

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA
DE TELECOMUNICACIONS DE BARCELONA

Síntesi general i estudi de topologies de filtres Chebyshev

Autor:

Antoni Costa Bonjoch

Projecte Final de Carrera dirigit per:

Jordi Mateu Mateu

Departament de Teoria de Senyal i Comunicacions

Barcelona, Novembre 2009

Als meus pares.

Sense vosaltres res hauria estat possible.

ÍNDEX

I - INTRODUCCIÓ	2
II - GENERACIÓ I SÍNTESE DE POLINOMIS CARACTERÍSTICS	4
II.1 EL FILTRE IDEAL	4
II.1.1 Transmissió sense distorsió.....	4
II.1.2 Màxima transferència de potència en una xarxa de dos ports.....	6
II.2 CARACTERITZACIÓ DE FUNCIONS POLINÒMIQUES PER XARXES DE DOBLE TERMINACIÓ	7
II.2.1 Els polinomis característics	8
II.2.2 Normalització dels polinomis característics	11
II.2.3 Forma polinòmica de la matriu d' scattering [S] per una xarxa de dos ports.....	11
II.2.3.1 Relació entre ε i ε_R	15
II.3 SÍNTESE GENERAL DE POLINOMIS DE CHEBYSHEV	16
II.3.1 Síntesis de polinomis	17
II.3.2 Tècnica recursiva	22
II.3.3 Exemples numèrics	25
II.4 CONCLUSIONS	35
III - SÍNTESE DE RESPOSTES AVANÇADES	36
III.1 SÍNTESE DE RESPOSTES PREDISTORSIONADES	36
III.1.1 Efecte de les pèrdues.....	36
III.1.2 Descripció matemàtica de la resposta predistorsionada i obtenció dels polinomis	38
III.1.3 Exemple i comparativa dels diferents mètodes de predistorsió	40
III.2 SÍNTESE DE RESPOSTES EN FASE LINEAL.....	46
III.2.1 Optimització del retard de grup.....	46
III.2.1.1 Implementació del procés d'optimització.....	47
III.3 CONCLUSIONS	54
IV - SÍNTESE MATRICIAL	56
IV.1 SÍNTESE DE LA MATRIU $N+2$	56
IV.1.1 Matriu d'acoblaments $N+2$	56
IV.1.1.1 Síntesis de la matriu d'admitància $[Y_N]$ a partir dels polinomis i constants característiques d'un filtre.....	57
IV.1.1.2 Síntesis de la matriu d'admitància $[Y_N]$ a partir de l'anàlisi de la xarxa transversal canònica	58
IV.1.1.3 Síntesis de la matriu $[M]$ d'acoblaments transversal $N+2$	60
IV.1.2 Matriu d'acoblaments "Folded Coupling Matrix" [FCM].....	62
IV.1.3 Exemple de síntesis matricial.....	64
IV.2 CONCLUSIONS	70
V - CONCLUSIONS I LINIES FUTURES.....	72
ANNEX A – NORMES ASSOCIADES A LA CONDICIÓ UNITÀRIA D'ORTOGONALITAT	74
ANNEX B – CONJUGAT D'UN POLINOMI.....	78
ANNEX C – FACTORITZACIÓ POLINÒMICA.....	80
BIBLIOGRAFIA.....	82

I - INTRODUCCIÓ

El projecte final de carrera que es presenta a continuació s'emmarca dins el projecte *New Class of Receiver filter for Space applications* (Nova classe de filtres receptors per aplicacions espacials), que s'està desenvolupant amb l'Agència Espacial Europea (ESA).

El projecte, *New Class of Receiver filter for Space applications*, té com a objectiu principal el desenvolupament matemàtic de la síntesis de filtres amb respostes ideals tenint en compte les pèrdues inherents del material i la seva implementació en un software.

Els mètodes de síntesis estàndards es basen, principalment, en l'obtenció de la resposta freqüencial del nostre filtre mitjançant unes funcions matemàtiques ben conegudes, com són els polinomis de Butterworth i Chebyshev. Pel cas d'aplicacions en l'àmbit espacial i per freqüències de microones, aquesta formulació matemàtica es tradueix després en l'obtenció dels paràmetres [S], típicament utilitzats per caracteritzar xarxes de microones. De manera que, finalment, s'obtenen expressions polinòmiques dels paràmetres [S]. Aquestes expressions polinòmiques estan definides sense tenir en compte les pèrdues del material amb que, finalment, s'implementaran els filtres. Així, només obtenim la resposta esperada (resposta de la funció matemàtica) quan aquests filtres es construeixen amb dispositius sense pèrdues.

En els filtres de microones el paràmetre que caracteritza les pèrdues es coneix com a factor de qualitat del ressonador. Aquest paràmetre relaciona la capacitat que té el filtre d'emmagatzemar energia amb la dissipació que aquest produeix. De manera que, a la pràctica, una forma d'aconseguir dispositius amb grans factors de qualitat i respostes quasi ideals, és mitjançant l'ús d'estructures capaces d'acumular molta energia. Aquestes estructures acaben essent molt grans i poden suposar una limitació important en sistemes espacials on els requeriments de dimensions i pes són dràstics.

Les pèrdues acaben doncs afectant i degradant la resposta final del filtre. Aquesta degradació s'observa, principalment, en un arrodoniment a la banda de pas i una pèrdua de selectivitat a la banda eliminada. Per determinades aplicacions aquestes pèrdues poden ser tolerables, en canvi, en altres casos, no són assimilables i hem de treballar amb filtres molt grans i pesants.

El desenvolupament matemàtic de tècniques de síntesis que tinguin en compte les pèrdues des de l'inici permetrà obtenir, a la pràctica, filtres amb respostes quasi ideals implementats amb dispositius amb pèrdues. Les repercussions, des del punt de vista pràctic, d'aquest fet són molt importants sobretot per la reducció de les dimensions i del pes que això pot comportar.

Essencialment, existeix dues tècniques de síntesi que permeten obtenir respostes millorades tenint en compte les pèrdues. Aquestes són les tècniques de la predistorsió i de *lossy synthesis*. Tot i que els dos mètodes utilitzen aproximacions diferents ambdós estableixen com a punt de partida els polinomis de la síntesis estàndard.

El projecte final de carrera que es presenta ha contribuït en el desenvolupament genèric dels **polinomis generals de Chebyshev** per a que aquests, posteriorment, puguin ésser modificats per tal de considerar l'efecte de les pèrdues. Els polinomis generals de Chebyshev, com aquí els hem

anomenant, es diferencien dels polinomis de Chebyshev *tabulats* o convencionals en què, aquests, permeten l'obtenció de respostes freqüencials amb zeros de transmissió i respostes amb fase equalitzada. Així doncs, les funcions de Chebyshev desenvolupades i programades en Matlab seran la base per la implementació de tècniques avançades de síntesis de filtres amb pèrdues que es pretenen pel projecte amb l'Agència Espacial Europea.

A més de la implementació d'aquest polinomis de forma convencional, els hem utilitzat també per la síntesis de polinomis predistorsionats.

El projecte s'estructura en cinc capítols. Un primer capítol d'introducció, l'actual, on s'estableix el propòsit i objectius del treball seguit del nucli teòrico-pràctic del projecte constituït per tres capítols. Finalment, en el darrer capítol, es presenta les conclusions finals i les possibles línies d'actuació futures. A continuació es presenta una breu descripció de cada un d'ells.

En el capítol actual s'exposa l'objectiu del projecte i la seva contribució dins el marc del projecte *New Class of Receiver filter for Space applications* desenvolupat amb l'Agència Espacial Europea. Bàsicament, es busca una eina capaç de contemplar, des de l'inici del desenvolupament del filtre, les pèrdues introduïdes pels elements dissipadors que el constitueixen (filtre *real*). Aquest objectiu es veu accentuat en aquest cas per les restriccions, inherents en aplicacions espacials, en matèria de volum i pes.

