**Raoneu que** $(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3) = (2-j)x_1\overline{y_2} + 3x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + (2+j)x_2\overline{y_1}$ **és un producte escalar a** $C^3$. **Determineu una base del subespai** $S^{\perp}$ **amb** $S = \langle(1,j,1)\rangle$.

Com que $(x_1,x_2,x_3) \bullet (y_1,y_2,y_3)$ es pot escriure com:

$$(x_1,x_2,x_3) \bullet (y_1,y_2,y_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2-j & 0 \\ 2+j & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \overline{y_3} \end{pmatrix}$$

es tracta d'una aplicació sesquilineal. Tal com és la matriu queda clar que és hermítica i per veure si és definit positiu només cal veure que els determinants següents són reals i positius:

$$\begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2-j \\ 2+j & 2 \end{vmatrix} = 6-4+j^2 = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2-j & 0 \\ 2+j & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Per tant, és producte escalar. Per trobar una base del subespai ortogonal només cal aplicar la definició:

$$S^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3) \in C^3 : (x_1,x_2,x_3) \bullet (1,j,1) = 0\} =$$

$$= \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in C^3 : (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2-j & 0 \\ 2+j & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in C^3 : (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2-2j \\ 2-j \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \{(x_1,x_2,x_3) \in C^3 : (2-2j)x_1 + (2-j)x_2 + x_3 = 0\} =$$

$$= \{(x_1,x_2,x_3) \in C^3 : x_3 = (-2+2j)x_1 + (-2+j)x_2\} =$$

$$= \{(x_1,x_2,(-2+2j)x_1 + (-2+j)x_2) : x_1,x_2 \in C\} =$$

$$= \{x_1(1,0,-2+2j) + x_2(0,1,-2+j) : x_1,x_2 \in C\} = \langle(1,0,-2+2j),(0,1,-2+j)\rangle$$

de base $(1,0,-2+2j),(0,1,-2+j)$ perquè són generadors i L.I.( $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$).