$$

Aplicant ara la propietat sobre els graus és $|V_5| \leq 3 \sum_{w \in V_5} g(w)$, resulta $3|V_5| \leq 6|V_5^c| - 12$, d'on $4 \leq |V_5|$.

Problema 7.25

Sigui $G = (V, A)$ un graf planari. Demostreu que el nombre de vèrtexs de grau estrictament inferior a 12 supera o iguala la meitat dels vèrtexs.

Resolució

Considerem la partició de V :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid g(v) < 12\}, \\ V_2 &= \{v \in V \mid g(v) \geq 12\}. \end{aligned}$$

Volem veure que $|V_1| \geq \frac{n}{2}$, essent $n = |V|$.

Si no fos així, seria $|V_1| < \frac{n}{2}$ i, per tant, $|V_2| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, i aleshores tindriem:

$$\sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V_2} g(v) \geq 12|V_2| \geq 12(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \geq 6n.$$

Ara bé, en un graf planari connex es compleix que $|A| \leq 3|V| - 6$ i, per tant, podem escriure, utilitzant el lema de les encaixades,

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A| \leq 2(3|V| - 6) = 6|V| - 12 = 6n - 12 < 6n,$$

desigualtat amb la qual s'arriba a contradicció.

Problema 7.26

Sigui $G = (V, A)$ un graf planari, amb $n = |V|$, i suposem que $g(v) \geq 3$, $\forall v \in V$. Demostreu que hi ha, com a mínim, $\frac{1}{7}(4n + 12)$ vèrtexs de grau inferior o igual a 9.

Resolució

Considerem la partició $V = V_1 \cup V_2$, amb

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid g(v) \leq 9\} \\ V_2 &= \{v \in V \mid g(v) > 9\} = \{v \in V \mid g(v) \geq 10\}. \end{aligned}$$

Sigui $x = |V_1|$, amb la qual cosa és $|V_2| = n - x$.

Atès que $g(v) \geq 3$, $\forall v \in V$, es compleix:

$$\sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V_1} g(v) + \sum_{v \in V_2} g(v) \geq 3|V_1| + 10|V_2|.$$

Aleshores, utilitzant el lema de les encaixades, tindrem $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$ i la fitació $|A| \leq 3|V| - 6$, ja que G és connex i planari, que es compleix:

$$3n - 6 \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} g(v) \geq \frac{1}{2}(3x + 10(n - x)).$$

D'aquí es deriva:

$$6n - 12 \geq 10n - 7x,$$

d'on $7x \geq 4n + 12$ i, per tant,

$$x \geq \frac{1}{7}(4n + 12).$$

Problema 7.27

Considerem un políedre convex P de n vèrtexs i realitzem seccions del políedre per plans paral·lels al pla de coordenades xy i que passen pels vèrtexs de P . Pot afirmar-se que la secció del políedre compresa entre dos plans consecutius conté, com a molt, de l'ordre de $O(n)$ arestes?

Resolució

En efecte, la intersecció buscada contindrà, a tot estirar, un nombre d'arestes de l'ordre de $O(c_P)$, essent c_P el nombre de cares. Ara bé, tenim que l'estructura de la superfície del políedre és essencialment la d'un graf (simple) *planari* connex i, per tant, per la fórmula d'Euler es compleix

$$v_P + c_P = a_P + 2,$$

si v_P , c_P , a_P , designen el nombre de vèrtexs, cares i arestes de P , respectivament, i, d'altra banda, tenint en compte que el grau de cada vèrtex és com a mínim 3, també es compleix que

$$a_P \leq 3v_P - 6,$$

d'on resulta

$$v_P + c_P \leq 3v_P - 6 + 2 = 3v_P - 4,$$

i, en conseqüència,

$$c_P \leq 2v_P - 4.$$

Per tant,

$$O(c_P) = O(2v_P - 4) = O(n).$$

Problema 7.28

Considerem els políedres convexos P , Q , amb n , m vèrtexs, respectivament. Suposem que cal calcular la intersecció $P \cap Q$, que és novament un políedre convex. Es pot formular un algorisme elemental consistent en realitzar un test d'intersecció de cada cara (polígon) de P amb cada cara (polígon) de Q : a mesura que es va avançant en la llista de les cares de P , es van calculant les interseccions amb totes les altres cares de Q ; si no es detecta cap intersecció entre cares, aleshores és o bé $P \cap Q = \emptyset$ o bé l'un conté l'altre. Com podríem justificar que aquesta aproximació a la solució del problema es pot realitzar en temps com a molt de l'ordre de $O((n + m)^2)$?

Resolució

En efecte, siguin v_P , a_P i c_P els nombres de vèrtexs, arestes i cares (polígons) del políedre P , respectivament, i anàlogament v_Q , a_Q i c_Q pel que fa al políedre Q . Recordem que l'estructura de la superfície d'un políedre convex (cares de diferents dimensions) pot assimilar-se (per projecció estereogràfica) a la d'un graf simple planari connex i, en conseqüència, és vàlida la fórmula d'Euler:

$$\begin{aligned} v_P + c_P &= a_P + 2, \\ v_Q + c_Q &= a_Q + 2; \end{aligned}$$

per tant, aplicant el fet que per a tot graf $G = (V, A)$ simple, connex, planari, amb el grau de cada vèrtex com a mínim 3, es compleix que

$$|A| \leq 3|V| - 6,$$

resulta

$$\begin{aligned} v_P + c_P &\leq 3v_P - 6 + 2 = 3v_P - 4, \\ v_Q + c_Q &\leq 3v_Q - 4, \end{aligned}$$

d'on:

$$\begin{aligned} c_P &\leq 2v_P - 4 = 2n - 4, \\ c_Q &\leq 2v_Q - 4 = 2m - 4. \end{aligned}$$

Per tant, si T és la funció de cost computacional de l'algorisme en qüestió, es complirà

$$T \in O(c_P c_Q) = O(nm) = O((n + m)^2),$$

en virtut de la identitat òbvia $nm = 1/2[(n + m)^2 - m^2 - n^2]$.

Problema 7.29

Proveu que si G és un graf planari, connex, 3-regular tal que totes les cares són triangles o hexàgons, aleshores té exactament 4 triangles.

Considerem un políedre format per cares triangulars i hexagonals, de manera que cada vèrtex sigui incident amb 3 arestes. Demostreu que té exactament 4 cares triangulars. Obteniu el nombre de vèrtexs i d'arestes en funció de les cares hexagonals.

Resolució

En primer lloc, establim notacions suggerides per l'enunciat. Si és $G = (V, A)$, siguin $v = |V|$, $a = |A|$, i sigui c el nombre de cares del graf planari, amb la cara infinita C_∞ inclosa.

Totes les cares són poligonals, triangulars o hexagonals, la infinita inclosa. La frontera o contorn d'una cara triangular és formada per 3 arestes i la frontera d'una cara hexagonal és constituïda per 6 arestes. Indiquem per c_3 el nombre de cares triangulars i per c_6 el nombre de cares hexagonals. *Finalment, hem d'obtenir $c_3 = 4$.*

Podem escriure immediatament dues relacions. En primer lloc, la fórmula d'Euler per a grafs planaris connexos: $c + v = a + 2$. En segon lloc, és trivialment $c = c_3 + c_6$, ja que no hi ha cares d'altres tipus.

La idea és expressar c, v, a en termes de c_3, c_6 i substituir finalment a la fórmula d'Euler.

Intentem comptar el nombre d'arestes de dues maneres diferents: com a arestes "aportades" per cada vèrtex i després com a arestes "aportades" per cada cara.

Pel que fa al nombre d'arestes aportades pel conjunt de tots els vèrtexs, es podria obtenir directament o bé aplicant el lema de les encaixades i utilitzant el fet que el graf és 3-regular,

$$2a = \sum_{w \in V} g(w) = \sum_{w \in V} 3 = 3|V| = 3v,$$

cosa que ens permet escriure $v = \frac{2}{3}a$.

Ara calculem les arestes comptant les que aporta cada cara, de manera que provisionalment el nombre d'arestes seria $3c_3 + 6c_6$. Ara bé, d'aquesta forma es compten les arestes per duplicat, perquè cada aresta és aresta comuna de la frontera de les dues cares que la contenen i, per tant, és comptada dues vegades, una per a cada cara. En conseqüència, finalment

$$3c_3 + 6c_6 = 2a.$$

D'aquí resulta $a = \frac{1}{2}(3c_3 + 6c_6)$. Substituint ara a l'expressió de v en termes d' a , expresseu també v en termes de c_3, c_6 :

$$v = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(3c_3 + 6c_6) = \frac{1}{3}(3c_3 + 6c_6) = c_3 + 2c_6.$$

Substituïm finalment a la fórmula d'Euler per obtenir una relació entre c_3, c_6 :

$$(c_3 + c_6) + (c_3 + 2c_6) = \frac{1}{2}(3c_3 + 6c_6) + 2$$

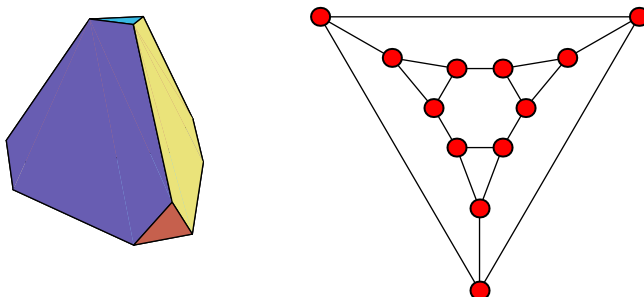
Operacions rutinàries conclouen el que s'havia de provar: $c_3 = 4$.

Observem que tenim $v = c_3 + 2c_6 = 4 + 2c_6$. I també $a = \frac{1}{2}(3c_3 + 6c_6) = 6 + 3c_6$.

Comentaris

Existeixen grafs amb les propietats indicades? Tot i que no es demana, és bo saber si hem estat demostrant coses sobre el buit, és a dir, ens interessa saber si hi ha grafs amb les propietats de l'enunciat o no n'hi ha.

A la figura 7.35 podem veure un graf planari connex 3-regular amb les cares triangulars o hexagonals; correspon al tetràedre truncat. Podem comprovar que efectivament hi ha 4 cares triangulars exactament: això no és una casualitat; ha de ser així en virtut del resultat demostrat!



Un exemple trivial, sense cares hexagonals, amb totes les cares triangulars, és el graf corresponent al tetràedre, és a dir, $G = N_1 + C_3$.

Problema 7.30

Proveu que un políedre sense cares triangulars té algun vèrtex de grau 3.

Resolució

Considerem el graf planari associat al políedre. És un graf connex. Totes les cares són poligonals, limitades com a mínim per 4 costats (ja que no hi ha cares triangulars).

Cada aresta és aresta comuna d'exactament dues cares. El grau de cada vèrtex és, com a mínim, 3.

Suposem que tots els vèrtexs són de grau superior a 3, és a dir, $g(v) \geq 4$. Arribarem a una contradicció.

Apliquem el lema de les encaixades:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V} 4 = 4|V|,$$

d'on $|A| \geq 2|V|$.

Si indiquem per c_i el nombre de cares limitades per i arestes, podem comptar les arestes a partir de les aportades per cada cara. Si tenim en compte que, d'aquesta manera, cada aresta és comptada per duplicat, resulta $2|A| = \sum_{i \geq 4} i c_i \geq \sum_{i \geq 4} 4 c_i = 4 \sum_{i \geq 4} c_i = 4c$, on c és el nombre de cares del políedre. Per tant, $2|A| \geq 4c$, és a dir, $|A| \geq 2c$. Apliquem ara la fórmula d'Euler $c + |V| = |A| + 2$, d'on $2c + 2|V| = 2|A| + 4$. Aplicant l'última desigualtat resulta $|A| + 2|V| \geq 2c + 2|V| = 2|A| + 4$, d'on $|A| + 2|V| \geq 2|A| + 4$. D'aquí resulta $|A| \leq 2|V| - 4$. Fent servir ara la primera de les desigualtats resulta $2|V| \leq |A| \leq 2|V| - 4$ i s'obté la conclusió absurda $0 \leq -4$.

Versió addicional.

Observeu que existeix una versió en termes de teoria de grafs planaris que no contenen cicles C_3 . Existeix aleshores algun vèrtex de grau menor o igual a 3.

En aquest cas, atès el tipus de propietat, podem suposar que el graf és connex, ja que si no ho fos treballaríem en cada component connex. Vegem-ne, a la figura 7.35, un exemple possible.

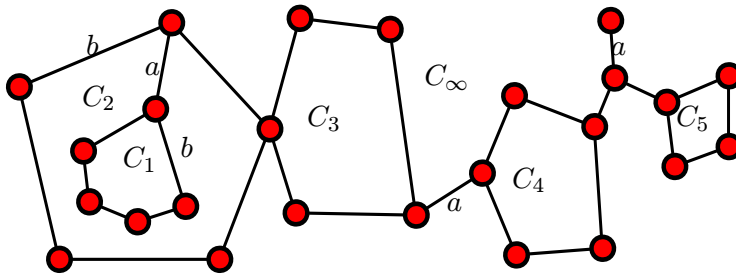


Figura 7.35

Vegem que, en aquest cas, en el qual no es pot garantir que les cares siguin poligonals, podem també arribar a la desigualtat $4c \leq 2|A|$, a partir de la qual les argumentacions serien idèntiques al cas anterior. La frontera de cada cara és formada per un mínim de 4 arestes.

Cada aresta pertany a alguna cara, encara que sigui la C_∞ . Hi ha arestes de dos tipus, les de tipus "a", que no són compartides per dues cares, i les de tipus "b", compartides

per dues cares. Sigui α el nombre d'arestes del tipus "a". Indiquem per c_i el nombre de cares que tenen i arestes a la frontera; és $i \geq 4$.

Si comptem les arestes comptant les aportades per les fronteres de les cares, les de tipus "a" són comptades una vegada, mentre que les de tipus "b" es compten per duplicat. Per tant,

$$\sum_{i \geq 4} i c_i + \alpha = 2|A|.$$

Així, doncs,

$$2|A| \geq \sum_{i \geq 4} i c_i + \alpha \geq \sum_{i \geq 4} 4c_i + \alpha = 4 \sum_{i \geq 4} c_i + \alpha = 4c + \alpha \geq 4c.$$

Problema 7.31

Sigui G un graf connex d'ordre $n \geq 11$. Proveu que G o G^c és no planari.

Resolució

Siguin $G = (V, A)$, $n = |V|$, $G^c = (V, A')$, on $|A'| = \binom{n}{2} - |A|$.

S'ha de provar que algun dels grafes G, G^c és no planari. Negar aquesta afirmació és suposar que ambdós grafes, G, G^c són planaris. Vegem com arribem a alguna contradicció.

Escrivim, de moment, les relacions que deriven de la planaritat.

Essent ambdós grafes planaris, podem utilitzar les propietats derivades de la planaritat, en particular la fitació superior del nombre d'arestes en termes de l'ordre, vàlida fins i tot en el cas no connex. Així, podem escriure $|A| \leq 3n - 6$ i $|A'| \leq 3n - 6$. Pel que fa a aquesta última desigualtat, podem escriure $\binom{n}{2} - |A| \leq 3n - 6$, d'on $\binom{n}{2} - 3n + 6 \leq |A|$. Combinant les dues desigualtats, resulta $\binom{n}{2} - 3n + 6 \leq |A| \leq 3n - 6$, d'on $\binom{n}{2} - 3n + 6 \leq 3n - 6$, d'on $\binom{n}{2} - 6n + 12 \leq 0$. Calculant, $n^2 - 13n + 24 \leq 0$.

Fins ara no hem fet servir la hipòtesi de ser $n \geq 11$. Considerem la funció $F(n) = n^2 - 13n + 24$. La seva gràfica és la d'una paràbola oberta cap al semiplà de les y^+ . La intersecció amb l'eix Ox , si n'hi ha, correspon a les arrels de l'equació de segon grau $x^2 - 13x + 24 = 0$. Les solucions són $x_1 = \frac{13 + \sqrt{73}}{2}$ i $x_2 = \frac{13 - \sqrt{73}}{2}$. Tenim que la més gran de les solucions és $x_1 = 10. \dots$ (figura 7.36). Per $n \geq 11$, $F(n) > 0$, la qual cosa

és una contradicció.

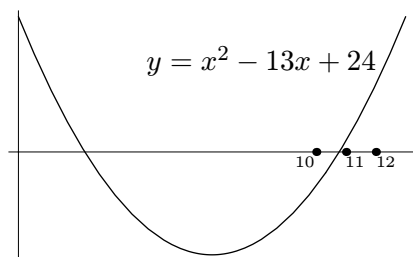


Figura 7.36

Problema 7.32

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb $|V| < 5$ o $|A| < 9$. Proveu que G és planari.

Resolució

És una aplicació del teorema de Kuratowski.

En efecte, si $|V| < 5$, aleshores G no pot contenir cap subgraf homeomorf a K_5 ni a $K_{3,3}$, ja que $|V(K_5)| = 5$ i $|V(K_{3,3})| = 6$. Si un graf H és homeomorf a K_5 , és $|A(H)| \geq |A(K_5)|$, i anàlogament per a $K_{3,3}$.

Pel que fa a la condició sobre les arestes, l'argumentació és similar, ja que $|A(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$ i $|A(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$.

Problema 7.33

Sigui G un graf planar connex amb 11 vèrtexs o menys. Proveu que existeix algun vèrtex de grau menor o igual a 4.

Resolució

Sigui $T = (V, A)$ amb la propietat indicada. Suposem que no es compleix la propietat que es vol demostrar.

Si no fos així, seria $g(v) > 4, \forall v \in V$. Atès que els graus són enters, seria, de fet, $g(v) \geq 5, \forall v \in V$.

Aplicant el lema de les encaixades,

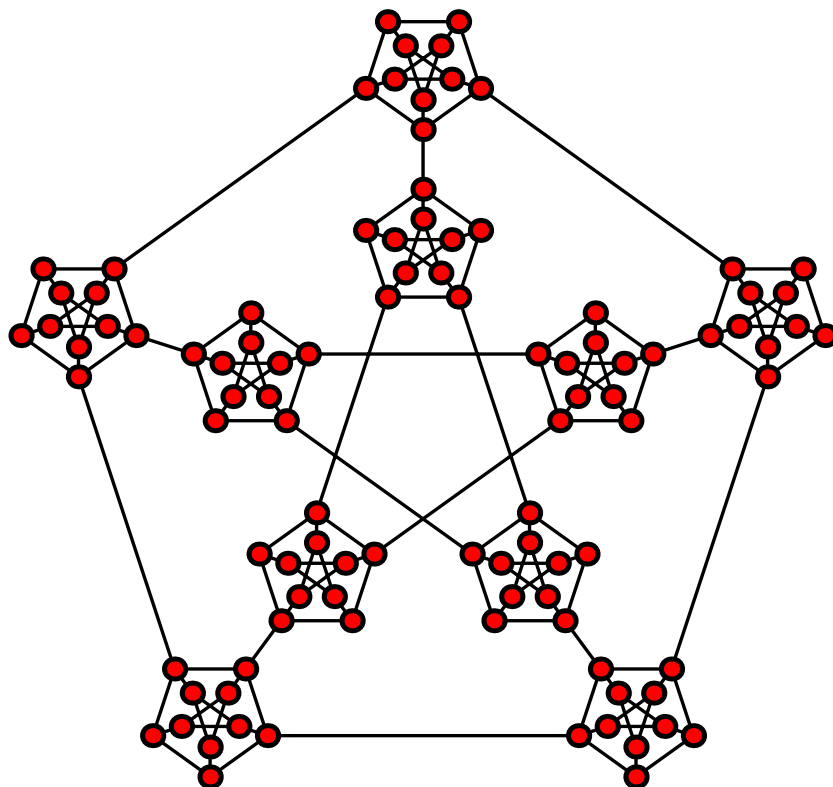
$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V} 5 = 5|V|.$$

d'on $|A| \geq \frac{5}{2}|V|$.

D'altra banda, com que és planari, es compleix $|A| \leq 3|V| - 6$. Combinant ambdues desigualtats resulta $\frac{5}{2}|V| \leq 3|V| - 6$, d'on $|V| \geq 12$, cosa que contradia la hipòtesi.

Part III

Combinatòria



e	f	c	b
b	c	e	f
c	b	f	e
f	e	b	c

Capítol 8

Combinatòria elemental

8.1 Objectius

En aquest capítol es presenta una col·lecció de problemes de tipus bàsic, en el sentit que no són problemes lligats a una determinada metodologia especialitzada, cosa que es deixa per altres capítols posteriors (com, per exemple, fórmula d'inclusió-exclusió (9)) o successions recurrents (10) .

Malgrat el títol, se suposa ja un cert coneixement combinatori per part del lector, que ha de saber resoldre els problemes combinatoris més bàsics.

També es presenten exemples, sobretot a l'apartat de problemes geomètrics, de com es pot utilitzar la teoria de grafs planaris (especialment la fórmula d'Euler) per resoldre problemes de comptar objectes.

8.2 Problemes de combinatòria bàsica

Apleguem aquí diversos problemes de combinatòria elemental.

Problema 8.1

En una reunió, 35 dels assistents són nois. Supposem cada noi coneix 6 de les noies de la reunió i cada noia coneix 7 dels nois. Quantes noies hi ha a la reunió?

Resolució

Adoptem un model descriptiu de la situació consistent en un graf $G = (V, A)$, on V és el conjunt dels assistents, $V = V_1 \cup V_2$, amb V_1 conjunt de nois i V_2 conjunt de noies,

i A el conjunt de les coneixences noi-noia, coneixença que suposem mútua. Hi ha, per tant, una aresta per cada coneixença. Comptem el nombre d'arestes de dues maneres, a partir de les coneixences dels nois i a partir de les de les noies. Aquestes coneixences donen lloc al mateix nombre d'arestes, que són les mateixes.

Sigui x el nombre de noies. Les arestes “aportades” pels nois són $35 \cdot 6$ i les “aportades” per les noies, $7x$. Per tant, $35 \cdot 6 = 7x$. Finalment, $x = 30$.

Problema 8.2

Suposem que un grup d'alumnes tenen 12 assignatures per triar. Suposem que els alumnes es distribueixen en 9 subgrups de 8 alumnes cadascun (S_1, \dots, S_9). Suposem que cada assignatura és escollida per exactament r alumnes, pertanyents a diferents subgrups d'entre els anteriors. Cada element de S_i es matricula d'una assignatura. Calculeu el valor de r (quants alumnes es matriculen de cada assignatura?).

Resolució

Considerem el model següent, en el qual hi ha 12 columnes, indicatives de les 12 assignatures que es poden cursar, i 9 files, corresponents als grups d'alumnes, agrupats segons algun criteri acadèmic que no cal indicar. Es col·loca una creu a la casella per indicar que l'assignatura ha estat escollida per un alumne d'un grup. A la taula següent, se suposa que cada assignatura és cursada per 3 alumnes, és a dir, $r = 3$, de manera que a cada columna hi ha 3 creus. Com que cada element de S_i es matricula d'una assignatura, a cada fila hi ha 8 creus.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S1			x	x	x		x		x			
S2	x	x	x			x		x	x	x		
S3	x						x	x	x	x	x	
S4	x	x	x	x		x				x	x	x
S5						x		x				
S6		x					x					
S7											x	
S8				x	x							x
S9					x							x

El conjunt de les creus és únic. El nombre de creus és el mateix tant si les comptem per files com si les comptem per columnes. Expressar això ens portarà a una relació.

Nombre de creus per files: $12r$

Nombre de creus per columnes: $9 \cdot 8$.

Per tant, $12r = 9 \cdot 8$, d'on $r = 6$.

Es pot plantejar una versió equivalent, abstracta, de l'enunciat, de la manera següent. Sigui $C = \{1, 2, \dots, 10\}$. Es tenen 9 subconjunts $S_i \subset C$, amb $|S_i| = 8$, $i = 1, \dots, 9$. Suposem que cada element de C pertany a exactament r dels subconjunts S_i . Calculeu r .