En el capítol II es descriu el procés de generació i síntesi dels polinomis característics de filtres Chebyshev generals, nucli d'aquest projecte. Partint dels fonaments teòrics bàsics de microones s'arriba a la definició dels polinomis i constants característiques i d'aquests, s'obté finalment la forma polinòmica de la matriu d'scatterig [S]. Al llarg d'aquest procés es deriva les propietats que han de complir aquests polinomis per a que el filtre sigui realitzable. A continuació, es descriu la matemàtica associada al desenvolupament d'un mètode capaç de generar els polinomis característics d'aquests filtres a partir d'uns determinats paràmetres de disseny. La funció recursiva resultant emmascara aquesta complexitat matemàtica i la fa transparent al disseny. Finalment s'aplica aquesta tècnica recursiva a un conjunt d'exemples en base a unes determinades especificacions d'atenuació.

En el capítol III s'analitza l'efecte de les pèrdues sobre la resposta del filtre i es proposa una adaptació de la tècnica de la predistorsió en el cas dels polinomis generals de Chebyshev. Es presenta també un mètode d'optimització del retard de grup de la resposta del filtre, mitjançant els polinomis característics, per obtenir respostes amb fase lineal. Ambdós apartats venen acompanyats d'exemples detallats.

En el capítol IV s'examina la matriu d'acoblaments que representa els filtres de microones i s'obté un equivalent circuital de la xarxa a través d'una síntesi matricial. Les eines utilitzades per dur a terme aquesta síntesi han estat desenvolupades en projectes anteriors i aquí s'ha demostrat que també es poden aplicar al cas dels polinomis generals de Chebyshev. Aquestes eines permeten veure la topologia necessària per a la implementació del filtre resultant del disseny.

En el capítol V s'exposa les conclusions finals del projecte així com les línies futures que se'n deriven.

II - GENERACIÓ I SÍNTESE DE POLINOMIS CARACTERÍSTICS

Aquest capítol constitueix el nucli del projecte i descriu el procés de generació i síntesi dels polinomis característics. En el primer apartat es presenta els fonaments teòrics bàsics per arribar a la definició dels polinomis i constants característiques de filtres ideals i les propietats que han de complir aquests polinomis per tal que el filtre sigui realitzable. D'aquesta definició es pot obtenir finalment la forma polinòmica de la matriu d' scattering [S] utilitzada, típicament, per caracteritzar xarxes de microones. El segon apartat es centra en el desenvolupament matemàtic associat a la síntesi general de polinomis de Chebyshev i l'obtenció d'un mètode recursiu capaç de generar els polinomis característics a partir d'uns determinats paràmetres de disseny (pèrdues de retorn, ordre del filtre i zeros de transmissió). Aquesta funció *separa* la part matemàtica, inherent al procés de síntesi general de polinomis de Chebyshev, de la part pròpiament de disseny del filtre. La part final es dedica a aplicar aquesta tècnica recursiva a un conjunt d'exemples en base a unes determinades especificacions d'atenuació.

II.1 EL FILTRE IDEAL

II.1.1 Transmissió sense distorsió

Un senyal es caracteritza per l'amplitud i la fase dels seus components freqüencials coneguts com a *forma d'ona* del senyal.

Un filtre és un sistema capaç de rebutjar els components de senyal no desitjats i permetre el pas sense distorsió del senyal desitjat. En els sistemes de comunicació es pretén, idealment, que els filtres transmetin i atenuïn els senyals en una banda freqüencial específica amb la mínima distorsió i pèrdua d'energia del senyal transmès.

L'interval de freqüències corresponents al senyal rebutjat es coneix com banda atenuada mentre que els components freqüencials del senyal desitjat es corresponen amb la banda de pas del filtre.

Per tal d'obtenir una transmissió sense distorsió s'ha de preservar la *forma d'ona*, és a dir, el senyal de sortida ha de ser una rèplica exacta del senyal d'entrada. Això només es pot assolir si el filtre té una amplitud i retard constants per a qualsevol freqüència de la banda de pas.

Fora de la banda de pas és la banda atenuada l'encarregada d'atenuar tots els components freqüencials, idealment, sense banda de transició i amb atenuació infinita.

Com a exemple de filtre ideal es mostra la funció d'atenuació d'un filtre pas baix (Figura II.1) que presenta una resposta en amplitud tipus mur o paret, és a dir, una atenuació infinita i una banda de transició nul·la.

La resposta d'aquesta funció incompleix la condició de causalitat [1] ja que existeix per valors de temps negatius. Una funció causal comença a un determinat valor de temps finit, per exemple $t=0$, i presenta valors nuls per $t<0$.

La condició de causalitat comporta dues restriccions fonamentals per a les funcions dels filtres:

1. La funció que caracteritza l'amplitud d'un filtre pot ser zero per freqüències discretes, però no es pot anul·lar en una banda finita de freqüències.
2. La funció que caracteritza l'amplitud d'un filtre no pot decaure a zero més ràpid que una funció d'ordre exponencial.

Aquestes dues condicions impliquen que no pot existir una banda de transició nul·la.

Tenint en compte que no és possible assolir les condicions del filtre ideal és necessari relaxar-les, de forma que, la distorsió introduïda sobre el senyal que es vol conservar i les condicions d'eliminació dels components indesitjats siguin tolerables en l'aplicació que es duu a terme.

En la Figura II.2 es pot observar les especificacions pràctiques d'un filtre pas baix real. El mòdul de la resposta freqüencial s'especifica mitjançant la funció d'atenuació **(II.1)**, definida com:

$$\alpha(\omega) = -10 \log \left[|H(j\omega)| / H \right]^2 \quad \text{(II. 1)}$$

on H és un valor de referència. Es tolera una atenuació màxima α_p **(II.2)** en la banda de pas, una atenuació mínima α_a **(II.3)** en la banda atenuada i s'estableix una banda de transició (ω_p, ω_a) entre les bandes de pas i atenuada, amb l'objectiu de permetre l'adaptació de l'atenuació als límits imposats en ambdues bandes. Resumint, l'atenuació ha de complir

$$\alpha(\omega) \leq \alpha_p \quad |\omega| \leq \omega_p \quad \text{(II. 2)}$$

$$\alpha(\omega) \geq \alpha_a \quad |\omega| \geq \omega_a \quad \text{(II. 3)}$$

Aquestes especificacions de l'atenuació es poden descriure qualitativament mitjançant els conceptes de discriminació i selectivitat. Un filtre té major capacitat de discriminar entre banda de pas i atenuada quan més gran sigui la diferència entre α_a i α_p . Es diu que un filtre és més selectiu com més estreta és la banda de transició. No obstant, la selectivitat no és funció de l'amplada $B_\omega = \omega_a - \omega_p$ de la banda de transició, sinó del quocient ω_a / ω_p .

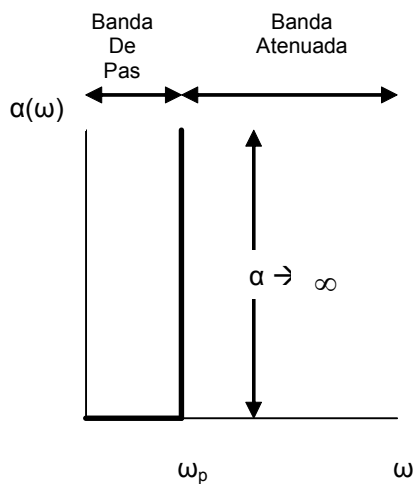


Figura II.1 Funció d'atenuació Filtre Ideal

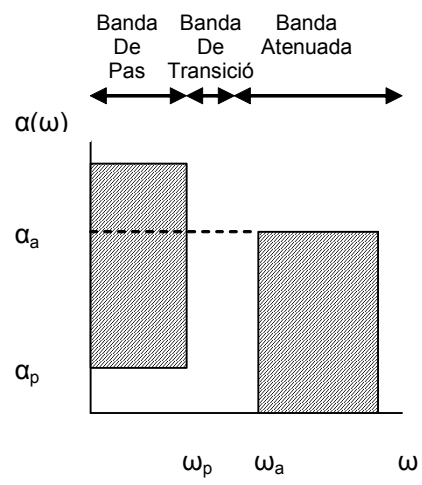


Figura II.2 Especificacions pràctiques Filtre

II.1.2 Màxima transferència de potència en una xarxa de dos ports

Típicament els sistemes de comunicació es construeixen connectant en cascada xarxes de dos ports. L'energia es transfereix des de la font a la càrrega a través de transductors lineals com per exemple amplificadors, moduladors, filtres o cables. Els amplificadors i moduladors són components inherentment no lineals però es controla la seva operació per tal que treballin dins el rang de linealitat assumint un mínim acceptable de no linealitat.

