
**ANEJO 1. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES NAVIER-STOKES A PARTIR DE LA TEORÍA DE KOLMOGOROV
(1941)**

1. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES A PARTIR DE LA TEORÍA DE KOLMOGOROV (1941)

Partiendo de la teoría de Kolmogorov (1941) es posible obtener estimaciones de las escalas necesarias para dicha discretización. Así, si definimos l_0 como la longitud característica del problema, que para un problema hidráulico podría ser el calado, del orden de 1 metro, y η como la escala más pequeña que debemos discretizar para resolver N-S, obtenemos la relación:

$$\eta = \frac{l_0}{\text{Re}^{3/4}}$$

Ecuación 1.1

Donde Re es el número de Reynolds. De la misma manera, para definir la discretización temporal podemos definir un tiempo característico τ_0 , que para un problema hidráulico podría ser el tiempo que se tarda en recorrer el ancho de la sección con la velocidad media, que sería del orden de 1 segundo, y τ como la escala temporal más pequeña que nos tocaría discretizar, siendo la relación entre ambos:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\text{Re}^{1/2}}$$

Ecuación 1.2

Con lo que finalmente obtenemos que el número de nodos necesarios para resolver el problema 3D transitorio es:

$$N = \text{Re}^{11/4}$$

Ecuación 1.3

Para un problema típico de hidráulica fluvial el número de Reynolds puede ser del orden de 10^6 , con lo que el número de nodos sería del orden de 10^{16} , por lo tanto resulta inabordable.

**ANEJO 2. SIMULACIÓN DE LA TURBULENCIA EN LAS
ECUACIONES NAVIER-STOKES**

2. LA SIMULACIÓN DE LA TURBULENCIA EN INGENIERÍA HIDRÁULICA

La simulación de la turbulencia es de gran importancia, ya que muchos de los problemas reales de flujos en ingeniería tienen números de Reynolds altos. Existen varias aproximaciones que permiten introducir los efectos de la turbulencia en el flujo.

La aproximación más directa es la de resolver las ecuaciones instantáneas de Navier-Stokes. Esta técnica se conoce como simulación numérica directa o DNS. Tal y como hemos visto, el problema principal de DNS es que es necesario resolver todas las oscilaciones frecuenciales y espaciales en el flujo. En flujos con altos números de Reynolds se requiere un tiempo computacional extremadamente grande, que se traducen en cálculos con incrementos temporales y espaciales muy pequeños. Como ya se ha comentado anteriormente, con la potencia computacional disponible hoy en día, DNS sólo se pueden aplicar a geometrías muy simples con números de Reynolds muy bajos.

Una segunda aproximación consiste en resolver las oscilaciones de gran escala, es decir, modelando sólo los movimientos de alta frecuencia. Este tipo de métodos han sido desarrollados en los últimos 10 años por muchos investigadores, obteniendo muy buenos resultados en flujos donde predominan las grandes oscilaciones. En este grupo de métodos se puede incluir las simulaciones de grandes remolinos (*Large Eddy Simulation – LES*), que resuelve las oscilaciones turbulentas de medio y gran tamaño y modela las escalas disipativas; las simulaciones de remolinos muy grandes (*Very Large Eddy Simulation – LES*), que resuelven sólo las estructuras turbulentas más grandes; y las simulaciones de remolinos separados (*Detached Eddy Simulation – DES*), que modela todas las turbulencias cerca de las paredes y resuelve las escalas mayores en el resto del flujo. Estos métodos tienen un coste computacional más bajo que los DNS. LES empieza a usarse en cálculos computacionales de ingeniería, pero todavía no se puede utilizar en la práctica habitual. Para ver una revisión de todos estos modelos se puede consultar alguna obra bibliográfica de carácter general como Pope (2000) o Davidson (2004).

2.1. MODELOS RANS

La aproximación más común hasta el momento en problemas de ingeniería habituales es la de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes con descomposición de Reynolds (RANS), en la que se modelan todos los efectos turbulentos. Mientras los modelos de turbulencia LES solo modelan las escalas pequeñas, las RANS pueden modelar todo el espectro de turbulencia.

Esta es la aproximación con menos coste computacional, pero toda la precisión obtenida en esta simulación depende del modelo de turbulencia que se utilice. Existen muchos modelos de turbulencia RANS, muchos de ellos semiempíricos, muchos de ellos para condiciones de flujo específicas. Pero no hay un modelo universal con constantes universales. Normalmente los modelos están calibrados para turbulencia totalmente desarrollada e isotrópica y han sido validados en un rango pequeño de números de Reynolds con tensiones tangenciales muy simples.

Así pues, no hay ninguna razón teórica de peso para poder extrapolar estos modelos a flujos complejos. De hecho, las peores simulaciones de los modelos RANS se dan en flujos separados o con transiciones. Sin embargo, la aproximación mediante RANS se usa en la práctica general de la ingeniería, dando un buen equilibrio entre precisión numérica y coste computacional.

Los modelos RANS más usados son los de viscosidad cinemática lineal, en los que se utiliza la aproximación de Boussinesq para calcular las tensiones de Reynolds de los gradientes de velocidad media mediante una relación lineal. También hay modelos de viscosidad cinemática no lineal, en los que las tensiones de Reynolds y los gradientes de velocidad media están relacionados mediante una relación no lineal. Ninguno de los modelos de viscosidad cinemática se puede considerar superior a los otros. El modelo RANS más utilizado es el modelo $k - \varepsilon$ de Jones y Launder (1973) (con todas sus versiones Reynolds, Jones y Launder (1972)), que fue propuesto a principios de los setenta, y todavía se utiliza en todas las áreas de dinámica de fluidos, incluida la aerodinámica e hidráulica. Todavía están apareciendo nuevas versiones de los modelos, y se está profundizando en la mejora de los modelos existentes mediante la introducción de términos corregidos que consideran las condiciones específicas del flujo (cerca de las paredes, rotaciones y curvaturas, efectos de anisotropía, etc). El hecho de que el modelo original sea el modelo de dos ecuaciones más usado demuestra que todavía no ha aparecido un modelo que sea claramente superior.

**ANEJO 3. DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES EN AGUAS
SOMERAS**

3. FLUJOS TURBULENTOS EN AGUAS SOMERAS

3.1. FLUJOS TURBULENTOS QUASI-2D

Varios tipos de flujos son estudiados y modelados como flujos en aguas someras. Algunos ejemplos son los flujos en estuarios y deltas, propagación de tsunamis y rotura de presas. Este anejo presenta un breve resumen de estudios experimentales y teóricos previos en aguas someras y turbulencia 2D.

El estudio de flujos en aguas someras está fuertemente ligado a flujos 2D con turbulencia. Este tipo de flujos se caracterizan porque la componente vertical es mucho más pequeña que la horizontal. El desarrollo de estructuras turbulentas en 3D viene limitado por el bajo calado. Y este bajo calado también limita la producción de vorticidad en la dirección vertical, por lo que cuanto más disminuye el calado más cerca estamos del estado bidimensional. Sin embargo, en condiciones reales no se da siempre este tipo de flujo. La posibilidad de distinguir entre estructuras turbulentas 2D y 3D depende del ratio entre la escala turbulenta vertical y horizontal. Cabe decir que, no importa cuan poco calado tengamos, siempre existirá interacción entre las estructuras quasi-2D y las 3D.

Así pues, la idea de asumir turbulencia quasi-2D, al menos en escalas grandes, resulta muy interesante, ya que se reducen grados de libertad del problema. La mayor diferencia entre turbulencia 2D y 3D reside en el hecho en que en 2D no hay producción de turbulencia debida a la expansión de vórtices y, por eso, la vorticidad del elemento fluido se conserva en el límite de fluido no viscoso. Desde finales de los sesenta se ha estado investigando sobre la turbulencia en 2D a partir del estudio del comportamiento del espectro energético. La premisa final es que bajo determinadas condiciones de flujo existirá una transmisión de energía desde las escalas pequeñas a las grandes. Este fenómeno se puede observar en la estela del flujo en aguas someras justo después de una obstrucción, donde pequeños remolinos se juntan para formar uno grande.

Existen múltiples estudios que revelan que las grandes estructuras turbulentas quasi-2D horizontales juegan un papel importante en los flujos de aguas someras. Como también inciden en la importancia de las condiciones de contorno en el lecho y en la superficie libre, que confinan el flujo y modifican sus propiedades turbulentas. Las condiciones no-slip en el lecho aumentan la producción de turbulencias en 3D, así como la condición de libre slip en la superficie libre fomenta la turbulencia 2D. El confinamiento del flujo entre el fondo y la superficie libre evita la generación de vorticidad por el mecanismo de expansión de los vórtices, lo cual es una diferencia importante entre los flujos de aguas someras quasi-2D y los flujos 3D sobre geometrías 2D, ya que el proceso de expansión del vórtice solo está presente en el último caso.

Las propiedades 2D no están siempre presentes en flujos de aguas someras. La estabilidad de las grandes estructuras 2D dependen del balance entre el efecto de la tensión tangencial horizontal, que produce las estructuras 2D, y el efecto del bajo calado, que provoca las inestabilidades en 3D, y el efecto de la fricción de fondo y la tensión tangencial vertical, que estabilizan los grandes remolinos 2D y crean turbulencias 3D.

Existen diversos estudios tales como Wolanski (1984), Chen y Jirka (1995 y 1997) y Lloyd (1997 y 2001) que muestran que, los flujos no confinados se clasifican en función del número de Reynolds, mientras que los flujos en aguas someras dependen directamente del calado y de la fricción de fondo. Estos parámetros establecen las diferencias entre flujos no confinados 2D y flujos en aguas someras 2D.

3.2. MODELOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA HIDRÁULICA

El acercamiento más generalizado al modelo de flujo con superficie libre, aunque no el más usado, es el de calcular el flujo en 3D con un tratamiento específico del contorno de la superficie libre. El mayor inconveniente de utilizar un modelo 3D es el coste computacional, especialmente en problemas a gran escala, donde el dominio espacial es muy grande y hay varios modelos de comportamientos del flujo a diferentes escalas.

En flujos de aguas someras es posible simplificar las ecuaciones que gobiernan el flujo asumiendo una distribución de presiones hidrostática en la dirección vertical. Para este caso la ecuación vertical del momentum se simplifica de manera que basta con resolver las dos ecuaciones horizontales del momentum en una malla 3D. La ecuación de la continuidad se utiliza para calcular la superficie libre.

Se pueden hacer más simplificaciones hasta derivar en las ecuaciones en aguas someras con integración del calado en la vertical, también conocidas como las ecuaciones de Saint Venant o ecuaciones en aguas someras 2D, que son obtenidas por integración vertical de las ecuaciones de aguas someras 3D. El modelo numérico de estudio de esta tesis, SWUNST, Shallow Waters Unstructured, utiliza la formulación de las ecuaciones de Saint Venant con integración vertical del calado, obteniendo buenos resultados con un coste computacional relativamente bajo en comparación con un modelo 3D. También tiene la ventaja de ser muy robusto para el cálculo preciso del calado, incluso en problemas transitorios con altos gradientes en la superficie libre, tales como saltos hidráulicos. El trato de frentes seco-mojado transitorios, que aparecen generalmente en regiones costeras y problemas de inundabilidad, son mucho más simples y estables que en modelos 3D.

De hecho, algunas de las hipótesis que se asumen en los modelos de aguas someras pueden perfeccionar algunos resultados. Este es el caso de un estudio del flujo en aguas someras alrededor de islas cónicas llevadas a cabo por Lloyd y Stansby (1997), donde se demostraba que en algunos casos el modelo 2D daba resultados más precisos que el 3D. Algunos autores atribuyen estos resultados al hecho de que en un modelo 2D el mezclado vertical es instantáneo, mientras que en uno 3D depende del modelo de turbulencia utilizado.

3.3. ECUACIONES EN AGUAS SOMERAS

La mayoría de casos de flujos hidráulicos tratan con superficies libres turbulentas que abarcan grandes dominios espaciales tales como estuarios, ríos, canales, etc. Algunas de las complicaciones con las que hay que lidiar cuando se simulan numéricamente este tipo de flujos son:

- Geometría compleja
- Tamaño del dominio
- Cálculo de la superficie libre
- Tratamiento de frentes seco-mojado

A veces, una geometría compleja obliga a utilizar una malla no estructurada (es decir, más densificada en alguna zona de especial interés de estudio tal como la zona posterior a una obstrucción). Así, el gran tamaño del dominio y las diferentes escalas envueltas complican el tener una resolución espacial alta. En este sentido, la aportación de la malla no estructurada del programa SWUNST permite discretizar simplemente la geometría de estudio, optimizando así los recursos computacionales y agilizando en gran medida los cálculos. De la misma forma que permite obtener resoluciones mayores con un mismo tiempo computacional.

Para saber cuándo podemos aplicar el modelo numérico y que podemos esperar de sus resultados es básico conocer y entender las limitaciones de las ecuaciones resultantes que gobiernan el modelo numérico.