Problema 8.3

Proveu l'afirmació següent: en un conjunt de 12 nombres naturals, n'hi ha com a mínim dos tals que la seva diferència és múltiple de 11.

Resolució

És una aplicació clara del principi de les caselles.

Sigui $|S| = 12$. Cal identificar les "caselles" per a l'aplicació del principi de les caselles. En aquest cas, la resta de dividir els elements de S per 11, és a dir, les 11 caselles: $0, 1, 2, \dots, 10$, ja que en la divisió entera, si $m = 11q + r$, és $0 \leq r < 11$.

Per tant, hi ha d'haver $s_1, s_2 \in S$ amb $r_1 = r_2$, si $s_1 = 11q_1 + r_1$, $s_2 = 11q_2 + r_2$. Per tant, $s_1 - s_2 = 11(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) = 11(q_1 - q_2)$.

Problema 8.4

Considereu els enters decimals de n dígits, amb $n \geq 2$. Per exemple, si $n = 3$, seran els nombres compresos entre 100 i 900 (no es consideren com a tals els que contenen zeros al principi, com seria 003, per exemple). Volem saber quants d'aquests nombres existeixen que no contenen 2 dígits iguals adjacents. Per exemple, 646 hi seria comptat, però no 466.

Resolució

El context en el qual ens hem de situar és el de les permutacions de n dígits (de 0 a 9), amb repetició, amb la condició que no es consideren de n dígits els nombres que comencen per 0, 00, ..., 000000000.

Sigui $x = d_1 \cdots d_n$ un d'aquests nombres, essent d_1, \dots, d_n els dígits corresponents.

Analitzem com es poden formar els nombres amb les propietats de l'enunciat.

d_1 : hi ha 9 maneres d'escollir d_1 d'entre $\{1, \dots, 9\}$ i, per tant, hi ha 9 eleccions possibles.

d_i , $i > 1$: podem escollir d_i d'entre $\{0, 1, \dots, 9\}$, però només de 9 maneres diferents, ja que hem de garantir que $d_i \neq d_{i-1}$.

Per tant, $m = 9 \cdot 9 \cdots 9 = 9^n$ és el nombre buscat.

Problema 8.5

En un grup de n persones s'han de triar tres càrrecs: els de president, secretari i tresorer. Obteniu de quantes maneres es pot fer.

Resolució

Tractem el problema des d'un punt de vista estrictament combinatori. Podem resoldre el problema de més d'una manera.

Mètode 1. Suposem que l'ordre en què es trien els càrrecs no té importància. Podem considerar tries directes: primer es tria un càrrec i després els següents d'entre els que queden. Suposem que primer es tria president, després secretari i, finalment, tresorer. Així, podem escollir president de n maneres possibles. Escollit el president, resten $n - 1$ possibilitats per escollir secretari. Escollit secretari, podem escollir tresorer de $n - 2$ maneres possibles, d'entre les possibilitats restants. Per tant, el nombre total és $n(n - 1)(n - 2)$.

Mètode 2. Fem una tria indirecta. Podem escollir una terna de persones, cosa que podem fer de $\binom{n}{3}$ maneres i després, a partir de la terna, fer l'elecció dels càrrecs. Ara, per cada terna podem fer $3!$ assignacions d'individus a càrrecs de president-secretari-tresorer, o bé escollim, igual que abans: $3 \cdot 2 \cdot 1$. El total és $3! \binom{n}{3}$.

Observació. Ambdós mètodes coincideixen:

$$3! \binom{n}{3} = 3! \frac{n!}{3!(n-3)!} = n(n-2)(n-3).$$

Problema 8.6

Calculeu el nombre de cadenes de longitud n formades per 0,1 amb exactament k zeros.

Resolució

L'única cosa que cal fer és escollir els k llocs de la cadena que seran ocupats per zeros, ja que la resta serà ocupat simplement per uns. Però això és el mateix que escollir k llocs d'entre n , sense que, una vegada escollits, importi l'ordre. Per tant, la resposta és $\binom{n}{k}$. Si imaginem etiquetades les caselles, hem d'escollir un conjunt d'índexs, però l'ordre no importa.

Observeu que es pot resoldre el problema equivalentment escollint posicions que s'ocuparan amb uns, és a dir, amb $n - k$ uns. Per idèntica argumentació, es poden escollir aquestes posicions de $\binom{n}{n-k}$ maneres.

Observeu que ambdós resultats coincideixen, ja que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, identitat combinatòria ben coneguda.

També es pot abordar la resolució d'una altra manera. Si pensem que utilitzem n caràcters per construir una cadena de longitud n , el nombre de cadenes que es poden formar és $n!$ Ara bé, d'entre aquests caràcters, n'hi ha k de repetits, iguals a 0, i $n - k$ repetits iguals a 1. Per tant, hem d'identificar permutacions. De manera que el resultat és

$$\frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} n! = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

També es pot repensar mitjançant un altre artifici: reetiquetem els zeros idèntics (i anàlogament els uns), és a dir, considerem els caràcters $0_1, 0_2, \dots, 0_k, 1_1, 1_2, \dots, 1_{n-k}$. Considerant-los provisionalment diferents, formem les $n!$ permutacions corresponents. Posteriorment, tornem a identificar-los per obtenir la fórmula anterior, dividint per $k!$ i per $(n-k)!$.

Problema 8.7

Calculeu quantes paraules d'11 lletres es poden formar amb les lletres de la paraula ABRACADABRA.

Resolució

Observem que hi ha algunes lletres repetides. Concretament, la "A" està repetida 5 vegades; la "B" i la "R" estan repetides 2 vegades; la "C" i la "D" estan "repetides" 1 sola vegada.

Si formem les permutacions de les lletres, aleshores dues permutacions de posicions de lletres repetides poden ser comptades com a permutacions, però donaran lloc a la mateixa paraula.

Sigui T el nombre de paraules buscades.

Hi ha diverses vies d'aproximació al problema.

Mètode 1. Podem assignar una etiqueta a les diverses lletres repetides i considerar-les provisionalment com a caràcters diferents, és a dir, $A_1, \dots, A_5, B_1, B_2, R_1, R_2, C, D$. Aleshores el nombre de paraules provisionalment diferents que es poden formar amb aquestes 11 lletres provisionalment diferents és $11!$ Ara bé, de la identificació $A_1 = \dots = A_5 = A$, $B_1 = B_2 = B$, $R_1 = R_2 = R$ resulta que s'han comptat com a diferents paraules que de fet són repetides, originades per la permutació de posicions entre dos caràcters identificats. Totes aquestes paraules s'identifiquen i, per comptar finalment les que hi ha, hem de dividir pel nombre de permutacions de A_1, \dots, A_5 , etc. Qualsevol permutació que sigui de les lletres anteriors donarà, per a totes, $\dots A \dots A \dots A \dots A \dots A \dots$, i anàlogament per a B, R .

Per tant, finalment

$$T = \frac{11!}{5!2!2!1!1!}$$

Mètode 2. A partir de T s'obté el nombre de permutacions d'11 caràcters multiplicant per $5!$ (corresponent a les paraules identificades per la repetició de les A), per $2!$ (per B), per $2!$ (per R) i també per $1!$ (per C, D).

De manera que $11! = 5!2!2!1!1!T$.

Problema 8.8

Donat un conjunt de n elements, calculeu el nombre de grafs que es poden construir sobre aquest conjunt com a conjunt de vèrtexs (se suposa que els vèrtexs estan etiquetats).

Resolució

Considerarem el conjunt V , amb $|V| = n$. Imaginem que tenim disponibles el màxim de les $|A| = \binom{n}{2}$ arestes possibles. Es tracta de fer les seleccions, escollint o deixant d'escollir cadascuna de les arestes. Els grafs que es poden formar es formaran per l'elecció de diversos subconjunts d'arestes: en podem agafar 0, 2 (de totes les maneres possibles d'entre totes les disponibles, sense que importi l'ordre), 3, i així successivament, fins al total.

Per exemple, els grafs que es poden formar amb k arestes són $\binom{|A|}{k}$. No es considera isomorfisme: podem considerar que els vèrtexs estan etiquetats. Tenim, per tant,

$$\binom{|A|}{0} + \binom{|A|}{1} + \binom{|A|}{2} + \cdots + \binom{|A|}{|A|-1} + \binom{|A|}{|A|}$$

És a dir, resulta la fórmula següent, a la qual apliquem la fórmula del binomi de Newton:

$$\sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k} = 2^{|A|} = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Problema 8.9

Si en una classe hi ha n nois i m noies, calculeu de quantes maneres es poden alinear de forma que totes les noies estiguin juntes.

Resolució

Observeu que s'ha de formar una cadena de longitud $n + m$ que té una subcadena de longitud m formada per totes les noies de costat. Podem resoldre el problema per més d'un mètode.

Mètode 1. El grup de les m noies llisca al llarg de la cadena. Considerem la primera posició k de la primera noia, llegint per l'esquerra, essent k la posició a la cadena total. Hem de veure com poden variar aquestes primeres posicions i , fixada una posició, quantes cadenes es poden formar.

En primer lloc, fixada una primera posició per a les noies, és a dir, la posició de la primera noia, segueix el bloc de les m noies, que es poden distribuir de $m!$ maneres diferents. Fixada una distribució de les noies, les n posicions restants estan ocupades per nois, els quals es poden col·locar de $n!$ maneres diferents. Per tant, fixada la posició k on s'inicia el bloc de noies, hi ha $m!n!$ distribucions diferents, que resulten ser les mateixes per a totes les posicions.

Resta per veure quins valors pot prendre k : $1 \leq k \leq n + 1$, caselles on poden iniciar-se les subcadenaes de noies.

Per tant, finalment el nombre buscat és $(n + 1)n!m! = (n + 1)!m!$

Mètode 2. Atès que les noies estan en un grup compacte, podem considerar un nou caràcter, “*”, que representa la subcadena de les noies. Aleshores tenim $n + 1$ caràcters, que poden formar $(n + 1)!$ cadenes. Fixada una posició de “*”, ara hem de “descomprimir” a m noies i després permutar, amb la qual cosa resulta $(n + 1)!m!$, que coincideix amb el resultat obtingut al mètode 1.

8.3 Comptar en geometria: disseccions geomètriques

Vegem a continuació un problema de comptar típicament geomètric.

Problema 8.10

Les diagonals d'un polígon convex. *En un polígon qualsevol, una diagonal és el segment determinat per dos vèrtexs no adjacents que estigui inclòs dins del polígon. Calculeu el nombre de diagonals d'un polígon convex.*

Resolució

En el cas d'un polígon convex, qualsevol segment determinat per dos vèrtexs no adja-

cents és contingut en el polígon i n'és, per tant, una diagonal.

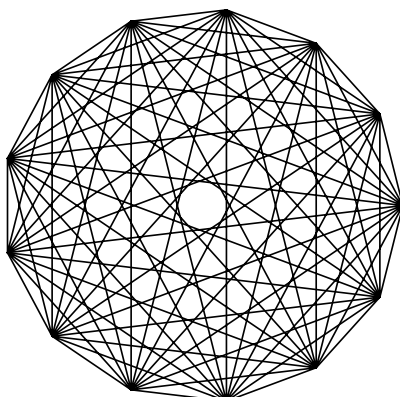


Figura 8.1

Considerem un polígon convex de n vèrtexs. Es tracta de calcular el nombre de diagonals del polígon.

Mètode 1. Cada diagonal és determinada per una parella de vèrtexs, sense que importi l'ordre, i el nombre de parelles de vèrtexs que es poden escollir en un conjunt de n vèrtexs és $\binom{n}{2}$. Ara bé, aquest no és el nombre de diagonals, ja que també hi són comptats en aquest còmput els costats del polígon, determinats per parelles de vèrtexs consecutius. Donat que hi ha n costats, el nombre de diagonals serà finalment $\binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n - 3)$.

Mètode 2. Es podria enfocar el càlcul d'una altra manera, considerant el nombre de diagonals que parteixen de cada vèrtex, que és $n - 3$, nombre de vèrtexs restants, un cop descartats els dos costats adjacents. Com que hi ha n vèrtexs, el resultat total seria $n(n - 3)$. Ara bé, d'aquesta manera cada diagonal es compta dues vegades, una per cada vèrtex extrem. Per tant, la quantitat correcta és $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

Una estructura interessant i alhora una bona font de problemes combinatoris en geometria o simplement combinatoris en general és la de les disseccions per rectes en el pla, per circumferències en el pla, per plans en l'espai tridimensional i per esferes en l'espai tridimensional.

8.3.1 Disseccions per rectes

Als capítols d'inducció (2) i de grafs planaris (7) ja se n'ha fet una introducció i se n'han vist algunes propietats, en relació amb la combinatòria. El tema es torna a tractar al capítol de recurrències (10).

Sembla convenient recordar, amb independència de cap problema concret, què són aquestes disseccions.

Considerem n rectes en el pla. Diem que estan *en posició general* si es compleix:

- No n'hi ha dues de paral·leles. Això significa que dues rectes qualssevol es tallen en un punt.
- No n'hi ha tres que passin per un mateix punt. Això significa que pel punt d'intersecció de dues rectes (que ha d'existir, per la condició primera) no n'hi passa cap altra.

Una col·lecció de rectes en posició general produeix una dissecció del pla en conjunts, objectes geomètrics de dimensionalitat variada. En primer lloc, tenim els *vèrtexs*, interseccions de les rectes (dimensió 0). En segon lloc, les *arestes*, que són els segments i dues semirectes que es produeixen sobre cada recta (dimensió 1). En tercer lloc, es produeixen regions bidimensionals, fitades o no, les *cares* (dimensió 2).

S'accepta el cas especial d'una sola recta, és a dir, $n = 1$, cas en el qual no hi ha vèrtexs, hi ha una sola "aresta", la recta mateixa, i hi ha 2 "cares", els dos semiplans determinats per la recta.

Estem especialment interessats a comptar els subobjectes d'una dissecció, és a dir, el nombre de vèrtexs, d'arestes (fitades i no fitades) i de cares (fitades i no fitades). Com veurem, sorprenentment no depenen de les particulars rectes, és a dir, de la seva posició, sinó només de n , el nombre de rectes de la dissecció.

A la figura 8.2 tenim una dissecció per rectes del pla en posició general.

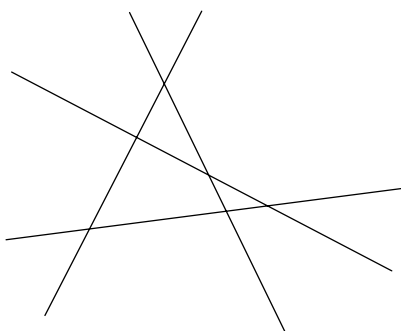


Figura 8.2

La primera cosa que obtindrem és el nombre dels subobjectes de la dissecció.

Problema 8.11

Donada una dissecció del pla per n rectes en posició general, calculeu el nombre v_n de vèrtexs, a_n d'arestes i c_n de cares.

Resolució

Nombre de vèrtexs

Cada vèrtex és intersecció d'exactament dues de les rectes de la dissecció, perquè estan en posició general (dues rectes es tallen en un punt, i per un punt d'intersecció hi passen exactament dues rectes). Els vèrtexs es corresponen, doncs, amb les interseccions de parelles de rectes, sense importar l'ordre. De manera que hi ha tants de vèrtexs com combinacions de n rectes preses de 2 en 2, és a dir, $v_n = \binom{n}{2}$.

Nombre d'arestes

En el cas $n = 1$, aleshores hi ha una única "aresta", la mateixa recta i, per tant, $a_1 = 1$. Suposem que $n \geq 2$. Classifiquem les arestes en segments i semirectes. Sigui p_n el nombre de segments i q_n el nombre de semirectes. Cada recta aporta al còmput d'arestes 2 semirectes i, per tant, $q_n = 2n$.

Recordem que hi ha $v_n = \binom{n}{2}$ vèrtexs a la dissecció.

Comptem el nombre d'arestes a partir de les "aportacions" de cada vèrtex al còmput general. Cada vèrtex és incident amb 4 arestes, de manera que el nombre $4v_n$ ens donaria el nombre d'arestes, si no fos que algunes de les arestes es compten per duplicat (els segments, una vegada per cada extrem) i altres, les semirectes, només hi són comptades una vegada en aquesta quantitat. Per tant, $4v_n = 2a_n - q_n$. Finalment, $2a_n = 4\binom{n}{2} - 2n$, d'on $a_n = n^2$.

Resulta fàcil ara obtenir el nombre de les arestes fitades, és a dir, els segments: $p_n = a_n - q_n = a_n - 2n = n^2 - 2n$.

Observem que aquesta argumentació no es podria aplicar al càlcul del nombre de cares, ja que no hi ha regularitat en el nombre d'arestes de la frontera de cada cara.

Al capítol 10 es veu una altra manera de calcular a_n utilitzant recurrències.

Nombre de cares

Quan se sap el nombre de vèrtexs i d'arestes, es pot calcular el nombre de cares mitjançant l'aplicació de la fórmula d'Euler a un graf planari auxiliar, com s'ha fet al capítol dedicat als grafs planaris (7). El lector pot consultar la resolució corresponent.

Problema 8.12

Tallar un pastís. *Talleu un pastís circular amb n rectes de manera que s'obtingui el nombre màxim de porcions possibles i calculeu aquest nombre.*

Resolució

En primer lloc, les n rectes han d'estar en posició general, posició que produeix el màxim nombre de subobjectes. D'altra banda, podem suposar que totes les interseccions entre rectes es produeixen a l'interior estricte del pastís, ja que altrament perdríem porcions (cares de la dissecció). En particular, això significa que dues rectes de les de la partió no es tallen a la circumferència, contorn del pastís. A partir d'aquestes consideracions

podem adoptar dos mètodes de resolució, que s'exposen a continuació.

Mètode 1: Utilitzant resultats obtinguts prèviament sobre disseccions per rectes. Observem que hi ha dos tipus de porcions: les internes, és a dir, les que no comparteixen cap arc del perímetre, i les externes, és a dir, les que tenen un arc del perímetre en el seu contorn. Des del punt de vista de la dissecció per rectes, les cares porcions internes són les cares fitades de la dissecció, i les externes es corresponen bijectivament amb les cares no fitades de la dissecció. Per tant, el nombre de porcions és el nombre de cares de la dissecció. Però aquest nombre s'ha calculat abans independentment i sabem que és $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$.

Mètode 2: directament i utilitzant la fórmula d'Euler. Donada la dissecció que s'ha descrit anteriorment, escapcem les semirectes, arestes no fitades, en el punt d'intersecció amb la circumferència, de manera que les rectes queden substituïdes per les cordes corresponents. Ens queda un esquema geomètric sobre el qual considerem el graf planar següent: els vèrtexs (v) són les interseccions entre rectes i les interseccions de les rectes amb la circumferència, ara extrems de les cordes; les arestes (a) són els segments i els arcs de circumferència, i les cares són les porcions (c) i l'exterior del pastís, única cara no fitada.

Calculem aquestes quantitats.

En primer lloc, els vèrtexs: $v = \binom{n}{2} + 2n$, ja que tenim $\binom{n}{2}$ interseccions interiors i $2n$ interseccions amb el contorn circular.

Pel que fa a les arestes, les comptarem considerant les que aporta cada vèrtex (les incidents amb cada vèrtex, per ser més exactes). Els vèrtexs interiors n'aporten 4, i els perifèrics n'aporten 3 cadascun. Ara bé, d'aquesta manera es comptarien per duplicat, ja que una mateixa aresta es compta una vegada per a cada extrem. Així, doncs, $4\binom{n}{2} + 3(2n) = 2a$, d'on $a = 2\binom{n}{2} + 3n$.

Per calcular el nombre de porcions, utilitzem la fórmula d'Euler: $(c + 1) + v = a + 2$, d'on $c = a + 1 - v = 2\binom{n}{2} + 3n + 1 - (\binom{n}{2} + 2n) = \binom{n}{2} + n + 1$, que coincideix amb els resultats de mètodes alternatius.

“Crosses mentals”

De vegades, alguns petits artificis o construccions auxiliars poden donar seguretat en el procés deductiu en el curs de la resolució d'un problema. Vegem-ne un parell d'exemples.

Suposem que tenim una dissecció del pla per n rectes en posició general. Considereu les dues preguntes següents:

Problema 8.13

Donada una dissecció del pla per n rectes en posició general, calculeu

1. El nombre d'arestes no fitades.
2. El nombre de cares no fitades.

Resolució

Considerem la dissecció de n rectes en posició general.

Les arestes no fitades són les semirectes corresponents a les rectes de la dissecció. Intuïtivament, cada recta aporta 2 d'aquestes semirectes, de manera que n'hi ha $2n$. Ara bé, si aquest raonament sembla confús, es pot aclarir amb la construcció trivial següent, que també ens ajudarà a contestar la segona pregunta.

Considerem un cercle auxiliar que contingui tots els vèrtexs. La construcció d'un tal cercle és possible: ja que hi ha un nombre finit de vèrtexs, podem escollir com a centre qualsevol dels vèrtexs i com a radi una quantitat estrictament superior al màxim de les distàncies del centre a la resta dels vèrtexs. D'aquesta manera, totes les arestes que són segments, determinades per parelles de vèrtexs, són dins del cercle auxiliar. La resta d'arestes, que són semirectes, tallen la circumferència. Hi ha tantes semirectes com talls i hi ha dos talls per a cada recta. Per tant, hi ha $2n$ semirectes o arestes no fitades.

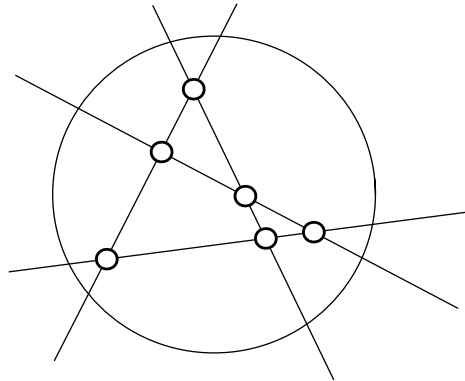


Figura 8.3

L'argumentació directa, com en el cas de les semirectes, no sembla clara en el cas de les cares no fitades. Però la construcció auxiliar anterior ens permet veure-hi més clar. En efecte, les semirectes separen les cares no fitades. Quantes semirectes hi ha? N'hi ha $2n$, i aquest és el nombre de cares no fitades. Fem servir, alternativament, la construcció auxiliar anterior. Sobre la circumferència auxiliar es creen $2n$ interseccions, que formen $2n$ arcs de circumferència, i cada arc correspon a una cara no fitada. Així arribem per una altra variant argumental al resultat: hi ha $2n$ cares no fitades.

Naturalment, si sabéssim el nombre total d'arestes i de cares, aleshores podríem calcular el nombre d'arestes i de cares fitades, però això és objecte d'un altre exercici.

Observació. El lector pot intentar traslladar aquesta idea al cas d'una dissecció de l'espai per plans en posició general, substituint la circumferència auxiliar per una esfera.

Aquest mètode de construir una circumferència auxiliar contenidora ja es va utilitzar al capítol de grafs planaris (7) per donar un dels mètodes per calcular el nombre de cares d'una dissecció per rectes.

Obtenim a continuació el nombre de les cares d'una dissecció per n rectes en posició general segons un procediment diferent, generalitzable a dimensió superior.

Problema 8.14

Considerem n rectes del pla en posició general (no n'hi ha dues de paral·leles, ni n'hi ha tres que passin per un mateix punt). Aquesta col·lecció de rectes produeix una dissecció del pla en vèrtexs, arestes i cares o regions (fitades o no). Calculeu el nombre de regions.

Resolució

Entre les diverses possibilitats de resolució presentem un mètode directe, sense ús de recurrències (que deixem per al capítol 10, de successions recurrents), que té l'avantatge que es pot generalitzar al cas tridimensional, on les rectes se substitueixen per plans.

