

# LA CONJETURA DE POINCARÉ. CIEN AÑOS DE INVESTIGACIÓN.

MARÍA TERESA LOZANO IMÍZCOZ

Henri Poincaré es considerado como el creador de la Topología. Su célebre conjetura sobre la esfera tridimensional ha dado lugar al gran desarrollo de esta rama de las matemáticas en el siglo XX.

Poincaré poseía una mente privilegiada en cuanto a visión geométrica abstracta, y esta capacidad es la base para entender la topología. Recordemos que en topología se estudian las propiedades de los espacios que se conservan bajo deformaciones continuas, es decir, sin permitir cortes o pegados. Es una especie de *geometría blanda*, no rígida. Podemos decir que en topología dos objetos (*espacios topológicos*) son iguales (*homeomorfos*) si uno se obtiene del otro por una deformación continua (existe entre ellos una correspondencia biunívoca y bicontinua). Para un topólogo es lo mismo un poliedro sólido regular, un tornillo o una bola tridimensional. No es difícil imaginar la deformación sin rotura de uno de los dos primeros objetos anteriores en una bola si se suponen hechos de un material moldeable por presión.

Poincaré definió el concepto de homología como abstracción de la siguiente observación: una curva cerrada en una variedad que bordea una superficie nunca será equivalente, por una deformación continua, a una curva que no bordea ninguna superficie, ya que la deformación continua de la curva se extiende a una deformación continua de la superficie que bordea. Esto permite definir una relación de equivalencia entre las curvas cerradas de un espacio. Esta es la base de la homología.

Poincaré fue el creador del *grupo fundamental* de un espacio topológico  $X$ , también llamado hoy grupo de Poincaré y denotado universalmente por  $\pi_1(X, x_0)$ , donde la letra griega  $\pi$  es en recuerdo de la inicial del apellido de su autor. Sus elementos son clases de equivalencia (homotopía) de caminos cerrados (lazos) basados en un punto base  $x_0$  del espacio  $X$ , es decir, de curvas cerradas (circunferencias) que pasan por  $x_0$ . El producto de clases que da lugar a la estructura de grupo es la yuxtaposición o composición de caminos que es compatible con la equivalencia.

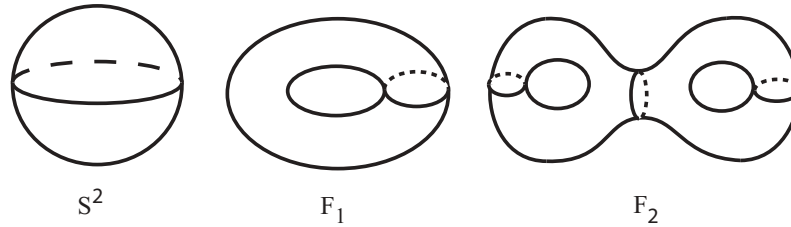


FIGURA 1. Superficies orientables cerradas

El grupo fundamental es un ejemplo sencillo de las técnicas de la Topología Algebraica, que asocia a cada espacio topológico un invariante algebraico como es un grupo.

### 1. EL ENUNCIADO DE LA CONJETURA

En el enunciado de la conjetura objeto de este artículo aparece el concepto de 3-variedad. Una  $n$ -variedad es un espacio en el que cada punto tiene un entorno que es una bola  $n$ -dimensional. Por tanto en una 3-variedad cada punto tiene un entorno que es una bola de dimensión tres, igual que el espacio que nos rodea. Por eso todas las 3-variedades tienen localmente el mismo aspecto, sin embargo su forma global puede ser variada. Si queremos conocer esta forma global nos encontramos con el inconveniente de que nuestra visión tridimensional es incapaz de abarcar una 3-variedad cerrada de un vistazo. Para entender esta limitación, usamos el truco habitual de bajar a una dimensión menos. Debemos pensar en 2-variedades, es decir superficies, espacios en los que cada punto tiene un entorno que es un disco. Las superficies compactas están clasificadas desde el siglo XIX, por su orientabilidad y género. En la Figura 1 se muestran algunas. Si imaginamos la visión limitada de un pequeño ser bidimensional, Bidi, que está sujeto a vivir en una de ellas y cuyas visuales están limitadas dentro de su mundo bidimensional, comprendemos que el paisaje que observa alrededor es exactamente el mismo: un disco bidimensional. Nosotros, que podemos observar las superficies desde fuera, sumando una dimensión extra, somos capaces de distinguirlas de un vistazo, pero Bidi no puede hacerlo. Bidi necesitaría conocimientos de topología para conseguirlo. Su técnica podía consistir en utilizar una goma elástica sujeta por un extremo al punto de partida  $P$ , arrastrar con él el otro extremo cada vez que realiza un paseo por la superficie volviendo siempre al punto de partida. Si es capaz de recoger la goma, sin soltar sus extremos, en todos los casos, seguro que vive en la esfera  $S^2$ . Estaría aplicando los siguientes resultados topológicos.