3.3.1. NOTACIÓN

Cuando se derivan las ecuaciones de Saint Venant de las de Navier-Stokes aparecen varias definiciones de las variables del flujo (instantáneo, media vertical, fluctuación, fluctuación vertical, media conjunta), que puede llevar a confusión si la notación no es clara. A continuación se define la notación utilizada:

| | |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $u(x, y, z, t)$: | velocidad instantánea |
| $\bar{u}(x, y, z, t)$: | media conjunta de u |
| $u'(x, y, z, t)$: | fluctuación de u respecto a la media conjunta |
| $\langle u \rangle(x, y, t)$: | media vertical de u |
| $u''(x, y, z, t)$: | fluctuación de u respecto a la media vertical |
| $U = \langle \bar{u} \rangle(x, y, t)$: | media vertical de la media conjunta |
| $U'(x, y, z, t)$: | fluctuación de la media conjunta respecto a la media vertical de la media conjunta |

En general, la media conjunta depende del tiempo. En flujo estacionario la media conjunta es equivalente a la media en el tiempo, y por eso no es dependiente del tiempo:

$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z) \qquad U = U(x, y)$$

Ecuación 3.1

Por otro lado, en regímenes turbulentos, la velocidad instantánea u siempre depende del tiempo, incluso en flujos estacionarios. Para simplificar la notación, la media vertical de la media conjunta será:

$$U = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz$$

Ecuación 3.2

Donde $h = z_s - z_b$ es el calado, z_b es la cota del lecho y z_s es la cota de la superficie libre. Mediante las definiciones anteriores, cualquier variable se puede descomponer en su media y sus valores fluctuantes como:

$$u = \bar{u} + u' \qquad u = \langle u \rangle + u'' \qquad \bar{u} = U + U' \qquad \langle u \rangle = U + \langle u' \rangle$$

Ecuación 3.3

La cuarta Ecuación 3.3 es la media vertical de la primera, mientras que la tercera es la media conjunta de la segunda. Considerando estas definiciones, se aplican las relaciones:

$$\bar{u}' = 0 \qquad \langle u'' \rangle = 0$$

Ecuación 3.4

3.3.2. CÁLCULO DE LA SUPERFICIE LIBRE

Cuando calculamos la superficie libre del flujo aparece una nueva variable: la localización del contorno de la superficie libre, es decir, el calado. Se calcula normalmente integrando verticalmente la ecuación de continuidad o con la condición cinemática de la superficie libre. Con la primera opción obtenemos:

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dz = 0$$

Ecuación 3.5

Aplicando la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \frac{\partial z_s}{\partial x} \bar{u}_s + \frac{\partial z_b}{\partial x} \bar{u}_b + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz + \frac{\partial z_s}{\partial y} \bar{v}_s + \frac{\partial z_b}{\partial y} \bar{v}_b + \bar{w}_s - \bar{w}_b = 0$$

Ecuación 3.6

Donde el subíndice s se refiere a las variables de la superficie libre y el subíndice b se refiere a las variables del fondo del canal. Cabe destacar que las velocidades del lecho ($\bar{u}_b, \bar{v}_b, \bar{w}_b$) pueden ser diferentes de cero. En el caso hipotético de que el lecho sea móvil, debido a una condición no-slip, la velocidad del fluido es igual a la velocidad del lecho. La superficie libre y las condiciones cinemáticas del fondo del canal vienen dadas por:

$$\bar{w}_s = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial z_s}{\partial x} \bar{u}_s + \frac{\partial z_s}{\partial y} \bar{v}_s$$

$$\bar{w}_b = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial z_b}{\partial x} \bar{u}_b + \frac{\partial z_b}{\partial y} \bar{v}_b$$

Ecuación 3.7

Sustituyendo la Ecuación 3.7 en la Ecuación 3.6 se obtiene la ecuación de continuidad por integración vertical:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} = 0$$

Ecuación 3.8

Nótese que no se ha hecho ninguna aproximación para deducir la Ecuación 3.8. Nótese también que esta ecuación es válida incluso para lecho móvil.

3.3.3. ECUACIONES DE SAINT VENANT (EN AGUAS SOMERAS) EN 2D MEDIANTE INTEGRACIÓN VERTICAL

Con la intención de simplificar, sólo se va a considerar una dimensión horizontal para obtener las ecuaciones de Saint Venant. La extensión a la segunda dimensión horizontal viene a continuación. La ecuación vertical del momentum RANS para flujos estacionarios es:

$$\frac{\partial \overline{u\overline{w}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w\overline{w}}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} - g$$

Ecuación 3.9

La presión total \overline{p} se puede descomponer en presión hidrostática \overline{p}_h y presión dinámica \overline{p}_d . Asumiendo una densidad constante:

$$\begin{aligned} \overline{p} &= \overline{p}_h + \overline{p}_d \\ \overline{p}_h &= \rho g(z_s - z) + \overline{p}_a \end{aligned}$$

Ecuación 3.10

Donde z_s es la cota de la superficie libre, y \overline{p}_a la presión atmosférica, en general se suele considerar la presión atmosférica como constante y de valor 0, lo que quiere decir que a las presiones modeladas se les tiene que sumar 1 atmosfera para obtener las presiones reales. El término de la presión hidrostática \overline{p}_h se compensa con la aceleración gravitacional $-g$ en la Ecuación 3.9.

La hipótesis más importante que se ha hecho a la hora de deducir las ecuaciones de Saint Venant 3D es la presunción de distribución de presiones hidrostática, esto significa que la presión dinámica es nula, o lo que es lo mismo:

$$\overline{p} = \rho g(z_s - z)$$

Ecuación 3.11

Para obtener las ecuaciones de Saint Venant por integración vertical se deben considerar varias simplificaciones añadidas. Se estudiará únicamente la ecuación x del momentum, siendo análoga la integración de la ecuación y . El proceso de integración consiste básicamente en integrar la ecuación x del momentum en la dirección vertical, aplicando la de Leibnitz, y usando las condiciones cinemáticas de superficie y la superficie del lecho. Para realizar el proceso, se clasifican los términos de la Ecuación 3.12 (Ecuaciones 3D en aguas someras) en convección, gradiente de presión, difusión viscosa y turbulenta en dirección x , difusión viscosa y turbulenta en dirección z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u\overline{u}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v\overline{u}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w\overline{u}}}{\partial z} &= -g \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}_a}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u\overline{v}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v\overline{v}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w\overline{v}}}{\partial z} &= -g \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}_a}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

Ecuación 3.12

3.3.3.1. Convección

La integración de los términos convectivos a lo largo del calado resulta:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}_s \bar{w}_s + \bar{u}_b \bar{w}_b \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz - \bar{u}_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v}\bar{u} dz - \bar{v}_s \bar{u}_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}_b \bar{u}_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_b}^{z_s} \bar{w}\bar{u} dz - \bar{w}_s \bar{u}_s \frac{\partial z_s}{\partial z} + \bar{w}_b \bar{u}_b \frac{\partial z_b}{\partial z} \end{aligned}$$

Ecuación 3.13

Aplicando las condiciones cinemáticas al lecho y superficie libre (Ecuación 3.7), la integración vertical del calado del término convectivo (Ecuación 3.13) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v}\bar{u} dz$$

Ecuación 3.14

Para resolver las integrales de la Ecuación 3.14, se define una función de forma como:

$$\bar{u}(x, y, z) = U(x, y) f(x, y, z)$$

Ecuación 3.15

La función de forma f puede variar no sólo en z , sino también en x e y , de manera que el perfil vertical de velocidad horizontal varia en forma de un punto a otro. Considerando la definición de la velocidad media vertical de la media conjunta U dada por la Ecuación 3.2 y definiendo una sigma coordinada como $\sigma = \frac{z}{h}$, se aplica la siguiente condición a la función de forma f :

$$\int_0^1 f(x, y, \sigma) d\sigma = 1$$

Ecuación 3.16

En flujos de aguas someras con un fuerte comportamiento homogéneo en la dirección vertical, la función de forma es casi constante, con un valor cercano a 1. En estas situaciones se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\int_0^1 f^2 d\sigma \approx 1$$

Ecuación 3.17

Asumiendo la aproximación de la Ecuación 3.17, y sustituyendo la Ecuación 3.15 en la Ecuación 3.14, se obtiene la forma final del término convectivo de la integración vertical del calado en la ecuación x del momentum como:

$$\frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial hU^2}{\partial x} + \frac{\partial hUV}{\partial y}$$

Ecuación 3.18

Una forma alternativa de calcular las integrales de la Ecuación 3.14 es la de descomponer la velocidad horizontal en la velocidad media y su fluctuación, que depende de la coordenada vertical como:

$$\bar{u} = U + U' \quad \bar{v} = V + V'$$

Ecuación 3.19

Donde $U' = U'(z)$, mientras que U es independiente de z . Sustituyendo la Ecuación 3.19 en la Ecuación 3.14 se obtiene:

$$\frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial hU^2}{\partial x} + \frac{\partial hUV}{\partial y} + \frac{\partial D_{uu}}{\partial x} + \frac{\partial D_{uv}}{\partial y}$$

Ecuación 3.20

Con:

$$D_{uu} = \int_{zb}^{zs} U'^2 dz \quad D_{uv} = \int_{zb}^{zs} U'V' dz$$

Ecuación 3.21

Los términos D_{uu} y D_{uv} son conocidos como los tensores de dispersión longitudinal y lateral respectivamente. Su importancia respecto a los tensores de flujo convectivo y turbulento es relativo, y depende de la magnitud de las velocidades fluctuantes U' y V' . En el caso límite de que el perfil de velocidades sea uniforme a lo largo de la coordenada vertical, los términos de dispersión desaparecen. En un caso general su valor es fuertemente dependiente de la existencia de corrientes secundarias verticales, que normalmente aparecen cuando los efectos de la curvatura en el campo de velocidades son importantes. Veremos una muestra en el capítulo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, donde se describe la aplicación del modelo bidimensional a un meandro. Estos flujos secundarios crean deformidades en el perfil vertical de velocidades horizontales \bar{u} y \bar{v} . Rastogi y Rodi (1978) calcularon el flujo en aguas someras en un canal longitudinal con flujos secundarios debidos a los efectos de flotabilidad, y descubrieron que la fricción del lecho tiende a hacer desaparecer los flujos secundarios, disminuyendo la importancia relativa de los términos de dispersión. De ahí que exista una mayor similitud entre modelos 2D y 3D para el caso lechos rugosos que para el caso de lechos lisos.

Los términos dispersivos D_{uu} y D_{uv} generalmente se desprecian en las ecuaciones de integración vertical del calado, lo que equivale a asumir la aproximación dada por la Ecuación 3.17. En algunos trabajos como los de Duan (2004) y Lien et al. (1999) propusieron expresiones aproximadas para los términos dispersivos, basados en los perfiles experimentales de velocidad obtenidos en canales curvados.

3.3.3.2. Gradiente de presión

La integral del gradiente de presión hidrostática a lo largo del calado es:

$$-\int_{z_b}^{z_s} g \frac{\partial z_s}{\partial x} dz = -g \frac{\partial z_s}{\partial x} (z_s - z_b) = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - gh \frac{\partial h}{\partial x}$$

Ecuación 3.22

3.3.3.3. Difusión viscosa y turbulenta en la dirección x

Considerando la tensión efectiva \bar{t}_{xx} , que incluye las tensiones viscosas y turbulentas en la dirección x, la integral de los términos viscosos y turbulentos se puede expresar:

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{t}_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{t}_{xx} dz - \frac{\partial z_s}{\partial x} \bar{t}_{xx}(z_s) + \frac{\partial z_b}{\partial x} \bar{t}_{xx}(z_b)$$

Ecuación 3.23

con:

$$\bar{t}_{xx} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'^2}$$

Ecuación 3.24

La tensión longitudinal en el lecho es cero ($\bar{t}_{xx}(z_b) = 0$). Considerando que en la superficie libre la tensión longitudinal es bastante pequeña (especialmente si la comparamos con la tensión vertical \bar{t}_{xz}), el término $\bar{t}_{xx}(z_s)$ se puede despreciar en la Ecuación 3.23. Con esta aproximación, sustituyendo la Ecuación 3.15 en la Ecuación 3.23 nos da:

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{t}_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \nu f \frac{\partial U}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \nu U \frac{\partial f}{\partial x} dz - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \overline{u'^2} dz$$

Ecuación 3.25

Tal y como se ha hecho en la Ecuación 3.17, asumimos que las variaciones de la función de forma f son más pequeñas que su valor, por ejemplo las variaciones de la velocidad horizontal en la dirección z son pequeñas. Por lo tanto, el segundo término en el lado derecho de la Ecuación 3.25 puede despreciarse:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \nu U \frac{\partial f}{\partial x} dz \approx 0$$

Ecuación 3.26

Con esta nueva aproximación, y sustituyendo Ecuación 3.16, la forma final de los términos difusivos de viscosidad y turbulencia integrando en la vertical del calado, en la dirección x, son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu h \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial h \langle \overline{u'^2} \rangle}{\partial x}$$

Ecuación 3.27

Donde $\langle \overline{u'^2} \rangle$ representa el valor medio por integración en la vertical de la tensión de Reynolds $\overline{u'^2}$. Para el caso en el que se consideran dos dimensiones tenemos $\overline{t_{xx}}, \overline{t_{xy}}$ el mismo procedimiento, introduciendo además la ecuación de continuidad se llega a siguiente resultado:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu h \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu h \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial h \langle \overline{u'^2} \rangle}{\partial x} - \frac{\partial h \langle \overline{u'v'} \rangle}{\partial y}$$

Ecuación 3.28

3.3.3.4. Difusión viscosa y turbulenta en la dirección z

La integral del término de la difusión vertical nos da:

$$\int_{z_b}^{z_s} \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial u'w'}{\partial z} dz = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z_s} - \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z_b} + (\overline{u'w'})_{z_s} - (\overline{u'w'})_{z_b} = \tau_{s,x} - \tau_{b,x}$$

Ecuación 3.29

donde $\tau_{s,x}$ y $\tau_{b,x}$ son las tensiones tangenciales en la dirección x de la superficie libre y del lecho, respectivamente.

3.3.3.5. Ecuaciones resueltas a partir de la integración vertical a lo largo del calado

Con las aproximaciones que se han asumido hasta ahora, la forma final de las ecuaciones de Saint Venant con integración vertical en la longitud del calado es:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h U_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial h U_i}{\partial t} + \frac{\partial h U_i U_j}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial h}{\partial x_i} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} - \frac{\tau_{b,i}}{\rho} + \frac{\tau_{s,i}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial h \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j}$$

Ecuación 3.30

Las tensiones de Reynolds se deben calcular mediante un modelo de turbulencia. Dejando aparte los términos de turbulencia, la ecuación 2D mediante integración vertical a lo largo del calado es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales con 3 incógnitas (U, V, h), definidas en un dominio espacial bidimensional. Esto conlleva una importante reducción del coste computacional respecto a las ecuaciones originales RANS, que están formadas por 4 ecuaciones definidas sobre un dominio espacial 3D, con el inconveniente adicional de que la superficie libre constituye un contorno móvil. A pesar de ello, cuando se aplica sobre flujos de aguas someras, mantienen un buen equilibrio entre precisión y coste computacional.