A la pràctica es pretén que tota la potència disponible sigui transmesa a cada etapa per tal d'obtenir el màxim nivell de senyal-soroll al sistema. Per tal d'assolir aquesta condició s'examina la següent xarxa ideal sense pèrdues connectada entre la font i la càrrega com mostra la Figura II.3.

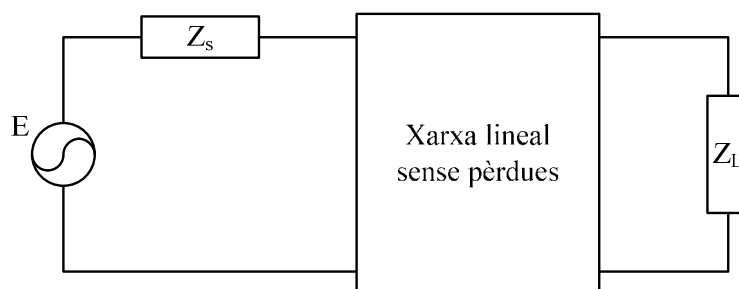


Figura II.3 Transferència de potència en una xarxa de dos ports

La potència disponible d'una font es defineix com la màxima potència que es pot arribar a extreure. La màxima potència disponible d'una font amb impedància interna Z_S , s'obté quan la càrrega connectada als seus terminals és el complex conjugat de Z_S . És a dir, si $Z_S = R_S + j \cdot X_S$ llavors $Z_L = R_S - j \cdot X_S$ per a obtenir la màxima transferència de potència.

Així, la potència disponible a la font és $E^2/4R_S$. La potència entregada a la càrrega es maximitza si la impedància de sortida de la xarxa de dos ports és el conjugat de Z_S . Cal remarcar que la potència disponible depèn només de la component resistiva de la font. De forma similar la potència màxima que pot ser entregada a la càrrega depèn només de la seva component resistiva. Això porta a considerar xarxes de dos ports sense pèrdues acabades amb resistors d'igual valor a cada port, com aquelles amb que s'implementen els filtres per sistemes de comunicacions. Ens referirem a aquestes xarxes com xarxes de doble terminació.

II.2 CARACTERITZACIÓ DE FUNCIONS POLINÒMIQUES PER XARXES DE DOBLE TERMINACIÓ

En la síntesi convencional de filtres es desenvolupa el prototip pas baix sense pèrdues normalitzats en termes de freqüència i impedància i acabats amb resistors d'igual valor [2]-[5]. Escalant en freqüència i amplitud és possible obtenir un filtre sobre qualsevol rang de freqüències i nivells d'impedància. Aquest fet simplifica el disseny de filtres pràctics independentment del seu rang freqüencial i de la seva realització física. El prototipus pas baix es normalitza a una freqüència de tall unitària (1 rad/s) i amb resistors d'1 Ω . La freqüència de tall unitària delimita la banda de pas d' $\omega = 0$ fins a $\omega = 1$.

Tal i com s'ha descrit anteriorment, la condició de causalitat implica que no és possible tenir pèrdues nul·les sobre la totalitat de la banda de pas. Tanmateix, si que es pot no tenir pèrdues en un nombre finit de freqüències. Aquestes freqüències es coneixen com *zeros de reflexió*, i en aquests punts, no es reflexa potència, i per tant, no hi ha pèrdues. Conseqüentment, tots els zeros de reflexió del filtre es concentren a la banda de pas. És més, el valor de les màximes pèrdues de reflexió sobre la banda de pas s'usa com a paràmetre de disseny del filtre. La utilització d'elements sense pèrdues simplifica el procés de síntesi.

La Figura II.4 il·lustra una xarxa de dos ports sense pèrdues acabada amb resistors. Aquesta xarxa representa un filtre amb màxima transferència de potència.

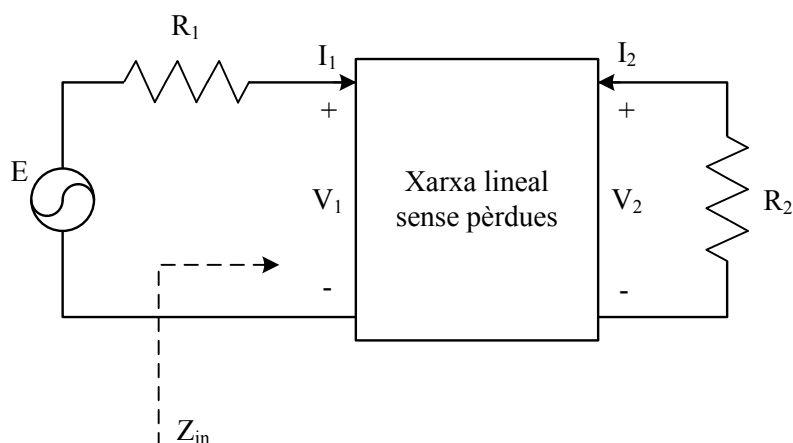


Figura II.4 Xarxa de transmissió sense pèrdues amb doble terminació

La màxima potència disponible $P_{m\grave{a}x}$ de la font ideal de voltatge E és $E^2/4R_1$. La potència P_2 , lliurada a la càrrega R_2 , és $|V_2|^2/R_2$. Per tant:

$$\frac{P_{\max}}{P_2} = \left| \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{E}{V_2} \right| = \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{E}{V_2} \right| \quad \text{per } R_1 = R_2 \quad (\text{II. 4})$$

En una xarxa de dos ports passiva i sense pèrdues, P_2 pot ser només menor o igual a P_{\max} . Per aquest tipus de xarxa és adequat definir la **funció característica** $K(s)$ per [6] i [7]:

$$\frac{P_{\max}}{P_2} = 1 + |K(s)|_{s=j\omega}^2 \quad (\text{II. 5})$$

Per l'exemple de circuit passiu, lineal i invariant en el temps considerat en aquest cas, $K(s)$ és una funció racional en s amb coeficients reals. La relació P_{\max}/P_2 es defineix com la **funció de transferència** $H(s)$, on:

$$|H(s)|_{s=j\omega}^2 = 1 + |K(s)|_{s=j\omega}^2 \quad (\text{II. 6})$$

$H(s)$ es coneix també com *funció de transductància* i es pot expressar alternativament com:

$$H(s) \cdot H(-s) = 1 + K(s) \cdot K(-s) \quad (\text{II. 7})$$

ja que totes les funcions de la xarxa són racionals en s i amb coeficients reals. En la caracterització del polinomi $K(s)$ s'haurà de considerar els coeficients de reflexió i transmissió del circuit prototipus.

II.2.1 Els polinomis característics

En la teoria de línies de transmissió el coeficient de reflexió ρ es defineix com:

$$\rho(s) = \pm \frac{\text{ona reflectida}}{\text{ona incident}} \quad (\text{II. 8})$$

El signe de ρ és positiu quan es defineix en termes de voltatge i esdevé negatiu quan es defineix en termes de corrent. El signe negatiu reflecteix que la direcció del corrent de l'ona reflectida és l'oposada al de l'ona incident.