**R1:** *El grupo fundamental, formado por las clases de equivalencia de caminos cerrados que empiezan y terminan en el mismo punto de una superficie, la distingue de cualquier otra.*

**R2:** *La esfera  $S^2$  es la única superficie cerrada (compacta y sin borde) en la que todo lazo (camino cerrado) se contrae a un punto.*

**R3:** *La esfera  $S^2$  es la única superficie cerrada en la que toda curva simple cerrada bordea un disco.*

**R4:** *La esfera  $S^2$  es la única superficie cerrada en la que toda curva cerrada bordea.*

Estos resultados permiten deducir de qué superficie se trata, por un procedimiento intrínseco. Nótese que aunque R4 parece más débil que R3 ambos enunciados son equivalentes.

En 1900 Poincaré [10] planteó un resultado análogo a R4 pero en dimensión 3.

Igual que la esfera  $S^2$ , borde de la bola  $B^3$ , está formada por los vectores unitarios del espacio euclídeo  $E^3$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

la esfera  $S^3$  está formada por los vectores unitarios del espacio euclídeo  $E^4$

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

La cuestión de Poincaré fue la siguiente.

**S1:** *Una variedad de dimensión 3 cerrada (compacta y sin borde), en la que todo lazo es el borde de una superficie inmersa, es la esfera  $S^3$ .*

En lenguaje más actual diríamos que

**S1a:** *Si una variedad de dimensión 3 cerrada (compacta y sin borde), tiene el tipo de homología de la esfera  $S^3$ , es la esfera  $S^3$ .*

### Variedad dodecaedral de Poincaré.

Tras su publicación, él mismo encontró un interesante contraejemplo a **S1(=S1a)**, que publicó en 1904. Se trata de una variedad en la que cada punto es un dodecaedro inscrito en la esfera unidad  $S^2$ . Observamos (Figura 2) que un dodecaedro inscrito está determinado por la posición de un vértice (un punto  $P$  de  $S^2$ ) y una arista incidente en ese vértice (un vector unitario en  $P$ ). Es decir, un punto de  $ST(S^2) = SO(3)$ , fibrado esférico tangente de la esfera  $S^2$ , que es un vector tangente unitario en la esfera  $S^2$ , determina un único dodecaedro inscrito. Pero varios puntos del esférico tangente de la esfera  $S^2$  determinan el mismo dodecaedro, exactamente 60 (3 aristas por cada uno de los 20 vértices).

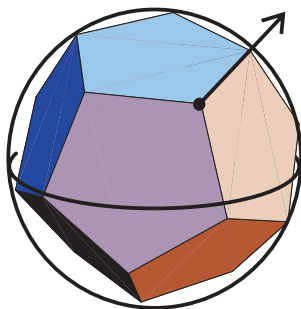


FIGURA 2. Un punto de la variedad dodecaedral

Esta variedad de dodecaedros inscritos,  $M_d$ , llamada variedad dodecaedral de Poincaré, es de dimensión 3, cociente del esférico tangente de la esfera por un grupo finito,  $(SO(3)/I_{60}) \simeq M_d$ , donde  $I_{60}$  es el grupo de simetrías del icosaedro (=grupo de isometrías del dodecaedro).

