A C^3 amb el producte escalar habitual es demana:

a) **Una base ortogonal del subespai** $S = \langle (1,j,0),(0,1,j) \rangle$.

b) **Projecció ortogonal de** $v = (0,1,0)$ **sobre** S **i la distància mínima de** v **a** S.

a) Una base ortogonal és: $u_1 = (1,j,0)$,

$u_2 = (0,1,j) - \frac{(0,1,j)\bullet(1,j,0)}{(1,j,0)\bullet(1,j,0)}(1,j,0) = (0,1,j) - \frac{-j}{2}(1,j,0) = \left(\frac{1}{2}j, \frac{1}{2}, j\right)$

b) Per fer la projecció:

$proj_S(v) = \frac{(0,1,0)\bullet(1,j,0)}{(1,j,0)\bullet(1,j,0)}(1,j,0) + \frac{(0,1,0)\bullet\left(\frac{1}{2}j,\frac{1}{2},j\right)}{\left(\frac{1}{2}j,-\frac{1}{2},j\right)\bullet\left(\frac{1}{2}j,\frac{1}{2},j\right)}\left(\frac{1}{2}j, \frac{1}{2}, j\right) =$

$= \frac{-j}{1+1}(1,j,0) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}\left(\frac{1}{2}j, \frac{1}{2}, j\right) = \left(-\frac{1}{2}j, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{6}j, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}j\right) =$

$= \left(-\frac{1}{3}j, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}j\right)$

Per la distància trobem la component ortogonal $(0,1,0) - \left(-\frac{1}{3}j, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}j\right) = \left(\frac{1}{3}j, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}j\right)$ i la distància demanada és la seva norma euclidiana: $\left\| \left(\frac{1}{3}j, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}j\right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$