Per la xarxa sense pèrdues de la Figura II.4 i agafant com a referència P_{\max} o màxima potència disponible, el coeficient de reflexió en termes de potència ve donat per:

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{\text{potència reflectida}}{\text{potència disponible}} = \frac{P_r}{P_{\max}} \quad (\text{II. 9})$$

on P_r representa la potència reflectida. Ja que la suma de la potència reflectida i de la potència lliurada a la càrrega resistiva R_2 o potència transmesa ha de ser igual a la potència disponible s'obté:

$$\frac{\text{potència reflectida}}{\text{potència disponible}} + \frac{\text{potència transmesa}}{\text{potència disponible}} = 1 \quad (\text{II. 10})$$

o el que és el mateix:

$$|\rho(j\omega)|^2 + |t(j\omega)|^2 = 1 \quad (\text{II. 11})$$

on $t(s)$ es defineix com el coeficient de transmissió i representa la relació entre l'ona transmesa i l'ona incident:

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{\text{potència transmesa}}{\text{potència disponible}} = \frac{P_2}{P_{\max}} = 1 - |\rho(j\omega)|^2 \quad (\text{II. 12})$$

De la teoria de línies de transmissió [6] el coeficient de reflexió ρ per una xarxa de dos ports ve donat per:

$$\rho(s) = \frac{Z_{in}(s) - R_1}{Z_{in}(s) + R_1} = \frac{z_{in}(s) - 1}{z_{in}(s) + 1}, \quad \text{on} \quad z_{in}(s) = \frac{Z_{in}(s)}{R_1} \quad (\text{II. 13})$$

Es demostra [8] que la impedància d'entrada de la xarxa és una funció real positiva i la seva impedància normalitzada z es pot expressar com:

$$z(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (\text{II. 14})$$

on $n(s)$ i $d(s)$ representen els polinomis numerador i denominador, respectivament, i $z(s)$ és una funció real positiva [6]. Per tant:

$$\rho(s) = \frac{z(s) - 1}{z(s) + 1} = \frac{n(s) - d(s)}{n(s) + d(s)} = \frac{F(s)}{E(s)} \quad (\text{II. 15})$$

Tenint en compte que $z(s)$ és una funció real positiva es pot derivar que:

1. El denominador polinòmic $n(s) + d(s) = E(s)$ ha de ser un polinomi de Hurwitz, per tant totes les seves arrels han d'estar localitzades a la part esquerra del pla- s .
2. El numerador polinòmic $n(s) - d(s) = F(s)$ pot o no pot ser un polinomi de Hurwitz. Els coeficients polinòmics, però, han de ser reals i, conseqüentment, les seves arrels han de ser reals o a l'origen o en parells complexos conjugats.

La magnitud de ρ , al llarg de l'eix imaginari, ve donada per:

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{F(s) \cdot F^*(s)}{E(s) \cdot E^*(s)} \quad (\text{II. 16})$$

on els asteriscs indiquen el complex conjugat de les respectives funcions. És més, per $s = j\omega$, $F^*(s) = F(-s)$ i $E^*(s) = E(-s)$ i per tant:

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{F(s) \cdot F(-s)}{E(s) \cdot E(-s)} \quad (\text{II. 17})$$

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{E(s) \cdot E(-s) - F(s) \cdot F(-s)}{E(s) \cdot E(-s)} = \frac{P(s) \cdot P(-s)}{E(s) \cdot E(-s)} \quad (\text{II. 18})$$

on $P(s) \cdot P(-s) = E(s) \cdot E(-s) - F(s) \cdot F(-s)$. Expressar la part dreta de l'equació (II.18) com $P(s) \cdot P(-s)$ només està justificat en el cas que es tracti d'un quadrat perfecte, és a dir, que el patró de les arrels presenta una simetria quadrangular i les arrels en l'eix imaginari tenen multiplicitat parella. És implícit que $F(s)$ i $P(s)$ han d'estar normalitzats per tal de garantir que la potència transmesa és menor o igual a la potència disponible.

Ens referirem als polinomis $P(s)$, $F(s)$ i $E(s)$ com els *polinomis característics*. Les propietats d'un filtre prototipus pas baix es resumeixen a continuació [7]:

1. $P(s)$ és un polinomi purament parell amb coeficients reals. Les seves arrels romanen al llarg de l'eix imaginari en parells conjugats. Aquestes arrels representen freqüències per a les que no existeix potència transmesa i les pèrdues del filtre són infinites. A aquestes freqüències sovint se les anomena *zeros de transmissió* o *pols d'atenuació*. Les arrels poden ser també parells conjugats en l'eix real o una quàdrupla complexa en el pla- s . Aquest tipus d'arrels duu a filtres amb fase lineal (filtres de fase no mínima).
2. $F(s)$ és un polinomi amb coeficients reals i les seves arrels es troben al llarg de l'eix imaginari en parells conjugats. $F(s)$ pot tenir múltiples arrels només a l'origen. Les arrels representen freqüències a les quals no es reflecteix potència, sovint anomenades *zeros de reflexió*. A aquestes freqüències les pèrdues del filtre són nul·les i $F(s)$ és un polinomi purament parell o imparell (amb coeficients no nuls per les potències parells o imparells).
3. $E(s)$ és un polinomi estrictament de Hurwitz i, conseqüentment, totes les seves arrels es troben localitzades en el semiplà esquerra del pla s .

Per tant, en termes de polinomis característics s'obté:

$$\rho(s) = \frac{F(s)}{E(s)} \quad i \quad t(s) = \frac{P(s)}{E(s)} \quad (\text{II. 19})$$

Cal remarcar que en termes de paràmetres d' scattering els coeficients de reflexió i transmissió són equivalents a S_{11} i S_{21} , respectivament, representats per [8]:

$$\begin{aligned}\rho(s) &\equiv S_{11}(s) \\ t(s) &\equiv S_{21}(s)\end{aligned}\tag{II. 20}$$

II.2.2 Normalització dels polinomis característics

Sense pèrdua de generalitat, es pot introduir unes constants arbitràries ε i ε_R i restablir les relacions anteriors (II.19) com:

$$\rho(s) = \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \quad i \quad t(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)}\tag{II. 21}$$

En el procés de síntesi, els polinomis $P(s)$ i $F(s)$ es normalitzen de forma que els coeficients de major grau siguin unitaris. Això s'aconsegueix extraient el coeficient de major grau dels polinomis característics i representant-lo com un factor constant que divideix el numerador. Així, ε s'usa per normalitzar $P(s)$ i ε_R per normalitzar $F(s)$ de forma que $|\rho(s)|$ i $|t(s)|$ siguin iguals o inferiors a la unitat per qualsevol valor d' s .

Les constants reals ε_R i ε es determinen avaluant $\rho(s)$ i $t(s)$, respectivament, per un valor oportú d' $s=x$, on $|\rho(x)|$ i $|t(x)|$ són coneguts. Més endavant es veurà com calcular les constants normalitzadores ε i ε_R .

II.2.3 Forma polinòmica de la matriu d'scattering [S] per una xarxa de dos ports

Per la majoria de filtres s'acostuma a considerar inicialment una xarxa de dos ports; un "port font" i un "port càrrega" (Figura II.5).

Per una xarxa de dos ports, la matriu d'scattering es representa segons una matriu 2 x 2:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\tag{II. 22}$$

On b_1 i b_2 són les ones de potència que es propaguen cap a fora dels ports 1 i 2, respectivament, i a_1 i a_2 són les ones de potència incident en els ports 1 i 2, respectivament.

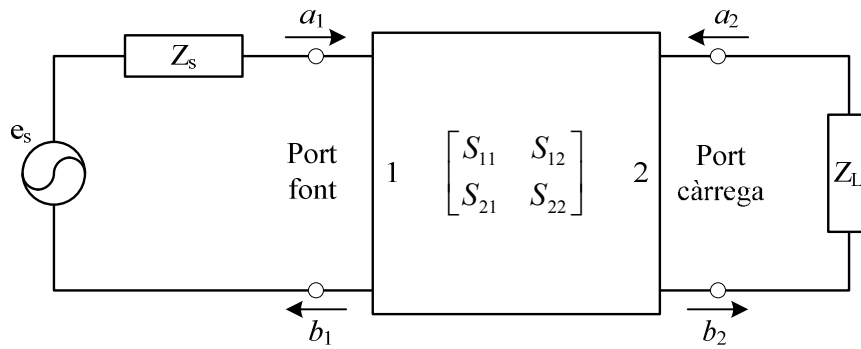


Figura II.5 Xarxa de dos ports

Si la xarxa és passiva, sense pèrdues, i recíproca, la seva matriu de paràmetres S duu a dues equacions de conservació d'energia:

$$S_{11}(s) \cdot S_{11}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{21}(s)^* = 1 \tag{II. 23}$$

$$S_{22}(s) \cdot S_{22}(s)^* + S_{12}(s) \cdot S_{12}(s)^* = 1 \tag{II. 24}$$

i a una única equació d'ortogonalitat:

$$S_{11}(s) \cdot S_{12}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{22}(s)^* = 0 \tag{II. 25}$$

on els paràmetres S s'assumeix que són funcions d' s ($= j\omega$), la variable en freqüència.

