Resoleu l'equació diferencial:

$$xy' + 2y = e^x$$

Aquesta equació diferencial de primer ordre és lineal per la qual cosa trobarem les solucions de la homogènia i li sumarem una solució particular que calculaem amb el mètode de variació de constants. Les **solucions de la homogènia** són:

$xy' + 2y = 0 \Leftrightarrow xy' = -2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-2}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = -2\ln|x| + C \Leftrightarrow y = \pm e^C x^{-2}$

que junt amb la nul•la obtenim solucions de la forma $y_h = Kx^{-2}$, $K \in R$ (subespai de dimensió 1, que coincideix amb el nucli de l'operador lineal associat). Per trobar **una solució particular** busquem una solució de la forma $y_p = K(x)x^{-2}$ amb $K(x)$ una funció a determinar:

$x(K(x)x^{-2})' + 2K(x)x^{-2} = e^x \Leftrightarrow x(K'(x)x^{-2} - 2K(x)x^{-3}) + 2K(x)x^{-2} = e^x \Leftrightarrow$

$K'(x)x^{-1} - 2K(x)x^{-2} + 2K(x)x^{-2} = e^x \Leftrightarrow K'(x)x^{-1} = e^x \Leftrightarrow K'(x) = xe^x \Leftrightarrow$

$K(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int 1 \bullet e^x dx = xe^x - e^x + C_0$

Per tant una solució particular és $y_p = e^x(x-1)x^{-2} = \frac{x-1}{x^2}e^x$. Finalment obtenim que la solució general d'aquesta equació lineal de primer ordre és:

$$y = \frac{x-1}{x^2}e^x + \frac{K}{x^2},\ K \in R$$