Podem suposar que no hi ha cap recta horitzontal. Si fos així, atès que n'hi ha un nombre finit, sempre podríem fer una rotació adequada per eliminar aquesta possibilitat.

Establirem una distinció entre dos tipus de regions, segons si són fitades inferiorment (tipus I) o no (tipus II). Aleshores, el nombre de regions serà $r_n = |I| + |II|$. A la figura 8.4 s'indiquen les regions fitades inferiorment (I); la resta són les no fitades inferiorment (II).

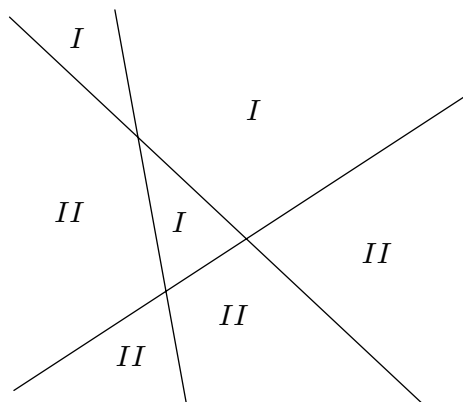


Figura 8.4

Comptem separadament el nombre de les regions de tipus I i de tipus II.

Tipus I. Les regions de tipus I són les fitades inferiorment, i són aquelles que tenen un punt d'ordenada mínima. S'observa que les fites inferiors són justament els punts que

són interseccions de rectes, és a dir, els vèrtexs de la dissecció. Tota intersecció de dues rectes de la dissecció és fita inferior d'una única regió de tipus I. Per tant, $|I| = \binom{n}{2}$.

Tipus II. Les regions de tipus II són les no fitades inferiorment. Tracem una recta auxiliar s que sigui horitzontal i que estigui per sota de totes les regions fitades. Això es pot aconseguir sense cap problema, ja que n'hi ha prou d'escollir una recta que estigui per sota de tots els vèrtexs de la dissecció, dels quals n'hi ha un nombre finit. Totes les rectes tallen s perquè no n'hi ha cap d'horitzontal, i així creen n interseccions sobre s , que queda descomposta en $n + 1$ seccions (segments i dues semirectes). Ara bé, aquestes seccions són la intersecció de s amb cares, les que travessa s . Es pot veure que s talla totes les cares no fitades inferiorment (si una cara de tipus II no fos tallada per s , aleshores seria fitada inferiorment), les de tipus II, de les quals n'hi ha, per tant, $n + 1$, és a dir, $|II| = n + 1$.

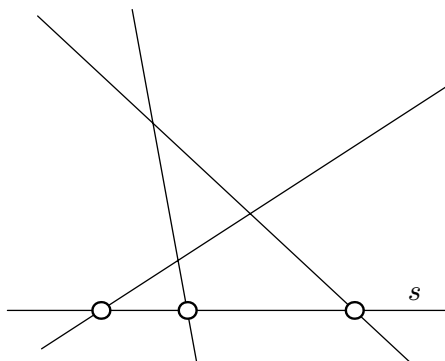


Figura 8.5

Així, doncs, $r_n = |I| + |II| = \binom{n}{2} + n + 1$.

Observació. Aquest problema apareix diverses vegades al llarg del llibre. En aquestes ocasions es tracten problemes associats de comptar subobjectes geomètrics lligats a una dissecció per diferents mètodes.

8.3.2 Disseccions per plans

Podem considerar un problema similar a l'espai tridimensional on les n rectes han quedat substituïdes per n plans, situats *en posició general*, i això és objecte d'un altre enunciat.

1. Tres plans qualssevol es tallen en un punt (observeu que aquesta propietat exclou el paral·lisme): dos plans qualssevol es tallen en una recta i un tercer pla ha de tallar aquesta recta intersecció en un punt (no hi pot ser paral·lela ni contenir-la).

2. No hi ha quatre plans amb un punt comú, és a dir, per la intersecció de tres d'ells no n'hi passa un quart.

En el cas d'aquesta estructura es produeix una dissecció de l'espai, on apareixen vèrtexs, arestes, cares de dues dimensions i regions tridimensionals. Podem estar interessats a calcular el nombre d'alguns d'aquests subobjectes geomètrics. Vegem com podem aplicar la tècnica basada a considerar cares fitades i no fitades del cas de les disseccions per rectes en el pla per a aquest problema, en el cas del càlcul del nombre de regions tridimensionals.

Problema 8.15

Calculeu el nombre de regions tridimensionals d'una dissecció de l'espai produïda per n plans en posició general (tres plans qualssevol es tallen en un punt, i no n'hi ha quatre que passin pel mateix punt).

Resolució

És molt fàcil calcular el nombre de vèrtexs V_n d'una dissecció de n plans en posició general. Tot vèrtex és intersecció d'exactament 3 plans, i cada tres plans donen lloc a exactament un vèrtex. Per tant, els vèrtexs estan en correspondència amb les ternes no ordenades de plans, és a dir, $V_n = \binom{n}{3}$.

Podem adoptar la via d'atac similar a la del problema de calcular el nombre de regions per a una dissecció per n rectes fent una distinció entre les fitades i les no fitades, considerant dos tipus de regions tridimensionals, les fitades inferiorment (tipus I) i les no fitades inferiorment (tipus II). Aleshores el nombre de regions tridimensionals serà $R_n = |I| + |II|$. Calculem separatament aquests cardinals.

Podem suposar que no hi cap pla horitzontal.

En el cas d'una regió de tipus I, existeix un punt que té la més petita de les altures (z), i és precisament intersecció de 3 plans. De fet, es pot veure que els punts de z mínima són justament els vèrtexs de la dissecció, dels quals n'hi ha tants com maneres d'escollir 3 plans d'entre n sense que importi l'ordre, és a dir, combinacions de n plans presos de 3 en 3. Per tant, $|I| = \binom{n}{3}$.

Vegem ara com es pot calcular el nombre de regions no fitades inferiorment. Sigui Π un pla horitzontal que està per sota de totes les regions fitades inferiorment, per sota equivalentment de tots els vèrtexs de la dissecció. Els plans de la dissecció tallen el pla Π en una col·lecció de n rectes que constitueixen una dissecció de n rectes en el pla auxiliar en posició general. Les cares de la dissecció sobre Π són les seccions de Π amb les regions tridimensionals no fitades inferiorment, i hi estan en correspondència bijectiva, com el lector pot comprovar. Per tant, hi ha tantes regions 3D no fitades

inferiorment com cares bidimensionals a la dissecció del pla auxiliar Π . Però aquest problema s'ha resolt justament a l'enunciat anterior. Així, $|II| = \binom{n}{2} + n + 1$.

Per tant, finalment $R_n = |I| + |II| = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + n + 1$.

8.3.3 Disseccions per circumferències

Considerem n circumferències en el pla. Direm que estan en posició general si es compleix el següent:

1. Es tallen dos a dos en dos punts (la tangència es considera cas "degenerat" i no es considera tall).
2. No n'hi ha tres que es tallin en un mateix punt.

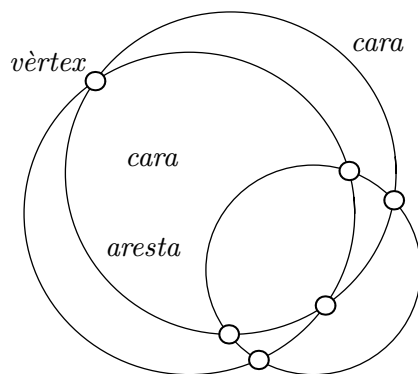


Figura 8.6

Aleshores es produeixen subobjectes geomètrics: vèrtexs (interseccions de circumferències), arestes (arcs de circumferència) i cares (regions limitades per arcs de circumferència, amb una única regió exterior no fitada). Un dels problemes típics és saber calcular el nombre de vèrtexs, arestes i cares.

Problema 8.16

Considerem n circumferències del pla en posició general. Calculeu el nombre de vèrtexs v_n , el nombre d'arestes a_n i el nombre de regions o cares c_n (comptant-hi la no fitada)

Resolució

Càlcul del nombre de vèrtexs. Dues circumferències de la col·lecció generen 2 punts d'intersecció. Recíprocament, els vèrtexs es produeixen per la intersecció d'exactament

2 circumferències. Només cal veure quantes parelles es poden formar a partir de les n circumferències, sense importar l'ordre, i aleshores tenim $v_n = 2\binom{n}{2}$.

Càlcul del nombre d'arestes. Fem un còmput directe a partir de les arestes que incideixen a cada vèrtex. S'observa que de cada vèrtex parteixen 4 arestes, de manera que provisionalment podríem pensar que el nombre d'arestes és $4v_n$. Ara bé, aquest raonament seria erroni, ja que cada aresta hi és comptada per duplicat en la quantitat anterior. Per tant, la relació correcta és $4v_n = 2a_n$. Per tant, $a_n = 2v_n = 4\binom{n}{2} = 2n(n-1)$.

Càlcul del nombre de regions. Podem considerar el graf planari que té, com a vèrtexs, els vèrtexs de la dissecció, i com a arestes, els arcs de circumferència. Les regions són les cares del graf planari.

Li és aplicable la fórmula d'Euler i, per tant, podem escriure:

$$c_n = a_n + 2 - v_n = 2n(n-1) + 2 - n(n-1) = n^2 - n + 2.$$

El nombre de cares fitades és $n^2 - n + 1$.

Observació. El mateix problema es resol alternativament al capítol dedicat a recurrències (10).

Vegem-ne un exercici més, que resultarà relacionat amb l'anterior.

Problema 8.17

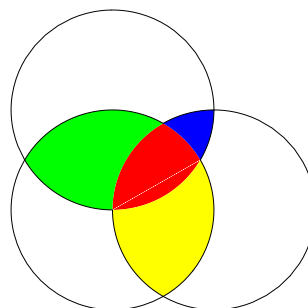
Calculeu en quantes parts o regions divideixen la superfície esfèrica n circumferències sobre l'esfera, de tal manera que es tallen dues a dues (sense tangència) i no n'hi ha tres que es tallin en un mateix punt.

Resolució

Podem utilitzar la projecció estereogràfica amb pol de projecció un punt qualsevol de la regió que no és de cap intersecció de circumferències (aquests punts són els que no pertanyen a cap circumferència). Amb aquesta projecció estereogràfica el problema es redueix a un problema equivalent en el pla, pel que fa al nombre de subobjectes geomètrics (en particular, les regions), amb n circumferències en posició general. La projecció de la cara on hi ha situat el pol de projecció dóna lloc a l'única cara no fitada, de punts exteriors a totes les circumferències.

Pel problema anterior, $r_n = n^2 - n + 2$.

Resulta un exemple en què *un problema es transforma en un altre*, ja resolt o més fàcil de resoldre, i això amb el concurs de la projecció estereogràfica.



Capítol 9

Principi d'inclusió-exclusió

9.1 Objectius

Es presenta la fórmula d'inclusió-exclusió, de molta utilitat per al càlcul del nombre d'elements d'una reunió de conjunts. S'analitzen diverses aplicacions en la resolució de problemes.

9.2 La fórmula d'inclusió-exclusió

Imaginem que hem de calcular $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$, on A_1, \dots, A_n són conjunts. El problema és molt fàcil si els conjunts són dos a dos disjunts, és a dir, si $A_i \cap A_j = \emptyset$, per a tot i, j amb $i \neq j$, ja que en aquest cas

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|.$$

El problema es complica quan els conjunts no són necessàriament disjunts dos a dos, sinó que hi pot haver intersecció efectiva entre alguns d'ells.

Resulta fàcil i aclaridor el cas de dos conjunts, en què podem escriure

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

En efecte, en el terme $|A| + |B|$ s'està comptant per duplicat el nombre d'elements de la intersecció, raó per la qual s'ha de restar, per restablir el càlcul correcte a la fórmula anterior. Observeu que hem fet una operació d'inclusió en el càlcul i posteriorment fem una operació d'exclusió.

La situació és força més complexa en el cas d'un nombre superior de conjunts. Per a aquesta situació hi ha disponible la fórmula d'inclusió-exclusió, que generalitza l'anterior en el cas de dos conjunts. Si A_1, \dots, A_n és una col·lecció de conjunts,

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n,$$

amb

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \dots A_{i_k}|.$$

Anem a interpretar el significat de la fórmula i a veure exemples concrets de desenvolupament.

Vegem, per exemple, el primer terme S_1 : $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$

També tenim $S_n = |A_1 \cap \dots \cap A_n|$.

Quin és el significat de l'expressió del sumand k -èsim, S_k ? El significat de la notació és que s'escullen combinacions de k conjunts de la col·lecció dels n subconjunts i la intersecció corresponent només figura una vegada al sumand: per fixar idees, la que correspon als subíndexs creixents, per expressar-ho formalment. El que importa és que no hi ha repeticions en el càlcul dels cardinals. Així, per exemple, si hi figura $|A_1 \cap A_2|$, no hi pot figurar $|A_2 \cap A_1|$; si figura a la suma el terme $A_2 \cap A_3 \cap A_5$, no hi pot figurar $A_3 \cap A_2 \cap A_5$, ja que representaria el càlcul repetit del mateix cardinal.

Observeu el nombre de sumands de S_k és $\binom{n}{k}$.

La fórmula d'inclusió-exclusió descompon un problema en una col·lecció de subproblemes o problemes menors de càlcul de cardinals, que suposadament seran més fàcils de calcular.

Vegem alguns exemples de desenvolupament explícit de la fórmula.

Exemple 1. Vegem el cas de dos conjunts. Tenim que $|A_1 \cup A_2| = S_1 - S_2$, on $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| = \sum_{i=1}^2 |A_i| = |A_1| + |A_2|$. Per a S_2 hem d'obtenir totes les combinacions de 2 elements del conjunt dels $\{A_1, A_2\}$. És a dir, $S_2 = |A_1 \cap A_2|$. Recuperem d'aquesta manera la fórmula coneguda: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Exemple 2. Vegem el cas de tres conjunts. Tenim que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_1 - S_2 + S_3$.

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} S_1 &= |A_1| + |A_2| + |A_3|, \\ S_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|, \\ S_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Exemple 3. Vegem el cas de quatre conjunts. Tenim que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} S_1 &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|, \\ S_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|, \\ S_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|, \\ S_4 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

9.3 Problemes combinatoris resolts pel principi d'inclusió-exclusió

La fórmula d'inclusió-exclusió s'utilitza molt sovint en la forma següent: es tenen n subconjunts A_1, \dots, A_n d'un conjunt A , de cardinal conegut, i les condicions del problema fan que realment el que es demana sigui $|A_1^c \cap \dots \cap A_n^c|$, on s'entén que els complementaris són en A . Aleshores, escrivint

$$|A_1^c \cap \dots \cap A_n^c| = |(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c| = |A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = |A| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n)|,$$

reconduïm el problema cap a la utilització de la fórmula d'inclusió-exclusió.

Moltes vegades plantegem la resolució d'un problema determinat "inventant" els conjunts adequats $A_1, \dots, A_n \subset A$, de manera que el problema pugui seguir aquest fil de resolució. La dificultat pot estar justament a formular ("veure") aquests conjunts.

El lector no ha de creure, erròniament, que tot problema combinatori s'ha de poder resoldre per aquest mètode, malgrat l'àmplia varietat de situacions a les quals s'aplica.

9.4 Problemes resolts

Problema 9.1

Un oficinista ineficient té n cartes i n sobres amb l'adreça ja escrita. De quantes maneres pot equivocar-se col·locant cada carta a un sobre que no li correspon?

Resolució

Aquest és un problema típic de *desarranjaments*. Considerem els sobres numerats d' u a n com a caselles ordenades a les quals corresponen les cartes, també numerades d' u a n .

Es tracta de considerar (i comptar) totes les permutacions de les n cartes, de tal manera que cap carta ocupi el lloc que li correspon. El model matemàtic adequat és el de les permutacions de $\{1, \dots, n\}$, tal que cap nombre no ocupi el seu lloc natural que li correspon a l'ordenació habitual.

Sigui S el conjunt de les permutacions de $\{1, \dots, n\}$. És $|S| = n!$

Considerem els subconjunts $A_i \subset S$, $i = 1, \dots, n$, definits de la manera següent:

$A_i =$ conjunt de les permutacions π de $\{1, \dots, n\}$ tal que $\pi(i)$ ocupa el lloc i -èsim,

que es correspon amb el conjunt de les permutacions de les n cartes, de manera que la i -èsima carta ocupa el lloc i -èsim.

Estem interessats a obtenir

$$m = |A_1^c \cap \dots \cap A_n^c|.$$

Ara bé,

$$|A_1^c \cap \dots \cap A_n^c| = |(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c| = |S| - |A_1 \cup \dots \cup A_n|.$$

Ara, utilitzant el *principi d'inclusió-exclusió*,

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k,$$

on

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

essent $\{i_1, \dots, i_k\}$ una k -combinació dels elements de $\{1, \dots, n\}$.

Calculem $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$. Considerem, doncs, una permutació de $\{1, \dots, n\}$ a la qual les posicions i_1, \dots, i_k estan ocupades precisament per i_1, \dots, i_k , respectivament.

Queden lliures les $n - k$ posicions fora de les k ocupades per i_1, \dots, i_k , que poden ser ocupades pels $n - k$ elements restants $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, és a dir, per una permutació d'aquests $n - k$ elements, de les quals n'hi haurà $(n - k)!$

Per tant,

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n - k)!$$

Atès que tots els sumands de S_k són iguals i n'hi ha $\binom{n}{k}$, resulta

$$S_k = \binom{n}{k} (n - k)!, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Així, doncs,

$$\begin{aligned}
m &= |A_1^c \cap \dots \cap A_n^c| = |S| - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\
&= n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!
\end{aligned}$$

Observem que

$$\binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

i, per tant,

$$m = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right).$$

Problema 9.2

De quantes maneres es poden distribuir r objectes diferents en n capsas diferents deixant com a mínim una capsa buida?

Resolució

És un problema típic que podem resoldre aplicant el principi d'inclusió-exclusió.

Es pot formular el problema paral·lelament en termes d'aplicacions d'un conjunt A de r elements a un conjunt B de n elements ("capses"). Assignar o col·locar un element en una capsa equival a assignar una imatge a l'element. La condició que hem d'imposar equival a dir que almenys un element de B no té antiimatge, és a dir, que l'aplicació no és exhaustiva.

Per tant, estem calculant el nombre d'aplicacions no exhaustives. Aleshores podem resoldre el problema si hem calculat el nombre de les aplicacions exhaustives, cosa que és objecte d'un altre problema. Si $S = \{f | f : A \rightarrow B\}$ i \mathcal{E} és el conjunt de les exhaustives, aleshores el que busquem és $|S| - |\mathcal{E}|$.

També es pot resoldre el problema calculant directament el nombre de les aplicacions no exhaustives, que és el que fem aquí essencialment.

Tornem a la formulació inicial. El lector pot anar paral·lelitzant els raonaments en termes d'aplicacions.

Considerem S el conjunt de totes les distribucions possibles de r objectes diferents en n capsas diferents.

Atès que la distribució a cada capsa es pot fer independent de les altres, resulta $|S| = n^r$: a l'objecte r_1 se li poden assignar n capsas (podem "col·locar-lo" a n capsas); el mateix podem dir del r_2 , ja que l'assignació és independent de la del primer, i així successivament. De manera que al final queda $|S| = n^r$ (poden quedar capsas buides i poden quedar capsas amb més d'un objecte). Aquest nombre és el mateix que el nombre d'aplicacions d'un conjunt de r objectes en un de n objectes.

Ara considerem A_i conjunt de distribucions de S que deixen la capsa i -èsima buida. Observem que aquest és el mateix problema amb una capsa menys.

Aleshores el que se'ns demana és $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$. Per la fórmula d'inclusió-exclusió tenim

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k,$$

amb

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Calculem els S_k . Per a això, fixat i_1, \dots, i_k amb $i_1 < \dots < i_k$, calculem $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$. Observem que volem comptar el nombre d'elements de S amb les capsas i_1, \dots, i_k buides. Això equival a resoldre el mateix problema, però amb k capsas menys, és a dir, distribuir r objectes diferents en $n - k$ capsas diferents, les restants, però ara sense cap restricció. Resulta, doncs, $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n - k)^r$.

Clarament aquest cardinal és el mateix per als altres i_1, \dots, i_k possibles, dels quals n'hi ha $\binom{n}{k}$ i, per tant,

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (n - k)^r = \binom{n}{k} (n - k)^r.$$

Així, doncs, finalment

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n - k)^r.$$

Problema 9.3

De quantes maneres es poden distribuir m objectes diferents en n capsas ($m \geq n$), de tal manera que cada capsa tingui un mínim d'objectes seleccionats?

Calculeu el nombre d'aplicacions exhaustives d'un conjunt de m elements en un conjunt de n elements.

Resolució

Aquest problema està lligat a un de similar d'aquest mateix capítol. El resultat obtingut es podria aplicar aquí per resoldre el nostre problema. Ara bé, el resoldrem directament.

Una observació que cal fer és que, plantejat en termes més abstractes, aquest problema és exactament el problema de calcular el nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \rightarrow B$ d'un conjunt A , de cardinal m , en un altre B , de n elements. Els "objectes diferents" són els elements d' A ; les "capses" són els elements de B . Recordem que una aplicació $f : A \rightarrow B$ és exhaustiva si $f(A) = B$, és a dir, si tot element $b \in B$ té antiimatge; equivalentment, $f^{-1}(b) \neq \emptyset, \forall b \in B$.

La idea és abordar el problema per inclusió-exclusió. La dificultat en el plantejament és l'elecció adequada dels conjunts que típicament intervenen en la fórmula d'inclusió-exclusió. D'alguna forma els haurem de relacionar amb el conjunt B i amb els n elements d'aquest conjunt.

Considerem l'enumeració $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, i sigui $S = \{f | f : A \rightarrow B\}$. Aleshores tenim $|S| = n^m$.

Considerem $B_i = \{f \in S | b_i \notin f(A)\} = \{f \in S | f^{-1}(b_i) = \emptyset\} \subset S$, és a dir, el conjunt de les aplicacions per a les quals l'element b_i no té antiimatge.

Justament estem interessats en el contrari, és a dir, en els conjunts complementaris en S dels anteriors:

$$B_i^c = \{f \in S | b_i \text{ té antiimatge per } f\}$$

Precisament el conjunt de les aplicacions exhaustives \mathcal{E} és el conjunt $\mathcal{E} = B_1^c \cap \dots \cap B_n^c$, conjunt del qual hem de calcular el cardinal.

Ara bé, el problema de calcular-lo es redueix a un altre, cosa que ens permetrà aplicar la fórmula d'inclusió-exclusió:

$$|B_1^c \cap \dots \cap B_n^c| = |(B_1 \cup \dots \cup B_n)^c| = |S| - |B_1 \cup \dots \cup B_n|.$$

El problema queda convertit en una col·lecció de subproblemes, els del càlcul dels cardinals involucrats a la fórmula d'inclusió exclusió:

$$|B_1 \cup \dots \cup B_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k,$$

amb

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}|.$$

Com a mostra de la manera d'argumentar, calculem uns quants d'aquests cardinals.

Per exemple, per començar, calculem $|B_i|$. En aquest cas, hem de calcular quantes aplicacions hi ha de A en B tals que no tenen l'element b_i a la imatge. Intuïtivament és com si b_i "no existís" i no tingués cap paper en el còmput i, en conseqüència, el conjunt de les aplicacions que busquem té el mateix cardinal que el de les que es poden definir, sense cap restricció, entre A (conjunt de m elements) i $B' = B \setminus \{b_i\}$ (conjunt de $n - 1$ elements), és a dir $(n - 1)^m$. Atès que n'hi ha n i tots són del mateix cardinal, resulta $S_1 = \sum_{i=1}^n |B_i| = n(n - 1)^m$.