Para los casos de interés en hidráulica podemos suponer que la presión atmosférica tiene un valor constante, de la misma manera las tensiones superficiales debidas a la fricción del viento las consideramos nulas, de esta manera el sistema de ecuaciones es el siguiente.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h U_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial h U_i}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial h U_i U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial (gh^2/2)}{\partial x_i}}_{\text{Término convectivo}} = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} - \frac{\tau_{b,i}}{\rho} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - h \langle u'_i u'_j \rangle \right)}_{\text{Término difusivo}}$$

Ecuación 3.31

**ANEJO 4. FORMA CONSERVATIVA DE LAS ECUACIONES
DE AGUAS SOMERAS**

4. FORMA CONSERVATIVA DE LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS

En primer lugar rescribimos las ecuaciones encontradas para las aguas someras (ver anejo 3) incorporando los términos viscosos según las hipótesis de Boussinesq vistas y con todos los términos desarrolladas:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial(hUU + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial hUV}{\partial y} = & -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{b,x}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h(v+v_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h(v+v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial h v_t}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h v_t}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial hk}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial hUV}{\partial x} + \frac{\partial(hVV + gh^2/2)}{\partial y} = & -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\tau_{b,y}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h(v+v_t) \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h(v+v_t) \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial h v_t}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial h v_t}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial hk}{\partial y} \end{aligned}$$

Ecuación 4.1

Ahora tratamos de escribir el sistema de ecuaciones anterior en forma vectorial, para ello definimos el vector de variables dependientes q :

$$q = \begin{pmatrix} h \\ hU \\ hV \end{pmatrix}$$

Ecuación 4.2

Estas variables son las denominadas conservativas, construimos la forma vectorial de nuestro sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot f(q) = \nabla \cdot \left(h(v+v_t) \frac{1}{2} (\nabla g(q) + \nabla^T g(q)) \right) - S}$$

Ecuación 4.3

Donde el operador divergencia está definido en dos dimensiones x, y , los valores de las funciones son:

$$\nabla \cdot f(q) = a(q)_x + b(q)_y$$

$$a = \begin{pmatrix} hU \\ hUU + gh^2/2 \\ hUV \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} hV \\ hUV \\ hVV + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{b,x}}{\rho} - \frac{2}{3} \frac{\partial hk}{\partial x} \\ gh \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\tau_{b,y}}{\rho} - \frac{2}{3} \frac{\partial hk}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ecuación 4.4

En la nueva forma conservativa de la ecuación se distinguen claramente los términos convectivos y difusivos:

$$\underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{\text{Derivada local}} + \underbrace{\nabla \cdot f(q)}_{\text{Término convectivo}} = \underbrace{\nabla \cdot \left(h(v+v_i) \frac{1}{2} (\nabla g(q) + \nabla^T g(q)) \right)}_{\text{Término difusivo}} - \underbrace{S}_{\text{Término fuente}}$$

Ecuación 4.5

Que podemos describir en forma simplificada como:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{f(q)}{F(q)} - \underbrace{h(v+v_i) \frac{1}{2} (\nabla g(q) + \nabla^T g(q))}_{N(q)} \right) = -S$$

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (F(q) - N(q)) = -S}$$

Ecuación 4.6

**ANEJO 5. CONDICIONES DE CONTORNO DE FLUJO EN
AGUAS SOMERAS**

5. CONDICIONES DE CONTORNO EN AGUAS SOMERAS

5.1. CONDICIÓN DE CONTORNO DE FLUJO

En los últimos años el método de volumen finito se ha ido mejorando mediante el método Godunov y los *solvers* Riemann, pero generalmente se sigue utilizando el método de las características para introducir condiciones de contorno en códigos numéricos. El código SWUNST propone una nueva aproximación a la introducción de condiciones de contorno mediante la solución al problema de Riemann. Este mismo solver Riemann se puede utilizar para todo el dominio, incluyendo los contornos. Esta aproximación permite introducir *shocks* y ondas de cualquier otro tipo como condición de contorno de manera que sean compatibles con la solución al problema de Riemann. La teoría de la metodología aplicada está explicada de manera exhaustiva en Medina (2008). De todas maneras, a continuación se hace un breve resumen.

El uso del método del volumen finito en problemas hiperbólicos se ha empezado a extender hace relativamente poco tiempo. El método Godunov y el solver Riemann se han combinado para obtener métodos de alta resolución capaces de resolver regímenes transcíticos¹.

Las características intrínsecas de los problemas hiperbólicos hacen que la definición de un problema bien propuesto no sea trivial, ya que las condiciones de contorno impuestas deben cumplir la estructura hiperbólica del problema.

En este sentido, en la mayoría de problemas con las ecuaciones en aguas someras (régimen subcrítico), las condiciones de contorno son aguas arriba el valor del caudal y aguas abajo el nivel de agua. Para aplicar las condiciones de contorno en un problema hiperbólico como es el de las ecuaciones en aguas someras, se necesitan dos variables dependientes aguas arriba y dos aguas abajo. Es por ello que los valores de las variables desconocidas (nivel de agua aguas arriba y caudal aguas abajo) se tienen que interpolar. Esta tarea normalmente se resuelve con el método de las características MC, pero esto conlleva la utilización de dos esquemas numéricos diferentes para la resolución del problema: el método del volumen finito en el interior del dominio y el MC en los contornos. Esta solución tiene el mismo hándicap que el MC, no se puede utilizar para resolver regímenes transcíticos. Así pues, en el dominio tenemos un método que puede tratar con regímenes transcíticos y en los contornos tenemos un método que no puede tratar con discontinuidades.

¹ Regímenes transcíticos: el texto se refiere a que el método que combina Godunov y Riemann es capaz de resolver el régimen subcrítico, supercrítico y el paso de uno a otro y viceversa.

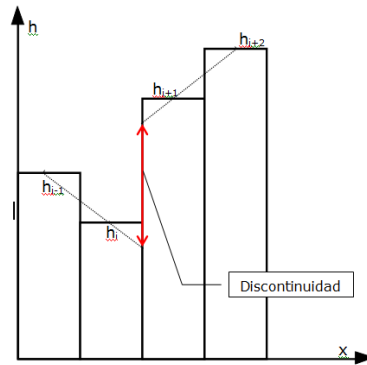


Figura 5.1 Gráfico que simula la problemática de la aparición de discontinuidades en el interior del dominio con el cálculo mediante volumen finito.

5.1.1. MÉTODO DE GODUNOV Y RIEMANN SOLVER EN ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS

El método propuesto en el código SWUNST se puede aplicar a cualquier problema hiperbólico. Pero para mantener la solución del esquema consistente, se debe utilizar el mismo método para resolver el dominio y los contornos. De todas maneras, este método fue especialmente formulado para trabajar con el método de Godunov (Godunov, 1959). El método usa la estructura de la solución del problema de Riemann, tal y como se explica a continuación.

La solución del problema de Riemann tiene dos ondas diferentes, una de la forma débil y otra de la forma cuasi lineal. Estas dos formas y sus soluciones se describen en el apartado siguiente. La teoría introducida en este capítulo se discute en varias publicaciones (LeVeque, 2004), por lo que se describe brevemente. Los sistemas hiperbólicos normalmente toman la forma diferencial:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(q(x,t))}{\partial x} = 0$$

Ecuación 5.1

El flujo es $f(x,t)$ y $q(x,t)$ es un vector de variables dependientes en la fase espacio, x y t son las variables independientes, espacio y tiempo. Las ecuaciones en aguas someras están formadas por un sistema de ecuaciones hiperbólicas que expresan la conservación de la masa y el momentum. Estas son dos variables dependientes, calado h (m) y caudal unitario hu (m^2/s):

$$q = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \right)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Ecuación 5.2

La gravedad es g (m/s^2), u es la velocidad (m/s) definida como hu/h . Estas ecuaciones reproducen el comportamiento de un canal de sección rectangular sin fricción ni pendiente.

5.1.2. CÁLCULO DEL FLUJO Y DISCRETIZACIÓN

La relación entre el método de Godunov y el problema de Riemann se debe al cálculo del flujo en la ecuación (1). Si se divide el dominio espacial y temporal en celdas, en el volumen de control i $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ podemos expresar la conservación de una propiedad usando la siguiente ecuación (forma conservativa de Ecuación 5.1):

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t) dx = f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t))$$

Ecuación 5.3

Tenemos un flujo en $x_{i-1/2}$, en la cara de aguas arriba, y el otro en $x_{i+1/2}$, en la cara de aguas abajo del volumen de control. El método Godunov calcula estos flujos resolviendo el problema de Riemann. Éste es un problema diferencial que tiene una discontinuidad con diferentes valores de variables dependientes a ambos lados de la discontinuidad. Se puede definir el flujo medio entre dos volúmenes de control i y $i+1$ en un paso de tiempo n como $F_{i+1/2}^n$, y usar la similitud con las ecuaciones hiperbólicas para calcularlo.

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt \\ F_{i+1/2}^n &= f(q(x_{i-1/2}, t)) \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \\ F_{i+1/2}^n &= f(q(x_{i-1/2}, t)) \\ F_{i+1/2}^n &= f(q^\perp(Q_i^n, Q_{i+1}^n)) \\ F_{i+1/2}^n &= f(q^\perp(q_l, q_r)) \end{aligned}$$

Ecuación 5.4

Q_i^n es el vector de las variables dependientes en la celda i en el paso de tiempo n , q^\perp es el vector de las variables dependientes en la cara de la celda, y depende de los valores a ambos lados de la discontinuidad (Q_i^n, Q_{i+1}^n) , representados como q_l, q_r (subíndice l y r indica el lado izquierdo y derecho). Finalmente, el problema de Riemann resuelve el sistema de ecuaciones hiperbólicas entre ambos valores de las variables q_l, q_r a ambos lados de la discontinuidad, para encontrar la solución al estado de flujo $q^\perp(q_l, q_r)$. Las condiciones de contorno son una excepción porque las variables dependientes a ambos lados del problema de Riemann son desconocidas. Por ejemplo, en el contorno de aguas abajo, los valores derechos de la discontinuidad q_r son conocidos y los valores izquierdos q_l tienen una variable dependiente desconocida (régimen subcrítico).

5.1.3. RIEMANN SOLVER

En el problema de Riemann para las ecuaciones de aguas someras hay dos familias de ondas solución, las ondas Rankine Hugoniot y las ondas del invariante de Riemann, la primera familia son ondas discontinuas, llamadas *shocks* y la segunda familia son ondas continuas, llamadas *rarefracciones*. La solución consiste en dos valores en el espacio de fase q_l, q_r conectado a un tercer valor del espacio de fase q_m mediante ondas. De esta manera, una onda conecta q_l, q_m y una onda conecta q_m, q_r . Cada onda debe pertenecer a una familia de ondas. Cada familia tiene dos ondas, por lo que en cada valor en el espacio de fase se pueden encontrar cuatro ondas diferentes: $Shock\lambda_1$, $Shock\lambda_2$, $Riemann\lambda_1$ y $Riemann\lambda_2$. Sin embargo, tan solo determinadas partes de esas ondas son válidas. Esta condición se impone por entropía (Lax, 1972). Usando las soluciones válidas de Lax, se ha construido un solver combinando las diferentes ondas válidas para obtener un valor, el cual está conectado a una onda-1 en el estado izquierdo del problema de Riemann q_l , y a una onda-2 en el estado derecho del problema de Riemann q_r .

Las ondas válidas que conectan q_l y q_m son (onda-1):

$$u_m = \begin{cases} u_l + 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_m}) & h_m < h_l \\ u_l - (h_m - h_l)\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{h_m} + \frac{1}{h_l}\right)} & h_m > h_l \end{cases}$$

Ecuación 5.5

Las ondas válidas que conectan q_r y q_m son (onda-2):

$$u_m = \begin{cases} u_r + 2(\sqrt{gh_r} - \sqrt{gh_m}) & h_m < h_r \\ u_r - (h_m - h_r)\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{h_m} + \frac{1}{h_r}\right)} & h_m > h_r \end{cases}$$

Ecuación 5.6

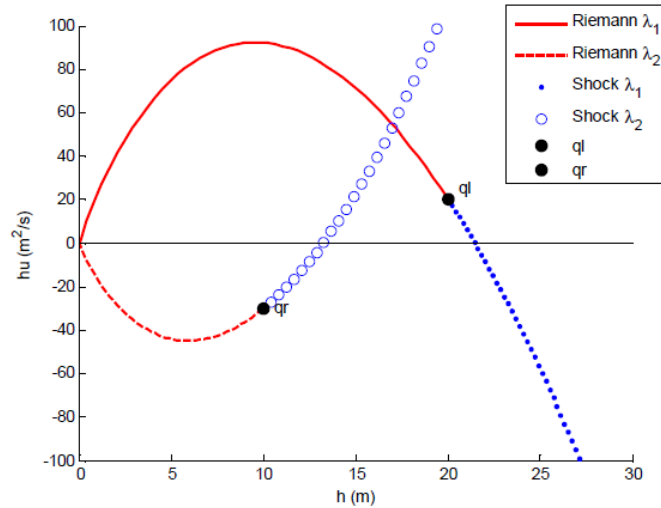


Figura 5.2 Espacio de fase, soluciones de entropía válidas que conectan los dos valores del problema de Riemann q_l, q_r .

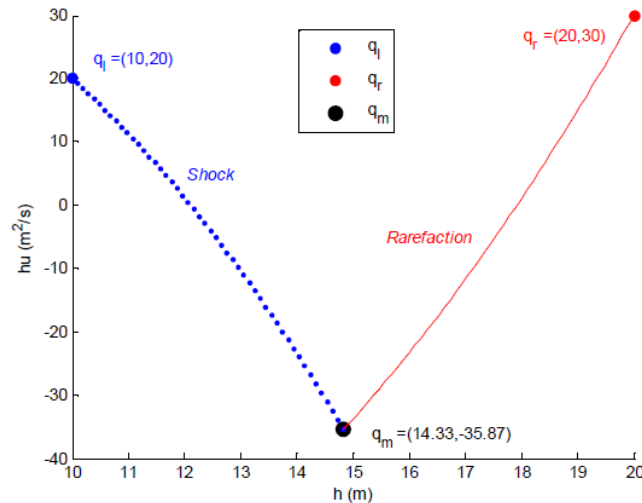


Figura 5.3 Espacio de fase, ejemplo de la solución del problema de Riemann, el valor de la izquierda q_l está conectado con el valor solución q_m mediante una onda $Shock \lambda_1$ y el valor solución está conectado al valor derecho q_r mediante una onda $Riemann \lambda_2$.