La teoría elemental de espacios recubridores proporciona una manera de calcular el grupo fundamental de un espacio  $M$ . Se trata de considerar su espacio recubridor universal  $p_u : U \rightarrow M$ , y recordar que el grupo fundamental es isomorfo al grupo de superposiciones que actúa libremente en  $U$  dando como cociente  $M$ . En el caso de la variedad dodecaedral  $M_d$ , es fácil observar que su espacio recubridor universal es la esfera  $S^3$ , que es el espacio recubridor universal (de dos hojas) del fibrado esférico tangente de la esfera  $S^2$ . Entonces el grupo fundamental, que coincide con el grupo de superposiciones del espacio recubridor universal

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xrightarrow{p_u} & M_d \simeq (SO(3)/I_{60}) \simeq (S^3/B_{I_{120}}) \\
 2:1 \searrow & & \nearrow \\
 & & SO(3)
 \end{array}$$

es el grupo binario icosaedral  $B_{I_{120}}$ , grupo perfecto (su abelianizado es trivial) de 120 elementos. El primer grupo de homología de un espacio coincide con el abelianizado del grupo fundamental. Por tanto el primer grupo de homología de  $M_d$  es el abelianizado del grupo binario icosaedral que es trivial. Esto significa que cualquier curva cerrada en  $M_d$  es homóloga a cero, es decir, cualquier curva cerrada es el borde de alguna superficie compacta. Sin embargo la variedad  $M_d$  no es homeomorfa a la esfera  $S^3$  puesto que ambas variedades tienen grupos fundamentales no isomorfos.

Por la dualidad del dodecaedro y del icosaedro, la variedad dodecaedral de Poincaré es también el espacio formado por los icosaedros inscritos en una esfera, por lo que también se denomina variedad icosaedral de Poincaré.

La variedad  $M_d$  es el resultado de pegar cada par de caras opuestas de un dodecaedro por giro a derecha de  $2\pi/10$ . También se obtiene como espacio recubridor cíclico de cinco hojas de  $S^3$  ramificado sobre el trébol, y como resultado de hacer cirugía 1 en el trébol.

En 1904 Poincaré concretó un poco más su pregunta original exigiendo que cada curva cerrada no solo bordee sino que bordee precisamente un disco, es decir, un análogo de **R3**. Desde entonces esta cuestión se denomina la conjetura de Poincaré (CP) y su enunciado es el siguiente

**CP:** *Una variedad de dimensión 3 cerrada en la que todo lazo bordea un disco es la esfera  $S^3$ .*

Utilizando el lenguaje de grupos fundamentales, y recordando que un espacio es simplemente conexo si es conexo y su grupo fundamental es trivial, el anterior enunciado CP es equivalente al siguiente.

**CP:** *Una variedad de dimensión 3 cerrada simplemente conexa es la esfera  $S^3$ .*

Esta conjetura ha sido abordada de una manera u otra por todos los topólogos que han estudiado variedades tridimensionales en los últimos cien años. Creo que es la responsable de la creación de nuevas ideas y nuevos métodos de trabajo cada vez que los conocidos hasta el momento se consideraban insuficientes para resolver el problema. Esto ha enriquecido de manera extraordinaria esta rama de las matemáticas.

Como muestra de la importancia y dificultad de la conjetura de Poincaré digamos que es uno de los siete problemas incluidos en la lista del Clay Mathematical Institute of Cambridge Massachusetts (CMI) como Problemas del Milenio. CMI ha ofrecido siete premios de un millón de dólares, uno para cada primera solución correcta de cada uno de los siete problemas. El anuncio fué dado a las cuatro de la tarde del miércoles 24 de mayo de 2000 en el Collège de France. Si el lector se anima a intentar resolver este u otro problema del milenio, puede encontrar más información en <http://www.claymath.org/>.

## 2. EL PROBLEMA EN OTRAS DIMENSIONES

La  $n$ -esfera  $S^n$  es el conjunto de vectores unitarios del espacio euclídeo  $\mathbb{E}^{n+1}$ , luego cabe plantearse este problema en cualquier dimensión  $n > 1$ .

El resultado **R3** es la solución positiva a la conjetura en dimensión 2.

En dimensiones superiores a 3 se debe adecuar el enunciado, igual que sucedió en el paso de dimensión 2 a dimensión 3, porque la condición de ser variedad

simplemente conexa es una condición insuficiente para caracterizar la esfera en dimensiones más altas. Existen  $n$ -variedades cerradas simplemente conexas ( $n > 3$ ) que no son homeomorfas a la esfera de dimensión  $n$ , por ejemplo la variedad producto  $S^2 \times S^{n-2}$ . La topología algebraica proporciona invariantes algebraicos que generalizan al grupo fundamental. Se trata de los grupos de homotopía  $\pi_i$  cuyos elementos son clases de equivalencia de aplicaciones basadas de esferas basadas  $(S^i, z_0)$  en la variedad basada  $(M, m_0)$ , ( $i = 1$  es el grupo fundamental). Dos espacios  $X, Y$  son del mismo *tipo de homotopía* si tienen todos sus respectivos grupos de homotopía isomorfos:  $\pi_i(X, x_0) \cong \pi_i(Y, y_0)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . El enunciado de la conjetura en dimensión  $n$  es:

**CPn:** *Toda  $n$ -variedad cerrada del tipo de homotopía de la esfera  $S^n$  es homeomorfa a la esfera  $S^n$ .*

La conjetura se resolvió primero para dimensión  $n > 4$ . A partir de 1960 varios matemáticos probaron por diferentes métodos distintas versiones de la Conjetura de Poincaré CPn. En dimensión menor o igual que 3 es indiferente trabajar con variedades topológicas, combinatorias o diferenciables, pero esto no sucede en dimensión superior. La categoría de variedades utilizada y sus correspondientes métodos es lo que distingue las diversas demostraciones. Citemos a Smale [14], Stallng [15] y Wallace [18] y enunciamos el teorema de Stephen Smale que se refiere al caso diferenciable. El hecho de que estos resultados contribuyeran a que Stephen Smale recibiera la medalla Fields en 1966, da idea de la importancia del tema.

**Teorema (Smale)** *Toda esfera homotópica diferenciable  $M^n$ ,  $n > 4$ , es homeomorfa a la esfera  $S^n$ . La variedad  $M^n$  es el resultado de identificar por su borde dos bolas  $n$ -dimensionales mediante un difeomorfismo.*

La prueba en dimensión 4 fue obtenida veinte años más tarde por Michael Freedman [1]. En el mismo artículo clasificó todas las 4-variedades cerradas y simplemente conexas.

**Teorema(Freedman)** *Dos 4-variedades simplemente conexas son homeomorfas si y solo si ambas tienen el mismo producto cup en cohomología de dimensión 2  $\beta : H^2 \times H^2 \rightarrow H^4$  y el mismo invariante de Kirby-Siemenmann  $\kappa$ .*

Este teorema tiene como corolario la Conjetura de Poincaré en dimensión 4, porque si  $M^4$  es una esfera homotópica, su segundo grupo de cohomología es cero  $H^2(M^4) = 0$ , y  $\kappa(M^4) = 0$ , como para la esfera  $S^4$ , luego el teorema asegura que  $M^4$  y  $S^4$  son homeomorfas. Por este y otros importantes resultados Michael Freedman recibió también una medalla Fields en 1986.

## 3. CLASIFICACIÓN DE 3-VARIEDADES

La Conjetura de Poincaré es parte de un problema fundamental en Topología: la clasificación de 3-variedades. A semejanza de la clasificación de las superficies conocida desde el siglo XIX, desearíamos clasificar las 3-variedades dando una lista completa sin repeticiones. Los métodos de trabajo en este campo han sido diversos.

Desde el nacimiento de la topología, se han venido utilizando métodos topológicos y combinatorios que han sido capaces de demostrar importantes resultados y también de clasificar muchas familias de 3-variedades.

Cada 3-variedad  $M^3$  admite una descomposición única (salvo el orden) en suma conexa de variedades primas ([7], [8]).

$$M^3 = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_r$$

Recordemos que la suma conexa de dos  $n$ -variedades  $N_1$  y  $N_2$  conexas se obtiene de la siguiente forma: En cada una de las dos variedades  $N_i$  se quita una bola abierta  $B_i^n$ . El resultado en cada caso es una variedad,  $N_i \setminus B_i^n$ , con borde una esfera  $S_i$  de dimensión  $n - 1$ . Se identifica  $N_1 \setminus B_1^n$  y  $N_2 \setminus B_2^n$  a lo largo del borde mediante un homeomorfismo, y se obtiene la variedad  $n$ -dimensional suma conexa de  $N_1$  y  $N_2$ . La Figura 3 muestra la suma conexa de superficies y la Figura 4 muestra la suma conexa de 3-variedades.