Una argumentació similar val per al cas de dos conjunts qualssevol. El cardinal de $|B_i \cap B_j|$ coincideix amb el nombre d'aplicacions de A en el conjunt $B \setminus \{b_i, b_j\}$, és a dir, $(n - 2)^m$. Tots els sumands de S_2 són iguals a aquesta quantitat i n'hi ha $\binom{n}{2}$, que és el nombre de parelles B_i, B_j que es poden formar a partir de B_1, \dots, B_n , sense que importi l'ordre (és a dir, combinacions de n objectes preses de 2 en 2). Per tant, finalment

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |B_i \cap B_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n - 2)^m = \binom{n}{2} (n - 2)^m$$

En general és

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}| = \binom{n}{k} (n - k)^m$$

La fórmula definitiva és

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}| &= n^m - \binom{n}{1} (n - 1)^m + \binom{n}{2} (n - 2)^m - \binom{n}{3} (n - 3)^m + \\ &\dots + (-1)^n \binom{n}{n} (n - n)^m = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)^m. \end{aligned}$$

Suposem que tenim un alfabet de 26 lletres. Quantes paraules (o cadenes) es poden formar amb totes les lletres de manera que cap d'elles contingui les paraules (o subcadenes) BYTE, COR, MAL, PI.

Resolució

Indiquem per S el conjunt de totes les cadenes possibles. Atès que l'ordre importa i s'utilitzen totes les lletres, S és el conjunt de totes les permutacions de les 26 lletres, de manera que $|S| = 26!$

I ara considerarem els subconjunts de S següents, amb la idea d'aplicar la fórmula d'inclusió-exclusió:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{c \in S \mid c \text{ conté BYTE}\}, \\ A_2 &= \{c \in S \mid c \text{ conté COR}\}, \\ A_3 &= \{c \in S \mid c \text{ conté MAL}\}, \\ A_4 &= \{c \in S \mid c \text{ conté PI}\}. \end{aligned}$$

El conjunt en el qual estem interessats és justament $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c$ i aleshores

$$\begin{aligned} |A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= |S| - (S_1 - S_2 + S_3 - S_4) = |S| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4, \end{aligned}$$

on els S_i són els termes que apareixen a la fórmula d'inclusió-exclusió.

La resta de la resolució es dedica a calcular els cardinals involucrats a la fórmula.

Calculem $S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$.

Considerem, per exemple, el cas de $|A_1|$. Cal comptar el nombre de cadenes que contenen la subcadena BYTE. Podem veure aquestes cadenes com les que contenen el bloc solidari dels caràcters BYTE, sempre en el mateix ordre. El conjunt BYTE pot lliscar lliurement al llarg de la cadena i, de fet, podem interpretar que compta com si fos un sol caràcter, és a dir, compta per un. És com si hi hagués un nou caràcter (α , exemple), corresponent a BYTE. Aleshores podem considerar un *problema equivalent*, on tenim un nou alfabet, format per $26 - 4 + 1 = 23$ caràcters (n'hem perdut 4 corresponent a BYTE i n'hem guanyat un, corresponent al nou α). I ara el problema és simplement permutar 23 elements. Per tant, $|A_1| = 23!$

Com moltes vegades passa en combinatòria, aquesta no és l'única manera de comptar aquest cardinal. Es pot comptar alternativament tenint en compte quines posicions pot ocupar la subcadena de 4 caràcters BYTE al llarg de la cadena de 26 caràcters. Si

suposem que la cadena és lineal i la primera posició és la de l'esquerra, aleshores el caràcter B de BYTE pot ocupar totes les posicions successives cap a l'esquerra, des de 1 fins a la $26-4+1 = 23$, com es pot veure dibuixant un senzill esquema de la situació. Per tant, tenim aquestes 23 possibilitats de situar BYTE. Escollida i fixada una d'aquestes, queden $26 - 4$ posicions de la cadena que són ocupades per la resta, els 22 caràcters restants, que es poden permutar sense més restriccions. Per tant, $|A_1| = 23 \cdot 22! = 23!$, resultat que coincideix amb l'anterior.

Encara hi ha una altra variant de l'argumentació anterior. Els caràcters que no formen la paraula BYTE són 22 i es poden permutar sense restriccions de $22!$ maneres. Ara bé, per cada una d'aquestes distribucions hem d'intercalar el bloc BYTE, o l'hem de col·locar al principi o al final, operació per a la qual tenim 23 posicions disponibles. Per tant, el nombre de paraules buscat és $23 \cdot 22! = 23!$

Anàlogament, $|A_2| = (26-3+1)! = 24!$, $|A_3| = (26-3+1)! = 24!$, $|A_4| = (26-2+1)! = 25!$.

Calculem $S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|$.

Considerem, per exemple, el cas de $|A_1 \cap A_2|$. Com abans, considerem el problema equivalent en el qual es consideren dos nous caràcters α (per BYTE) i β (COR) i hi ha $4+3 = 7$ caràcters menys. Per tant, tenim $26-4-3+2 = 21$ caràcters, que es poden permutar sense restriccions. Per tant, $|A_1 \cap A_2| = 21!$

De forma anàloga, s'obté $|A_1 \cap A_3| = 21!$, $|A_1 \cap A_4| = (26-4-2+2)!$, $|A_2 \cap A_4| = (26-3-2+2)! = |A_2 \cap A_3|$, $|A_3 \cap A_4| = (26-3-2+2)!$

En aquest cas, també es pot aplicar la segona línia argumental de l'apartat anterior, però és més delicat per comptar ja que, fixada una posició d'una subcadena, per a algunes posicions no hi cap l'altra.

Calculem $S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

Per la mateixa línia argumental dels casos anteriors podem escriure $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (26-4-3-3+3)!$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = (26-4-3-2+3)!$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = (26-3-3-2+3)!$

Calculem $S_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = (26-4-3-3-2+3)! = 17!$.

Finalment cal substituir els valors obtinguts a la fórmula anterior per arribar al resultat final.

Observeu que el problema se simplifica pel fet que no comparteixen lletres. Seria més complicat de calcular si per exemple dues de les subcadena fossin MAL, LI, ja que aleshores la presència de la subcadena MALI en una cadena comportaria la presència de les dues subcadenaes (cavalcades).

Problema 9.5

Calculeu quants nombres enters hi ha compresos entre 1 i 100 que no són divisibles per

cap dels següents: 2,5,7.

Resolució

Intentarem resoldre el problema pel principi d'inclusió-exclusió.

Indiquem $S = \{1, \dots, 100\}$. Òbviament, $|S| = 100$.

Intentant aplicar la fórmula d'inclusió-exclusió, definim els conjunts

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in S \mid n \text{ és divisible per } 2\}, \\ A_2 &= \{n \in S \mid n \text{ és divisible per } 5\}, \\ A_3 &= \{n \in S \mid n \text{ és divisible per } 7\}, \end{aligned}$$

El que volem és $|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c|$, on els complementaris són en S . El problema es pot reduir a aplicar el principi d'inclusió-exclusió, ja que podem escriure

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Per la fórmula d'inclusió-exclusió tenim

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= S_1 - S_2 + S_3, \\ S_1 &= |A_1| + |A_2| + |A_3|, \\ S_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|, \\ S_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

I ara cal calcular cadascun dels cardinals que hi figuren.

Com a mostra, calculem el nombre dels naturals de S divisibles per 5. Els divisibles són de la forma $5k$, amb $k \geq 1$. Atès que són els de la forma $5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \dots$, n'hi ha tants com k tal que $5k \leq 100$, és a dir, tants com k satisfent $k \leq \frac{100}{5}$. Per tant, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20$. Per tant, $|A_2| = 20$.

Anàlogament, $|A_1| = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50$, $|A_3| = \lfloor \frac{100}{7} \rfloor = 14$.

Com a mostra addicional, en el cas de $|A_1 \cap A_2|$, els múltiples de 2 i 5 són els de la forma $2 \cdot 5 \cdot k$, amb $1 \leq k \leq k_0$, amb k_0 el màxim dels k tals que $10k \leq 100$, és a dir, $k_0 = \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 10$. Per tant, $|A_1 \cap A_2| = 10$. Anàlogament, resulta $|A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \rfloor = 7$ i $|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \rfloor = 2$.

Finalment,

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{100}{2 \cdot 7 \cdot 5} \rfloor = 0.$$

Només resta efectuar les substitucions finals, cosa que deixem per al lector.

Qüestió. Indiqueu com es podria resoldre el problema considerant directament

$$\begin{aligned} B_1 &= \{n \in S | n \text{ no és divisible per } 2\}, \\ B_2 &= \{n \in S | n \text{ no és divisible per } 5\}, \\ B_3 &= \{n \in S | n \text{ no és divisible per } 7\}, \end{aligned}$$

Problema 9.6

De quantes maneres es poden col·locar n parelles a l'entorn d'una taula rodona, de tal manera que cap dels components d'una mateixa parella seguin de costat?

Resolució

Suposarem distribucions circulars on importen l'ordre, la col·locació en un lloc o posició concreta a l'entorn de la taula. No es consideren identificades dues configuracions, l'una de les quals es pot obtenir per rotació de l'altra.

Així, doncs, considerem permutacions diferents $ABCD$, $DABC$, $CDAB$, $BCDA$. Aleshores el problema equival de fet a una distribució lineal de les persones, encara que físicament es puguin col·locar circularment.

Suposem que hi ha n parelles home-dona, és a dir, $2n$ persones. Denotem les parelles genèricament per $a_i - a'_i$ i, en conseqüència, tenim el conjunt $S = \{a_1, a'_1, \dots, a_i, a'_i, \dots, a_n, a'_n\}$. Considerem A el conjunt de totes les distribucions possibles de persones, en què l'ordre és important. Per tant, A és el conjunt de totes les permutacions i $|A| = (2n)!$.

Atès que volem excloure les configuracions per a les quals els components d'alguna parella seuen de costat ($\dots a_i a'_i \dots$ o $\dots a'_i a_i \dots$), podem considerar els conjunts següents, amb la idea d'utilitzar la fórmula d'inclusió-exclusió: A_i és el conjunt de les permutacions dels elements de S amb els dos membres de la i -èsima parella seient de costat.

Aleshores el que estem buscant és $m = |A_1^c \cap \dots \cap A_n^c|$, on els complementaris ho són en el conjunt A .

Ara bé, $|A_1^c \cap \dots \cap A_n^c| = |A| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = (2n)! - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n$, en aplicació de la fórmula d'inclusió-exclusió, on $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$, on (i_1, \dots, i_k) és una k -combinació dels elements $\{1, \dots, n\}$.

El problema queda reduït, doncs, a subproblemes més simples, que consisteixen en el càlcul dels cardinals $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$.

Per calcular aquest cardinal, considerem les permutacions de S (elements d' A) a les quals les parelles $a_{i_1} a'_{i_1}, \dots, a_{i_k} a'_{i_k}$ seuen de costat. Podem identificar cada parella amb un nou element, de manera que tindríem els nous elements substitutius de les parelles, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$, i considerar simplement les permutacions dels objectes que ens queden,

que són $2n - 2k + k$, cosa que donaria lloc a $(2n - k)!$ permutacions possibles en què les parelles indicades seuen de costat. Ara bé, encara hi ha més possibilitats, ja que hem de considerar que els dos membres d'una mateixa parella poden permutar-se, tot i seure junts, ja que hi poden haver les distribucions $a_{i_j} a'_{i_j}$ i $a'_{i_j} a_{i_j}$. Com que hi ha k parelles i es poden permutar dins de la parella, finalment en resulten $2^k(2n - k)!$ Per tant, $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 2^k(2n - k)!$

Ara bé, a S_k hi ha $\binom{n}{k}$ sumands, que, com hem vist, tenen el mateix cardinal. Per tant,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} 2^k(2n - k)!$$

Així, doncs,

$$\begin{aligned} m &= (2n)! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^k(2n - k)! \\ &= (2n)! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^k(2n - k)! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^k(2n - k)! \end{aligned}$$

Quina seria la resposta si s'identifiquessin distribucions que es poden obtenir l'una per rotació de l'altra?

Problema 9.7

Considerem un taulell d'escacs $n \times n$ (usualment $n = 8$). Estudieu quantes disposicions de n torres es poden formar de manera que no s'amenacin mútuament ni n'hi hagi cap a la diagonal principal del tauler (mirant el tauler, la diagonal que va de la casella superior esquerra a la inferior dreta). Recordi el lector que les torres només es poden moure al llarg de files o columnes.

Resolució

A la figura 9.1 veiem una distribució com la que ens demanen.

			T				
		T					
				T			
						T	
	T						
							T
					T		
T							

Figura 9.1

Vegem que el problema es pot formular en termes de permutacions i, posteriorment, en termes de desarranjaments.

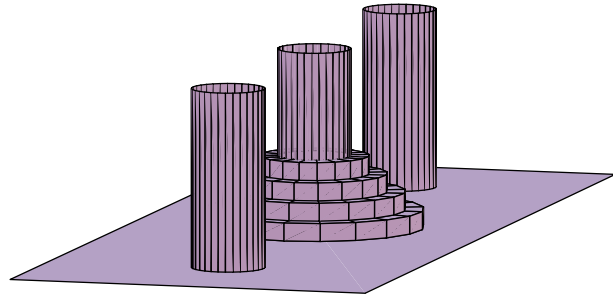
En efecte, considerem una permutació σ dels nombres $\{1, \dots, n\}$. Podem representar la permutació mitjançant una distribució de n torres d'escacs en el tauler $n \times n$, de manera que no s'amenacin. L'índex de columna representa els nombres $\{1, \dots, n\}$ i l'índex de fila representa les imatges per una permutació σ , de manera que si $\sigma(i) = j$, aleshores es col·loca una torre a la posició ij del tauler, és a dir, a la columna i , fila j . Així, per exemple, el tauler de la figura 9.1 representa la permutació

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 85213746 \end{pmatrix}$$

Observem que, si es tracta d'una permutació, dins d'una mateixa fila i dins d'una mateixa columna hi ha una sola torre, i d'aquesta manera es compleix la propietat segons la qual dues torres diferents no s'amenacen.

La condició de no ocupar cap posició de la diagonal principal equival a $\sigma(i) \neq i$, per a tot $i = 1, \dots, n$. Es tracta, per tant, d'un desarranjament. Només cal aplicar la fórmula ben coneguda del nombre de desarranjaments.

Capítol 10



Successions recurrents

10.1 Objectius

En aquest capítol tractem la tècnica de resolució de problemes combinatoris mitjançant recurrències. Molts aspectes d'aquesta tècnica estan relacionats amb l'algorísmica, concretament amb estimacions de costos computacionals o d'espai d'emmagatzemament.

Presentem en aquest capítol el tema, pel que fa als problemes, de les successions recurrents. Fem èmfasi en el plantejament de les recurrències per resoldre problemes combinatoris de comptatge del nombre d'objectes en un problema determinat. Exposem mètodes per resoldre un tipus especial de recurrències, les lineals a coeficients constants.

10.2 Preliminars teòrics i exemples

Molts de problemes de comptatge en combinatòria es poden resoldre de més d'una manera. Una via d'aproximació és comptar amb l'ajut d'una successió recurrent. Perquè això sigui possible, cal saber formular el càlcul corresponent en termes d'una recurrència, que en particular significa reduir un problema de mida n a la resolució d'un altre o altres de similars, però de mida inferior. Un cop formulada la recurrència que controla el còmput, el pas definitiu és saber resoldre-la, cosa no sempre garantida.

Vegem, doncs, que existeixen dues fases: la de la formulació de la recurrència i la de la resolució posterior.

Pel que fa a la primera part, és difícil donar cap regla. La pràctica suficient en la resolució de problemes pot facilitar l'adquisició d'habilitats al respecte. En veurem

exemples resolts a la resta del capítol.

En aquesta secció ens dediquem a la segona part, a donar metodologia de resolució d'alguns tipus de recurrències, les més senzilles i les més habituals.

Recordem que una successió recurrent és una successió per a la qual el terme general a_n es pot obtenir en funció de termes anteriors.

En primer lloc, s'han de definir la dependència del terme general respecte d'altres termes anteriors:

$$a_n = F(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}), n \geq k.$$

En segon lloc s'ha de donar les condicions inicials:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-k-1} = b_{n-k-1}.$$

No sempre es comença per a_0 .

Un exemple molt senzill és el de la successió de factorials $a_n = n!$, que podem reescriure en forma recurrent com $a_n = na_{n-1}$ ($n \geq 1$), $a_0 = 0! = 1$.

O bé el de l'anomenada *successió de Fibonacci*, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$), amb les condicions inicials $a_1 = a_2 = 1$, per exemple. Observem que si considerem una altra variant com, per exemple, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 2$), amb les condicions inicials $a_0; a_1 = 1$, aleshores es genera una altra successió.

10.3 Estratègia de resolució de problemes combinatoris per recurrències

Sempre considerem dues fases en el procés de resolució d'un problema per recurrències:

- La fase de plantejament de la recurrència.
- La fase de resolució de la recurrència.

A la primera fase cal fer, de fet, dues coses: en primer lloc, *formular la successió recurrent*, en el sentit de donar el patró d'obtenció de nous termes de la successió a partir de termes anteriors; en segon lloc, formular les *condicions inicials* que determinen la successió.

La idea bàsica en l'estratègia de resolució de problemes per recurrències (els que s'hi puguin resoldre) és reduir el problema de "mida" n a un problema, o més d'un, de

característiques idèntiques però de “mida” inferior. Què pugui ser la “mida” dependrà del problema. Per exemple, si el que volem és formar cadenes o paraules de longitud n , n pot ser la mida. Aquesta idea s’il·lustra al llarg dels exercicis que es presenten. Aquesta part correspon a l’anàlisi del problema i, més concretament, a l’anàlisi de l’estructura dels objectes que es volen construir i comptar.

Vegem-ne alguns exemples.

Problema 10.1

Suposem que s’emeten missatges de n segons compostos de quatre tipus de senyals. Els senyals S_1, S_2 duren 1 segon, el senyal S_3 dura 2 segons i el senyal S_4 dura 3 segons. Calculeu quants missatges es poden emetre amb aquests senyals, suposant que s’emeten consecutivament, sense cap espai de temps entre dos senyals. Els senyals es poden emetre de manera independent.

Resolució

Aquí estem interessats només en el plantejament d’una recurrència i no tant en la resolució.

Sigui a_n el nombre de missatges de n segons.

Hi ha 4 tipus de missatges, classificats pel senyal inicial.

Els de tipus *I* comencen pel senyal S_1 , d’1 segon, la resta del missatge és una nova cadena similar, però de longitud inferior, de manera que és un “tornar a començar”, però amb una unitat menys. Així $|I| = a_{n-1}$. Anàlogament, els de tipus *II*, que comencen per S_2 . És $|II| = a_{n-1}$.

Els de tipus *III* comencen pel senyal S_3 , de 2 segons. Tenim $|III| = a_{n-2}$.

Finalment, hi ha els de tipus *IV*, que comencen per S_4 . N’hi ha $|IV| = a_{n-3}$.

Per tant, $a_n = |I| + |II| + |III| + |IV| = 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. És una successió recurrent, amb coeficients constants, homogènia i d’ordre 3.

Obtenim ara les *condicions inicials*. Si $n = 1$, només es pot emetre un senyal d’1 segon, el S_1 o el S_2 , de manera que $a_1 = 2$. Tenim $a_2 = 5$, corresponent als missatges $S_1S_1, S_2S_2, S_1S_2, S_2S_1, S_3$. També tenim $a_3 = 11$ (hi poden haver 3 senyals d’un segon, $2 \cdot 2 \cdot 2, S_iS_jS_k, i, j, k = 1, 2$; un de 2 segons i 1 segon $2(1 \cdot 2)$, $S_3S_1, S_3S_2, S_1S_3, S_2S_3$; i un de 3 segons, S_4).

Resumint, la recurrència és

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, & n \geq 4 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 11 \end{cases}$$

Problema 10.2

Considerem les cadenes de longitud n formades pels caràcters $\{a, e, o, x, y\}$ sense que hi hagi 2 consonants juntes. Calculeu quantes n'hi ha utilitzant recurrències.

Resolució

Estem interessats essencialment en el plantejament, més que en la resolució.

Indiquem per a_n el nombre de cadenes amb les característiques requerides. Vegem com podem formular una relació recurrent que converteixi la successió a_n en una successió recurrent i la resolució del problema, en la resolució d'una recurrència.

Analitzem com poden ser les cadenes, atenent a com comencen (per l'esquerra, per exemple), amb la idea d'expressar a_n en funció de termes anteriors. La distinció que cal fer en aquest problema, atès l'aspecte en el qual estem interessats, relatiu a vocals i consonants, és si el primer caràcter és una vocal o una consonant.

Considerem les cadenes de tipus I, que comencen per vocal, i les de tipus II, que comencen per consonant. No hi ha cadenes de cap més tipus i, per tant, $a_n = |I| + |II|$. Vegem, doncs, quins són aquests cardinals.

Considerem una cadena que comença per vocal. La segona posició pot estar ocupada sense restriccions per qualsevol caràcter i, per tant, és inici d'una subcadena o d'una cadena de les mateixes característiques, però de longitud inferior, $n - 1$. D'acord amb la definició de a_n , de subcadena d'aquest tipus n'hi ha a_{n-1} . Ara bé, tenim 3 vocals disponibles per ocupar la primera posició (hi ha tres subtipus), de manera que $|I| = 3a_{n-1}$.

Considerem una cadena que comença per consonant (i hi ha 2 possibilitats), que suposem fixa. Aleshores el segon caràcter no pot ser consonant, ha de ser vocal (i n'hi ha 3 de disponibles). El tercer caràcter ara pot ser qualsevol, i és inici d'una cadena de les característiques que volem, de longitud $n - 2$, cadena de les quals n'hi ha a_{n-2} . Fixada, doncs, la primera consonant, tenim $3a_{n-2}$ cadenes possibles. Variant finalment la primera consonant de totes les maneres possibles, resulta $|II| = 6a_{n-2}$.

La relació recurrent és $a_n = 3a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

Amb aquesta recurrència de fet es defineixen infinites successions. Cal obtenir les condicions inicials que determinen la que ens interessa, la que correspon al problema concret. En aquest cas, cal obtenir a_1, a_2 . Tenim $a_1 = 5$, $a_2 = 21$ (corresponent a 2 vocals ($3 \cdot 3$), una consonant i una vocal ($2 \cdot 3 + 2 \cdot 3$)).

Per tant, la successió recurrent és

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 6a_{n-2}, n \geq 3 \\ a_1 = 5 \\ a_2 = 21 \end{cases}$$

En aquest tipus de problemes que resollem per recurrències considerarem més important, en el sentit que és més formativa des del punt de vista d'adquirir habilitats combinatòries (aprendre a comptar, en definitiva), la fase inicial de plantejament i formulació de successions recurrents que “compten” les quantitats que ens interessin.

Això no ha de fer pensar que no sigui important arribar a la solució final, però el que passa és que en molts de casos que ens trobarem, la resolució final sol derivar de l'aplicació de mètodes força estàndard que no solen suposar problemes.

També cal tenir present que, tot i que en aquest capítol tots els problemes de combinatòria es resolen formulant una successió recurrent, és més que possible que alguns d'ells puguin resoldre's per vies alternatives sense utilitzar recurrències. De fet, alguns es repeteixen en diversos llocs, on es resolen per mètodes diversos.

Pel que fa a la segona fase, la primera cosa que cal aclarir és *què vol dir resoldre una successió recurrent*. Si a_n és una successió recurrent, busquem una expressió en forma tancada, és a dir, una funció g tal que $a_n = g(n)$. Així, per exemple, si $s_n = s_{n-1} + n$, aleshores busquem poder escriure $s_n = g(n)$, on $g(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ens limitem a la resolució de recurrències per mètodes elementals (iteració i inducció) i a la resolució del tipus especial de les recurrències lineals a coeficients constants.