Es importante diferenciar q_m de q^\perp , la primera es la solución de Riemann y la segunda es la solución del flujo (flujo en la cara del volumen de control). Esta diferencia es fundamental para el algoritmo de resolución de condiciones de contorno propuesto. Si resolvemos el problema típico de rotura de presa para $t = 0$, obtenemos la solución de Stoker (Stoker, 1957) y el flujo en la presa es $q^\perp \neq q_m$ (Figura 5.4).

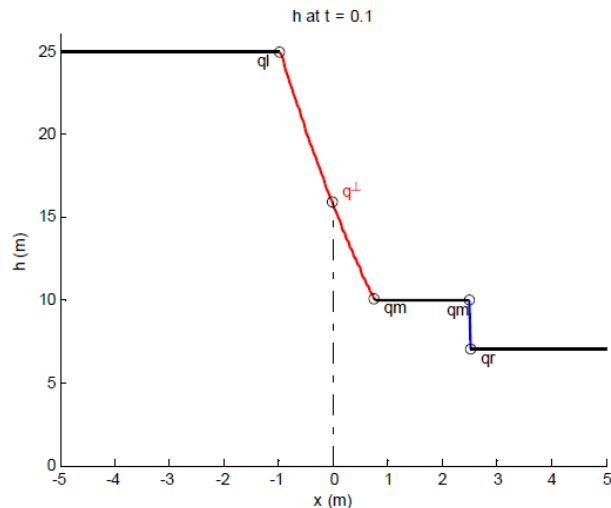


Figura 5.4 Ejemplo del problema de Riemann q_l, q_r , solución q_m y cálculo del flujo q^\perp en la cara $x = 0$, en la figura se puede ver el valor del calado en $t = 0.1$.

Por lo tanto, el algoritmo para el cálculo del flujo mediante Godunov es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Variables_dependientes} \begin{cases} q_l = Q_i^n \\ q_r = Q_{i+1}^n \end{cases} \\
 & \downarrow \\
 & q_m = \text{RiemannSolver}(q_l, q_r) \\
 & \downarrow \\
 & q^\perp = q^\perp(q_l, q_r, q_m) \\
 & \downarrow \\
 & F_{i+1/2}^n = f(q^\perp(q_l, q_r))
 \end{aligned}$$

Ecuación 5.7

5.1.4. CONDICIONES DE CONTORNO

En los problemas hiperbólicos, la definición de las condiciones de contorno no es trivial. El número y puntos de aplicación de las condiciones determinan si el problema está bien planteado. El sistema de ecuaciones en aguas someras (EAS) tiene dos variables dependientes y dos ecuaciones. En el dominio hay dos contornos diferentes $x_{n-1/2}, x_{n+1/2}$, y dos incógnitas en cada contorno. Dependiendo del problema, es necesario imponer una, dos o ninguna condición de contorno en cada dominio de contorno.

5.1.4.1. Descripción del problema

En problemas hiperbólicos, las condiciones se deben imponer en el parte *upwind*, que está definido por los valores propios del sistema hiperbólico. Los valores propios de las EAS pueden ser ambos positivos, negativos o uno negativo y otro positivo. Estos tres casos definen zonas en el espacio de fase, el régimen supercrítico, el régimen inverso y el régimen subcrítico. Si en un dominio encontramos diferentes regimenes, tratamos

con un régimen transcrito, tal y como se ha descrito antes. También es posible encontrar valores propios con valor cero, y definen puntos sónicos. La frontera entre las tres diferentes zonas de regímenes en el espacio de fase se define por dos curvas, Crit+ es el contorno entre la zona subcrítica y la supercrítica, y Crit- es el contorno entre la zona inversa y subcrítica, estas curvas se definen por un parámetro adimensional, el número de Froude:

Régimen supercrítico Crit+

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow u - \sqrt{gh} = 0 \Rightarrow$$

$$u = \sqrt{gh} \Rightarrow \frac{u}{\sqrt{gh}} = 1 = \text{númeroFroude}$$

Régimen inverso Crit-

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow u + \sqrt{gh} = 0 \Rightarrow$$

$$u = -\sqrt{gh} \Rightarrow \frac{-u}{\sqrt{gh}} = -1 = \text{númeroFroude}$$

Régimen subcrítico

$$1 < \text{númeroFroude} < 1$$

Régimen supercrítico

$$\text{númeroFroude} > 1$$

Régimen inverso

$$\text{númeroFroude} < -1$$

Ecuación 5.8

En un régimen supercrítico, las condiciones de contorno deberían definirse en el contorno aguas arriba. En un régimen inverso, las condiciones de contorno deberían imponerse en el contorno aguas abajo. En el régimen subcrítico, se debería imponer una condición aguas arriba y otra aguas abajo.

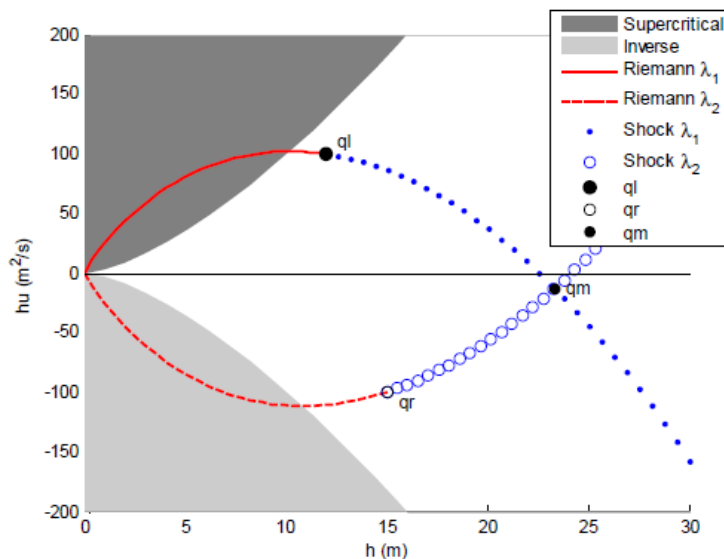


Figura 5.5 Espacio de fase con las zonas definidas para cada régimen, supercrítico (gris oscuro), inversa (gris) y subcrítico (blanco), la figura es un ejemplo del problema de Riemann y su solución con todos los valores en la zona subcrítica.

En un régimen transcrito el número de condiciones impuestas en cada contorno depende de la zona de régimen a la cual pertenezca el contorno. Para resolver un problema de Riemann, se necesita conocer los valores de las variables dependientes en ambos lados del problema.

En un régimen supercrítico o inverso, encontramos un contorno con todas las condiciones impuestas, así que la solución del problema de Riemann en este contorno deberían ser las condiciones de contorno impuestas:

$$q_{cc} = (h_{cc}, hu_{cc})$$

Ecuación 5.9

Donde q_{cc} es el vector de condiciones de contorno, compuesto por las variables dependientes impuestas, calado h_{cc} y caudal unitario hu_{cc} , por lo que la solución del flujo de Riemann debería ser $q^\perp = q_m = q_{cc}$, sino no es un problema bien planteado.

En el otro contorno no tiene condiciones de contorno impuestas; la solución del problema de Riemann no debería depender de los valores desconocidos. Esto es lo que define una condición del problema bien planteada.

El régimen subcrítico es diferente. En vez de resolver el problema de Riemann, tenemos un lado del problema con sólo una condición impuesta, así que la otra debe ser interpolada. Un método de condiciones de contorno completo debería encontrar la el valor de la variable dependiente. Debería ser consistente con la condición de contorno impuesta y las variables dependientes del dominio.

Primero, el método debería comprobar si la condición está bien impuesta. Segundo, el método debería interpolar los valores de las variables dependientes incompletas. Estos problemas han sido solucionados tradicionalmente con el MC, pero éste no es un método consistente con el método Godunov, el cual si que es capaz de tratar con regímenes transcritos.

5.1.4.2. Descripción general del método de solución

Este método utiliza la estructura de la solución del problema de Riemann para introducir las condiciones de contorno en el dominio. El método utilizará la estructura de la solución de Riemann para probar si las condiciones de contorno están bien puestas, y utilizará esta estructura para calcular los valores de las condiciones de contorno incompletas (subcrítico).

Para régimen supercrítico e inverso, se requieren dos condiciones impuestas (h_{cc}, hu_{cc}) para pertenecer a la zona supercrítica o inversa del espacio en fase.

También se requiere que el estado solución del problema de Riemann q_m cumpla otra condición, dependiendo del régimen, para garantizar que la solución del flujo $q^\perp = (h_{cc}, hu_{cc})$ es igual a los valores de contorno impuestos.

Para régimen subcrítico, se impone una variable dependiente en cada parte del dominio y la otra necesita ser interpolada. Para encontrar esta variable desconocida, el método impondrá que pertenece a la fase conectada al interior del dominio de valores de variables dependientes, por medio de ondas válidas. La Figura 5.6 muestra un ejemplo de un régimen subcrítico con un caudal unitario hu_{cc} impuesto aguas arriba y la otra variable dependiente h_{cc} interpolada. El estado (h_{cc}, hu_{cc}) está conectado al interior del dominio q_r por una rarefacción de *Riemann* λ_2 .

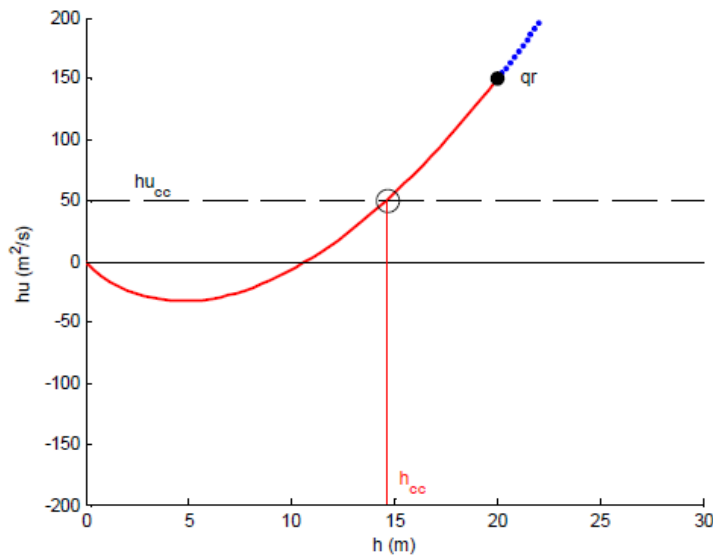


Figura 5.6 Interpolación de la condición de contorno h_{cc} a partir del estado interior q_r y la condición de contorno impuesta hu_{cc}

Los valores de variables dependientes en ambos lados del problema de Riemann són:

$$q_r = Q_1^n$$

$$q_l = \begin{pmatrix} h? \\ hu_{cc} \end{pmatrix}$$

Ecuación 5.10

Conceptualmente, este método encuentra una solución de Riemann q_m , pero para el método de Godunov necesitamos la solución del flujo q^\perp . Sin embargo, y como veremos más tarde:

En un régimen subcrítico, las condiciones de contorno están bien planteadas sólo si se cumple $q^\perp = q_m$.

La demostración es simple, si imponemos una única condición de contorno ($h_{cc} o hu_{cc}$), el flujo resultante debería depender del valor interior ($q_l o q_r$) y del valor de la condición de contorno ($h_{cc} o hu_{cc}$). Los valores de fases conectadas por ondas válidas al estado interior ($q_l o q_r$) tienen un grado de libertad, así que imponiendo una condición de contorno ($h_{cc} o hu_{cc}$), el valor de la solución de estado q_m se define exactamente. Tal y como veremos, en algunos casos la solución es indefinida, pero estos casos no están matemáticamente bien planteados.

Así pues, la solución del flujo q^\perp debería cumplir $q^\perp \in [q_m, q_l]$ o $q^\perp \in [q_m, q_r]$, dependiendo del caso (condiciones aguas abajo o aguas arriba). En algunos casos encontraremos $q^\perp = q_m$. Sin embargo, otros casos cumplirán $q^\perp \in [q_m, q_l]$ o $q^\perp \in [q_m, q_r]$, como las rarefracciones transcriticals. En estos casos el problema no está bien puesto porque $q^\perp \neq (h_{cc}, hu_{cc})$, así que la condición de contorno no está impuesta.

5.1.4.3. Régimen supercrítico e inverso

Los regímenes supercríticos e inversos implican imponer ambos valores de las variables dependientes en el contorno, tal y como hemos comentado anteriormente, trataremos con el contorno aguas arriba. Si se encuentra régimen supercrítico, se obtienen los valores izquierdos de las variables de Riemann a partir de las condiciones de contorno y los valores derechos de Riemann de los valores del dominio.

$$q_r = Q_1^n$$

$$q_l = \begin{pmatrix} h_{cc} \\ hu_{cc} \end{pmatrix}$$

Ecuación 5.11

Con toda esta información ya es posible calcular la solución de Riemann y probar su validez. En la Figura 5.7 es posible ver la solución de Riemann para una condición de contorno supercrítica aguas arriba, y como resultado obtenemos $q^\perp = q_{cc}$, así que es un problema bien planteado.

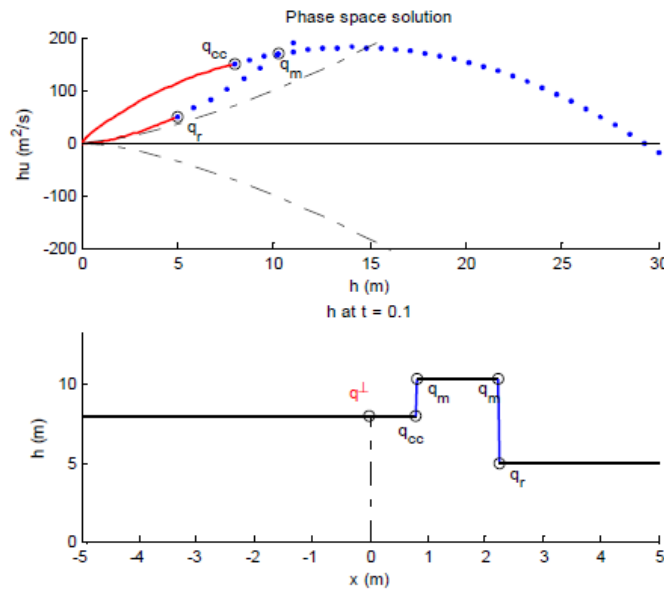


Figura 5.7 Solución del problema de Riemann para régimen supercrítico aguas arriba.