Tal i com s'ha vist anteriorment (equació II.18), la funció de reflexió $S_{11}(s)$ al port 1 de la xarxa pot ser expressada com el quocient de dos polinomis de grau finit $E(s)$ i $F(s)$, i una constant real ϵ_R :

$$S_{11}(s) \equiv \rho(s) = \frac{F(s)/\epsilon_R}{E(s)} \tag{II. 26}$$

on $E(s)$ és un polinomi de grau N amb coeficients complexos e_0, e_1, \dots, e_N i on $F(s)$ és també un polinomi de grau N amb coeficients complexos f_0, f_1, \dots, f_N . ϵ_R permet la normalització dels polinomis característics $F(s)$ i $E(s)$, això és, permet que els coeficients de major grau de cada polinomi siguin unitaris ($e_N = 1$ i $f_N = 1$). Tenint en compte que és una xarxa passiva sense pèrdues, $E(s)$ és estrictament de Hurwitz, i conseqüentment, totes les arrels d' $E(s)$ [pols de $S_{11}(s)$] romanen en el semiplà esquerra del pla complex. Aquests pols no tenen perquè ser simètrics respecte l'eix real. $F(s)$, el numerador polinòmic de $S_{11}(s)$ és també de grau N per filtres pas baix i pas banda. Per filtres de banda eliminada el grau del polinomi $F(s)$ pot ser menor que N . Les arrels d' $F(s)$ [zeros de $S_{11}(s)$] són punts de potència reflectida zero ($b_i = 0$) o punts de transmissió perfecta.

Reorganitzant l'equació (II. 23) i substituint $S_{11}(s)$, s'obté:

$$S_{21}(s)S_{21}(s)^* = 1 - \frac{F(s) \cdot F(s)^* / \varepsilon_R^2}{E(s) \cdot E(s)^*} = \frac{P(s) \cdot P(s)^* / \varepsilon^2}{E(s) \cdot E(s)^*} \quad (\text{II. 27})$$

I per tant, la funció de transferència $S_{21}(s)$ es pot expressar també com el quocient entre dos polinomis:

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} \quad (\text{II. 28})$$

on

$$\frac{P(s) \cdot P(s)^*}{\varepsilon^2} = E(s) \cdot E(s)^* - \frac{F(s) \cdot F(s)^*}{\varepsilon_R^2} \quad (\text{II. 29})$$

De les equacions (II. 26) i (II. 28) es pot observar que:

- $S_{11}(s)$ i $S_{21}(s)$ comparteixen un denominador comú $E(s)$.
- Els zeros del polinomi $P(s)/\varepsilon$ numerador d' $S_{21}(s)$ són els zeros de transmissió del filtre.
- El grau n_{fz} del polinomi $P(s)$ correspon al nombre finit de zeros de transmissió que incorpora la funció de transferència. Aquest fet comporta que $n_{fz} \leq N$, altrament $S_{21}(s)$ excediria la unitat per $s \rightarrow j\infty$, el que no és possible en una xarxa passiva.

Un zero de transmissió pot ser realitzat de dues maneres diferents:

- El primer cas és quan el grau n_{fz} de $P(s)$ és menor que el grau N del polinomi denominador $E(s)$ i $s \rightarrow j\infty$. A $s = j\infty$, $S_{21}(s) = 0$, i això es coneix com *zero de transmissió a l'infinít*. Quan no existeix zeros de transmissió finita ($n_{fz} = 0$), la funció del filtre es coneix com *all-pole response*. Quan $0 < n_{fz} < N$, el nombre de zeros de transmissió a infinit és $N - n_{fz}$.
- El segon cas esdevé quan la variable en freqüència s coincideix amb una arrel en l'eix imaginari del numerador polinòmic $P(s)$, és a dir, $s = s_{0i}$, on s_{0i} és una arrel purament imaginària de $P(s)$. Els zeros no han d'estar necessàriament en l'eix imaginari, i si existeix una arrel s_{0i} , que és complexa, ha d'haver-hi una segona arrel $-s_{0i}^*$ per formar una parella i tenir simetria respecte l'eix imaginari. Així es garanteix que el polinomi $P(s)$ té coeficients que alternen entre purament reals i purament imaginaris a mesura que la potència d's augmenta. Aquesta és una condició que s'ha de preservar si es vol que el filtre pugui ser realitzable amb components purament reactius.

Considerant la condició unitària d'ortogonalitat (II. 25) es demostra que (Annex A):

1. El numerador polinòmic d' $S_{22}(s)$, $F_{22}(s)$, es pot obtenir a partir del producte dels zeros conjugats negatius d' $F(s)$ o a partir del conjugat del polinomi $F(s)$ multiplicat per -1 quan N és un enter imparell.

2. Quan els coeficients de major grau dels polinomis de grau N , $E(s)$ i $F(s)$ i el polinomi de grau $n_{fz} (\leq N)$ es normalitzen a la unitat (polinomis mònics) el polinomi $P(s)$ s'ha de multiplicar per j quan la quantitat entera $(N - n_{fz})$ és parella.

La primera norma duu a:

$$F_{22}(s) = (-1)^N \cdot F(s)^* \tag{II. 30}$$

La segona norma porta a que el polinomi $P(s)$ s'ha de multiplicar per j per mantenir la condició unitària d'ortogonalitat en els casos descrits en la Taula II.1 .

N	n_{fz}	$N - n_{fz}$	<i>Multiplicar $P(s)$ per j</i>
IMPARELL	IMPARELL	PARELL	<i>Si</i>
IMPARELL	PARELL	IMPARELL	<i>No</i>
PARELL	IMPARELL	IMPARELL	<i>No</i>
<i>PARELL</i>	<i>PARELL</i>	<i>PARELL</i>	<i>Si</i>

Taula II.1 Multiplicació de $P(s)$ per j per satisfer la condició d'ortogonalitat

A la pràctica els polinomis $E(s)$, $F(s)$ i $P(s)$ es construeixen, normalment, a partir dels productes de les seves singularitats, com $F(s) = \prod_{i=1}^N (s - s_{11i})$; així que els coeficients de major grau són automàticament unitaris en la majoria dels casos.

Si s'aplica la condició unitària d'ortogonalitat a la matriu d'scattering s'obté:

$$\begin{aligned}
 F(s)P(s)^* + P(s)F_{22}(s)^* &= 0 && \text{Per } (N - n_{fz}) \text{ imparell} \\
 F(s)[j \cdot P(s)^*] + [j \cdot P(s)]F_{22}(s)^* &= 0 && \text{Per } (N - n_{fz}) \text{ parell} \\
 F(s)P(s)^* - P(s)F_{22}(s)^* &= 0 && o \\
 F(s)P(s)^* - (-1)^{(N-n_{fz})} \cdot P(s)F_{22}(s)^* &= 0 && \text{Per } (N - n_{fz}) \text{ imparell o parell}
 \end{aligned}
 \tag{II. 31}$$

que és representada en la següent matriu d'scattering $[S]$:

$$\begin{bmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{E(s)} \begin{bmatrix} \frac{F(s)}{\varepsilon_R} & \frac{P(s)}{\varepsilon} \\ \frac{P(s)}{\varepsilon} & \frac{F_{22}(s)}{\varepsilon_R} \end{bmatrix}
 \tag{II. 32}$$

Substituint (II. 30) en (II. 32) els polinomis que representen la matriu $[S]$ es poden reescriure com:

$$\begin{bmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{E(s)} \begin{bmatrix} \frac{F(s)}{\varepsilon_R} & \frac{P(s)}{\varepsilon} \\ \frac{P(s)}{\varepsilon} & \frac{(-1)^N F(s)^*}{\varepsilon_R} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 33})$$

Així s'arriba a què la forma polinòmica de la matriu d'scattering $[S]$ per una xarxa de dos ports és la presentada en (II. 33) on el polinomi $P(s)$ s'ha de multiplicar per j en els casos descrits en la Taula II.1 .

II.2.3.1 Relació entre ε i ε_R

Anteriorment s'ha observat que les funcions de transferència i reflexió $S_{21}(s)$ i $S_{11}(s)$ es poden definir en termes de polinomis característics

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)}, \quad S_{11}(s) = \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \quad (\text{II. 34})$$

on ε i ε_R són constants reals normalitzadores de $P(s)$ i $F(s)$ tal que $|S_{21}(s)|$ i $|S_{11}(s)|$ són ≤ 1 per a qualsevol valor d' s . S'assumeix que el coeficient de major grau dels tres polinomis és unitari i que, a més, quan $(N - n_{fz})$ és parell, el polinomi $P(s)$ s'ha multiplicat per j per tal de preservar la condició unitària d'ortogonalitat, tal i com s'ha vist amb anterioritat.