10.4 Resolució de successions recurrents per iteració

Tot i que més endavant es veuran exemples resolts per aquest mètode (per exemple, en el problema de les torres de Hanoi), dediquem aquest apartat exclusivament a veure com es poden resoldre recurrències per iteració.

El mètode consisteix a *aplicar repetidament la recurrència*.

Vegem-ne diversos exemples.

Problema 10.3

Considerem la dissecció del pla produïda per n rectes en posició general. Calculeu, utilitzant recurrències, el nombre de vèrtexs, d'arestes i de cares.

Resolució

Reprenem, per recurrències, el càlcul dels subobjectes geomètrics d'una dissecció del pla per n rectes en posició general. Aquest problema ha estat ja tractat en diversos capítols anteriors sense utilitzar recurrències (als capítols d'inducció (2), de grafs planaris (7) i

de combinatòria elemental (8)).

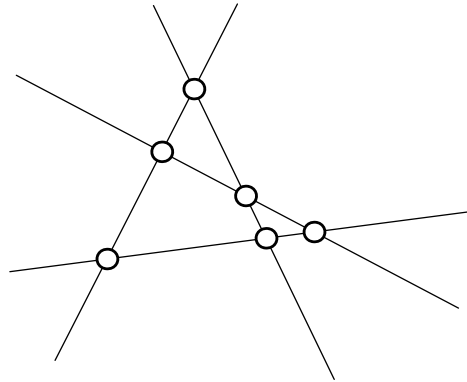


Figura 10.1

Càlcul del nombre de vèrtexs v_n . El nombre de vèrtexs és, com s'ha vist anteriorment, $v_n = \binom{n}{2}$, per arguments combinatoris simples. Ara bé, també podem plantejar el problema en termes de recurrències, encara que en aquest cas tan simple pugui ser poc natural.

Considerem una dissecció per n rectes en posició general, amb v_n vèrtexs. Tenim la condició inicial $v_1 = 0$. Sigui ara $n \geq 2$. Considerem una recta r qualsevol, que extraïem, i així deixem una dissecció restant de $n - 1$ rectes en posició general, que tindrà v_{n-1} vèrtexs. Hem de trobar quin és l'increment Δ_n de vèrtexs que es produeix quan afegim una recta a la dissecció de manera que es mantingui la propietat de posició general. Busquem, doncs, una recurrència senzilla del tipus $v_n = v_{n-1} + \Delta_n$.

Quan restituïm la n -èsima recta r , talla (per posició general) a les $n - 1$ rectes restants, i ho fa en vèrtexs nous, que abans no existien, de manera que es creen $\Delta_n = n - 1$ vèrtexs nous. Així, la recurrència és

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_n = v_{n-1} + (n - 1), n \geq 2 \end{cases}$$

Aquesta és una recurrència lineal, que podríem resoldre pel procediment estàndard per a aquest tipus de recurrències, que és objecte d'un altre apartat posterior, cosa que deixem al lector. Aquí la resoldrem de manera directa. Ara, un cop sabut el resultat per alguna de les vies indicades, el lector pot resoldre el problema alternativament per inducció sobre n , fent servir la recurrència formulada abans.

Resolem la recurrència *per iteració*. Apliquem repetidament la recurrència “fins a esgotar el subíndex”:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n = v_{n-1} + (n-1) \\ v_{n-1} = v_{n-2} + (n-2) \\ v_{n-2} = v_{n-3} + (n-3) \\ \dots \\ v_2 = v_1 + 1 \end{array} \right.$$

Ara “sumem membre a membre” i obtenim $v_n = v_1 + (1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)) = \sum_{i=1}^{n-1} i$.

Observeu com és d'útil disposar d'identitats aritmètiques (i combinatòries) que ens ajudin en els processos de comptar. En aquest cas, aplicant la coneguda identitat $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, resulta $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}$.

Càlcul del nombre d'arestes a_n . La successió recurrent que formulem, a_n , és justament la que ens compta el nombre d'arestes per a una dissecció de n rectes. En aquest cas, som capaços de formular una recurrència senzilla, que es pot resoldre de forma directa. Vegem que podem formular una recurrència de la forma $a_n = a_{n-1} + \Delta_n$, on Δ_n és l'increment d'arestes quan passem a una dissecció amb una recta més.

Tenim $a_1 = 1$, condició inicial. En una dissecció per $n \geq 2$ rectes, considerant una recta r qualsevol, la resta, formada per $n-1$ rectes, és una dissecció de $n-1$ rectes, de a_{n-1} arestes. La recta r talla les $n-1$ rectes restants i es produeix un increment d'arestes. Aquest increment té dos orígens: les seccions que la recta r produeix a les $n-1$ rectes, i sobre aquestes rectes, i les que les rectes li produeixen a r en seccionar-la totes. Comptem-les separatament.

Pel que fa a la primera “font” de noves arestes, la recta r talla totes les rectes (no hi ha paral·lelisme) i cada una d'elles en un punt que no és un vèrtex preexistent, per posició general. És a dir, les talla a l'interior d'una arista preexistent, ja comptades a a_{n-1} , i cada una d'aquestes és seccionada en dos, de manera que, pel que fa al nombre, l'increment net per aquest origen és de $n-1$ arestes.

Pel que fa al segon origen de noves arestes, atès que r és tallada en punts diferents per $n-1$ rectes, sobre r es produeixen $(n-1)+1$ noves arestes, incloses les dues semirectes, és a dir, n .

Per tant, $\Delta_n = (n-1) + n = 2n-1$ i resulta $a_n = a_{n-1} + 2n-1$.

Podem ara iterar i escriure

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1 \\ a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1 \\ \dots \\ a_2 = a_1 + 2 \cdot 2 - 1 \end{array} \right.$$

Sumant, resulta $a_n = a_1 + 2 \sum_{k=2}^n k - (1 + \overset{n-1}{\dots} + 1) = 1 + 2((\sum_{k=1}^n k) - 1) + (n - 1) = 1 + 2(\frac{n(n+1)}{2} - 1) + (n - 1) = n^2$.

Es podria resoldre la recurrència tenint en compte que és una lineal no homogènia, amb coeficients constants d'ordre 1. El lector pot intentar aquesta via, seguint el que s'exposa a la secció corresponent (10.6).

Aquest problema s'ha resolt també per inducció al capítol 2, dedicat a la inducció.

Càlcul del nombre de cares c_n

Indiquen per c_n el nombre de cares de la dissecció donada. Seguim argumentacions similars a les dels casos anteriors, cosa que ens permet detallar menys.

En primer lloc, $c_1 = 2$.

Si tenim una dissecció per n rectes, amb c_n cares, i hi afegim una nova recta r , de manera que es conservi la propietat de posició general, quantes noves cares Δ_n es produeixen? La nova recta r talla les n anteriors en punts que no són vèrtexs que ja existien. De manera que quan talla una recta està sortint d'una cara i entrant en una altra per un punt interior a l'aresta que travessa. Travessa, per tant, n arestes i secciona en dues parts les cares que travessa, que seran $n + 1$. Així, doncs, l'increment net de cares per l'acció de la recta r és de $n + 1$. Així, $c_{n+1} = c_n + (n + 1)$.

La recurrència serà

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_n = c_{n-1} + n, n \geq 2 \end{cases}$$

Podem efectuar una resolució directa, del tot idèntica als dos casos anteriors, raó per la qual es deixa al lector.

En tot cas, el resultat coincideix plenament amb l'obtingut en ocasions anteriors: $c_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Observem que la recurrència és lineal amb coeficients constants. Es pot resoldre pel mètode general aplicable a aquests tipus de recurrències (secció 10.6).

Sabent quin ha de ser el resultat, formuleu una demostració inductiva de la propietat.

Problema 10.4

Calculeu, per recurrències, el nombre de diagonals d'un polígon convex de n costats.

Resolució

És només un exercici d'entrenament, ja que el problema es pot resoldre de manera més directa i senzilla per un argument combinatori, com s'ha vist al capítol de combinatòria elemental.

Estem especialment interessats en el plantejament de la recurrència, més que en la resolució.

Es tracta de plantejar una successió recurrent, d_n , que sigui justament el nombre de diagonals.

El problema té sentit per a $n \geq 3$, i per al cas de triangle és $d_3 = 0$.

Suposem que tenim un polígon convex de $n \geq 4$ vèrtexs, amb d_n diagonals. Sigui A un vèrtex qualsevol, i siguin B, C els vèrtexs adjacents. Eliminem el triangle ABC i considerem el polígon restant, de $n - 1$ vèrtexs, també convex. L'antiga diagonal BC ara és costat del nou polígon. El nombre de diagonals del nou polígon és d_{n-1} . Restablím el polígon original, afegim les diagonals que parteixen del vèrtex A (n'hi ha $n - 3$) i retornem al segment AB , novament, el seu paper de diagonal. Per tant, resulta $d_n = d_{n-1} + (n - 3) + 1 = d_{n-1} + n - 2$.

Per tant, la recurrència és

$$\begin{cases} d_3 = 0 \\ d_n = d_{n-1} + n - 2, n \geq 4 \end{cases}$$

Es pot resoldre directament, aplicant repetidament la recurrència, o bé per teoria general, tenint en compte que és una recurrència lineal, amb coeficients constants, d'ordre 1, no homogènia. El lector pot completar-ne la resolució.

Es pot provar també per inducció, sabent el resultat, i efectuant una descomposició similar a la de l'argumentació anterior.

Problema 10.5

Considerem la dissecció del pla creada per n circumferències en posició general (cada dues es tallen en dos punts i no n'hi ha tres que es tallin en un mateix punt). Utilitzeu recurrències per calcular el nombre de vèrtexs v_n (interseccions de les circumferències), el nombre d'arestes (arcs de circumferència) a_n i el nombre de cares o regions c_n de la dissecció (amb l'exterior, l'única no fitada inclosa).

Resolució

El nombre de vèrtexs v_n

En primer lloc, tenim $v_1 = 0$, cosa que constitueix la condició inicial de la recurrència. Observeu que $v_2 = 2$.

Sigui ara una configuració de n circumferències en posició general, amb v_n vèrtexs. Afegim-hi una nova circumferència \mathcal{C} de manera que en conjunt es mantingui la propi-

etat de posició general (en línia discontinua a la figura 10.2).

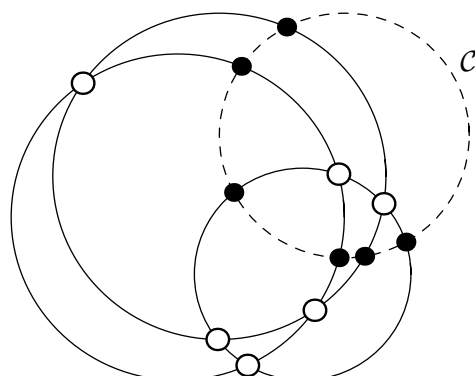


Figura 10.2

A la nova dissecció hi haurà v_{n+1} vèrtexs. Vegem com podem expressar v_{n+1} en funció de v_n . La nova circumferència talla cada una de les n antigues en 2 punts diferents, i aquests punts són diferents de vèrtexs preexistents, per la condició de posició general. Per tant, l'increment en el nombre de vèrtexs és $2n$. Així, $v_{n+1} = v_n + 2n$. La recurrència completa és

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 2n, n \geq 1 \end{cases}$$

Aquesta recurrència es pot resoldre directament, per iteració:

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1} + 2(n-1) = (v_{n-2} + 2(n-2)) + 2(n-1) \\ &= \dots = v_1 + 2 \cdot 1 + \dots + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 \frac{(n-1)n}{2} = n(n-1). \end{aligned}$$

Utilitzem per a la resta la figura 10.2.

El nombre d'arcs a_n

La idea és similar a la del càlcul dels vèrtexs. Tenim $a_1 = 1$, corresponent a la circumferència sencera. Sigui ara una dissecció de n circumferències, amb a_n arestes. Una nova circumferència \mathcal{C} (de manera que globalment es formi una dissecció de circumferències en posició general) produeix noves arestes. D'una banda, la circumferència \mathcal{C} és tallada per totes les n circumferències en 2 punts cadascuna, de manera que s'estableixen $2n$ punts d'intersecció sobre \mathcal{C} , i d'aquesta manera es genera un increment net de $2n$

arestes, arcs de circumferència (sobre \mathcal{C}). D'altra banda, \mathcal{C} talla les n circumferències globalment en $2n$ punts nous, de forma que la intersecció es produeix a l'interior d'un arc preexistent i el secciona en dos. Atès que es tallen $2n$ arcs, l'increment net d'arestes per aquest motiu és de $2n$. Per tant, globalment, $a_{n+1} = a_n + 2n + 2n$.

La recurrència és

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4n, n \geq 1 \end{cases}$$

El lector pot resoldre per iteració la recurrència anterior i obtenir el resultat, $a_n = 2(n-1)n$.

El nombre de regions c_n

Tenim $c_1 = 2$ (corresponent a l'interior i a l'exterior de la circumferència). Afegim una nova circumferència \mathcal{C} a una dissecció de n circumferències, de manera que globalment es conservi la posició general. Vegem quantes noves cares hem d'afegir al còmput per causa de la nova $(n+1)$ -èsima circumferència. La circumferència \mathcal{C} talla k cares i les secciona en 2 subcares, de manera que l'increment net és de k noves cares, ja que les k tallades ja estaven comptades a c_n . Ara bé, la secció d'una cara preexistent es produeix mitjançant l'arc corresponent de la circumferència \mathcal{C} que travessa aquesta cara. Per això l'única cosa que cal comptar és quants arcs de circumferència es formen sobre \mathcal{C} per la intersecció amb les n circumferències, ja que aquests arcs són els que travessen les regions preexistents i les descomponen en dues. Ara bé, la circumferència \mathcal{C} talla les n anteriors en $2n$ punts, de manera que serien $2n-1$ arcs sobre \mathcal{C} que seccionen (travessant-les) cares interiors a les n circumferències. Si, a més, hi comptem l'increment en 1 cara degut a la cara no fitada, resulta $k = 2n$. Per tant, $c_{n+1} = c_n + 2n$. La recurrència completa és

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = c_n + 2n, n \geq 1 \end{cases}$$

La recurrència és molt senzilla i es pot resoldre per iteració:

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + 2(n-1) = (c_{n-2} + 2(n-2)) + 2(n-1) \\ &= \dots = c_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= 2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i = 2 + 2 \frac{(n-1)n}{2} = 2 + n(n-1). \end{aligned}$$

Observació. Amb anterioritat hem tractat el mateix problema directament, sense utilitzar recurrències. En aquest mateix exercici s'han resolt les recurrències directament,

però també s'haurien pogut resoldre com a recurrències lineals o bé, sabut el resultat, per inducció. Es recomana al lector que resolgui l'exercici per aquests mètodes.

També s'hauria pogut seguir un procediment mixt, consistent a calcular una de les tres quantitats v_n, a_n, c_n directament i posteriorment la tercera pendent d'obtenció aplicant la fórmula d'Euler al graf planari produït per la dissecció per circumferències.

Problema 10.6

Calculeu en quantes regions tridimensionals polièdriques divideixen l'espai n plans en posició general (és a dir, tres qualssevol es tallen i no n'hi ha quatre amb un punt comú). Les regions polièdriques estan limitades per plans i n'hi ha de fitades (poliedres) i de no fitades.

Resolució

Indiquem per R_n el nombre corresponent. Formulem una relació recurrent per a R_n , cosa que converteix el problema en el de resoldre una successió recurrent.

Tenim $R_1 = 2$, ja que el pla divideix l'espai en dos semiespais. Aquesta és la condició inicial de la recurrència.

Sigui R_{n+1} el nombre de regions polièdriques corresponents a una dissecció per $n + 1$ plans en posició general. Considerem un pla qualsevol Π . Els restants n plans continuen estant en posició general i formen R_n regions polièdriques. Vegem si podem expressar R_{n+1} en termes de R_n . Ho aconseguirem si sabem comptar quin és l'increment Δ_n de regions polièdriques que es produeix quan afegim un nou pla. Un nou pla talla k regions polièdriques preexistents i les secciona en dues subregions, de manera que l'increment net és de k noves regions polièdriques. El problema és, doncs, calcular quantes regions talla el nou pla Π . Observem que la intersecció d'una regió polièdrica amb el pla és una regió poligonal plana (2D) sobre el pla, delimitada per rectes, que són justament les interseccions dels altres plans amb el nou pla Π . Per tant, els n plans determinen sobre Π una dissecció plana creada per n rectes en posició general, i cada cara d'aquesta dissecció està en correspondència amb una regió polièdrica seccionada per Π . De manera que el nombre de regions tallades per Π és el nombre de cares d'una dissecció plana de n rectes. Com hem vist en altres problemes anteriors, és $\binom{n}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}$. Per tant, podem escriure

$$R_{n+1} = R_n + \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Finalment, la recurrència completa és

$$\begin{cases} R_1 = 2 \\ R_n = R_{n-1} + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} \end{cases}$$

Es pot resoldre per iteració repetida:

$$\begin{aligned} R_n &= R_{n-1} + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} \\ R_{n-1} &= R_{n-2} + \frac{(n-2)^2 + (n-2) + 2}{2} \\ &\dots \\ R_3 &= R_2 + \frac{2^2 + 2 + 2}{2} \\ R_2 &= R_1 + \frac{1^2 + 1 + 2}{2} \end{aligned}$$

Sumant,

$$R_n = R_1 + \frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2] + \frac{1}{2}[(n-1) + (n-2) + \dots + 1] + \frac{1}{2}(2 + \dots + 2).$$

Ara bé, és ben conegut que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i podem ara escriure

$$R_n = 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} + (n-1) = \frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}.$$

Observació. Aquesta recurrència es podria resoldre per inducció o bé com a recurrència lineal no homogènia. Recordem que aquest mateix problema es va resoldre per un altre mètode, sense recurrències, al capítol dedicat a combinatòria elemental.

10.5 Resolució de successions recurrents per inducció

El mètode consisteix a provar per inducció que el terme general a_n s'expressa com una funció de n , és a dir, és $a_n = g(n)$, per a alguna g , per inducció sobre n . Aquesta funció ens és indicada per alguna afirmació o bé hem pogut intuir-la per experimentació, sobre tot a partir del càlcul dels primers termes de la successió (fins a trobar un patró de formació dels termes de la successió).

En el pas base de la demostració inductiva, hi fem intervenir la condició inicial. En el pas inductiu, hi fem servir la relació recurrent.

Vegem-ne un exemple.

Considereu la recurrència

$$\begin{cases} s_n = s_{n-1} + n, n \geq 2 \\ s_1 = 1 \end{cases}$$

Demostreu per inducció que $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Resolució

Farem la demostració per inducció sobre n .

Pas base. Per a $n = 1$, és una comprovació.

Pas inductiu. Sigui $n \geq 2$ i suposem, per hipòtesi d'inducció, que $s_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$. Aleshores podem escriure

$$s_n = s_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Més que “trobar” la solució de la recurrència, és una demostració. L'inconvenient d'aquest mètode és que prèviament s'ha de saber quin és el resultat.

Retrobem un vell problema, relatiu a disseccions per rectes, que ara es tracta per inducció. Ens remetem a problemes anteriors, on aquesta estructura ja s'ha estudiat de diverses maneres.

Problema 10.8

Donada una dissecció per n rectes en el pla en posició general, siguin v_n el nombre de vèrtexs, a_n el nombre d'arestes i c_n el nombre de cares. Demostreu per inducció que $v_n = \binom{n}{2}$, $a_n = n^2$ i $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$. Utilitzeu recurrències.

Resolució

En problemes de la secció anterior en els quals s'obtenen v_n , a_n , c_n es formulen relacions recurrents per a cada una d'aquestes quantitats. Estudiem cada cas a continuació.

Càlcul de v_n

La recurrència obtinguda anteriorment és

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + n, n \geq 1 \end{cases}$$

Per fer una demostració inductiva del resultat, la farem sobre n .

El pas base consisteix a comprovar que per a $n = 1$ es compleix el resultat, cosa evident.

En el pas inductiu, suposem que la propietat es compleix per a n (com a hipòtesi d'inducció), és a dir, que $v_n = \binom{n}{2}$ i hem de provar que també és certa per a $n + 1$, és a dir, que $v_{n+1} = \binom{n+1}{2}$. En efecte, aplicant la hipòtesi d'inducció, $v_{n+1} = v_n + n = \binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$.

Càlcul de a_n

La recurrència obtinguda anteriorment és

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

Demostrem el resultat inductivament sobre n .

El pas base consisteix a comprovar que es compleix el resultat per a $n = 1$, la qual cosa és òbvia.

En el pas inductiu, suposem que la propietat es compleix per a n (com a hipòtesi d'inducció), és a dir, que $a_n = n^2$ i hem de provar que també és certa per a $n + 1$, és a dir, que $a_{n+1} = (n + 1)^2$. Aplicant la hipòtesi d'inducció, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Càlcul de c_n

És del tot similar als casos anteriors.

La recurrència és

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = c_n + n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

En el pas base, la comprovació és immediata. En el pas inductiu, suposem com a hipòtesi d'inducció que $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$. Aleshores, $c_{n+1} = c_n + n + 1 = \left(\binom{n}{2} + n + 1\right) + n + 1 = \left(\binom{n}{2} + n\right) + (n + 1) + 1 = \left(\binom{n+1}{2}\right) + (n + 1) + 1 = \binom{n+1}{2} + (n + 1) + 1$, com s'havia de demostrar.

L'inconvenient d'aquests tipus de resolució del problema és que s'ha de conèixer o intuir prèviament el resultat al qual s'ha d'arribar.

10.6 Resolució de successions recurrents lineals a coeficients constants

Un cas especial de successió recurrent és el de les anomenades successions recurrents *lineals*, per a les quals, en condicions especialment favorables, es pot obtenir una solució

en termes d'una fórmula tancada. Ens referim al cas de les successions d'aquest tipus amb coeficients constants i amb terme independent "senzill".

La successió recurrent

$$a_n - k_1 a_{n-1} - k_2 a_{n-2} - \dots - k_r a_{n-r} = f(n), n > r,$$

amb k_1, k_2, \dots, k_r constants de \mathbb{R} , amb $k_r \neq 0$, és una successió recurrent lineal, amb coeficients constants, d'ordre r , amb terme independent $f(n)$. Com a regla útil, l'ordre es pot obtenir com a diferència entre els subíndexs màxim i mínim, $n - (n - r) = r$.

Si $f(n) = 0$, es diu que és *homogènia*. En cas contrari, és *no homogènia*.

Com a exemple, $a_n - 2a_{n-1} = 0$ és una successió recurrent lineal, amb coeficients constants, d'ordre 1, homogènia. La successió $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = n^2$ és una successió recurrent lineal, amb coeficients constants, d'ordre 2, no homogènia, amb terme independent $f(n) = n^2$. És lineal, però no amb coeficients constants, la successió dels factorials, $a_n = na_{n-1}$.

La recurrència homogènia associada. Donada la recurrència

$$a_n - k_1 a_{n-1} - k_2 a_{n-2} - \dots - k_r a_{n-r} = f(n), k_r \neq 0, n > r,$$

es diu que la recurrència

$$a_n - k_1 a_{n-1} - k_2 a_{n-2} - \dots - k_r a_{n-r} = 0, k_r \neq 0, n > r,$$

és l'homogènia associada corresponent. Per exemple, en el cas $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = n^2$, l'homogènia associada és $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$

Condicions inicials. S'han d'especificar, a més, les condicions inicials a_1, \dots, a_{n-r-1} , cosa que significa que s'ha de dir quins són els valors dels $n - r - 1$ primers termes de la successió (segons el problema, de vegades té sentit considerar a_0): $a_1 = b_1, \dots, a_{n-r-1} = b_{n-r-1}$.