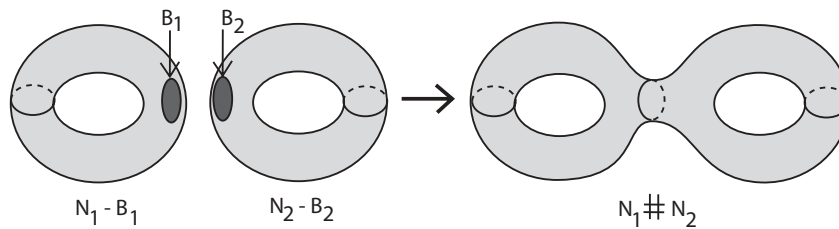


FIGURA 3. Suma conexa de dos superficies

Una  $n$ -variedad es prima si no es suma conexa de dos variedades distintas de la esfera  $S^n$ . Es claro que para clasificar 3-variedades es suficiente clasificar las 3-variedades primas.

Un proceso estándar para demostrar la Conjetura de Poincaré siguiendo métodos topológicos y combinatorios consiste en

- 1: Describir un procedimiento que construya todas la 3-variedades.
- 2: Determinar transformaciones de los datos que no cambian la 3-variedad.

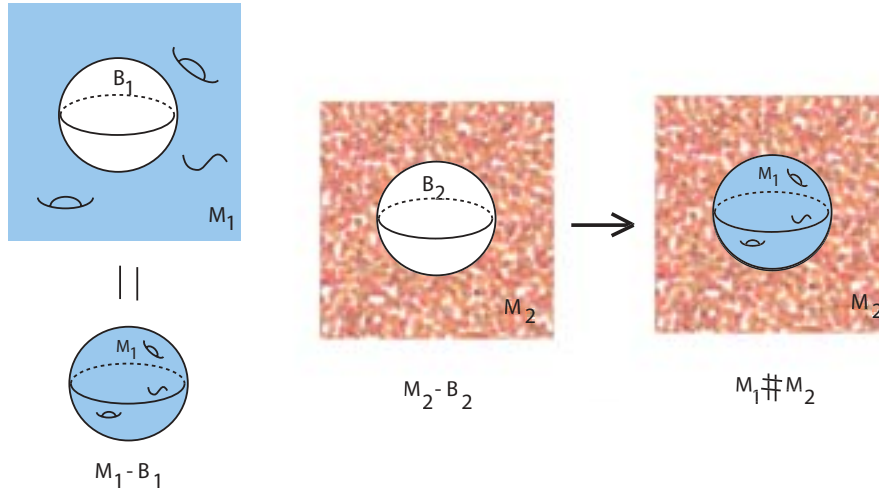


FIGURA 4. Suma conexa de dos 3-variedades

**3:** Suponer que se trata de una 3-variedad con grupo fundamental trivial y aplicando las transformaciones anteriores demostrar que es la esfera.

Existen muchos procedimientos de construcción de las 3-variedades cerradas orientables, casi siempre definidos por analogía con los existentes en superficies. Citamos algunos métodos que construyen todas las 3-variedades:

- Cirugía en un nudo.
- Unión de dos cuerpos sólidos (diagramas de Heegaard).
- Poliedro con caras identificadas.
- Espacio recubridor de la esfera ramificado sobre nudos y enlaces:
  - Número de hojas fijo: 3 hojas.
  - Nudo o enlace fijo: nudos y enlaces universales:  $4_1$ , enlace de Borromeo,....

El estudio de la Conjetura de Poincaré en cada uno de los procedimientos anteriores ha dado lugar a nuevos enunciados equivalentes de la conjetura y en ocasiones a demostraciones de la conjetura ... en las que siempre, hasta el momento, se ha encontrado un error o un paso no justificado.

En la década de 1970 las técnicas de trabajo se enriquecen con el uso de estructuras Riemannianas en 3-variedades, siempre generalizando a dimensión 3 lo que se conoce en dimensión 2. Es bien conocido que cada superficie cerrada soporta una estructura Riemanniana de curvatura constante, aquella que tiene su espacio recubridor universal (la esfera  $S^2$ , el plano euclídeo  $E^2$  o el plano hiperbólico  $H^2$ ) del que es cociente por la acción de un subgrupo discreto de isometrías. En el



último cuarto del siglo XX, los matemáticos R. Riley [11] y W. Thurston [16, 17] demuestran independientemente la existencia de una estructura hiperbólica en el exterior de un nudo en  $S^3$ . Este es el comienzo de una interesante contribución de la geometría al estudio de las 3-variedades.