La constant real ε es determina avaluant $P(s)/E(s)$ a un valor adequat d' s , on $|S_{21}(s)|$ i $|S_{11}(s)|$ són coneguts. Així, el nivell màxim per $|S_{21}(s)|$ és 1, i, si $n_{fz} < N$, $|S_{21}(s)| = 0$ a l'infinít ($s = \pm j\infty$).

La conservació d'energia implica que per $|S_{21}(s)| = 0$:

$$S_{11}(j\infty) = \frac{1}{\varepsilon_R} \left| \frac{F(j\infty)}{E(j\infty)} \right| = 1 \quad (\text{II. 35})$$

En el cas de filtres pas baix i pas banda el grau del polinomi $F(s)$ és N (pot ser $< N$ per filtres de banda eliminada). Així, en filtres pas baix i pas banda, tenint en compte que els coeficients de major grau dels polinomis $E(s)$ i $F(s)$ (e_s i f_s) són unitaris és senzill deduir que $\varepsilon_R = 1$. Si $n_{fz} = N$, és a dir, quan tots els zeros de transmissió disponibles estan en posicions finites del pla complex i, conseqüentment, $P(s)$ és un polinomi de grau N (funció plenament canònica), aleshores l'atenuació a $s = \pm j\infty$ és finita i ε_R s'obté de l'equació de conservació d'energia (II. 23) com:

$$S_{11}(j\infty) \cdot S_{11}(j\infty)^* + S_{21}(j\infty) \cdot S_{21}(j\infty)^* = 1 \quad (\text{II. 36})$$

$$\frac{F(j\infty) \cdot F(j\infty)^*}{\varepsilon_R^2 \cdot E(j\infty) \cdot E(j\infty)^*} + \frac{P(j\infty) \cdot P(j\infty)^*}{\varepsilon^2 \cdot E(j\infty) \cdot E(j\infty)^*} = 1$$

En el cas totalment canònic, $P(s)$, $F(s)$ i $E(s)$ són polinomis mòncics de grau N , així, a $s = \pm j\infty$, s'obté:

$$\frac{1}{\varepsilon_R^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \quad o \quad \varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (\text{II. 37})$$

que és lleugerament més gran que la unitat ja que $\varepsilon > 1$.

És força senzill derivar que, pel cas totalment canònic, les pèrdues d'inserció a $s = \pm j\infty$ són:

$$IL = S_{21}(\pm j\infty) = \frac{1}{\varepsilon} = 20 \log_{10}(\varepsilon) \text{ dB} \quad (\text{II. 38})$$

i que les pèrdues de retorn són:

$$RL = S_{11}(\pm j\infty) = \frac{1}{\varepsilon_R} = 20 \log_{10}(\varepsilon_R) \text{ dB} \quad (\text{II. 39})$$

II.3 SÍNTESIS GENERAL DE POLINOMIS DE CHEBYSHEV

L'objectiu d'aquest apartat és arribar, a partir del que hem vist fins ara, a la definició dels polinomis característics $P(s)$, $F(s)$ i $E(s)$. Els polinomis generals de Chebyshev es diferencien dels polinomis de Chebyshev tabulats de filtres convencionals, pel fet que, aquests, permeten la implementació de respostes freqüencials amb zeros de transmissió i respostes amb fase equalitzada.

Donades unes determinades especificacions d'atenuació (plantilla Figura II.6) es pot comprovar ràpidament que, a igualtat d'ordre ($N=8$), el filtre Chebyshev convencional no és capaç de complir-les. Contràriament, la flexibilitat de poder escollir la localització dels zeros de transmissió otorga al model general una capacitat d'adaptació difícilment igualable. Si es volgués obtenir una resposta convencional amb una selectivitat semblant a la del model general de l'exemple s'hauria quasi de duplicar l'ordre del filtre ($N=15$).

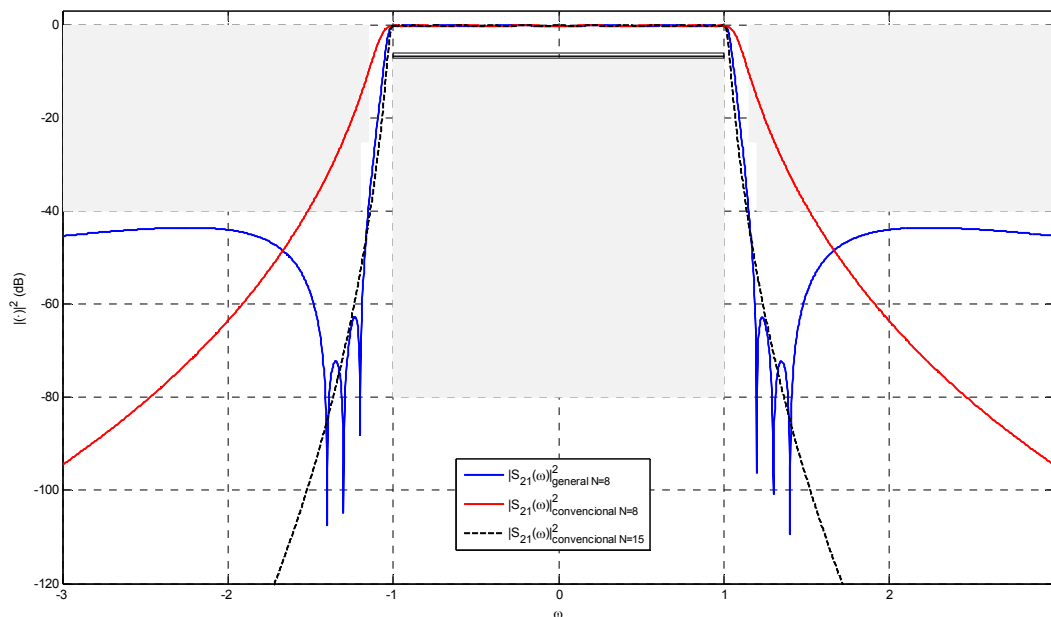


Figura II.6 Filtre Chebyshev convencional d'ordre 8 ($N=8$) vs Filtre Chebyshev General d'ordre 8

II.3.1 Síntesi de polinomis

Per tal de simplificar la matemàtica es treballarà en el pla ω , on ω és la variable de freqüència real relacionada amb la variable de freqüència complexa s per l'expressió $s = j\omega$.

Per qualsevol filtre sense pèrdues de dos ports constituït per una sèrie d' N ressonadors acoblats, les funcions de transferència i reflexió es poden expressar com a quocient de dos polinomis de grau N

$$S_{11}(\omega) = \frac{F(\omega) / \varepsilon_R}{E(\omega)}, S_{21}(\omega) = \frac{P(\omega) / \varepsilon}{E(\omega)} \quad (\text{II. 40})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \left| \frac{P(\omega)}{F(\omega) / \varepsilon_R} \right|_{\omega=\pm 1} \quad (\text{II. 41})$$

on RL és el nivell de pèrdues de retorn amb dB a $\omega = \pm 1$.

S'assumeix que els polinomis $P(\omega)$, $F(\omega)$ i $E(\omega)$ estan normalitzats, és a dir, els seus coeficients de major grau són la unitat. $S_{11}(\omega)$ i $S_{21}(\omega)$ comparteixen un denominador comú $E(\omega)$, i que el polinomi $P(\omega) = \prod_{n=1}^{n_{fz}} (\omega - \omega_n)$ conté n_{fz} zeros de transmissió de posició finita en la funció de transferència ($P(\omega)=1$ per $n_{fz}=0$). Per un filtre de Chebyshev ε és una constant de normalització d' $S_{21}(\omega)$ per a un arrissat constant a $\omega = \pm 1$.