Polinomi característic. Donada una recurrència com l'anterior, el *polinomi característic* associat, polinomi de grau r (ordre de la recurrència), és el polinomi

$$p(x) = x^r - k_1 x^{r-1} - \dots - k_{r-1} x - k_r$$

I l'equació característica seria

$$x^r - k_1 x^{r-1} - \dots - k_{r-1} x - k_r = 0.$$

Per exemple, en el cas $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$, el polinomi característic és $p(x) = x^2 - 4x + 3$ i l'equació característica és $x^2 - 4x + 3 = 0$. Si tenim el polinomi $x^2 - 2x - 4$, aleshores la recurrència que el té de polinomi característic és $a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2} = 0$.

Trobar la solució d'una recurrència és trobar la *solució general*, és a dir, la col·lecció infinita de successions que satisfan el patró de recurrència i després, aplicant les condicions inicials, es determina la solució que ens interessa per al nostre problema, que aleshores ja és única.

Revisem, a continuació, com procedir en els dos casos de recurrència homogènia i no homogènia.

Veurem que, com a resum, el procediment que cal seguir és:

1. Cas homogeni:
 - (a) Obtenció de la solució general.
 - (b) Aplicació de les condicions inicials per determinar les solucions.
2. Cas no homogeni:
 - (a) Obtenció de la solució general de la no homogènia.
 - i. Obtenció de la solució general de l'homogènia associada.
 - ii. Obtenció d'una solució particular de la no homogènia.
 - (b) Aplicació de les condicions inicials per determinar les solucions.

En principi s'exposaran procediments generals. En cap cas està garantit l'èxit, ja que dependrà de les dades concretes del problema.

10.6.1 Cas homogeni

Abans de fer intervenir les condicions inicials, obtindrem la solució general. La solució general deriva d'un determinat tipus de solucions, les que anomenem *bàsiques*, que, per la seva banda, deriven de les arrels del polinomi característic, comptant-hi la multiplicitat. No en farem aquí cap justificació teòrica, per a la qual remetem el lector a altres textos.

Sigui p_1 una solució de l'equació característica (equivalentment, una arrel del polinomi característic), de multiplicitat m_1 . Les successions $p_1^n, np_1^n, n^2p_1^n, \dots, n^{m_1-1}p_1^n$ són solucions de la recurrència i també tota combinació lineal que es pugui generar a partir d'aquestes solucions, és a dir, la successió $z_n = c_0p_1^n + c_1np_1^n + c_2n^2p_1^n + \dots + c_{m_1}n^{m_1-1}p_1^n$.

Les successions $p_1^n, np_1^n, n^2p_1^n, \dots, n^{m_1-1}p_1^n$ són les anomenades *solucions bàsiques* associades a p_1 . En el cas de multiplicitat $m_1 = 1$, hem d'arribar fins a l'exponent $m_1 - 1 = 0$, és a dir, el conjunt de les solucions bàsiques associades es redueix a p_1^n .

La solució general és el conjunt de totes les combinacions lineals que es poden formar a partir de les solucions bàsiques derivades de *totes* les arrels del polinomi característic.

En el cas $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$, l'equació característica $x^2 - 4x + 3 = 0$ té dues solucions, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, de multiplicitats respectives $m_1 = 1, m_2 = 1$. La solució general de l'homogènia és

$$a_n = c_1 3^n + c_2 1^n = c_1 3^n + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imaginem una successió recurrent homogènia de polinomi característic $p(x) = (x - 2)(x - 3)^2(x - 5)^3$. La solució general seria

$$a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n + c_4 5^n + c_5 n 5^n + c_6 n^2 5^n.$$

10.6.1.1 La successió de Fibonacci

La successió de Fibonacci apareix en moltes situacions en el curs de la resolució de problemes en els quals s'aborden els còmputos utilitzant recurrències.

La successió és la següent (genèrica, sense condicions inicials):

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3.$$

Vegem com es pot resoldre. La podem reescriure com $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$. És una recurrència lineal d'ordre 2, a coeficients constants i homogènia. L'equació característica és $x^2 - x - 1 = 0$, que té les solucions

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

ambdues de multiplicitat $m_1 = m_2 = 1$.

Per aquest motiu, la solució general de la recurrència és

$$a_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalment, caldria aplicar les condicions inicials, si en tenim, per obtenir la solució concreta que correspon al problema concret.

10.6.2 Cas no homogeni

En el cas no homogeni,

$$a_n - k_1 a_{n-1} - k_2 a_{n-2} - \dots - k_r a_{n-r} = f(n), k_r \neq 0, n > r,$$

se segueix el procediment següent:

1. Es resol la recurrència homogenia corresponent, en aquest cas

$$a_n - k_1 a_{n-1} - k_2 a_{n-2} - \dots - k_r a_{n-r} = 0,$$

D'aquesta manera obtenim l'anomenada *solució general* de l'homogenia, que denotem per $a_n^{(gh)}$.

2. Obtenim una solució particular de la no homogenia, que denotem per $a_n^{(pnh)}$. La possibilitat de tenir èxit en això dependrà de la forma del terme independent.
3. Escrivim, com a resultat de desenvolupaments teòrics, la solució general de la no homogenia, que s'expressa com a suma de les dues anteriors, és a dir, com

$$a_n^{(gnh)} = a_n^{(gh)} + a_n^{(pnh)}.$$

4. Finalment cal aplicar, si escau, les condicions inicials a la $a_n^{(gnh)}$ per tal de determinar la successió solució de la recurrència no homogenia amb condicions inicials.

Vegem ara com es pot procedir per trobar una solució particular de la no homogenia, essencialment en el cas que es pugui posar com a solució derivada de les solucions bàsiques (en veurem exemples en els problemes resoltos posteriors):

- (a) Calculeu el polinomi característic $p(x)$ de l'homogenia associada.
- (b) Trobeu el polinomi característic $q(x)$ d'una recurrència homogenia que admeti com a solució particular $f(n)$. Òbviament en aquest punt és clau la forma de $f(n)$ per tal que la puguem identificar com a derivada d'una solució bàsica, associada a alguna arrel del polinomi característic.
- (c) Escriviu la solució general de la recurrència homogenia associada a $s(x) = p(x)q(x)$. Atès que aquest polinomi té els factors de $p(x)$, sempre tindrem en aquesta solució termes corresponents o derivats dels factors de $p(x)$ en la solució corresponent a $r(x)$.

- (d) A la solució general anterior descartem els termes que provenen de $p(x)$. Sigui z_n la resta. Aleshores utilitzem z_n com a possible candidata a solució particular de la no homogènia. S'imposa que així sigui, substituïnt a la no homogènia, per tal de determinar els coeficients. Un cop determinats, se substitueixen a z_n i tenim una solució particular de la no homogènia.

Per trobar una possible solució particular de la recurrència no homogènia hem exposat un mètode possible. Ara bé, és possible que el lector prefereixi tenir directament, en els casos més usuals que es presenten, possibles solucions-tipus, amb coeficients indeterminats, per provar.

Vegeu [GRIM89] per a una tabulació de possibles solucions a buscar directament.

Donem aquí, en els casos més simples i habituals, algunes possibles successions per provar. Indicarem què cal fer en el cas de polinomi característic de grau menor o igual que 2.

En el cas de terme independent de la forma $f(n) = kr^n$, amb k constant, $n \geq 1$, es consideren dues possibilitats:

- El polinomi característic és de grau 1.
 1. Si r no és arrel del polinomi característic, proveu amb la possible solució particular Ar^n , A constant.
 2. Si r és arrel del polinomi característic, proveu amb Bnr^n , B constant per determinar, substituïnt.
- El polinomi característic és de grau 2.
 1. Si r no és arrel del polinomi característic, preneu Ar^n , A constant.
 2. Si r és arrel real simple, de multiplicitat 1, del polinomi característic, aleshores proveu amb Bnr^n , B constant.
 3. Si r és arrel real múltiple, de multiplicitat 2, del polinomi característic, aleshores proveu amb Cn^2r^n , C constant.

Si el terme independent és una funció polinòmica, com per exemple, $f(n) = kn^p$, amb $p \in \mathbb{N}$, fix, provem amb $C_p n^p + C_{n-1} n^{p-1} + \dots + C_1 n + C_0$. En el cas de constant, $f(n) = k$, provem amb k .

10.6.3 Un exemple

Segueix un exemple de resolució d'un problema en el cas no homogeni.

Problema 10.9

Calculeu $1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

Resolució

Observeu que $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \sum_{i=0}^n a^i$. Plantejarem una successió recurrent que ens permeti obtenir la suma anterior en forma tancada, precisament com a solució de la recurrència.

En primer lloc, observem que, si $a = 1$, aleshores la suma és simplement $n+1$. Suposem, doncs, que $a \neq 1$.

Considerem la successió $s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, per a $n \geq 0$. Es pot reescriure fàcilment com a successió recurrent, ja que $s_n = (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) + a^n = s_{n-1} + a^n$, si $n \geq 1$, i $s_0 = 1$. El problema és, doncs, resoldre la successió recurrent

$$\begin{cases} s_n = s_{n-1} + a^n, n \geq 1, \\ s_0 = 1 \end{cases}$$

Considerem la successió recurrent homogènia associada $s_n = s_{n-1}$, que podem reescriure com $s_n - s_{n-1} = 0$, successió recurrent lineal, amb coeficients constants, d'ordre 1, amb polinomi característic $p(x) = x - 1$.

Atès que les solucions del polinomi característic es redueixen a $x_1 = 1$, amb multiplicitat 1, la solució general de l'homogènia associada és $s_n^{(gh)} = cx_1^n = c$, amb $c \in \mathbb{R}$.

Anem a obtenir una solució particular de l'equació $s_n - s_{n-1} = a^n$, de terme independent $f(n) = a^n$. Si consideréssim una successió recurrent auxiliar de polinomi característic $q(x) = x - a$, la solució general derivada de l'arrel $x_1 = a$ seria αa^n , de la que un cas particular és a^n , per a $\alpha = 1$. Considerem ara el producte $p(x)q(x) = (x-1)(x-a)$, que podem considerar com a polinomi característic d'una recurrència auxiliar (que ni ens molestarem a explicitar, tot i que seria trivial de fer), successió que té solució general $c_1 1^n + c_2 a^n$. A l'expressió anterior identifiquem la part que prové de considerar $p(x)$ i considerem la resta, que passa a ser la successió candidata a solució particular de la no homogènia. És a dir, $z_n = c_2 a^n$ és una successió candidata a solució particular, cosa que imposarem per tal d'obtenir la constant c_2 corresponent.

Substituint a la recurrència no homogènia (la donada originalment), imposem $z_n - z_{n-1} = a^n$, d'on $c_2 a^n - c_2 a^{n-1} = a^n$. Simplificant (recordem que estem suposant $a \neq 1$), $c_2 a - c_2 = a$, d'on $c_2 = \frac{a}{a-1}$, i així tenim una solució particular de la no homogènia, substituint a z_n : $s_n^{(pnh)} = \frac{a}{a-1} a^n = \frac{1}{a-1} a^{n+1}$.

La solució general de la no homogènia és

$$s_n^{(gnh)} = s_n^{(gh)} + s_n^{(pnh)} = c + \frac{1}{a-1} a^{n+1}.$$

Ara només resta imposar la condició inicial per obtenir la solució al nostre problema: $1 = s_0 = c + \frac{1}{a-1}a$, d'on $c = \frac{1}{1-a}$. Finalment, substituint a $s_n^{(gnh)}$, resulta $s_n = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a-1}a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

S'arriba, així, a la coneguda fórmula

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, a \neq 1.$$

10.6.4 Problemes addicionals resolts

Problema 10.10

Considerem el problema o joc de les torres de Hanoi. Tenim tres pals verticals A, B, C i n discs de radis diferents. Inicialment els discs estan apilats en el pal A per radis decreixents, de manera que el de radi més gran és a sota i el de radi més petit és a dalt de tot, tots travessats pel pal. La finalitat del joc és col·locar els n discs al pal B , de manera que quedin en la mateixa posició en la qual estaven inicialment al pal A .

Es permet un sol tipus de moviment: passar el disc de dalt d'una pila a una altra pila sense cobrir cap disc de radi inferior.

Quin és el nombre mínim de jugades necessàries per resoldre el joc?

Formuleu una recurrència associada al problema i resoleu-la.

Resolució

Fase 1: Plantejament de la recurrència.

Formulació de la recurrència. Per plantejar la recurrència, hem de pensar quina podria ser la successió, quin significat podria tenir amb relació al problema. Indiquem per a_n el nombre mínim de jugades per resoldre el problema amb n discs. El problema essencial és veure com podem reduir el problema per a n discs a un problema de característiques idèntiques, equivalent, però per a $n-1$ discs, cosa que sol ser la dificultat més important del plantejament. En el cas dels $n-1$ discs, la solució del problema ve donada per a_{n-1} , que compta el nombre mínim d'operacions requerides.

Com es pot reduir el problema a un d'idèntic, però de "mida" $n-1$? Si observem la pila inicial d' A i ens fixem en els $n-1$ discs de sobre, aquests estan situats en la posició requerida pel problema. Moure'ls requerirà justament a_{n-1} jugades (mínim de jugades per moure'l).

Plantegem el procediment següent de resolució, en l'ordre que s'indica:

- *Maniobra 1.* Traslladem els $n - 1$ discs de sobre del pal A al pal C . El nombre mínim de passos per resoldre aquest problema és a_{n-1} .
- *Maniobra 2.* El disc de radi màxim que ha quedat a A es trasllada a B i així ocupa la que serà la posició definitiva. Aquesta operació requereix un pas. És impossible resoldre-la en menys passos.
- *Maniobra 3.* Traslladar els $n - 1$ discs que estan encara a C cap al pal A . Aquest és un problema de les mateixes característiques que el problema global, però amb un disc menys, és a dir, $n - 1$ discs i, per tant, el mínim de jugades per resoldre'l és a_{n-1} , segons la definició de a_n .

Resolem la primera maniobra en a_{n-1} jugades. La segona maniobra té cost 1. La tercera maniobra es fa en a_{n-1} jugades. Per tant, globalment,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + 1 = 2a_{n-1} + 1.$$

Condicions inicials. La recurrència encara no és definida completament. Cal donar la condició o les condicions inicials. En aquest cas, és $a_1 = 1$, ja que en el cas d'un sol disc amb un únic moviment n'hi ha prou per resoldre el problema.

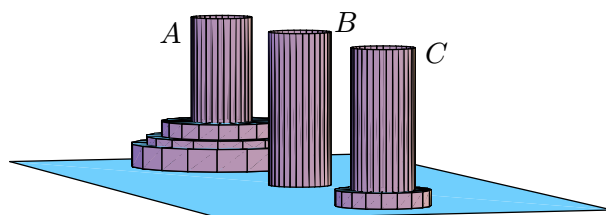


Figura 10.3

Fase 2: Resolució de la recurrència

Mètode 1

En aquest cas, la recurrència és molt simple i es pot resoldre de manera directa aplicant la relació recurrent repetides vegades, fins a “esgotar” el subíndex, que queda a 1, com veurem a continuació. Aquest és un dels mètodes elementals de resolució.

Utilitzem la recurrència i el valor inicial $a_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2a_{n-2} + 2 + 1 \\
 &= 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
 &= \dots \\
 &= 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\
 &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1
 \end{aligned}$$

Ens trobem ara amb la necessitat de saber sumar els primers termes d'una progressió geomètrica de raó $x = 2$. La fórmula és fàcil de deduir, tot i que hauria de formar part del bagatge de coneixements del lector. Suposant que $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} s &= 1 + x + \cdots + x^n \\ xs &= x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} \\ xs - s &= x^{n+1} - 1 \\ s &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Aplicant la fórmula anterior, resulta $2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$.

Per tant, $a_n = 2^n - 1$.

Destaquem, una vegada més, la importància de disposar d'una bona provisió de fórmules i identitats, per utilitzar en els processos de comptar, per calcular expressions en forma tancada, com en el cas anterior.

Mètode 2. Resoldrem la recurrència aplicant la teoria general per resoldre aquest problema.

En primer lloc, hem d'identificar el tipus de recurrència i les seves característiques.

La recurrència $a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 2; a_1 = 1$ és una recurrència lineal a coeficients constants no homogènia, d'ordre 1. L'homogènia corresponent és $a_n - 2a_{n-1} = 0$ i el terme independent de la no homogènia és $f(n) = 1$. La condició inicial és $a_1 = 1$.

Cal buscar la solució general de l'homogènia ($a_n^{(gh)}$) i una solució particular de la no homogènia ($a_n^{(pnh)}$).

Anem a resoldre l'homogènia $a_n - 2a_{n-1} = 0$, cosa que significa trobar la solució general. Calculem el polinomi característic associat $P(x) = x - 2$ o, equivalentment, l'equació característica associada, $x - 2 = 0$, de grau 1. Hi ha una única solució, $x_1 = 2$, de multiplicitat $m_1 = 1$, de la qual deriva la solució bàsica $p_n = 2^n$ i en resulta la solució general de l'homogènia, que és, per tant, $a_n^{(gh)} = c2^n$.

Troblem una solució particular de la no homogènia $a_n - 2a_{n-1} = 1$. El terme independent correspon a un dels patrons per als quals sabem trobar una solució particular.

En aquest cas, la simplicitat del terme independent fins i tot ens permetria pràcticament "endevinar" la forma d'una solució particular. Ara bé, procedim de manera sistemàtica, com s'especifica a continuació.

1. Calculem el polinomi característic $p(x)$ de l'homogènia associada, que en aquest cas és $p(x) = x - 2$.

2. Considerem una successió recurrent b_n homogènia que admeti $f(n) = 1$ com a solució. Tenint en compte com són les solucions de les homogènies derivades d'una arrel del polinomi característic, observem que $1 = 1^n$ seria solució d'una homogènia, per a la qual el polinomi característic tingués solució $q_1 = 1$. De fet, no ens cal ni trobar-la. Només necessitem el polinomi característic, que seria $q(x) = x - 1$. Es pot comprovar que la solució derivada seria $c_1 1^n$, solució de $b_n - b_{n-1} = 0$ (que realment no necessitem explicitar per a aquest procés).
3. Considerem el polinomi $r(x) = p(x)q(x) = (x - 2)(x - 1)$ i considerem (mentalment) l'homogènia associada, que té solució general derivada de les arrels del polinomi característic $r(x)$. La successió $d_n = c_1 2^n + c_2 1^n$ és la successió buscada.
4. De la solució anterior eliminem la part que prové de la solució general que correspon a $p(x)$, és a dir, el terme $c_1 2^n$, i ens queda $z_n = c_2 1^n$.
5. Utilitzem el resultat anterior, és a dir, z_n , com a possible candidata a solució particular buscada. Cal, doncs, substituir a la recurrència original no homogènia i calcular els coeficients per tal que z_n en sigui una solució. Per això, imposem que ho sigui, és a dir, imposem $z_n - 2z_{n-1} = 1$. Aleshores tindrem $c_2 1^n - 2c_2 1^{n-1} = 1$, és a dir, $c_2 = -1$, d'on $z_n = (-1) \cdot 1^n = -1$ és una solució particular de la no homogènia.

D'aquesta manera, una solució particular de la no homogènia és successió constant $a_n^{(p)} = -1$.

Per tant, la solució general de la no homogènia és

$$a_n^{(gnh)} = a_n^{(gh)} + a_n^{(pnh)} = c2^n - 1, c \in \mathbb{R}.$$

Com es veu, doncs, “la” solució general són de fet infinites solucions possibles, variant c , successions totes elles que satisfan la recurrència. Falta obtenir finalment, d'entre aquestes infinites solucions, la que satisfà la condició inicial. En aquest cas, això significa calcular c per tal que la condició inicial es compleixi, cosa que, de fet, imposem. Ha de ser $1 = a_1 = c2^1 - 1$, és a dir, $c = 1$. Per tant, la solució al problema de les torres de Hanoi és $a_n = 2^n - 1$.

Problema 10.11

Tenim un passadís de mides $n \times 2$, és a dir, de llargària n i altura 2. El volem enrajolar amb rajoles de mides diferents, que s'han d'utilitzar senceres. Les rajoles són de dos tipus, les de mida 2×1 i les de mida 2×2 .

Se suposa que les rajoles només es distingeixen per la mida, però no per l'aspecte.

Resolució

Resolem el problema per recurrències. Hem de formular una successió (que esperem que sigui recurrent i puguem, a més, resoldre-la, que ens compti justament el que ens interessa o ens demanen. Sembla raonable definir, per a cada n , la successió a_n justament com *el nombre d'enrajolaments possibles d'un passadís $2 \times n$ amb les condicions indicades*.

Fase 1: plantejament de la recurrència

Recordem que plantejar la recurrència significa dues coses: formular la relació recurrent i obtenir les condicions inicials.

Formulació de la recurrència

Hem de preguntar-nos: com podem reduir el nostre problema de mida n a un altre d'identiques característiques, però de mida inferior? O bé, com passem d'un problema de mida n a un altre de mida $n + 1$? Aquest és el primer pas per poder formular una recurrència.

Una manera és preguntar-nos com podem començar el passadís (per l'esquerra, per exemple, tot i que, de forma totalment equivalent, podríem analitzar com acabar-lo). Pot començar de tres maneres, com es mostra a les figures posteriors. En cada cas, ens resta per enrajolar un passadís o subpassadís de longitud inferior, per al qual s'han de satisfer les mateixes condicions. El nombre de maneres d'enrajolar els subpassadissos està també comptat per la successió a_n , ja que és un problema del mateix tipus, però de "mida" inferior.

Distingim, doncs, tots els tipus possibles de començar a enrajolar, cosa que estableix tres tipus d'enrajolaments.

Els enrajolaments de tipus I són els que comencen amb una rajola de 2×1 (vertical), com a la figura 10.4. En aquest cas, resta per enrajolar un subpassadís de mides $2 \times (n - 1)$, amb les mateixes condicions i el nombre d'enrajolaments possibles del subpassadís és precisament a_{n-1} . Per tant, quants enrajolaments hi ha de tipus I? La resposta és $|I| = a_{n-1}$.

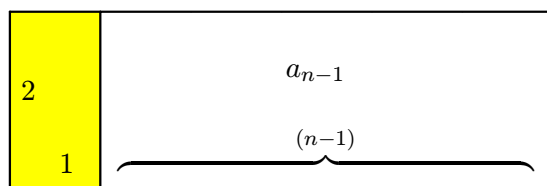


Figura 10.4

Els enrajolaments de tipus II són els que comencen amb dues rajoles de 2×1 (horitzontals), com a la figura 10.5. En aquest cas, resta per enrajolar un subpassadís de

mides $2 \times (n - 2)$, amb les mateixes condicions, i el nombre d'enrajolaments possibles del subpassadís és precisament a_{n-2} , que és la successió que ens els compta. Per tant, quants enrajolaments hi ha de tipus II? La resposta és $|II| = a_{n-2}$.

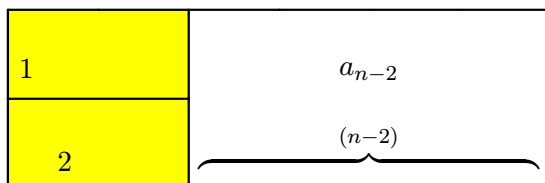


Figura 10.5

Els enrajolaments de tipus III són els que comencen amb una rajola de 2×2 , com a la figura 10.6. En aquest cas, resta per enrajolar un subpassadís de mides $2 \times (n - 2)$, amb les mateixes condicions, i el nombre d'enrajolaments possibles del subpassadís és precisament a_{n-2} , ja que el fet que s'hagi posat en primera posició no afecta les posicions següents cap a la dreta (per tant, és tornar a “començar”, però amb dues unitats menys). Aleshores, quants enrajolaments hi ha de tipus III? La resposta és $|III| = a_{n-2}$.