En la Figura 5.8 podemos ver una condición de contorno supercrítica aguas arriba mal puesta; la solución del flujo que se obtiene en el contorno aguas arriba q^\perp no es igual al valor de la condición de contorno impuesta q_{cc} , sino que es igual a q_m , así que ésta sería una condición de contorno no válida, suponiendo siempre que fuera supercrítica. Así pues, este es un problema mal planteado.

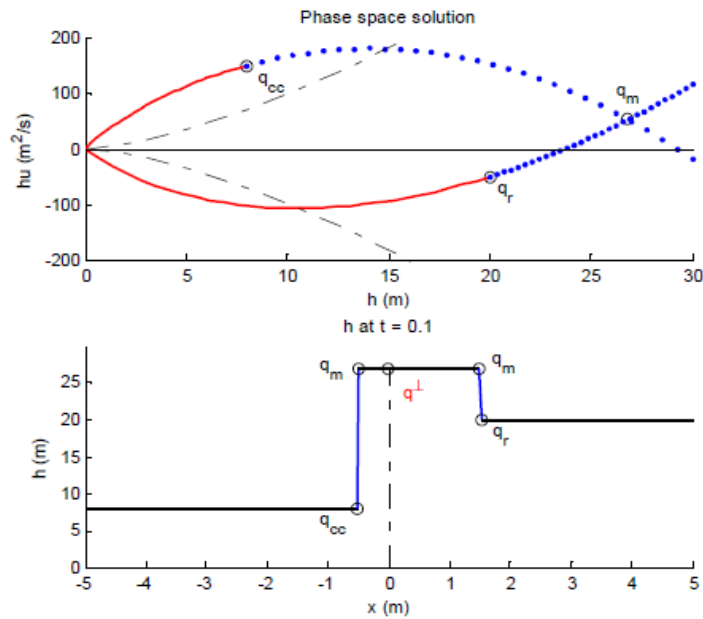


Figura 5.8 Condición de contorno supercrítica inválida aguas arriba, $q^\perp \neq q_{cc}$.

La condición de contorno impuesta tan solo es válida si la solución de Riemann q_m cumple la condición positiva de velocidad de choque:

$$\frac{hu_m - hu_{cc}}{h_m - h_{cc}} > 0$$

Así que la pendiente de la línea que conecta q_{cc} y q_m debería ser positiva.

Si en el régimen inverso la condición de contorno se aplica en el contorno aguas arriba, los valores derechos del problema de Riemann deberían estar dentro de la zona de régimen inverso (Figura 5.5); si esta condición se cumple, no es necesario imponer condiciones de contorno en este contorno.

Si el régimen inverso se impone en la condición de contorno aguas abajo, la condición es:

$$\frac{hu_m - hu_{cc}}{h_m - h_{cc}} < 0$$

Ecuación 5.12

5.1.4.4. Régimen subcrítico

Tal y como hemos explicado en el apartado 5.1.4.2 y descrito en la Figura 5.6, aplicando condiciones de contorno subcríticas sólo se impone un valor de variable dependiente, así que el otro valor debería interpolarse de las curvas válidas del problema de Riemann. En el contorno aguas arriba el valor incógnita debería obtenerse de las curvas que conectan con q_r (Figura 5.6). Con el valor impuesto y el valor interpolado construimos q_{cc} , y este punto está en la curva q_r , así que es la solución de Riemann $q_{cc} = q_m$.

En la Figura 5.9 se impone una condición de contorno aguas arriba $hu_{cc} = 100m^2/s$, e interpolando este valor en la curva q_r se obtiene un calado de $h_{cc} = 20m$, estos dos valores forman el vector de valores del contorno q_{cc} . Cuando resolvemos el problema de Riemann (q_{cc}, q_r) , se obtiene la solución de Riemann $q_m = q_{cc}$. Para que sea un problema bien puesto es necesario que $q^\perp = q_m = q_{cc}$, cosa que se consigue en la solución del problema de la Figura 10. Si $q^\perp \neq q_{cc}$, entonces el caudal unitario o el calado no son los impuestos por lo que es un problema mal puesto.

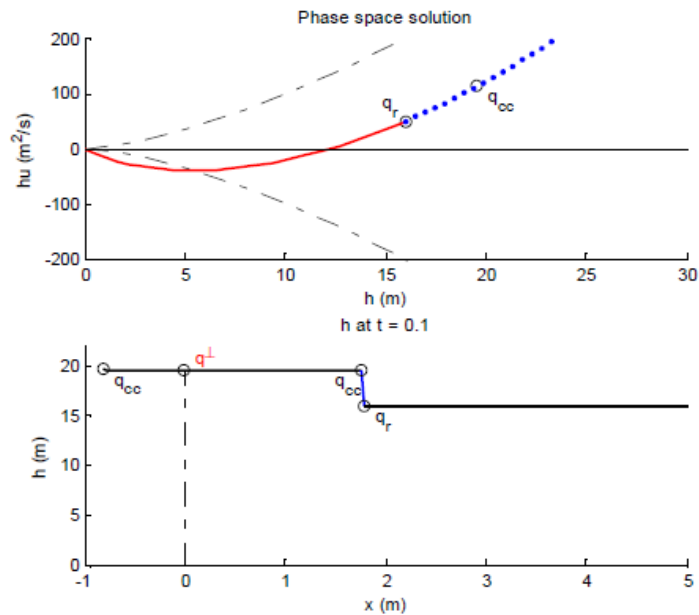


Figura 5.9 Condición de contorno subcrítica impuesta aguas arriba.

En la Figura 5.10 se muestra otro caso de condición de contorno subcrítica aguas arriba $h_{cc} = 10m$, la condición interpolada es $hu_{cc} = -22m^2/s$. Ahora la solución se conecta usando una rarefacción en vez de una onda de choque (Figura 5.9). Es un problema bien planteado porque $q^\perp = q_{cc}$.

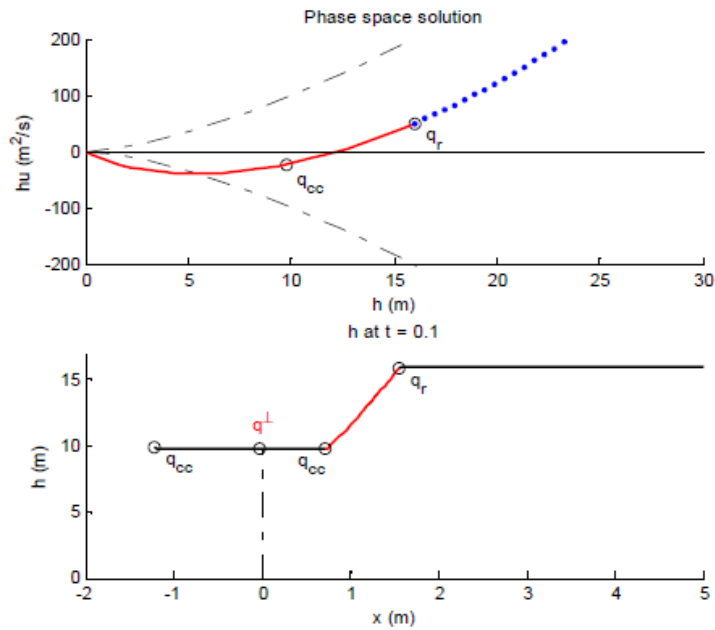


Figura 5.10 Condición de contorno subcrítica aguas arriba.

Como en el caso anterior, es posible encontrar condiciones de contorno no válidas, en el régimen subcrítico esto ocurre cuando $q^\perp \neq q_m$, en la Figura 5.11 es posible ver un ejemplo, el valor de contorno impuesto es $h_{cc} = 14m$, y el interpolado es $hu_{cc} = 125m^2/s$.

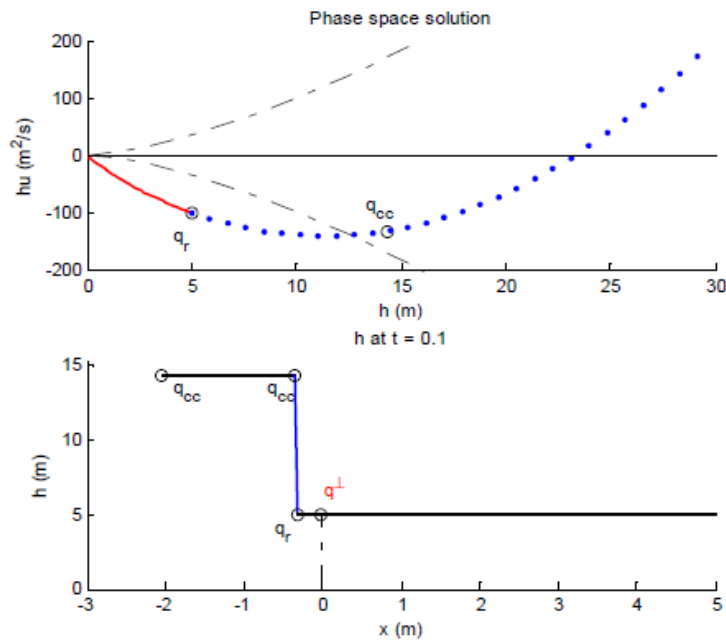


Figura 5.11 Condición de contorno subcrítica inválida aguas arriba.

Como se muestra en la Figura $q^\perp \neq q_m$ así que $q^\perp \neq q_{cc}$, este es un caso de un problema mal planteado.

En regímenes subcríticos $q_{cc} = q_m = q^\perp$ se debe cumplir la condición:

$$\frac{hu_{cc} - hu_r}{h_{cc} - h_r} > 0$$

Ecuación 5.13

Así que la línea que conecta el valor derecho q_r con el valor del contorno q_{cc} debería tener pendiente positiva. Para el contorno aguas abajo esta condición es:

$$\frac{hu_{cc} - hu_l}{h_{cc} - h_l} < 0$$

Ecuación 5.14

5.1.4.5. Solución del algoritmo

El tipo de algoritmo depende del tipo de condición de contorno impuesto. No depende del régimen dentro del dominio.

5.1.4.6. Régimen supercrítico

Si la condición de contorno supercrítica se impone en el contorno aguas abajo, tan solo es necesario comprobar que los valores interiores del dominio q_l están dentro de la zona de régimen supercrítico (Figura 5.5).

Si esta condición se impone en el contorno aguas arriba, los pasos son:

1. Comprobar los valores impuestos q_{cc} están incluidos en la zona de régimen supercrítico, en el espacio de fase.
2. Imponer las condiciones de contorno ($q_l = q_{cc}$) y resolver el problema de Riemann (q_l, q_r) y encontrar q_m .
3. Comprobar la condición (14) para comprobar $q^\perp = q_l = q_{cc}$.

5.1.4.7. Régimen inverso

Si se impone la condición de contorno inversa en el contorno aguas arriba, tan solo es necesario comprobar que los valores del interior del dominio q_r están dentro de la zona de régimen inverso (Figura 5.5).

Si esta condición se impone en el contorno aguas arriba? aguas abajo, los pasos son:

1. Comprobar los valores impuestos de las variables dependientes q_{cc} están incluidas en la zona de régimen inverso del espacio de estado.
2. Imponer las condiciones de contorno ($q_r = q_{cc}$) y resolver Riemann (q_l, q_r) y encontrar q_m .
3. Comprobar la condición (15) para comprobar $q^\perp = q_r = q_{cc}$.

5.1.4.8. Régimen subcrítico

Para definir el algoritmo del régimen subcrítico, se deben dar unos cuantos pasos previos. En este régimen, imponemos una condición de contorno con una variable dependiente (h_{cc} o hu_{cc}) e interpolamos la otra variable dependiente (h_c o hu_c). Para interpolar la variable dependiente desconocida, usamos las ondas que conectan las variables desconocidas (Figura 5.6). Sin embargo, las curvas no son injectives (la forma es parabólica), así que no hay sólo una solución exacta.

Existe otra limitación; el estado interpolado no debe estar dentro de las zonas de régimen supercrítico o inverso, ya que si no se trataría de una condición subcrítica. Excluyendo las zonas que corresponden a régimen supercrítico o inverso, el resto de las curvas es injective. Así, los problemas matemáticos e hidráulicos están acoplados. El estado límite es la intersección entre las curvas y las curvas Crit+ y Crit-. Esta intersección define los puntos (h_c, hu_c).

Para una condición aguas arriba, nuestras variables dependientes de la condición de contorno deben cumplir (Figura 5.12):

$$h_{cc} > h_c$$

$$hu_{cc} > hu_c$$

Ecuación 5.15

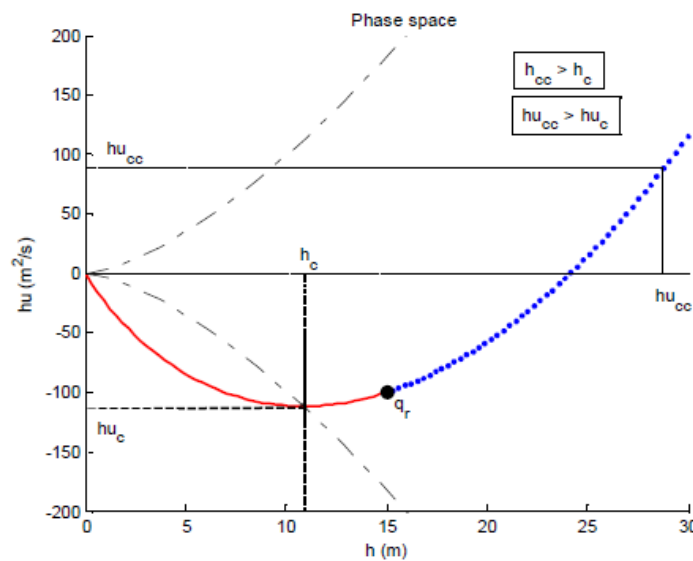


Figura 5.12 Valores umbral para la interpolación de valores de contorno.