#### 4. LA CONJETURA DE GEOMETRIZACIÓN.

Este es un resultado propuesto por W. Thurston, y que se conoce con el nombre de *Conjetura de geometrización de 3-variedades*:

**CG:** *Cada 3-variedad prima  $M$  es geométrica o sus piezas simples son geométricas.*

En este enunciado aparecen los conceptos de “pieza simple” y de “variedad geométrica en el sentido de Thurston”, que describo a continuación.

De la misma manera que una 3-variedad cerrada se descompone por un número finito de esferas encajadas en suma conexa de 3-variedades primas, se puede considerar la descomposición de una variedad prima por toros encajados incompresibles. Un toro ( $F_1$ ) es incompresible si no se puede comprimir, es decir, si ninguna curva simple cerrada esencial en  $F_1$  es homótopa a un punto en la variedad. Por tanto el grupo fundamental del toro incompresible se inyecta en el grupo fundamental de la variedad. En una variedad prima  $M$  existe una familia maximal finita (que puede ser vacía) de toros incompresibles. Esta familia maximal se denomina jerarquía, y divide la variedad en un conjunto finito de 3-variedades abiertas que son las *piezas simples* de  $M$  ([6], [5]).

Una *geometría  $X$  en el sentido de Thurston* es una 3-variedad Riemanniana homogénea unimodular y simplemente conexa, donde homogénea significa que la situación local es la misma en todos los puntos, es decir, que dados dos puntos de  $X$  siempre existe una isometría que lleva un punto al otro. La propiedad de ser unimodular es que  $X$  admite un grupo discreto de isometrías con cociente compacto.

Su lista se reduce a las 8 geometrías siguientes, que agrupamos en tres tipos:

- 1:** Curvatura seccional constante: (positiva) esférica  $S^3$ , (cero) euclídea  $E^3$ , (negativa) hiperbólica  $H^3$ .
- 2:** Geometrías producto:  $S^2 \times \mathbb{R}$ ,  $H^2 \times \mathbb{R}$ .
- 3:** Productos torcidos: Nil (grupo de Heisenberg, fibrados no triviales por circunferencias sobre un toro), Sol (Fibrados sobre la circunferencia con toros como fibras, y monodromía Anosov),  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  (recubridor universal de  $SL(2, \mathbb{R})$ , esférico tangente del plano hiperbólico).

Una interesante descripción de estas geometrías se encuentra en el artículo de Peter Scott [12]. Obsérvese que de estas geometrías solo es compacta  $S^3$ , la de curvatura seccional positiva.

Una 3-variedad compacta es *geométrica* si su interior es  $X/\Gamma$  y tiene volumen finito, donde  $X$  es una geometría y  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de isometrías de  $X$  que actúa libremente. Se dice que está modelada por la geometría  $X$ .

Por otra parte las variedades compactas que soportan una acción del grupo de la circunferencia  $S^1$  son las llamadas *variedades de Seifert*, que fueron definidas y clasificadas totalmente por H. Seifert en un célebre artículo [13] publicado en 1933. Las variedades geométricas modeladas por  $S^3$ ,  $E^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$ ,  $H^2 \times \mathbb{R}$ , Nil y  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  son variedades de Seifert.

Los cocientes con volumen finito de las 8 geometrías citadas son piezas simples de 3-variedades cerradas. Lo que significa que las 8 geometrías son necesarias para geometrizar las 3-variedades. Lo que realmente dice la CG es que esas 8 geometrías son suficientes para geometrizar todas las piezas simples de todas las 3-variedades primas.

Existen dos maneras de unir 3-variedades geométricas para obtener variedades compuestas. La primera (*suma conexa*) es quitar una bola en cada una de ellas e identificar las dos esferas que han quedado como borde. La segunda, que une variedades con borde, es identificar sendas componentes del borde por un homeomorfismo. Estas uniones es lo que ahora se conoce como *agujeros de gusano* que conectan piezas geométricas. En la suma conexa se trata de un agujero de gusano con sección esférica, y en el segundo caso un agujero de gusano que tiene como sección la superficie que sirve de pegado.

Las *variedades de grafo* son el resultado de identificar variedades de Seifert por sus toros borde.