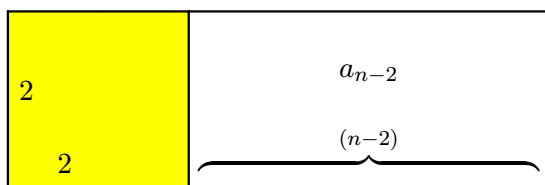


Figura 10.6

No hi ha més possibilitats. El nombre total d'enrajolaments possibles és la suma dels dels tipus anteriors. Per tant, $a_n = |I| + |II| + |III| = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

Finalment, doncs, la relació recurrent és

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

Condicions inicials

Una equació recurrent defineix un patró de dependència del terme general de la successió en funció de termes anteriors (i potser de n), cosa que significa que queden definides infinites successions, totes ajustades al mateix patró. Cal buscar les condicions inicials (una quantitat suficient de valors per als primers termes), de manera que a partir d'aquests termes quedi la successió completament determinada.

En aquest cas, necessitem dues condicions, corresponents a a_1 i a a_2 . Pel que fa a a_1 , cas en què tenim un passadís de 1×2 , només podem utilitzar una rajola de 1×2 i, per

tant, només es pot enrajolar d'una sola manera, és a dir, $a_1 = 1$. Pel que fa a a_2 , hi ha tres maneres possibles (figura 10.7), de manera que $a_2 = 3$.

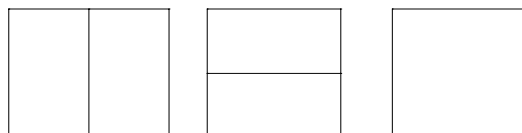


Figura 10.7

Per tant, la recurrència és

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n \geq 3 \\ a_1 = 1; a_2 = 3 \end{cases}$$

Fase 2: resolució de la recurrència

La recurrència $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ és lineal, a coeficients constants i homogènia. L'equació característica és $x^2 - x - 2 = 0$. Les solucions són $p_1 = 2$, amb multiplicitat $m_1 = 1$, i $p_2 = -1$, amb multiplicitat $m_2 = 1$. D'aquestes solucions deriven les solucions bàsiques $p_1^n = 2^n$ i $p_2^n = (-1)^n$. S'obté la solució general com a combinació lineal de les solucions bàsiques:

$$a_n = c_1 2^n + c_2 (-1)^n.$$

Ara cal imposar les condicions inicials per obtenir els c_1, c_2 de la solució al nostre problema. Això ens porta a un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 1 = a_1 = c_1 2^1 + c_2 (-1)^1 = c_1 - c_2 \\ 3 = a_2 = c_1 2^2 + c_2 (-1)^2 = 4c_1 + c_2 \end{cases}$$

La solució del sistema és $c_1 = \frac{4}{5}; c_2 = \frac{1}{5}$ i, per tant, la solució de la recurrència és

$$a_n = \frac{4}{5} 2^n + \frac{1}{5} (-1)^n.$$

Problema 10.12

Calculeu el nombre de cadenes de longitud n formades de zeros i uns (paraules sobre l'alfabet $\{0, 1\}$) amb la propietat de no tenir cap parella de 0 consecutius.

Resolució

Un mètode possible de resoldre aquest problema és mitjançant successions recurrents. Sigui a_n el nombre de cadenes de 0,1, de longitud n sense cap parella de 0 consecutius.

Estudiem com podem reduir el problema de comptar el nombre de cadenes de longitud n al problema de les mateixes característiques, però de longitud inferior. Estudiem de quantes maneres pot començar una cadena d'aquestes característiques, entenent que el primer caràcter, el que ocupa la posició primera, és a l'esquerra de la cadena. La resta serà una subcadena de les mateixes característiques però de longitud inferior.

Tenim les cadenes de tipus I, les que comencen per 1, com a la figura 10.8. La segona posició pot contenir qualsevol dels caràcters 0,1, ja que no es contradiu amb la propietat que s'ha de complir. Queda aleshores la subcadena de la dreta, d'ídèntiques característiques, però amb longitud $n - 1$. El nombre de subcadenes que es poden formar és el nombre de cadenes de longitud $n - 1$, és a dir, a_{n-1} . Hi ha, doncs, a_{n-1} , cadenes de longitud n que comencen per 1, del tipus I.

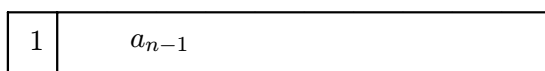


Figura 10.8

Les altres cadenes possibles són les que comencen per 0, cadenes de tipus II. En aquest cas, la segona posició no pot ser 0, ja que no seria la cadena amb la propietat de no contenir dos 0 consecutius. Per tant, ha de ser 1, com es mostra a la figura 10.9. A la posició 3 hi pot anar qualsevol caràcter sense restriccions i aquí comença una subcadena, que és una cadena amb les mateixes propietats de l'enunciat, però de longitud $n - 2$, i n'hi ha a_{n-2} . El nombre de cadenes de longitud n començant per 0 és a_{n-2} .



Figura 10.9

Per tant, la recurrència és $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, que és la successió de Fibonacci, que ja sabem resoldre.

Les condicions inicials són les següents. El terme a_1 compta el nombre de cadenes de 0,1 de longitud 1, cas en el qual queda automàticament satisfeta la propietat de no haver-hi dos 0 consecutius. Pot estar formada per 0 o 1, de manera que $a_1 = 2$. Anàlogament, en el cas de $n = 2$, les cadenes possibles són 01, 10, 11 (s'exclou 00), d'on $a_2 = 3$.

La resolució és rutinària. Ja se n'ha vist algun exemple similar en aquest mateix capítol.

Problema 10.13

Calculeu el nombre de cadenes de longitud n que es poden formar amb els tres caràcters

$\{a, b, c\}$ que continguin almenys dos símbols consecutius iguals.

Resolució

Presentarem diversos mètodes, utilitzant recurrències i directament.

Mètode 1: Per recurrències

Sigui a_n el nombre de cadenes de longitud n amb la propietat de l'enunciat.

Considerem diversos tipus possibles, d'acord amb el criteri de començar per una parella repetida o no.

Tipus I. La cadena comença per un doble aa . Aleshores resta una subcadena de longitud $n - 2$, que pot ser qualsevol, ja que la condició requerida per a la cadena de longitud n ja es compleix amb les dues primeres posicions. Ara bé, amb 3 caràcters podem formar 3^{n-2} cadenes de longitud $n - 2$, ja que a cada posició hi pot haver els tres caràcters, amb independència del que hi hagi a les altres. Per tant, de tipus I hi ha 3^{n-2} cadenes.

Tipus II. La cadena comença per un doble bb . Aleshores, per arguments idèntics al cas anterior, hi ha 3^{n-2} cadenes de tipus II.

Tipus III. La cadena comença per un doble cc . Aleshores, per arguments idèntics al cas de tipus I, hi ha 3^{n-2} cadenes de tipus III.

Tipus IV. Si no és dels anteriors, aleshores la cadena pot començar per a, b, c , i resta per omplir una cadena de longitud $n - 1$, però el segon terme ha de ser diferent del primer. En aquest cas, fem un càlcul global de la configuració: de cadenes de la dreta de longitud $n - 1$, que ha de satisfer les condicions, n'hi ha a_{n-1} . De tipus IV, n'hi ha tantes com les que es puguin formar a partir d'aquestes a_{n-1} cadenes afegint *al principi* a, b o c , però només hi ha dues possibilitats, per evitar repetició, ja que si no es fes així es produiria una cadena de tipus I, II o III. Per tant, de tipus IV n'hi ha $2a_{n-1}$.

Així, doncs, $a_n = |IV| + |I| + |II| + |III| = 2a_{n-2} + 3 \cdot 3^{n-2} = 2a_{n-2} + 3^{n-1}$.

Les condicions inicials són: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$ (serien aa, bb, cc).

Es tracta d'una recurrència lineal, a coeficients constants, d'ordre 1, no homogènia, amb part homogènia donada per $a_n - 2a_{n-2} = 0$ i terme independent $f(n) = 3^{n-1}$.

Estudiem l'homogènia corresponent, és a dir, $a_n - 2a_{n-1} = 0$. El polinomi característic és $p(x) = x - 2$. L'equació característica és $x - 2 = 0$, a la qual correspon l'única arrel $x_1 = 2$, de multiplicitat $m_1 = 1$. Associada a aquesta arrel i a la seva multiplicitat tenim la solució bàsica donada per 2^n . La solució general de la recurrència homogènia és $a_n^{(h)} = c2^n$.

Anem ara a obtenir una solució particular de la no homogènia $a_n = 2a_{n-2} + 3^{n-1}$. Seguim el guió següent:

1. Considerem el terme independent $f(n) = 3^{n-1}$, que podem escriure com $f(n) = \frac{1}{3}3^n$, expressió que reconeixem com a solució particular d'una recurrència homogènia tal que la seva equació característica $q(x)$ tingui solució $q_1 = 3$. Tot i que no la necessitem explícitament, la recurrència auxiliar pot ser $b_n - 3b_{n-1} = 0$, amb $q(x) = x - 3$. D'aquesta recurrència auxiliar en seria solució general la successió $k3^n$, de la qual $\frac{1}{3}3^n$ n'és una en particular.
2. Considerem una successió recurrent homogènia de polinomi característic $r(x) = p(x)q(x) = (x-2)(x-3)$. La solució general corresponent seria $c_12^n + c_23^n$, de la qual descartem el terme que prové de $p(x)$, és a dir, que és la solució general corresponent a $p(x)$. Ens queda, doncs, com a successió candidata a ser solució particular de la no homogènia inicial, la successió $z_n = c_23^n$. Cal imposar que efectivament ho sigui, cosa que permetrà veure si existeix una solució d'aquest tipus i al mateix temps l'obtidrem de manera efectiva.
3. Imposem que sigui efectivament solució de la no homogènia, és a dir, que $z_n - 2z_{n-1} = 3^{n-1}$, d'on $c_23^n - 2c_23^{n-1} = 3^{n-1}$. S'obté $c_2 = 1$, d'on $z_n = 3^n$ és una solució particular de la no homogènia.

Finalment, la solució general de la no homogènia és

$$a_n = c_12^n + c_23^n + 3^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per trobar la solució del nostre problema cal encara, finalment, imposar les condicions inicials, per obtenir els c_1, c_2 que hi corresponguin. Això ens porta a plantejar un sistema d'equacions en les incògnites c_1, c_2 :

$$\begin{cases} 0 = a_1 = c_12 + c_23 + 3 \\ 3 = a_2 = c_12^2 + c_23^2 + 3^2 \end{cases}$$

d'on resulta $c_1 = -\frac{3}{2}, c_2 = 0$. Per tant,

$$a_n = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Explorem altres mètodes possibles.

Mètode 2: Passant a un problema complementari

De vegades, un problema es pot resoldre, potser de manera més simple, resolent-ne un altre d'associat. En aquest cas, hem de calcular un cardinal i podem intentar calcular el cardinal del complementari, en el conjunt de totes de cadenes de 3 caràcters, de longitud n , si això és més fàcil, com és en aquest cas.

Sigui, doncs, S conjunt de totes les cadenes de longitud n , amb els 3 caràcters a, b, c , sense cap restricció. Aleshores $|S| = 3^n$. Si A és el conjunt de les cadenes de les quals busquem el cardinal, el complementari $B = S \setminus A$ és el conjunt de les cadenes amb cap parella de símbols consecutius iguals. Aleshores $|A| = |S| - |B|$. Calculem $|B|$.

Una cadena de B pot començar de tres maneres diferents, per a , per b o per c . Ara bé, per cada elecció, la segona posició ha de ser ocupada per només 2 caràcters (dels que queden) per evitar la repetició amb el que ocupa la primera posició, i així successivament per a les altres posicions cap a la dreta. De manera que, a cadascuna de les $n - 1$ posicions de la dreta, només hi poden haver dos caràcters, per diferenciar-se dels caràcters de les posicions contigües. Per tant, $|B| = 3 \cdot 2^{n-1}$ i, finalment, $|A| = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$.

Metode 3: Directament

Considerem una cadena de n caràcters amb almenys dos caràcters consecutius repetits. El punt fonamental és considerar la primera posició, llegint des de l'esquerra, en la qual es produeix aquesta repetició, que és, per tant, la primera repetició que es presenta. Suposem que el primer caràcter de la parella repetida ocupa la posició k . Això significa que en les posicions anteriors no hi pot haver cap parella repetida i que en les posicions posteriors a la $k + 1$ no hi ha cap restricció.

Vegem de quantes maneres es poden formar aquests tipus de cadenes, *fixada* k , primera posició en la qual comença una parella repetida. En primer lloc, pel que fa a la parella, hi ha 3 possibilitats, atès que hi ha 3 caràcters possibles. Abans de la posició k , a cada casella hi pot haver un màxim de dos caràcters, ja que cada caràcter s'ha de diferenciar de l'immediatament posterior (així, el de la posició $k - 1$ ha de ser diferent del de la posició k ; el de la posició $k - 2$ ha de diferir del de la posició $k - 1$ i així successivament). De manera que hi ha $k - 1$ posicions i el nombre de subcadenaes que es poden formar és 2^{k-1} . Ara, a la posició $k + 1$ hi ha el mateix caràcter que a la posició k , ja que és repetit. A partir de la posició $k + 2$ i fins a la n , és a dir, les $n - (k + 1)$ posicions que resten a la dreta, no hi ha cap restricció; a cada posició hi poden haver tres caràcters i, per tant, el nombre de subcadenaes és $3^{n-(k+1)} = 3^{n-k-1}$. Resumint, fixada k , el nombre de cadenes és $2^{k-1} \cdot 3 \cdot 3^{n-k-1} = 2^{k-1} \cdot 3^{n-k}$.

Ara bé, com que $1 \leq k \leq n - 1$, resulta que el nombre total de cadenes que compleixen la condició és

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} 3^{n-k}.$$

La resta és un càlcul per expressar aquesta quantitat en forma tancada. Observeu que fem servir $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, amb $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} 3^{n-k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k 3^{n-k} = \frac{3^n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{3^n}{2} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{2}{3}\right)^0 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \\ &= \frac{3^n}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \dots = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Problema 10.14

Calculeu en forma tancada la suma $1 + 2 + \dots + n$ utilitzant successions recurrents.

Resolució

Considerem la successió $s_n = 1 + 2 + \dots + n$. Observem que $s_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = s_{n-1} + n$, que n'és l'expressió com a successió recurrent. La condició inicial ve donada per $s_1 = 1$. És una successió recurrent lineal, amb coeficients constants, d'ordre 1, no homogènia, amb terme independent $f(n) = n$. L'homogènia corresponent és $s_n - s_{n-1} = 0$.

Resolem la recurrència. El polinomi característic de l'homogènia és $p(x) = x - 1$, d'arrel única $x_1 = 1$, amb multiplicitat $m_1 = 1$. La col·lecció de solucions bàsiques derivades de l'arrel es redueix a $c_1 1^n$. Per tant, la solució general de l'homogènia associada és $s_n^{(gh)} = c_1 1^n = c_1$.

Anem a obtenir una solució particular de la no homogènia.

1. En primer lloc, identifiquem el terme independent com a solució particular d'alguna successió recurrent homogènia. Observem que si reescrivim $f(n) = n = n \cdot 1^n$, aleshores és una de les solucions bàsiques derivades d'una arrel 1, de multiplicitat com a mínim 2, del polinomi característic corresponent. De fet, aquest últim és l'únic que ens interessa a efectes pràctics. Podem considerar $q(x) = (x - 1)^2$.
2. Considerem $r(x) = p(x)q(x) = (x - 1)^3$, amb arrel $x_1 = 1$, amb multiplicitat $m_1 = 3$. Desenvolupant, tenim $r(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, polinomi característic de la recurrència $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3}$, cosa que indiquem a efectes de completesa, però sense cap finalitat pràctica per a aquesta discussió. La solució general d'aquesta recurrència és $a_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 n^2 1^n$. Identifiquem el terme $c_1 1^n$ com a solució bàsica provinent de $p(x)$. La resta, $z_n = c_2 n 1^n + c_3 n^2 1^n = c_2 n + c_3 n^2$, és un candidat a solució particular de la no homogènia. Cal imposar això per tal d'obtenir els c_2, c_3 convenients.
3. Escrivim, doncs, $z_n = z_{n-1} + n$, és a dir, $c_2 n + c_3 n^2 = c_2(n-1) + c_3(n-1)^2 + n$. Reagrupant els termes resulta: $(1 - 2c_3)n + (c_3 - c_2) = 0$, per a tot $n \geq 0$. Per a

$n = 0$ s'obté $c_3 - c_2 = 0$, d'on $c_3 = c_2$. Ara, substituint, resulta $(1 - 2c_3)n = 0$ i fent $n = 1$, resulta $c_3 = \frac{1}{2}$, d'on $c_2 = \frac{1}{2}$. Així, $z_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$. Per tant, una solució particular de la recurrència no homogènia inicial és $s_n^{(pnh)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.

4. La solució general de la no homogènia serà $s_n^{(gnh)} = s_n^{(gh)} + s_n^{(pnh)}$. Finalment, doncs,

$$s_n = c_1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

L'últim pas és imposar la condició inicial per determinar la solució de la recurrència: $1 = s_1 = c_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, d'on $c_1 = 0$. Per tant, $s_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Observem que d'aquesta manera obtenim un resultat conegut que habitualment se sol demostrar per inducció:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Problema 10.15

Calculeu $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2$.

Resolució

Podem plantejar la resolució per successions recurrents. Fem $s_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Aleshores podem escriure

$$\begin{cases} s_n = s_{n-1} + n^2, \\ s_1 = 1 \end{cases}$$

És una recurrència lineal, amb coeficients constants, no homogènia, amb terme independent $f(n) = n^2$, d'ordre 2.

Resolem la recurrència homogènia associada, és a dir, $s_n - s_{n-1} = 0$. El polinomi característic és $p(x) = x - 1$, d'arrel $x_1 = 1$. La solució general és $c1^n = c$, successió constant.

Obtenim una solució particular de la no homogènia. Per a això cal considerar un polinomi $q(x)$, polinomi característic d'una successió recurrent auxiliar, de la qual el terme independent sigui una solució. Podem reescriure $f(n) = n^2 = n^2 1^n$, cosa que podem identificar com a solució derivada de l'arrel $x_2 = 1$, amb multiplicitat com a mínim 3, del polinomi $q(x)$. Prenem $q(x) = (x - 1)^3$. Les solucions bàsiques associades són $1^n, n1^n, n^2 1^n$, entre les quals hi ha la nostra.

Considerem $p(x)q(x) = (x-1)(x-1)^3 = (x-1)^4$. Les solucions bàsiques associades són $1^n, n1^n, n^21^n, n^31^n$, és a dir, $1, n, n^2, n^3$. Ja podem escriure la solució de la successió de polinomi característic $p(x)q(x)$, és a dir, $c_11 + c_2n + c_3n^2 + c_4n^3$. Eliminant la contribució provinent de $p(x)$, obtenim $z_n = c_2n + c_3n^2 + c_4n^3$, candidat a solució particular de la no homogènia.

Imposant que efectivament ho sigui, calculem els coeficients c_2, c_3, c_4 . Substituïm z_n a la no homogènia, és a dir, $z_n - z_{n-1} = n^2$, d'on

$$(c_2n + c_3n^2 + c_4n^3) - (c_2(n-1) + c_3(n-1)^2 + c_4(n-1)^3) = n^2.$$

Efectuant càlculs i agrupant, s'obté

$$(3c_4 - 1)n^2 + (2c_3 - 3c_4)n + (c_2 + c_4 - c_3) = 0.$$

Tenint en compte que la relació és vàlida per a tot n , tots els coeficients han de ser nuls. També podríem arribar a aquesta conclusió, prenent valors $n = 0, n = 1$, i així successivament, fins a produir un sistema d'equacions lineals en les incògnites c_2, c_3, c_4 .

Es té

$$\begin{cases} 3c_4 - 1 = 0 \\ 2c_3 - 3c_4 = 0 \\ c_2 + c_4 - c_3 = 0 \end{cases}$$

De la primera, n'obtenim $c_4 = \frac{1}{3}$. Substituint a la segona, $c_3 = \frac{1}{2}$. Finalment, $c_2 = \frac{1}{6}$.

Per tant, una solució particular de la no homogènia és

$$z_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

La solució general de la no homogènia és

$$s_n = c + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

El pas final és calcular c utilitzant la condició inicial:

$$1 = s_1 = c + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

d'on $c = 0$. Així, la solució de la nostra recurrència és

$$s_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

I així s'ha arribat a la coneguda identitat:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2 = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6}.$$

Com a exercici similar el lector pot calcular, utilitzant recurrències, la suma dels n primers cubs, és a dir, $\sum_{k=1}^n k^3$. Indiquem només alguns aspectes de la resolució. La recurrència és similar, $s_n - s_{n-1} = n^3$. Per tal d'obtenir una solució particular de la no homogènia, identifiquem el terme independent com a solució bàsica associada a una arrel $x = 1$ de polinomi característic de multiplicitat com a mínim 4 (ja que l'exponent arriba fins a la multiplicitat menys u) (les solucions bàsiques són $\{1^n, n1^n, n^21^n, n^31^n\}$). Considerem, doncs, $p(x)q(x) = (x-1)(x-1)^4 = (x-1)^4$, que donaria lloc a prendre en consideració $c_11^n + c_2n1^n + c_3n^21^n + c_4n^31^n + c_5n^41^n$, amb la qual cosa la successió candidata a ser solució particular de la no homogènia seria $z_n = c_2n + c_3n^2 + c_4n^3 + c_5n^4$.

Problema 10.16

Considerem les paraules de longitud n amb les lletres A, B, C (no necessàriament totes). Calculeu el nombre de capicues.

Resolució

Podem resoldre el problema de dues maneres: per un estudi directe o bé per recurrències.

Per recurrències

Analitzem com es forma un capicua. Admetem com a capicua una cadena formada per una sola lletra.

Un capicua es forma a partir d'un altre afegint a ambdós extrems el mateix caràcter, i així es passa d'una cadena de longitud n a una de longitud $n+2$. O bé, equivalentment, a partir d'un capicua de longitud n , amb l'eliminació dels dos extrems, n'obtenim un altre de longitud $n-2$, per a $n \geq 3$.

Indiquem per a_n el nombre de capicues de longitud n . Formularem una relació recurrent per a a_n .

Tenim, en primer lloc, el que seran les condicions inicials de la recurrència a_n que anem a formular. Per a $n = 1$, hi ha tres possibilitats: A, B, C , de manera que $a_1 = 3$. Per a $n = 2$, és $a_2 = 3$, corresponent a AA, BB, CC .

Suposem ara $n \geq 3$. Si tenim una cadena de longitud n capicua, eliminant els dos extrems obtenim un capicua de $n - 2$ caràcters, dels quals n'hi ha a_{n-2} . Ara bé, hi ha tres tipus de capicues: els que comencen (i acaben) per A (tipus *I*) i, anàlogament, els que ho fan per B (tipus *II*) i per a C (tipus *III*). Per tant, la recurrència és $a_n = |I| + |II| + |III| = a_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-2} = 3a_{n-2}$.

Resumint,

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-2}, n \geq 3 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

Aquesta recurrència és lineal, amb coeficients constants, homogènia, d'ordre 2 i amb polinomi característic $p(x) = x^2 - 3$. Les arrels corresponents són $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, ambdues de multiplicitat $m_1 = m_2 = 1$.

La solució general és

$$a_n = c_1(\sqrt{3})^n + c_2(-\sqrt{3})^n.$$

Ara imposarem les condicions inicials per obtenir c_1, c_2 .

$$\begin{cases} 3 = a_1 = c_1\sqrt{3} + c_2(-\sqrt{3}) \\ 3 = a_2 = c_1\sqrt{3}^2 + c_2(-\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

D'aquí resulta el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 3 = c_1\sqrt{3} - c_2\sqrt{3} \\ 3 = 3c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

d'on $c_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $c_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Per tant, la solució buscada és

$$a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})^n.$$

Observeu que, en el cas que n sigui parell, resulta $a_n = 3^{\frac{n}{2}}$. En el cas de n senar, $a_n = 3^{\frac{n+1}{2}}$.