Cumpliendo esta condición los valores de variables de contorno están fuera de la zona de régimen inverso.

Si imponemos una condición de contorno aguas abajo, las variables dependientes deben cumplir la condición simétrica, ahora calculando h_c, hu_c como intersección entre las curvas de ondas válidas y la curva Crit- :

$$h_{cc} > h_c$$

$$hu_{cc} < hu_c$$

Ecuación 5.16

La limitación impone un máximo para los caudales negativos para aguas arriba y caudales positivos para condiciones de contorno aguas abajo. Si tratamos de imponer una condición de contorno aguas arriba dentro de la zona prohibida, no se obtiene un problema bien planteado $q^\perp \neq q_m \Rightarrow q^\perp \neq q_{cc}$ (Figura 5.13).

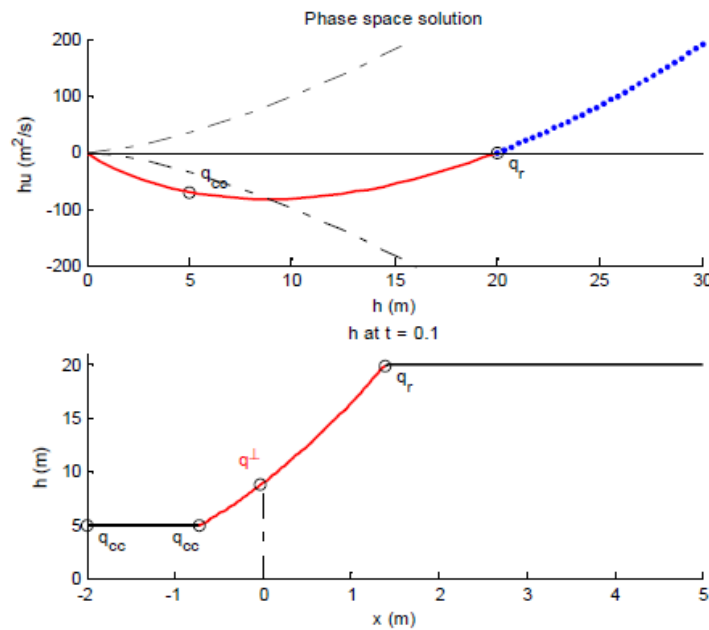


Figura 5.13 Condición de contorno subcrítica inválida para aguas arriba

En términos hidráulicos, esta condición significa que el caudal de salida aguas abajo no debe exceder el caudal crítico.

El algoritmo es como sigue:

1. Determinar los valores de h_c y hu_c como límites de interpolación.
2. Considerando estas limitaciones, encontrar la variable dependiente desconocida que corresponde a la variable dependiente conocida impuesta como condición de contorno. El resultado de este paso es q_m .
3. Comprobar que el estado no está en la zona supercrítica o subcrítica, ya que esto indicaría una condición de contorno compatible pero completa (que solo es válida para regímenes supercríticos e inversos).
4. En este punto ya conocemos que $q^\perp \in [q_m, q_r]$ o $q^\perp \in [q_m, q_l]$. Tan solo necesitamos comprobar que $q_m = q^\perp$.

Para comprobar el apartado 4 son suficientes las condiciones Ecuación 5.13 y Ecuación 5.14 definidas en el apartado 5.1.4.4.

Conceptualmente podemos interpretar estas limitaciones tal y como sigue:

1. Impone que la condición de contorno tiene como mínimo una influencia dentro del dominio (*upwind*).
3. Impone que la condición no debe ser completa, porque esto implicaría imponer dos valores para variables dependientes, lo que no resulta válido para regímenes subcríticos.

Así pues, el método que propone el código SWUNST combina un filtro, que asegura que la definición del problema está bien planteada, y un método para interpolar las variables dependientes desconocidas en condiciones de contorno parciales (régimen subcrítico).

Este método está basado en la solución del problema de Riemann y es óptimo para el método de Godunov.

Permite introducir discontinuidades como condición de contorno.

El método podría ampliarse a las ecuaciones unidimensionales de Euler, pero se necesita un nivel mayor de investigación para extenderlas a problemas multidimensionales.

El método se calcula usando un solver de Riemann exacto porque no el cómputo de cálculo no resulta muy elevado. Sin embargo, se debería investigar sobre la combinación con solvers de Riemann aproximados.

5.2. CONDICIONES DE CONTORNO DE LOS MODELOS RANS DE TURBULENCIA

Mientras que los modelos Cortante y DAML asumen un estado de equilibrio de la turbulencia, el modelo $k - \varepsilon$ resuelve la energía cinética turbulenta y la ecuación de disipación del transporte y, por lo tanto, necesita condiciones de contorno para estas dos variables. Las condiciones de contorno en la pared han sido discutidas en el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..** De la misma manera que en la ecuaciones en aguas someras, la condición de contorno en los contornos abiertos depende de la dirección en la que la información se propaga. En este caso la dirección convectiva es dada por la velocidad de integración vertical. Así pues, en los contornos interiores se deben imponer los valores de k y ε , mientras que en los contornos exteriores no se necesita condición de contorno.

**ANEJO 6. DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO,
SWUNST**

6. EL MODELO NUMÉRICO, SWUNST

La discretización seleccionada para la resolución de las ecuaciones de aguas someras se incluye dentro del grupo de discretizaciones denominadas híbridas (Tidriri, 2002), en este caso se trata del método *Finite Volume Galerkin*, a grandes rasgos podemos decir que no se trata del método estándar de Galerkin ya que se utilizan funciones centradas en los nodos para la solución y las funciones convencionales P^1 como funciones de test. Podemos ver una descripción detallada del formalismo utilizado para las ecuaciones de Navier-Stokes en Rostand and Stoufflet (1988). El resultado final de la discretización es similar al del volumen finito para el término convectivo y al de Galerkin para el difusivo.

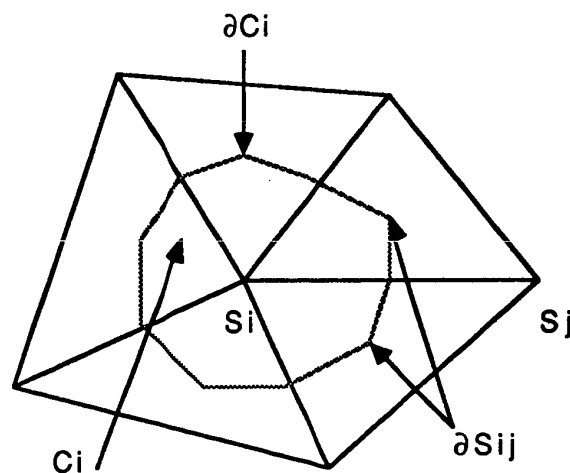


Figura 6.1 Discretización de los volúmenes de control de cálculo del modelo SWUNST, con malla no estructurada

El modelo SWUNST trabaja sobre una malla no estructurada formada a partir de triángulos, pero los volúmenes de control de cálculo no se corresponden con los triángulos sino que se forman alrededor de los vértices. Es decir considerando la malla como una triangulación (T_j) se trabaja con los volúmenes de control centrados sobre cada uno de los nodos de la malla (S_i), estos volúmenes (C_i) están formados a partir de dividir cada lado del triángulo con sus medianas de manera que a cada uno de los vértices del triángulo se le asocia el área definida por las dos medianas de los lados que convergen en dicho vértice (Figura 6.1). La ventaja de esta metodología es que los volúmenes de control aparecen centrados en los nodos de la malla y además en el reparto del área de cada triángulo entre los tres vértices que lo forman, a cada uno de ellos se le asigna un tercio del área, esto se debe a la propiedad intrínseca de las medianas de los triángulos de dividirlos en secciones de igual área.

El algoritmo utilizado por el modelo numérico SWUNST es explícito en el tiempo, en concreto se trata de un esquema Runge-Kutta de cuarto orden. Para alcanzar la solución estacionaria se utiliza un esquema iterativo pseudo transitorio. Las ecuaciones de Navier-Stokes y de los modelos de turbulencia para las ecuaciones RANS se resuelven mediante la técnica *upwind* o contracorriente usando un solver Riemann exacto, Roe (1981) y HLLC. de Toro (1994) para la parte convectiva de las

ecuaciones. Los términos viscosos se tratan usando la técnica estandarizada de Galerkin (elementos finitos).

6.1. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

Una interpretación muy simplista de la metodología empleada es suponer que se usa el método del volumen finito para la parte convectiva de las ecuaciones y el método de Galerkin para la parte difusiva, como si tratase de un *fractional step method*. Ver Chorin (1968). Este método resulta adecuado solamente cuando el proceso que domina es el convectivo.

Dado el dominio espacial de cálculo Ω , sea $\Omega_h = \bigcup T_j$ la discretización por triángulos del dominio computacional y sea $\Omega_h = \bigcup C_i$ su partición en volúmenes de control definidos según hemos visto en el apartado anterior.

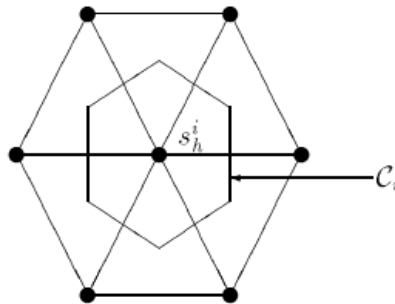


Figura 6.2 Discretización de los volúmenes de control de cálculo del modelo SWUNST, con malla estructurada

Siendo V_h la serie de las funciones continuas y poligonales en nuestra triangulación, utilizadas como función de test ϕ_h . El espacio de las funciones utilizadas para la solución lo denominamos W_h y es el espacio de las funciones continuas a trozos y constantes dentro de cada volumen de control C_i , a la base canónica de este espacio la denominaremos $\{N_i\}_i$. Se puede asociar a cada $\phi_h \in V_h$ una función constante $w_h \in W_h$ en las celdas o volúmenes de control mediante:

$$w_h = \mathbf{S}(\phi_h) \quad w_h|_{C_i} = \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} \phi_h$$

Ecuación 6.1

Siendo, por definición, w_h el valor promedio de las ϕ_h en las celdas. De la misma manera podemos realizar el proceso inverso $\phi_h(S_i) = w_h|_{C_i}$ obteniendo el valor nodal en los vértices. Por lo tanto existe un operador biyectivo \mathbf{S} que pasa de V_h a W_h . Tomamos como punto de partida la ecuación obtenida para las aguas someras, realizando un pequeño cambio de notación:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (F(q) - N(q)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) = \nabla \cdot N(W)$$

Ecuación 6.2

Donde W es el vector de las variables conservativas que encontramos para el problema de aguas someras con modelo de turbulencia $k - \varepsilon$, siendo las incógnitas $W = (h, hu_1, hu_2, hE, hk, h\varepsilon)^t$, y por lo tanto el espacio de las soluciones $w_h \in (W_h)^6$, F y N representan los operadores advectivos y viscosos respectivamente.

La solución de la forma débil de la ecuación consiste en encontrar $w_h \in (W_h)^6$ tal que, $\forall \phi_h \in V_h$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_h}{\partial t} \phi_h + \int_{\Omega} \nabla \cdot F(w_h) \phi_h dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot N(w_h) \phi_h dx$$

Ecuación 6.3

Las funciones que pertenecen al espacio de las soluciones W_k son continuas a trozos, por lo tanto al realizar la integración por partes característica de los elementos finitos discontinuos obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial w_h}{\partial t} \mathbf{S}(\phi_h) + \int_{\Omega} F(w_h) \cdot \nabla \mathbf{S}(\phi_h) dx + \int_{\Gamma_{\mathbf{S}(\phi_h)}} F(w_h) \cdot n_{C_i} [\mathbf{S}(\phi_h)] d\sigma + \int_{\Gamma} F(w_h) \cdot n \mathbf{S}(\phi_h) d\sigma \\ & = \int_{\Omega} N(w_h) \cdot \nabla \mathbf{S}(\phi_h) dx + \int_{\Gamma_{\mathbf{S}(\phi_h)}} N(w_h) \cdot n_{C_i} [\mathbf{S}(\phi_h)] d\sigma + \int_{\Gamma} N(w_h) \cdot n \mathbf{S}(\phi_h) d\sigma \end{aligned}$$

Ecuación 6.4

Donde Γ_g denota la superficie de discontinuidad de la función $g \in W_h$, $[g]$ representa el salto de la función g a través de Γ_g y n_{C_i} es la normal a Γ_g . Para nuestro caso, con la definición que se ha hecho del operador \mathbf{S} y sabiendo que las funciones de W_k son constantes a trozos, la forma débil se puede representar como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial w_h}{\partial t} \mathbf{S}(\phi_h) dx + \int_{\Gamma_{\mathbf{S}(\phi_h)}} F(w_h) \cdot n_{C_i} [\mathbf{S}(\phi_h)] d\sigma + \int_{\Gamma} F(w_h) \cdot n \mathbf{S}(\phi_h) d\sigma \\ & = \int_{\Gamma_{\mathbf{S}(\phi_h)}} N(w_h) \cdot n_{C_i} [\mathbf{S}(\phi_h)] d\sigma + \int_{\Gamma} N(w_h) \cdot n \mathbf{S}(\phi_h) d\sigma \end{aligned}$$

Ecuación 6.5

Y utilizando la base canónica obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial w_h}{\partial t} N_i dx + \int_{\partial C_i} F(w_h) \cdot n_{C_i} d\sigma + \int_{\Gamma} F(w_h) \cdot n \mathbf{S}(\phi_h) d\sigma \\ & = \int_{\partial C_i} N(w_h) \cdot n_{C_i} d\sigma + \int_{\Gamma} N(w_h) \cdot n \mathbf{S}(\phi_h) d\sigma \end{aligned}$$

Ecuación 6.6

De forma inmediata se puede realizar una discretización explícita del término convectivo prescindiendo de las condiciones de contorno:

$$|C_i| \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \int_{\partial C_i} F_d(W^n) \cdot n_{C_i} d\sigma = R.H.S.$$