**Teorema.** *La Conjetura de Geometrización implica la Conjetura de Poincaré.*

En efecto. Supongamos que la Conjetura de Geometrización es cierta y sea  $M^3$  una 3-variedad cerrada simplemente conexa. Entonces  $M^3$  es suma conexa de un número finito de 3-variedades primas

$$M^3 = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_r$$

donde cada sumando  $M_i$  es una 3-variedad cerrada y simplemente conexa. Como el grupo fundamental de  $M_i$  es trivial, la 3-variedad prima  $M_i$  no contiene toros incompresibles. Entonces la Conjetura de Geometrización implica que  $M_i$  es

geométrica además de compacta, cerrada y simplemente conexa, luego es la esfera  $S^3$ . Por tanto, cada sumando de  $M^3$  es  $S^3$ , es decir

$$M^3 = S^3 \# S^3 \# \dots \# S^3 \simeq S^3. \quad \square$$

De manera análoga se deduce de la Conjetura de Geometrización que una 3-variedad cerrada tiene grupo fundamental finito si y solo si tiene una métrica de curvatura constante positiva.

Otro enunciado de la Conjetura de Geometrización es el siguiente:

*Cada 3-variedad cerrada prima es geométrica, o existe una familia de toros disjuntos incompresibles que la divide en dos partes, la gruesa y la fina. La gruesa es unión de variedades hiperbólicas, y la fina es una variedad de grafo.*

### Flujo de Ricci

Un interesante método de demostración de la Conjetura de Geometrización se basa en el flujo de Ricci en una variedad, concepto ideado por Hamilton [2] en 1982.

**Definición** (Hamilton) Sea  $M^n$  una  $n$ -variedad cerrada. La familia diferenciable de métricas Riemannianas en  $M$ ,  $\{g(t) | t \in [0, T], T < \infty\}$ , es *flujo de Ricci* si satisface

$$g'(t) = -2Ric(t),$$

donde  $Ric(t)$  es el tensor de Ricci de la métrica  $g(t)$ .

Puede interpretarse como una deformación continua a lo largo del tiempo  $t$  de una métrica inicial en la variedad. Es fácil comprobar que se asemeja a una ecuación del calor, de manera que al avanzar en el tiempo, la métrica tiende a uniformizarse, como sucede con la temperatura en la típica ecuación del calor. Para demostrar esta semejanza, consideremos una carta normal  $(U, (x^1, x^2, \dots, x^n))$  en la variedad  $M$  centrada en un punto  $P$ . La expresión de la métrica  $g_{ij}$  en esta carta es

$$g_{ij}(m) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{ikjl}(m)x^k(m)x^l(m) + O(|x(m)|^3)$$

Si calculamos la Laplaciana de las funciones  $g_{ij}$  a partir de la expresión anterior y tomamos su valor en el punto  $P$  ( $x^s(P) = 0$ ), obtenemos

$$\Delta g_{ij}(P) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial (x^k)^2} \Big|_{(0, \dots, 0)} = -\frac{1}{3} 2 \sum_{k=1}^n R_{ikjk}(P) = -\frac{1}{3} Ric_{ij}(P)$$

Luego si se cumple la ecuación del flujo de Ricci

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}, \quad \text{se obtiene} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 6\Delta g_{ij}$$

que es una ecuación del calor para las coordenadas del tensor métrico.

A modo de ejemplo, podemos encontrar la solución del flujo de Ricci partiendo de la estructura Riemanniana que tiene una esfera de dimensión  $n$  y radio  $r_0$ , heredada de la estructura Euclidea del espacio  $E^{n+1}$  donde está encajada. El tensor métrico  $g_{ij}(r)$  de una esfera de radio  $r$  es proporcional al de la esfera de radio unidad  $g_{ij}(1)$ , pero el tensor de Ricci es el mismo para todas las  $n$ -esferas.

$$g_{ij}(r) = r^2 g_{ij}(1) \quad Ric_{ij}(r) = (n-1)g_{ij}(1) = Ric_{ij}(1)$$

Por tanto la ecuación del flujo de Ricci

$$\frac{\partial g_{ij}(r)}{\partial t} = -2Ric_{ij}(r) \quad \text{se reduce a} \quad \frac{\partial r^2}{\partial t} = -2(n-1)$$

con solución

$$r^2(t) = r_0^2 - 2(n-1)t$$

Entonces la esfera disminuye su radio, hasta que en un tiempo finito  $t = \frac{r_0^2}{2(n-1)}$  degenera en un punto.

Para evitar algunos problemas y controlar algunos tipos de degeneraciones, se utiliza la versión normalizada del flujo de Ricci que conserva el volumen de la variedad.

$$g'(t) = -2Ric(t) + \frac{2}{3}f(t)g(t)$$

donde  $f(t)$  es una función escalar.

