

Capítulo 5

Análisis Espectral

Como se detalla en el capítulo 2, la señal obtenida en un experimento de RMN consiste en la suma de senoides decrecientes exponencialmente, como se observa en la ecuación 5.1.

$$s(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t) \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (5.1)$$

El objetivo final es conocer los valores de n , A_i , ω_i y τ_i a partir de los cuales se deducirán las propiedades químicas o la composición de la muestra. Estos valores suelen deducirse a partir del espectro de la señal, ya que la dependencia de la forma del espectro en función de estos parámetros es conocida. La posición de un pico en el espectro informa de su frecuencia, y su amplitud y anchura dan los valores de A y τ .

Es natural que el análisis espectral sea una parte fundamental en lo que concierne al procesamiento de señales de resonancia magnética nuclear. Para ello se usan diversos métodos de estimación espectral. En el presente capítulo se presentan los distintos tipos de estimadores espectrales que existen y que se han usado para estimar señales FID, y sirve como introducción a los estimadores detallados en los capítulos 6, 7, 8 y ??.

5.1. Estimadores espectrales

El propósito de la *estimación espectral* es estimar la densidad espectral de potencia de un proceso estocástico a partir de las muestras de una realización. De este modo, es posible caracterizar el contenido espectral de

una señal determinada. En el caso del proyecto de AD Telecom, se aplican los estimadores espectrales a las señales FID obtenidas con el fin de caracterizar su contenido.

Las propiedades asociadas con un estimador espectral son las mismas que se consideran en los estimadores estadísticos clásicos, como *error cuadrático medio*, *varianza*, *desviación*, *sesgo*, etc. Se llamará $\hat{\theta}$ a un estimador que estima un valor θ . Las propiedades más importantes que se consideran en un estimador espectral son las siguientes.

Sesgo El sesgo de un estimador se define como la diferencia entre su valor esperado y el verdadero valor del parámetro a estimar, $B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$ (B , del término en inglés para sesgo, *bias*). Se define un estimador insesgado como aquel que cumple $B(\hat{\theta}) = 0$.

Consistencia Un estimador es consistente cuando converge en probabilidad¹ a θ si el tamaño de la muestra aumenta. Hay que tener en cuenta que cuando el tamaño de la muestra varía, el estimador que se usa es otro. Así, una secuencia de estimadores para θ , $\{t_n\}$, converge en probabilidad hacia θ si, y solamente si, $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{|t_n - \theta| < \epsilon\} = 1$$

Eficiencia Se dice que un estimador es más eficiente que otro cuando su varianza es menor. El *teorema de Cramer-Rao* impone un valor mínimo para la varianza de un estimador (ecuación 5.2, donde f es la función de verosimilitud de θ).

$$\text{var}(\theta) \geq \frac{1}{E \left[\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right]^2 \right]} \quad (5.2)$$

Robustez Un estimador es robusto si su salida no varía significativamente cuando las suposiciones sobre las que se basa no se cumplen.

¹En estadística existen diversos tipos de convergencia. Los cuatro más habituales, en orden decreciente de debilidad, son: convergencia débil, convergencia en probabilidad, convergencia casi segura y convergencia segura.

5.2. Clasificación de estimadores espectrales

Las técnicas utilizadas en estimación espectral suelen clasificarse en métodos *paramétricos* y *no paramétricos*. La diferencia principal entre ambos es que en la estimación espectral paramétrica se supone que el proceso estocástico del que se pretende estimar su densidad espectral puede ser caracterizado por una serie de parámetros. En este caso, basta con estimar los parámetros para caracterizar el proceso. Existe un tercer tipo de estimadores espectrales, llamados *métodos de subespacio*.

Los estimadores espectrales no paramétricos estiman la covarianza o espectro de un proceso estocástico sin asumir que tiene una estructura en particular. Son, por lo tanto, técnicas genéricas que no están adaptadas a un problema en particular, a diferencia de lo que ocurre con los estimadores paramétricos. El ejemplo clásico de estimador espectral no paramétrico es el *periodograma*, que se desarrolla en la sección 8.1 del capítulo 8. Un estimador no paramétrico actual es el método del *multitaper* (o *MTM*).

Los estimadores paramétricos estiman los parámetros que en teoría definen el proceso estocástico por el que se generan las señales que se analizan. En el caso de la resonancia magnética, los parámetros que definen la señal FID, como se observa en la fórmula 5.1, son n , A_i , ω_i y τ_i . Algunos estimadores son capaces de estimar varios parámetros simultáneamente, mientras que otros necesitan suponer valores para algunos parámetros con el fin de estimar los restantes. Los estimadores paramétricos suelen dar mejores resultados que los estimadores clásicos cuando la cantidad de datos disponible para realizar la estimación es reducida.

Ejemplos típicos de estimadores paramétricos son el *modelo autorregresivo*, explicado en el capítulo 8, o el *método de Berg*.

Los métodos de subespacio, también conocidos como métodos de *alta resolución* o *superresolutivos*, generan estimaciones frecuenciales de señales a partir de los valores y vectores propios de la matriz de correlación. Estos métodos se presentan en la sección 8.4.