Ecuación 6.7

Donde los superíndices indican el tiempo, los subíndices indican volumen de control $W_i^n = \int_{\Omega} w_h(t^n) N_i dx$ y $|C_i| = \int_{\Omega} N_i dx$ es el área del volumen de control, para el término viscoso de la derecha obtenemos:

$$R.H.S = \int_{\partial C_i} N(W^n) \cdot n_{C_i} d\sigma$$

Ecuación 6.8

6.1.1. EL TÉRMINO CONVECTIVO

Los flujos convectivos a través del contorno del volumen de control se pueden descomponer en la suma a través de cada una de las caras del mismo:

$$\int_{\partial C_i} F_d(W_i^n, W_j^n) \cdot n_{C_i} d\sigma = \sum_{i \neq j} \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} F_d(W_i^n, W_j^n) \cdot n_{C_i} d\sigma$$

Ecuación 6.9

La función F es una función constante a trozos que se aproxima a $F(W)$ verificando:

$$\int_{\partial C_i} F_d \cdot n = \sum_{i \neq j} \Phi(w_h|_{C_i}, w_h|_{C_j}) \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} n_{C_i} d\sigma$$

Ecuación 6.10

Es decir se puede calcular el flujo a través del contorno como la suma de los flujos a través de cada una de las interfases del volumen de control, y en cada una de estas interfases el flujo solo depende de los valores a ambos lados. Las diferentes discretizaciones que se utilizan para el cálculo del flujo en el término convectivo son equivalentes a una discretización centrada más una cierta difusión incluida para aportar estabilidad, por ello el flujo Φ se puede suponer como calculado usando la siguiente fórmula:

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} (F(u) + F(v)) - d(u, v)$$

Ecuación 6.11

Donde d es la difusión numérica y u, v son los valores de las variables a ambos lados de la interfase. Como ya hemos visto en el anejo 5 sobre condición de contorno de flujos, estos aparecen representados como:

$$\Phi(u, v) = F_{i+1/2}^n(q_l, q_r)$$

Ecuación 6.12

Donde q_l, q_r serán los valores de las variables a ambos lados de la interfase. En SWUNST, el esquema de resolución utilizado para los flujos es un *upwind* de alta resolución, obteniendo los flujos mediante el problema de Riemann. El usuario puede escoger entre la solución exacta o aproximadas como la de Roe (1981) y HLLC. (Toro, 1994).

Es muy importante tener en cuenta que los solvers de Riemann son aptos para sistemas hiperbólicos puros, por tanto esta técnica es válida para problemas donde el fenómeno dominante sea la convección.

6.1.2. EL TÉRMINO DIFUSIVO

Tal y como se ha comentado con anterioridad el término difusivo debe quedar en forma semejante a la discretización original de Galerkin usando elementos lineales P^1 , veremos la equivalencia entre esta forma que ha aparecido con la formulación en elementos finitos discontinuos y la original de Galerkin.

Hemos visto como prescindiendo de las condiciones de contorno obteníamos:

$$R.H.S = \int_{\partial C_i} N(W^n) \cdot n_{C_i} d\sigma$$

Ecuación 6.13

Que podemos reescribir como un sumatorio para todos los triángulos que poseen un vértice en el volumen de control:

$$R.H.S = \sum_{T \in \Omega_i} \int_{\partial C_i \cap T} N(W^n) \cdot n_{C_i} d\sigma$$

Ecuación 6.14

Ahora se pueden aplicar una serie de propiedades geométricas recogidas en la Figura 6.3, donde vemos que para cada uno de los triángulos que poseen un cierto nodo i aparecen dos interfasas con el volumen de control C_i , estas dos interfasas poseen normales n_{C_i} , que son $\vec{n}_{ext}^1, \vec{n}_{ext}^2$.

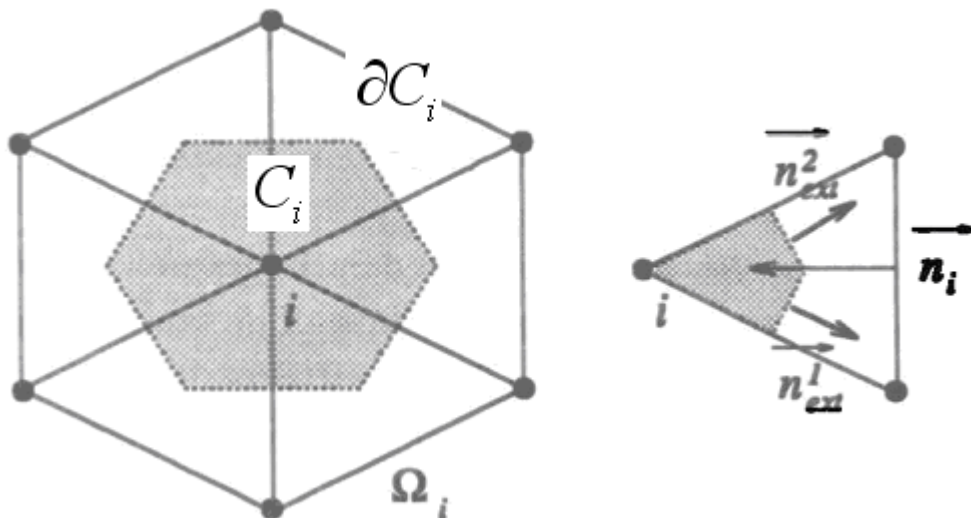


Figura 6.3 Esquema explicativo de las interfasas entre el volumen de control y el triángulo de la malla. Representación de las normales a las interfasas

Por propiedades geométricas de las medianas se verifica:

$$\vec{n}_{ext}^1 + \vec{n}_{ext}^2 = -\frac{1}{2}\vec{n}_i$$

Ecuación 6.15

Introduciendo esta relación geométrica en el cálculo de los flujos difusivos obtenemos:

$$R.H.S = -\frac{1}{2} \sum_{T \in \Omega} N \cdot \vec{n}_i$$

Ecuación 6.16

Debe puntualizarse que N es el vector de las tensiones viscosas calculadas a partir de los gradientes de las velocidades, que estas se presentan en los triángulos de la malla a partir de elementos lineales P^1 y que por lo tanto para cada uno de los triángulos estos gradientes son constantes que pueden salir fuera de la integral.

Por otra parte si se realiza la discretización ordinaria de Galerkin con elementos lineales para el término viscoso se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi_h \nabla \cdot N \, dx &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\phi_h N \cdot n}_{=0} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot N \, dx \\ &= - \sum_{T \in \Omega} \frac{\vec{n}_i}{2|C_i|} \cdot N \, dx = \boxed{-\frac{1}{2} \sum_{T \in \Omega} N \cdot \vec{n}_i} \end{aligned}$$

Ecuación 6.17

Por lo tanto podemos ver que la discretización por elementos discontinuos ha dado, para el término difusivo un resultado equivalente al obtenido utilizando Galerkin con elementos lineales.

Por lo tanto tal y como se había comentado la discretización utilizada obtiene el método del volumen finito para el término convectivo y el método de los elementos finitos para el termino difusivo.

6.1.3. ESQUEMA DE SEGUNDO ORDEN

La formulación ordinaria del problema de Riemann obtiene soluciones de primer orden en el espacio. Sin embargo, en muchas ocasiones un esquema de primer orden no es suficiente para calcular los perfiles de velocidad con precisión, ya que introduce mucha difusión numérica, Cea (2005).

En esta línea, se ha generado e implementado en el programa un esquema de segundo orden, que utiliza una discretización de segundo orden para la velocidad y para el calado. La precisión espacial de segundo orden se obtiene con MUSCL, *Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws* (van Leer, 1979) como una extensión que considera gradientes centrados y *upwind* del método de Godunov.

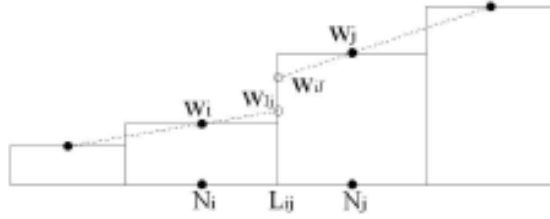


Figura 6.4 Extrapolación lineal de las variables conservativas de los nodos a las caras de la celda en esquema de segundo orden

En concreto, sea ∇W_i una aproximación del gradiente de W en el nodo i . Se define en el segmento $[i, j]$ las siguientes cantidades:

$$W_{ij} = W_i + 0.5 \text{Lim}(\beta(\nabla W)_i, ij, (1 - \beta)(W_i - W_j))$$

$$W_{ji} = W_j + 0.5 \text{Lim}(\beta(\nabla W)_j, ij, (1 - \beta)(W_j - W_i))$$

Ecuación 6.18

Con Lim un limitador Van Albada:

$$\text{Lim}(a, b) = 0.5(1 + \text{sgn}(ab)) \frac{(a^2 + \alpha)b + (b^2 + \alpha)a}{a^2 + b^2 + 2\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha \ll 1$$

Ecuación 6.19

Contiene la suma del esquema *upwind* en cada punto. Así pues, la precisión de segundo orden en el espacio se consigue reemplazando W_i' y W_j' por W_{ij} y W_{ji} .

Esta aproximación no garantiza que hk y $h\varepsilon$ sean positivos, es por ello que los flujos convectivos de las ecuaciones turbulentas se calculan con el esquema propuesto por Larroutrou (1989) para la preservación del signo positivo de las especies químicas.

Más concretamente, una vez calculada la densidad de los flujos, los flujos convectivos turbulentos se deducen así:

$$\int_{\partial C_i \cap C_j} huk \cdot n = k_i (\text{resp. } k_j) \int_{\partial C_i \cap C_j} hu \cdot n \quad \text{si} \quad \int_{\partial C_i \cap C_j} hu \cdot n > 0 (\text{resp. } < 0)$$

Ecuación 6.20

Los términos fuente del modelo $k - \varepsilon$ se han tenido en cuenta mediante un esquema explícito. Para los puntos con bajo número de Reynolds, ε se deduce a través de k mediante **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** de la memoria.

Los limitadores son importantes en los esquemas de segundo orden del cómputo de dinámica de fluidos, ya que las discontinuidades o los *shocks* son cruciales para el buen entendimiento del flujo. Donde existe un *shock*, no nos interesa un perfil suave, mientras que si no hay *shock*, queremos una solución suave de alta precisión.

6.2. EL CALCULO DE FLUJOS

Tal y como hemos visto en el apartado anterior, la discretización realizada nos acaba llevando a una formulación muy similar a la utilizada para el método del volumen finito, por ello para el cálculo de los flujos se utilizan las mismas herramientas, fundamentalmente el solver de Riemann.

El solver de Riemann en aguas someras se utiliza en el código tanto para el cálculo de la condición de contorno de flujo, como para el cálculo del flujo en el interior del dominio. Es por ello que les remitimos al anejo 5, donde se ha comentado ampliamente el planteamiento del problema de Riemann y su resolución.

6.3. PROCEDIMIENTO DE INTEGRACIÓN TEMPORAL

Vamos a reescribir la Ecuación 6.7 de la siguiente forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = R.H.S(W)$$

Ecuación 6.21

En la Ecuación 6.7 la integración temporal se ha hecho mediante un esquema explícito. SWUNST utiliza el siguiente esquema Runge-Kutta de cuarto orden para resolver el esquema explícito.

$$\begin{aligned} W^0 &= W^n \\ W^k &= W^0 + \alpha_k \Delta t R.H.S(W^{k-1}) \text{ para } k = 1, \dots, 4 \\ W^{n+1} &= W^4 \end{aligned}$$

Ecuación 6.22

Donde la elección óptima de α_k es la siguiente:

$$\alpha_1 = 0.11, \alpha_2 = 0.2766, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 1.0$$

Ecuación 6.23

Este esquema permite calcular también flujos dependientes del tiempo.

6.4. PROCEDIMIENTO DE DISCRETIZACIÓN TEMPORAL LOCAL

SWUNST utiliza la siguiente fórmula para calcular el intervalo temporal local para un determinado nodo s_i .

$$\Delta t(s_i) = \min \left(\frac{\Delta x}{|u| + c}, \frac{h \text{Pr} \Delta x^2}{2(\mu + \mu_t)} \right)$$

Ecuación 6.24

Donde Δx es el tamaño mínimo de los triángulos teniendo como nodo común s_i .

Como este resultado es una generalización del análisis de estabilidad 1D, se puede comprobar que de hecho es muy fuerte. A veces, para el cálculo de Navier-Stokes el intervalo de Euler también funciona. Esto quiere decir que se puede coger solamente

el primer término de la Ecuación 6.24. Pero esto no es siempre cierto, por eso el usuario del programa debe escoger el intervalo de tiempo con estrategia. Por lo tanto, para cálculo en estado estacionario, el usuario debería usar siempre un intervalo local estratégico, mientras para cálculos en estado transitorio es necesario un intervalo global. En el último caso, el intervalo de tiempo es el mínimo de los intervalos locales.

6.5. IMPLEMENTACIÓN DEL CÓDIGO

Tal y como se ha comentado en la introducción se trata de un modelo de implementación propia, se ha desarrollado en FORTRAN90 y como pre/post procesador se ha utilizado el programa GID. Para ello se ha desarrollado un *problemtyp*e específico. En la Figura 6.5 se puede ver el esquema general de llamadas de código.