Tenint en compte que, per definició, una funció de Chebyshev té tots els zeros de reflexió en l'eix real del pla ω , la fórmula de pols alternatius [8] per a una xarxa sense pèrdues, és:

$$S_{21}(\omega)S_{21}(\omega)^* = \frac{P(\omega)P(\omega)^*}{\varepsilon^2 E(\omega)E(\omega)^*} = \frac{1}{\left[1 - j \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} k C_N(\omega)\right] \left[1 + j \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} k C_N(\omega)^*\right]} \quad (\text{II. 42})$$

on $kC_N(\omega) = \frac{F(\omega)}{P(\omega)}$ i k és una constant (k és una constant normalitzadora que s'ha afegit per remarcar que, en general, els polinomis de $C_N(\omega)$ tenen els coeficients de màxim grau diferents de la unitat, mentre que els polinomis $P(\omega)$ i $F(\omega)$, en aquest treball, s'assumeix que són mòncics).

$C_N(\omega)$ és la funció del filtre de grau N , i els seus pols i zeros són les arrels de $P(\omega)$ i $F(\omega)$ respectivament. Per la característica general de Chebyshev, $C_N(\omega)$, té la forma següent [9]:

$$C_N(\omega) = \cosh \left[\sum_1^N \cosh^{-1}(x_n(\omega)) \right] \quad (\text{II. 43a})$$

o, utilitzant la identitat $\cosh \theta = \cos j\theta$, l'expressió anterior pot ésser expressada com:

$$C_N(\omega) = \cos \left[\sum_1^N \cos^{-1}(x_n(\omega)) \right] \quad (\text{II. 44b})$$

on $x_n(\omega)$ és una funció de la variable de freqüència ω . Per tal d'analitzar $C_N(\omega)$, utilitzarem l'equació (II.43a) per a $|\omega| \geq 1$ i l'equació (II.43b) per a $|\omega| \leq 1$.

Per a representar correctament una funció de Chebyshev, $x_n(\omega)$ ha de complir les següents propietats:

- A $\omega = \omega_n$, on ω_n és un zero de transmissió de posició finita o ω_n és a una freqüència infinita ($\omega_n = \pm\infty$), $x_n(\omega) = \pm\infty$
- A $\omega = \pm 1$, $x_n(\omega) = \pm 1$
- Entre $\omega = -1$ i $\omega = 1$ (*in-band*), $1 \geq x_n(\omega) \geq -1$

La primera condició es satisfà si $x_n(\omega)$ és una funció racional amb denominador $\omega - \omega_n$:

$$x_n(\omega) = \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_n} \quad (\text{II.44})$$

La segona condició implica que a $\omega = \pm 1$

$$x_n(\omega) \Big|_{\omega=\pm 1} = \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_n} \Big|_{\omega=\pm 1} = \pm 1 \quad (\text{II. 45})$$

Aquesta condició es satisfà si $f(1) = 1 - \omega_n$ i $f(-1) = 1 + \omega_n$. D'aquí que $f(\omega) = 1 - \omega\omega_n$, obtenint

$$x_n(\omega) = \frac{1 - \omega\omega_n}{\omega - \omega_n} \tag{II. 46}$$

Si es diferencia $x_n(\omega)$ respecte ω , s'observa que no existeix cap *turning point* o punt d'inflexió entre $\omega = -1$ i $\omega = 1$. Si $x_n(\omega) = -1$ a $\omega = -1$ i $x_n(\omega) = 1$ a $\omega = 1$, implica que $|x_n(\omega)| \leq 1$ mentre $|\omega| \leq 1$, satisfent la tercera condició. La Figura II.7 il·lustra el comportament d' $x_n(\omega)$ amb un zero de transmissió finit a $\omega_n = +1.4$.

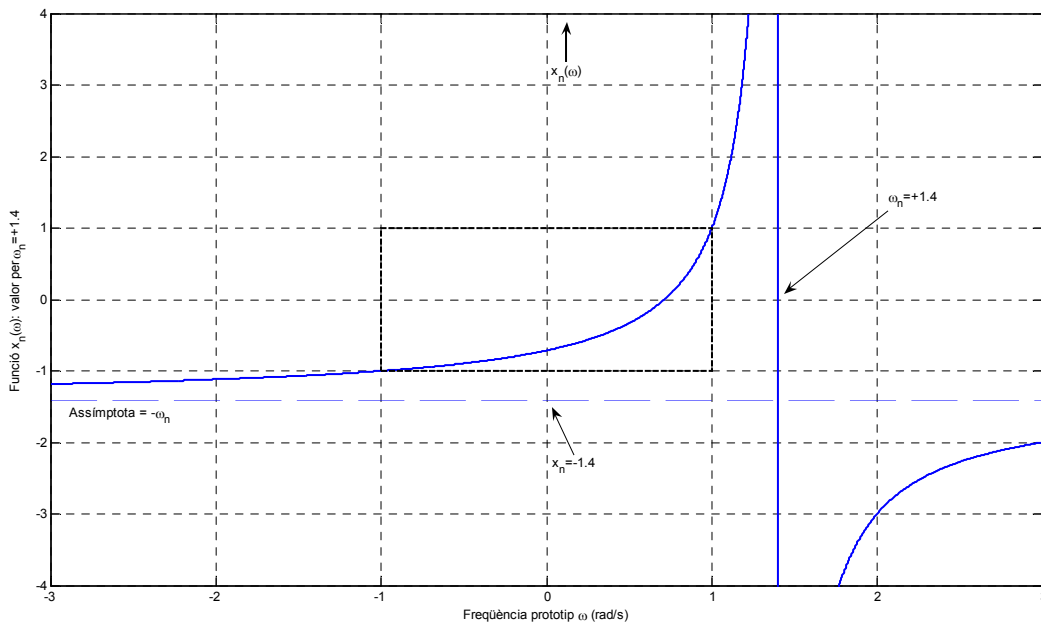


Figura II.7 Funció $x_n(\omega)$ en el pla ω amb un zero de transmissió a $\omega_n = +1.4$

Dividint entre ω_n per tal de trobar algun zero de transmissió a $\omega_n = \pm\infty$, s'obté la forma final de la funció $x_n(\omega)$

$$x_n(\omega) = \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \tag{II. 47}$$

En l'equació (II.47), $\omega_n = s_n/j$ és la posició del zero de transmissió enèsim en el pla complex de la freqüència i es pot deduir de les equacions (II.45) i (II.46) que $C_N(\omega)|_{\omega=\pm 1} = 1$. Quan $|\omega| < 1$, $C_N(\omega) < 1$, i quan $|\omega| > 1$, $C_N(\omega) > 1$, cada una de les quals és condició necessària per una resposta de

Chebyshev. Cal tenir en compte que, a mesura que N dels zeros de transmissió ω_n s'aproxima a infinit, $C_N(\omega)$ degenera cap a una funció de Chebyshev pura:

$$C_N(\omega)|_{\omega_n \rightarrow \infty} = \cosh\left[N \cosh^{-1}(\omega)\right] \quad (\text{II. 48})$$

A l'hora d'assenyalar la posició dels zeros de transmissió és important preservar la simetria de l'eix imaginari ($j\omega$) del pla complex s per tal que es mantingui les condicions unitàries.

El següent pas és resoldre l'equació (II.43a) per tal de determinar els coeficients del numerador del polinomi $C_N(\omega)$.

Per començar a sintetitzar el polinomi cal substituir el terme \cosh^{-1} de l'equació (II.43a) per la seva identitat:

$$C_N(\omega) = \cosh\left[\sum_1^N \ln(a_n + b_n)\right] \quad (\text{II. 49})$$

on

$$a_n = x_n(\omega) \quad i \quad b_n = (x_n^2(\omega) - 1)^{1/2} \quad (\text{II. 50})$$

Així s'obté

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \left[e^{\sum \ln(a_n + b_n)} + e^{-\sum \ln(a_n + b_n)} \right] = \frac{1}{2} \left[\prod_{n=1}^N (a_n + b_n) + \frac{1}{\prod_{n=1}^N (a_n + b_n)} \right] \quad (\text{II. 51})$$

Multiplicant el numerador i denominador del segon terme de l'equació (II.51) per $\prod_{n=1}^N (a_n - b_n)$, ens duu a

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \left[\prod_{n=1}^N (a_n + b_n) + \prod_{n=1}^N (a_n - b_n) \right] \quad (\text{II. 52})$$

De l'equació (II.50) es pot deduir fàcilment que $\prod_{n=1}^N (a_n + b_n) \cdot \prod_{n=1}^N (a_n - b_n) = \prod_{n=1}^N (a_n^2 - b_n^2)$ sempre serà igual a la unitat.