Directament

Podem plantejar una resolució directa, sense utilitzar recurrències, però aleshores hem de tenir en compte l'estructura diferent dels capicues, depenent de la paritat de n .

En el cas que n sigui parell, aleshores els capicues es descomponen en dues subcadenaes simètriques de longitud $\frac{n}{2}$, com per exemple $AABCB|BCBAA$. En aquest cas, només cal atendre les possibles semicadenes, ja que l'altra serà la simètrica. La semicadena de l'esquerra consta de $\frac{n}{2}$ posicions, que es poden omplir sense cap restricció amb els tres caràcters A, B, C . Per tant, hi ha $3^{\frac{n}{2}}$ semicadenes, i aquest és el nombre de capicues amb aquesta estructura.

En el cas que n sigui senar, aleshores hi ha una posició central, ocupada per un dels tres caràcters, sense restricció, i dues semicadenes simètriques de longitud $\frac{n-1}{2}$. N'és un exemple $ABBCA|C|ACBBA$. Per tant, el nombre corresponent de capicues en el cas n senar és $3 \cdot 3^{\frac{n-1}{2}} = 3^{\frac{n+1}{2}}$.

Observem que en la resolució per recurrències s'ha obtingut una fórmula única que recull ambdós casos.

Problema 10.17

Els n graons d'una escala es poden pujar d'un en un o de dos en dos. Calculeu el nombre de maneres de pujar-los.

Resolució

Només en presentarem el plantejament. El lector acabarà la resolució.

Sigui a_n el nombre de maneres buscat per a una escala de longitud n . Anem a formular una relació recurrent per a a_n i a obtenir les condicions inicials.

Es tracta d'analitzar el primer pas. En el primer pas podem pujar un sol graó. En queden $n - 1$, de manera que hem de resoldre el mateix problema, però amb un graó menys i, en la mesura que és independent de com s'ha pujat el primer graó, hi ha a_{n-1} maneres de pujar-los. Si el primer pas fos de dos esglaons, aleshores similarment resta per pujar una escala (subescala de la original) de $n - 2$ graons, i hi ha a_{n-2} maneres de pujar-la. Per tant, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. És una successió recurrent, lineal, amb coeficients constants, homogènia i d'ordre 2. Aquesta és la successió de Fibonacci, que ja hem resolt anteriorment en aquest mateix capítol.

Les condicions inicials són $a_1 = 1$ (un pas d'un sol graó), $a_2 = 1 + 1 = 2$ (un sol pas de dos graons o dos passos d'un sol graó).

Problema 10.18

Considereu les cadenes de longitud n formades per $\{1, 2, 3, 4\}$ i amb un nombre senar de caràcter "3". Calculeu-ne el nombre per recurrències.

Resolució

Sigui s_n el nombre de cadenes o paraules amb la condició donada. Atenem el caràcter del principi de la cadena (començant per l'esquerra, per exemple). Hi ha 4 casos:

Tipus I, II, III. En les cadenes de tipus I la cadena comença per "1". Resta una subcadena de longitud $n - 1$, amb exactament la mateixa propietat que té un nombre senar de "3", ja que no ha començat per "3". N'hi ha s_{n-1} . Anàlogament hi ha les de tipus II, III, començant, respectivament, per "2" i "4". De cada un d'aquests tipus, n'hi haurà s_{n-1} .

Tipus IV. La cadena comença per 3. A la subcadena restant hi ha d'haver, doncs, un nombre parell de caràcters "3". Si indiquem per p_n el nombre de cadenes de longitud n amb un nombre parell de "3", tindrem $|IV| = p_{n-1}$.

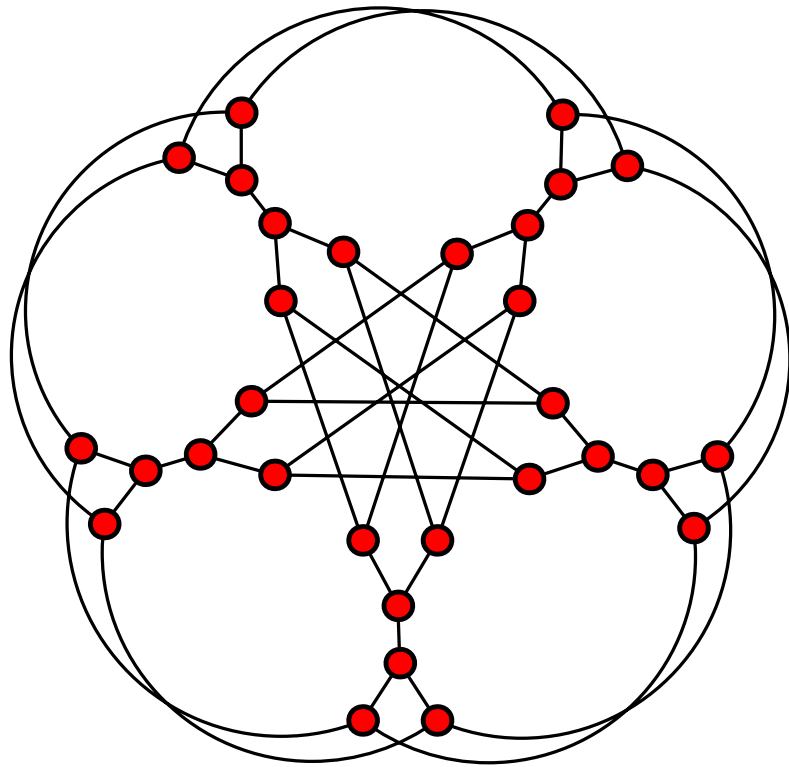
Per tant, $s_n = 3s_{n-1} + p_{n-1}$. Ara bé, hi ha un total de 4^n cadenes amb els 4 caràcters anteriors, i aquestes es distribueixen en les que tenen un nombre senar de "3" i les que en tenen un de parell, de manera que $p_n = 4^n - s_n$. Finalment, $s_n = 3s_{n-1} + (4^{n-1} - s_{n-1}) = 2s_{n-1} + 4^{n-1}$.

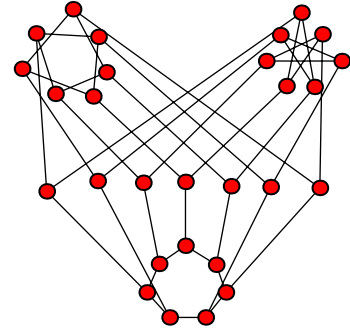
La condició inicial és: $s_1 = 1$ (només el caràcter "3") ($s_2 = 6$, amb un únic "3" i l'altra posició amb 3 possibilitats: 13,23,43,31,32,34).

En aquest cas, tenim una recurrència lineal, amb coeficients constants, d'ordre 1, no homogènia amb terme independent $f(n) = 4^{n-1}$. La solució general de l'homogènia $s_n - 2s_{n-1} = 0$ és $c2^n$. Com a possible solució particular de la no homogènia, provem $z_n = A4^n$. Substituint a la recurrència $s_n - 2s_{n-1} = 4^{n-1}$, és a dir, imposant $z_n - 2z_{n-1} = 4^{n-1}$, s'obté $A = \frac{1}{2}$ i, per tant, $\frac{1}{2}4^n$ és una solució particular de la no homogènia.

Finalment, la solució general de la no homogènia és $s_n = c2^n + \frac{1}{2}4^n$. Obtindrem la solució buscada imposant la condició inicial i obtenint c : $1 = s_1 = c2 + \frac{1}{2}4$, és a dir, $c = \frac{1}{2}$. La solució és $s_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2}4^n$.

Apèndixs



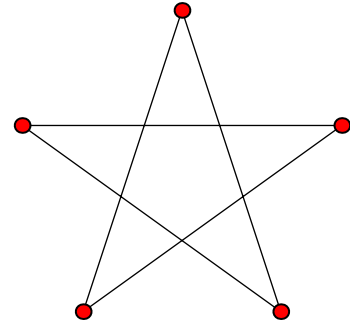


Apèndix A

Símbols utilitzats

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Conjunt dels nombres naturals, enters, reals i complexos.
$v \in V, V \ni v$	v pertany a V .
\emptyset	Conjunt buit.
$A \subset B$	A és un subconjunt de B .
$A \cup B$	Unió o reunió dels dos conjunts A, B .
$A \cap B$	Intersecció dels conjunts A, B .
A^c	Complementari del conjunt A en un conjunt sobreentès.
$S \setminus A$	Conjunt diferència de S menys A .
$A \times B$	Producte cartesià d' A per B , en aquest ordre.
$ V , \#V$	Cardinal del conjunt V .
$n!$	Factorial de n . És $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$; $0! = 1$
$\binom{n}{k}$	Nombre binomial “ n sobre k ”.
$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$	Nombre multinomial “ n sobre n_1, \dots, n_k ”.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunt de les parts (o dels subconjunts) d' A .
$\mathcal{P}_k(A)$	Conjunt dels subconjunts d' A de cardinal k .
$G = (V, A)$	Graf G amb conjunt de vèrtexs V i conjunt d'arestes A .
$uv, \{u, v\}$	Aresta d'extremes u, v .
$g(v)$	Grau del vèrtex v .
$g_G(v)$	Grau del vèrtex v en el graf G .
$u \sim v$	Vèrtexs adjacents.
$u - v$	Recorregut entre els vèrtexs u, v .
$u -_G v$	Recorregut entre els vèrtexs u, v en el graf G .
$\ell(R)$	Longitud del recorregut R .

$c(G)$	Nombre de components connexos de G .
C_∞	Cara no fitada en una representació planària d'un graf planari.
N_1	Graf trivial.
N_n	Graf nul d'ordre n .
K_n	Graf complet d'ordre n .
$K_{n,m}$	Graf bipartit complet.
$K_{r,s,t}$	Graf tripartit complet.
K_{r_1, \dots, r_p}	Graf p -partit complet.
T_n	Graf trajecte d'ordre n .
C_n	Graf cicle d'ordre n .
R_n	Graf roda d'ordre n .
E_n	Graf estrella d'ordre n .
$G_1 \cup G_2$	Unió dels grafos G_1, G_2 .
$G_1 + G_2$	Suma dels grafos G_1, G_2 .
$G_1 \times G_2$	Producte dels grafos G_1, G_2 .
G^c	Complementari del graf G .
G^*, G^δ	(Pseudo)(multi)graf dual de G .
$G - v$	Graf que resulta d'eliminar el vèrtex v de G .
$G - a$	Graf que resulta d'eliminar l'aresta a de G .
$G + v$	Graf que resulta d'afegir el vèrtex v a G .
$G + a$	Graf que resulta d'afegir l'aresta a a G .
$G + S$	Graf que resulta d'afegir els vèrtexs/les arestes de S a G .
$G - S$	Graf que resulta d'eliminar els vèrtexs/les arestes de S de G .
$\langle S \rangle$	Subgraf general pel conjunt de vèrtexs/les arestes S .
$D(G)$	Diàmetre del graf G .
$k(G)$	Vèrtex-connectivitat.
$\lambda(G)$	Arestoconnectivitat.
$d(u, v), d_G(u, v)$	Distància entre els vèrtexs u, v ; ídem en el graf G .
HI	Hipòtesi d'inducció.
$\chi(G)$	Nombre cromàtic de G .



Apèndix B

Fórmules i resultats diversos

B.1 Identitats aritmètiques

$$1 + 2 + \dots + k + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

B.2 Fórmules i identitats combinatòries

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1, n \geq 1; 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \geq k \geq 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Per a n, k enters, $n \geq k > 0$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$(m-k) \binom{n}{k} = m \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Fórmula binomial i derivades

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Nombres multinomials i fórmula multinomial

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}, \quad n = n_1 + \cdots + n_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

Fórmula d'inclusió-exclusió

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n, \quad \text{on } S_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

B.3 Altres resultats

Fita superior dels graus dels vèrtexs d'un graf: $g(w) \leq |V| - 1$.

Fita superior del nombre d'arestes d'un graf: $|A| \leq \binom{n}{2}$.

Lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$. El nombre de vèrtexs de grau senar és parell.

Grau d'un vèrtex en el graf complementari: $g_{G^c}(w) = |V| - 1 - g(w)$.

Un graf és bipartit si i només si tots els cicles són de longitud parella.

Un graf és bipartit no nul si i només si és 2-acolorible.

Un graf és eulerià si i només si el grau cada vèrtex és parell.

Un graf és eulerià si i només si les arestes es distribueixen en una reunió de cicles arestodisjunts.

Nombre d'arestes d'un arbre $T = (V, A)$: $|A| = |V| - 1$.

Tot arbre amb un mínim de 2 vèrtexs té un mínim de 2 fulles.

Fórmula d'Euler per a un graf planari: $c + |V| = |A| + k + 1$. A la fórmula k és el nombre de components connexos i c és el nombre de cares, amb la no fitada C_∞ inclosa.

Fita superior del nombre d'arestes en un graf planar ($|V| \geq 3$): $|A| \leq 3|V| - 6$, $|V| \geq 3$.

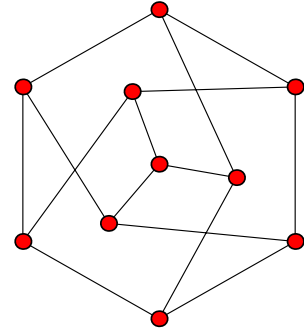
Fita superior del nombre d'arestes en un graf planari connex on cada cara limita almenys amb k arestes: $|A| \leq \frac{k}{k-2}(|V| - 2)$.

El nombre de permutacions de n elements és $n!$ (l'ordre importa).

El nombre de combinacions de n elements presos de k en k (l'ordre no importa) és $\binom{n}{k}$.

Sigui r un nombre natural. El nombre de solucions (x_1, \dots, x_n) de l'equació $x_1 + \dots + x_n = r$, amb $x_1, \dots, x_n \geq 0$, és $\binom{r+n-1}{r}$.

El nombre de n -multiconjunts d'un conjunt de r elements ($n \geq r$) és $\binom{r+n-1}{r}$.



Apèndix C

Catàleg de grafs

C.1 Grafs bàsics

En aquesta secció establim la notació i una representació gràfica corresponents als grafs més usuals.

El graf nul N_n d'ordre n

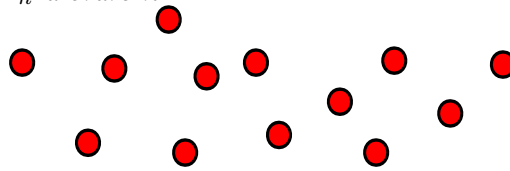


Figura C.1. N_{13}

El graf trajecte T_n d'ordre n



Figura C.2. T_5

El graf cicle C_n d'ordre n

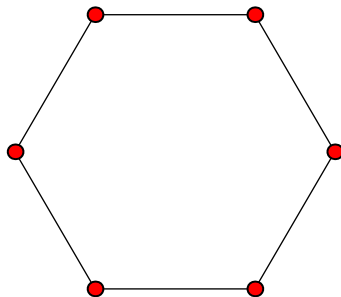


Figura C.3. C_6

El graf complet K_n d'ordre n

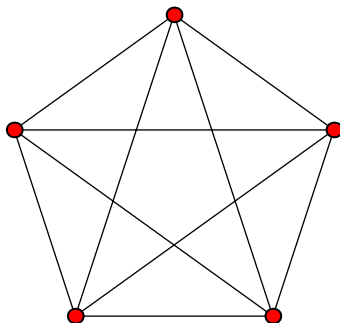


Figura C.4. K_5

El graf complet bipartit $K_{3,3}$

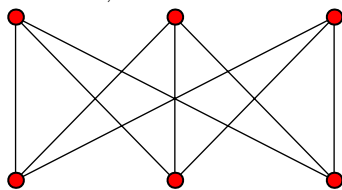


Figura C.5. $K_{3,3}$

El graf estrella E_n

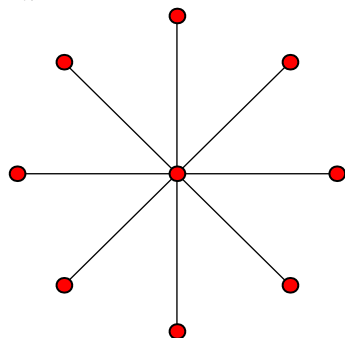


Figura C.6. $E_9 = K_{1,8}$

El graf roda R_n

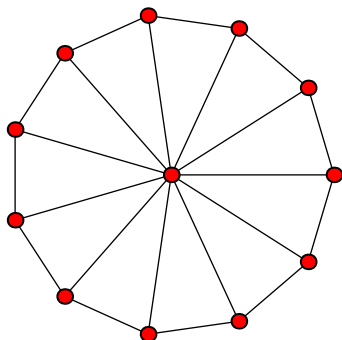


Figura C.7. R_{12}

C.2 Grafs notables

En aquesta secció s'inclouen alguns grafs notables que apareixen amb certa freqüència com a exemples o contraexemples tant en problemes com en la teoria.

El graf de l'octàedre

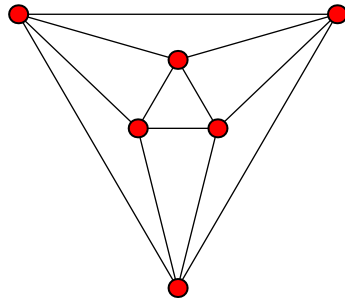


Figura C.8

El graf de l'icosàedre

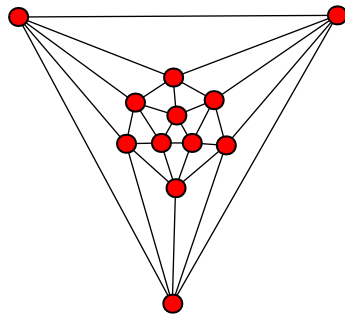


Figura C.9

El graf del dodecàedre

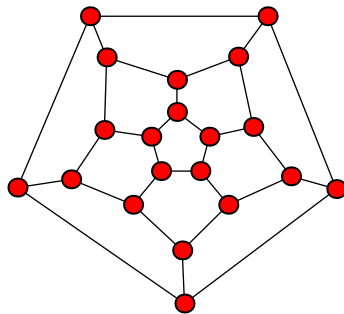


Figura C.10

El graf de Grotzsc

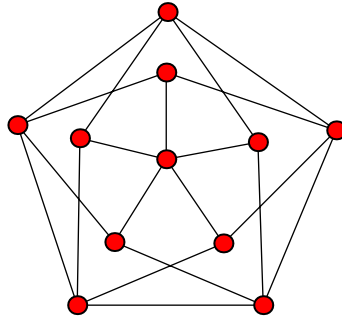


Figura C.11

El graf de Herschel

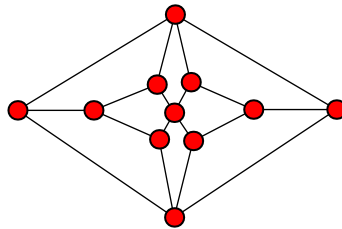


Figura C.12

El graf de Tutte

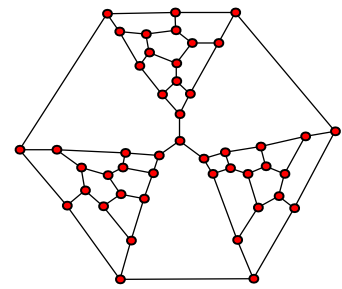


Figura C.13

El graf de Petersen

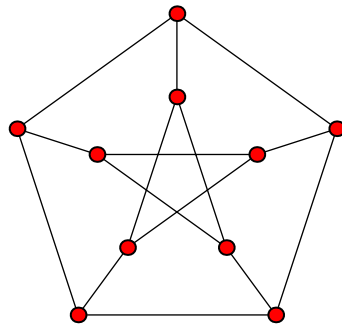
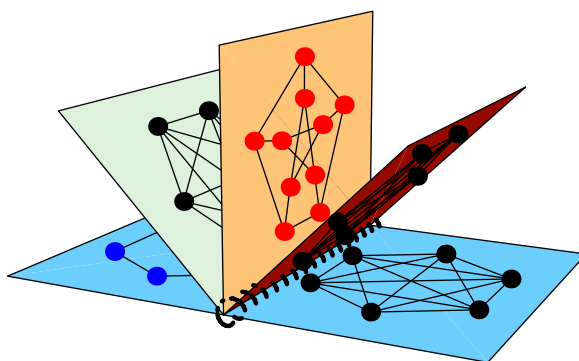


Figura C.14



Bibliografia

- [ANDE93] ANDERSON, I. *Introducción a la combinatoria*. Vicens-Vives, 1993.
- [BASS94] BASSART, J.M. *Grafs. Fonaments i algorismes*. Manuals de la Universitat Autònoma de Bellaterra, 1994.
- [BIGG89] BIGGS, N.L. *Matemática discreta*. Vicens-Vives, 1994.
- [BOLL79] BOLLOBAS, B. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.
- [BOMA84] BOSE, R.C.; MANVEL, B. *Introduction to Combinatorial Theory*. Wiley, 1984.
- [BRUN96] BRUNAT, J. M. *Combinatòria i teoria de grafs*. Edicions UPC, 1996.
- [CHAR85] CHARTRAND, G. *Introductory Graph Theory*. Dover, 1985.
- [CHLE86] CHARTRAND, G.; LESNIAK, L. *Graphs and Digraphs*. Wadsworth and Brook, 1996.
- [COFSE94] COMELLES, F.; FÀBREGA, J.; SERRA, O. *Matemàtica discreta*. Edicions UPC, 1994.
- [ENGE00] ENGEL, A. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 2000.
- [FESI91] FEJER, P.A.; SIMOVICI, D.A. *Mathematical Foundation of Computer Science, vol. I*. Springer, 1991.
- [FOUL92] FOULDS, L.R. *Graph Theory and Applications*. Springer, 1992.
- [GAVSA80] GAVRILOV, G. P.; SAPOZHENKO, A. A. *Problemas de matemática discreta*. Editorial MIR, 1980.
- [GMRV98] GIMBERT, J.; MORENO, R.; RIBÓ, J.M.; VALLS, M. *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes*. Edicions de la Universitat de Lleida, 1998.

- [GOUL88] GOULD, R. *Graph Theory*. Benjamin/Cummings, 1988.
- [GRIM89] GRIMALDI, R.P. *Matemàtica discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- [HARA69] HARARY, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [HARI94] HARTSFIELD, N.; RINGEL, G. *Pearls in Graph Theory*. Academic Press, 1994.
- [JATH90] JACKSON, B.; THORO, D. *Applied Combinatorics with Problem Solving*. Addison-Wesley, 1990.
- [JOTO96] JORDÁN, C.; TORREGROSA, J.R. *Introducción a la teoría de los grafos y sus algoritmos*. Reverté, 1996.
- [LARS83] LARSON, L.C. *Problem-Solving through Problems*. Springer, 1983.
- [LOVA79] LOVASZ, L. *Combinatorial Problems and Exercises*. North-Holland, 1979.
- [MSTY98] MELNIKOV, O.; SARVANOV, V.; TYSHKEVICH, R.; YEMELICHEV; ZVEROVICH, I. *Exercises in Graph Theory*. Kluwer, 1998.
- [POLY92] POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, 1992.
- [POTW83] POLYA, G.; TARJAN, R.E.; WOODS, D.R. *Notes on Introductory Combinatorics*. Birkhäuser, 1983.
- [ROWR88] ROSS, K.A.; WRIGHT, C.R.B. *Discrete Mathematics*. Prentice-Hall, 1988.
- [TOME85] TOMESCU, I. *Problems in Combinatorics and Graph Theory*. Wiley, 1985.
- [TUCK84] TUCKER, A. *Applied Combinatorics*. Wiley, 1984.
- [WILS72] WILSON, R.J. *Introducción a la teoría de grafos*. Alianza Ed., 1972. Cuarta edición de 1996 en anglès (*Introduction to Graph Theory*. Longman, 1996).
- [ZIEG95] ZIEGLER, G.M. *Lectures on Polytopes*. Springer, 1995.