Utilizando estas ideas geométricas Hamilton demostró este importante resultado:

**Teorema** ([2]) *Si  $M^3$  es una variedad Riemanniana cerrada cuyo tensor de Ricci es definido positivo, entonces la variedad colapsa a un punto bajo el flujo de Ricci. Si se considera el flujo normalizado (volumen constante) converge a una variedad con curvatura constante positiva, luego es geométrica.*

Este teorema tiene la siguiente consecuencia.

**Corolario** *La Conjetura de Poincaré es equivalente a demostrar que toda 3-variedad cerrada simplemente conexa admite una estructura Riemanniana cuyo tensor de Ricci es definido positivo.*

Más recientemente Hamilton ([3]) ha utilizado también el flujo de Ricci para dar una demostración de la Conjetura de Geometrización cuando se cumplen ciertas condiciones, concretamente:

**Teorema** ([3]) *Si el flujo de Ricci en una variedad Riemanniana cerrada  $M^3$  tiene solución  $\forall t > 0$ , y el tensor curvatura de la solución normalizada tiene norma acotada, entonces la Conjetura de Geometrización es cierta para  $M^3$ .*

La variedad  $M^3$  con la métrica ( $t \rightarrow \infty$ ) se descompone por toros incompresibles en  $M_{gruesa} \cup M_{fina}$ , donde  $M_{gruesa}$  es unión de variedades hiperbólicas completas de volumen finito y  $M_{fina}$  es variedad de grafo.

Por sus resultados acerca del flujo de Ricci en variedades Richard Hamilton ha recibido en noviembre de 2003 un premio de investigación del Instituto Clay de Matemáticas.

La mayor dificultad para resolver con toda generalidad la Conjetura de Geometrización utilizando el flujo de Ricci reside en eliminar las singularidades que se pueden producir en el flujo. En los últimos meses el matemático ruso Grigory Perelman ha incorporado a las técnicas de Hamilton la cirugía topológica para resolver las singularidades del flujo. Si se confirmaran sus resultados, la conjetura de Geometrización de Thurston estaría demostrada y con ella la Conjetura de Poincaré. Notemos que para esta prueba se utilizan métodos geométricos y topológicos conjuntamente.

Personalmente no dudo de que la Conjetura de Poincaré es cierta. También sospecho que en su prueba deberán utilizarse métodos topológicos y geométricos. Creo que la utilización del grupo universal  $B_{444}$  que confiere a cada 3-variedad una estructura de orbifold hiperbólica [4] formada por un número finito de dodecaedros hiperbólicos adosados, y una adecuada modificación controlada de la estructura geométrica correspondiente puede llevar a una demostración.

**Nota.** Aparte de las referencias citadas en el texto, necesariamente limitadas, existe una amplia bibliografía sobre el tema que puede obtenerse fácilmente en internet.

#### REFERENCIAS

- [1] M. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(3):357–453, 1982.
- [2] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.
- [3] R.S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 7(4):695–729, 1999.
- [4] H. M. Hilden, M. T. Lozano, J. M. Montesinos, and W. C. Whitten. On universal groups and three-manifolds. *Invent. Math.*, 87(3):441–456, 1987.
- [5] W. Jaco and P. B. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. In *Geometric topology (Proc. Georgia Topology Conf., Athens, Ga., 1977)*, pages 91–99. Academic Press, New York, 1979.
- [6] K. Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

- [7] H. Kneser. Geschlossene flächen in dreidimensionalen mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deutsch. Math.*, 38:248–260, 1929.
- [8] J. Milnor. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.*, 84:1–7, 1962.
- [9] J. Milnor. Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(10):1226–1233, 2003.
- [10] H Poincaré. Second complément á l’analysis situs. *Proc. London Math. Soc.*, 32(suppl.):277–308, 1900.
- [11] R. Riley. A quadratic parabolic group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:281–288, 1975.
- [12] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.
- [13] H. Seifert. Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume. *Acta Math.*, 60:147–238, 1933.
- [14] S. Smale. Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math. (2)*, 74:391–406, 1961.
- [15] J. R. Stallings. Polyhedral homotopy-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:485–488, 1960.
- [16] W. P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3):357–381, 1982.
- [17] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [18] A. Wallace. Modifications and cobounding manifolds. *Canad. J. Math.*, 12:503–528, 1960.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, 50009 ZARAGOZA, ESPAÑA