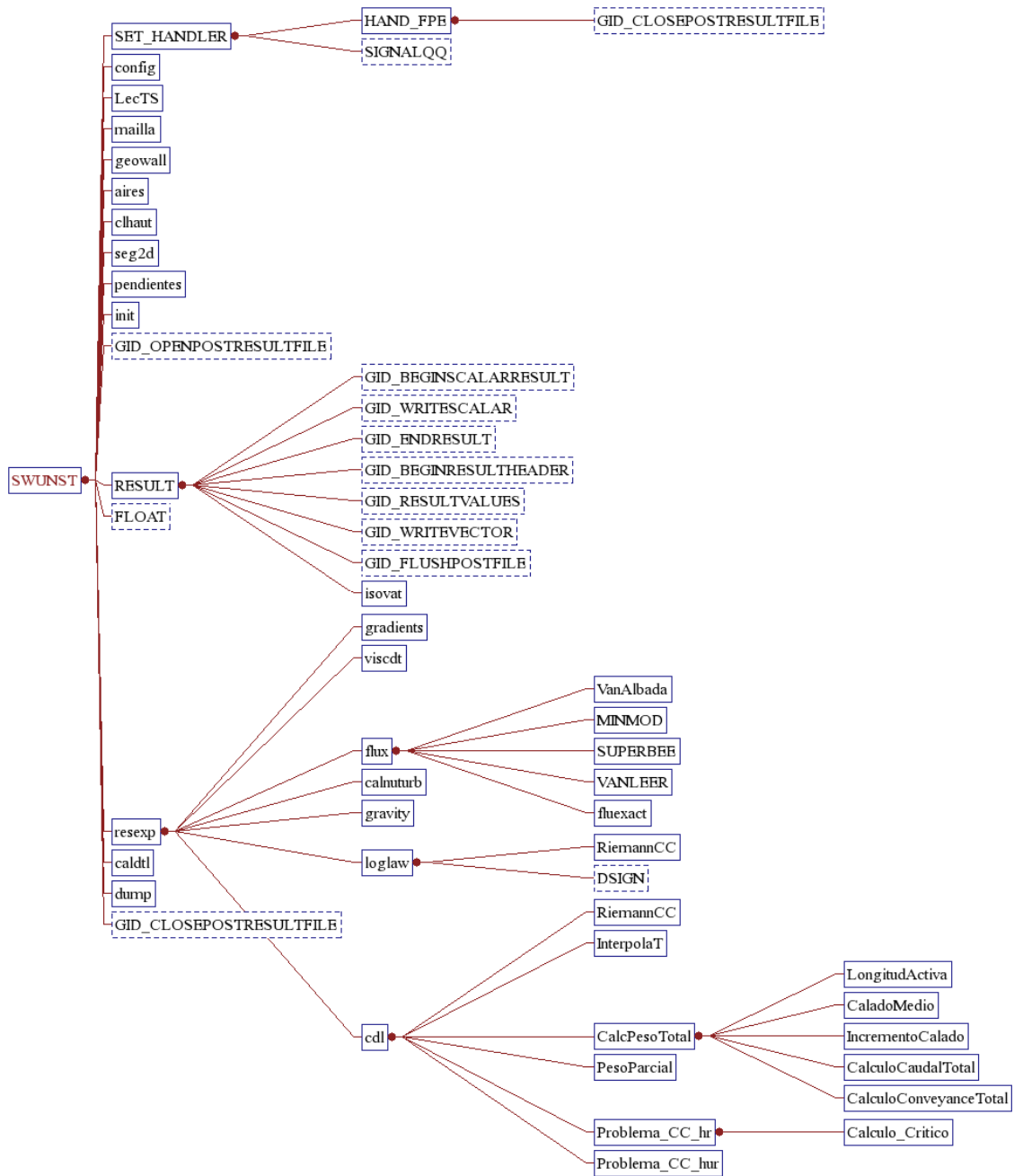


Figura 6.5 Esquema general de llamadas del código SWUNST

En la versión actual el dimensionado de memoria es estático y limitado a 15.000 nodos y 30.000 triángulos.

6.6. MEJORAS AÑADIDAS AL CÓDIGO DURANTE LA REALIZACIÓN DE LA TESIS

Durante el transcurso de este trabajo de investigación se han implementado una serie de mejoras necesarias para que el código ejecutase correctamente el cómputo de la solución del flujo en aguas someras. Se nombran a continuación algunas de ellas:

- A raíz de los primeros resultados con geometrías sencillas, se optó por cambiar el sentido de los vectores normales a las superficies triangulares de cómputo y establecer como criterio único que los vectores saliesen “hacia fuera” de la superficie de contorno. Como criterio definitivo se estableció el eje vertical z hacia arriba.
- A medida que la geometría de cálculo se volvía más compleja, nos dimos cuenta de que era básico aumentar el número de condiciones de contorno a introducir en el modelo. Hasta ahora se ha trabajado con la aplicación GID, que trabaja con líneas, superficies y volúmenes. Así pues, el programa SWUNST permite asignar cada condición de contorno a una línea determinada. Este avance nos fue de gran utilidad en las dos aplicaciones, en la modelación de la escalera de peces como en la del meandro. En este momento existen 8 entradas de condición de contorno, ya sea de caudal o de calado, pero es fácilmente ampliable.
- Se implementó la posibilidad de elección del tipo de distribución del caudal de la sección de entrada para la condición de contorno de caudal.
- Se implementó la posibilidad de elección en la entrada de datos de la condición de contorno, con calado o cota.
- Implementación de aviso en caso de que GID esté mallando elementos bidimensionales.

Cuando trabajamos con geometrías tridimensionales, GID por defecto, malla no sólo superficies, sino también elementos bidimensionales. Cuando se trabaja con muchos puntos es fácil duplicar líneas, y se favorece la aparición de líneas malladas. Cuando esto pasa, el programa SWUNST, lógicamente, calcula área nula para dichos elementos, por lo que no converge el cálculo de las ecuaciones de Navier Stokes, sin dar pistas sobre lo sucedido. Es por ello que se creyó conveniente el implantar un aviso para poder cerciorarse del problema y solventarlo a tal efecto.

- Se implementó la posibilidad de elección de las condiciones iniciales (hini=calado inicial, vini=velocidad inicial).

El programa realiza un cálculo transitorio para llegar a la solución estacionaria. Es importante una aplicación correcta de las condiciones de contorno para evitar la aparición de *warnings*, así como la demora excesiva del cálculo. Así pues, la aplicación correcta de las condiciones iniciales influye directamente en el tiempo de convergencia del programa. La posibilidad de elegir el calado inicial, por ejemplo, te permite iterar hasta converger en el calado óptimo que te permitirá también optimizar el tiempo de cálculo de un determinado caso.

**ANEJO 7. OBTENCIÓN DE CURVAS DE REMANSO A
PARTIR DE SAINT-VENANT Y BERNOULLI**

7. DEMOSTRACIÓN PREVIA A LA COMPARATIVA CON MODELO UNIDIMENSIONAL

Para realizar la validación se ha utilizado el modelo unidimensional de diferencias finitas Hec-Ras, de reconocido prestigio. Es importante ser consciente de que se pretende comparar un modelo de **diferencias finitas** que modela la **ecuación de la energía**, con un modelo de **volumen finito** que modela las ecuaciones de **Saint Venant** (conservación de la cantidad de movimiento). Es por ello que la comparativa se realiza en un canal de sección constante, donde se puede asegurar que un modelo unidimensional como Hec-Ras funciona bien.

A continuación se comparan las ecuaciones de Saint Venant con la ecuación de la Energía, llegando a la conclusión de que desarrollando ambas ecuaciones se llega por igual a la curva de remanso. De igual manera, se demuestra que Saint Venant aproxima la energía en primer orden.

Las ecuaciones de Saint Venant expresan la segunda ley de Newton aplicada a un cierto volumen de control y bajo unas hipótesis restrictivas. Para un fluido en situación estacionaria la solución debe coincidir con la obtenida mediante el uso de la ecuación de Bernoulli. Veremos que ambas ecuaciones resultan en la misma ecuación de curva de remanso y que la ecuación de Bernoulli sujeta a las hipótesis de Saint Venant resulta en una ecuación equivalente.

7.1. PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE BERNOULLI Y SAINT VENANT

Bernoulli en su forma discretizada se define como:

$$H_1 = H_2 + \Delta H$$

Ecuación 7.1

Donde H es la energía del fluido (descartando la energía interna), los subíndices indican sección 1 y sección 2, ΔH es la pérdida de energía entre ambas secciones. La energía se define como a través del trinomio de Bernoulli:

$$H = z + h + \frac{u^2}{2g}$$

Ecuación 7.2

Donde z es la cota topográfica, h el calado, u es la velocidad y g la gravedad. Podemos ver en cualquier caso que no se trata de una ecuación diferencial. Las ecuaciones de Saint Venant o shallow water en su forma unidimensional ^(x) para una sección rectangular son:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 u + g \frac{h^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f)$$

Ecuación 7.3

Donde S_0 es la pendiente geométrica, S_f es la pendiente motriz y el resto de variables tienen el sentido dado anteriormente.

7.2. DESARROLLO PARA LA OBTENCIÓN DE LAS CURVAS DE REMANSO

En este apartado veremos cuál es la curva obtenida para cada una de las ecuaciones

7.2.1. BERNOULLI

Para poder obtener la ecuación de la curva debemos escribir la ecuación en forma diferencial, utilizaremos el hecho de que el gradiente de la energía es la pendiente motriz. Al tratarse de una ecuación en régimen estacionario las derivadas son totales.

$$\frac{dH}{dx} = -S_f$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \left(z + h + \frac{u^2}{2g} \right) = -S_f$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{(hu)^2}{h^2} \right) = -S_f$$

Ecuación 7.4

Al producto hu se le denomina caudal unitario y se suele escribir como q

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} - \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h^2} \right) = -S_f$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} - \frac{q^2}{gh^3} \frac{dh}{dx} = -S_f$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dx}}_{-S_0} - S_f = -S_0 + \frac{dh}{dx} [1 - Fr^2]$$

Ecuación 7.5

Donde Fr es el número adimensional de Froude definido como:

$$\frac{u}{\sqrt{gh}}$$

Ecuación 7.6

Por lo tanto la curva de remanso resultante es:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(S_0 - S_f)}{1 - Fr^2}$$

Ecuación 7.7

7.2.2. SAINT VENANT

La ecuación de Saint Venant ya está en forma diferencial con lo cual es inmediato obtener la curva de remanso, en primer lugar consideraremos el régimen estacionario, eliminándose las derivadas temporales y pasando las espaciales a derivadas totales.

$$hu = cte$$

$$\frac{d}{dx} \left(h^2 u + g \frac{h^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f)$$

Ecuación 7.8

La ecuación de continuidad pasa a ser caudal constante.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f)$$

$$-\frac{q^2}{h^2} \frac{dh}{dx} + gh \frac{dh}{dx} = gh(S_0 - S_f)$$

$$\frac{dh}{dx} [1 - Fr^2] = (S_0 - S_f)$$

Ecuación 7.9

Y finalmente obtenemos la ecuación de curva de remanso para la ecuación del momento:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(S_0 - S_f)}{1 - Fr^2}$$

Ecuación 7.10

Podemos ver que las Ecuación 7.10 y Ecuación 7.7 son iguales, es decir las ecuaciones de Bernoulli y Saint Venant conducen a la misma ecuación de curva de remanso. La diferencia fundamental reside en el término convectivo que para Bernoulli es

$$\frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h^2} \right) = Fr^2 \frac{dh}{dx}$$

Ecuación 7.11

Y para Saint Venant es:

$$\frac{1}{gh} \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h} \right) = Fr^2 \frac{dh}{dx}$$

Ecuación 7.12

7.3. DESARROLLO PARA LA OBTENCIÓN DE SAINT VENANT EN FORMA DISCRETA

Ahora veremos cómo se puede pasar de la forma diferencial de Saint Venant a una forma integral discreta como la de Bernoulli, volveremos a trabajar con una sección rectangular en régimen estacionario.

$$\frac{d}{dx} \left(h^2 u + g \frac{h^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f)$$

Ecuación 7.13

$$\frac{\Delta}{\Delta x} \left[h^2 u + g \frac{h^2}{2} \right] = gh(S_0 - S_f)$$

$$\Delta \left[h^2 u + g \frac{h^2}{2} \right] = \Delta x gh(S_0 - S_f)$$

Ecuación 7.14

Ahora discretizamos para unas secciones 1 y 2, el calado h del término fuente debe discretizarse usando un calado medio entre la sección 1 y la dos, utilizando una aproximación de primer orden.

$$u_1^2 h_1 + g \frac{h_1^2}{2} - u_2^2 h_2 - g \frac{h_2^2}{2} = g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) (S_0 - S_f) \Delta x$$

$$\frac{2}{g} \frac{[u_1^2 h_1 - u_2^2 h_2]}{(h_1 + h_2)} + (h_1 - h_2) = (S_0 - S_f) \Delta x$$

Ecuación 7.15

$$\frac{2}{g} \frac{[u_1^2 h_1 - u_2^2 h_2]}{(h_1 + h_2)} + (h_1 - h_2) = (z_2 - z_1) + \Delta H$$

Ecuación 7.16

Ahora queda operar el término convectivo para llegar al de Bernoulli, para ello pasamos las variables de velocidad a caudal unitario:

$$\frac{2}{g} \frac{[u_1^2 h_1 - u_2^2 h_2]}{(h_1 + h_2)} = \frac{[q^2 / h_1 - q^2 / h_2]}{(h_1 + h_2)} = \frac{2q^2 (1/h_1 - 1/h_2) (1/h_1 + 1/h_2)}{g (h_1 + h_2) (1/h_1 + 1/h_2)}$$

$$\frac{2q^2 (1/h_1^2 - 1/h_2^2)}{g (h_1 + h_2) (1/h_1 + 1/h_2)} = \frac{2(u_1^2 - u_2^2)}{g(2 + h_1/h_2 + h_2/h_1)}$$

Ecuación 7.17

Si se cumplen las hipótesis de Saint Venant las líneas de corriente deben ser paralelas al fondo, por tratarse de un flujo gradualmente variado, todo ello conduce a que en

aproximación de primer orden $h_1 \approx h_2$.

$$\frac{2(u_1^2 - u_2^2)}{g(2 + h_1/h_2 + h_2/h_1)} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)}{2g}$$

Ecuación 7.18

Y ahora introduciendo la Ecuación 7.18 en la Ecuación 7.16 llegamos a:

$$\frac{(u_1^2 - u_2^2)}{2g} + (h_1 - h_2) = (z_2 - z_1) + \Delta H$$

$$H_1 = H_2 + \Delta H$$

Ecuación 7.19

Por lo tanto hemos visto que la ecuación de Bernoulli conduce a la curva de remanso asociada a Saint Venant, por otra parte se puede proceder desde Saint Venant para llegar en una aproximación de primer orden a la ecuación de Bernoulli.

En este capítulo también se incluye un estudio de calibración del esquema de segundo orden para un problema resuelto analíticamente, dando excelentes resultados. Sin embargo, en este trabajo no se ha realizado ninguna aplicación con este tipo de esquema, a pesar de su alta precisión, debido al excesivo tiempo de cómputo que requiere para las geometrías de estudio.