Per tal d'expressar l'equació (II.52) en la seva forma final, es substitueix a_n , b_n i $x_n(\omega)$ utilitzant les equacions (II.47) i (II.50)

$$a_n = \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{(\omega - 1/\omega_n)^2 - (1 - \omega/\omega_n)^2}}{1 - \omega/\omega_n} = \frac{\sqrt{(\omega^2 - 1)(1 - 1/\omega_n^2)}}{1 - \omega/\omega_n} = \frac{\omega' \sqrt{(1 - 1/\omega_n^2)}}{1 - \omega/\omega_n} \quad (\text{II. 53})$$

on $\omega' = \sqrt{(\omega^2 - 1)}$ és una variable de freqüència transformada.

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{\prod_{n=1}^N \left[(\omega - 1/\omega_n) + \sqrt{(1 - 1/\omega_n^2)} \omega' \right] + \prod_{n=1}^N \left[(\omega - 1/\omega_n) - \sqrt{(1 - 1/\omega_n^2)} \omega' \right]}{\prod_{n=1}^N (1 - \omega/\omega_n)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\prod_{n=1}^N (c_n + d_n) + \prod_{n=1}^N (c_n - d_n)}{\prod_{n=1}^N (1 - \omega/\omega_n)} \right] \quad (\text{II. 54})$$

on

$$c_n = \left(\omega - \frac{1}{\omega_n} \right) \quad i \quad d_n = \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_n^2}}$$

Comparant-la amb l'equació (II.42), es pot observar que el denominador de $C_N(\omega)$ té els mateixos zeros que $P(\omega)$, polinomi numerador d' $S_{21}(\omega)$ generat pels zeros de transmissió assenyalats ω_n . De l'equació (II.42) es pot veure, també, que el numerador de $C_N(\omega)$ té els mateixos zeros que el numerador $F(\omega)$ d' $S_{11}(\omega)$, i sembla ser una barreja de dos polinomis de grau finit, un de variable ω pura i l'altre amb els coeficients multiplicats per la variable transformada ω' .

No obstant això, els coeficients multiplicats per ω' es cancel·len mútuament. Tot seguit se'n pot veure una breu demostració multiplicant els termes de la part esquerra i dreta del numerador de $C_N(\omega)$ a l'equació (II.54) per a uns valors d' N determinats:

$$\text{Per } N=1, \quad \text{Num}[C_1(\omega)] = \frac{1}{2} \left[\prod_{n=1}^1 (c_n + d_n) + \prod_{n=1}^1 (c_n - d_n) \right] = c_1$$

$$\text{Per } N=2, \quad \text{Num}[C_2(\omega)] = c_1 c_2 + d_1 d_2$$

$$\text{Per } N=3, \quad \text{Num}[C_3(\omega)] = (c_1 c_2 + d_1 d_2) c_3 + (c_2 d_1 + c_1 d_2) d_3$$

....

Els factors resultants contenen únicament nombres parells d'elements d_n . Conseqüentment, $\omega' = \sqrt{(\omega^2 - 1)}$, que és un multiplicador comú a tots els elements d_n [equació II.54], es veu afectada exclusivament per potències parelles generant subpolinomis en la variable ω . Com a resultat d'aquest fet, el numerador de $C_N(\omega)$ serà un polinomi només en la variable ω .

II.3.2 Tècnica recursiva

El numerador de l'equació (II.54) es pot escriure com:

$$\text{Num}[C_N(\omega)] = \frac{1}{2} [G_N(\omega) + G'_N(\omega)] \quad (\text{II. 55})$$

on

$$G_N(\omega) = \prod_{n=1}^N [c_n + d_n] = \prod_{n=1}^N \left[(\omega - 1/\omega_n) + \omega' \sqrt{(1 - 1/\omega_n^2)} \right] \quad (\text{II. 56a})$$

$$G'_N(\omega) = \prod_{n=1}^N [c_n - d_n] = \prod_{n=1}^N \left[(\omega - 1/\omega_n) - \omega' \sqrt{(1 - 1/\omega_n^2)} \right] \quad (\text{II. 56b})$$

El mètode per obtenir els coeficients de $\text{Num}[C_N(\omega)]$ és una tècnica recursiva, on la solució de grau n es construeix a partir dels resultats de grau $(n-1)$.

Es pot expressar el polinomi $G_N(\omega)$ com a suma de dos polinomis auxiliars $U_N(\omega)$ i $V_N(\omega)$, on $U_N(\omega)$ conté únicament els coeficients dels termes de la variable ω , mentre que cada coeficient del polinomi $V_N(\omega)$ està multiplicat per la variable transformada ω'

$$G_N(\omega) = U_N(\omega) + V_N(\omega)$$

on

$$U_N(\omega) = u_0 + u_1\omega + u_2\omega^2 + \dots + u_N\omega^N \quad (\text{II. 57})$$

$$V_N(\omega) = \omega'(v_0 + v_1\omega + v_2\omega^2 + \dots + v_N\omega^N)$$

El cicle de recursivitat s'inicia amb els termes corresponents al primer zero de transmissió assenyalat ω_1 , fixant $N=1$ en les equacions (II.56a) i (II.57):

$$G_1(\omega) = [c_1 + d_1] = \left(\omega - \frac{1}{\omega_1} \right) + \omega' \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_1^2} \right)} = U_1(\omega) + V_1(\omega) \quad (\text{II. 58})$$

Segons l'equació (II.56a) el segon zero assenyalat ve donat per:

$$G_2(\omega) = G_1(\omega) \cdot [c_2 + d_2] = [U_1(\omega) + V_1(\omega)] \cdot \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_2} \right) + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_2^2}} \right] = U_2(\omega) + V_2(\omega) \quad (\text{II. 59})$$

Multiplicant els termes de l'equació anterior i tornant a agrupar els termes purs en ω a $U_2(\omega)$ i els termes multiplicats per ω' en $V_2(\omega)$, i tenint en compte que $\omega' V_N(\omega)$ resulta en $(\omega^2 - 1) \cdot (v_0 + v_1 \omega + v_2 \omega^2 + \dots + v_n \omega^n)$ [equació II.57], un polinomi pur en ω , d'aquí que es pugui agrupar en $U_n(\omega)$:

$$U_2(\omega) = \omega U_1(\omega) - \frac{U_1(\omega)}{\omega_2} + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_2^2}} V_1(\omega) \quad (\text{II. 60a})$$

$$V_2(\omega) = \omega V_1(\omega) - \frac{V_1(\omega)}{\omega_2} + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_2^2}} U_1(\omega) \quad (\text{II. 60b})$$

Després d'obtenir aquests polinomis $U_2(\omega)$ i $V_2(\omega)$ el cicle es repeteix amb el tercer zero, i amb tots els següents fins a N (incloent aquells a $\omega_n = \infty$), utilitzant específicament $(N-1)$ cicles.

Si es repeteix el mateix procés per $G'_N(\omega) = U'_N(\omega) + V'_N(\omega)$ [equació II.56b], s'arriba a $U'_N(\omega) = U_N(\omega)$ i $V'_N(\omega) = -V_N(\omega)$. Amb aquest resultat i de les equacions (II.55) i (II.57) s'obté:

$$\text{Num}[C_N(\omega)] = \frac{1}{2} [G_N(\omega) + G'_N(\omega)] = \frac{1}{2} ((U_N(\omega) + U'_N(\omega)) + (V_N(\omega) + V'_N(\omega))) = U_N(\omega) \quad (\text{II. 61})$$

L'equació (II.61) demostra que el numerador de $C_N(\omega)$ [que té els mateixos zeros que $F(\omega)$] és igual a $U_N(\omega)$ després de $(N-1)$ cicles d'aquest mètode recursiu. Així, es pot obtenir els zeros d' $F(\omega)$ trobant les arrels d' $U_N(\omega)$.

Així, roman trobar encara $E(\omega)$, el polinomi denominar d' $S_{11}(\omega)$ i $S_{21}(\omega)$ per completar el disseny de la funció del filtre.

Si dos dels tres polinomis són coneguts, en aquest cas $P(\omega)$ i $F(\omega)$, el tercer, $E(\omega)$, es pot extraure de l'equació de conservació de l'energia (II.23):

$$S_{11}(s)S_{11}(s)^* + S_{21}(s)S_{21}(s)^* = 1 \quad \text{o} \quad \frac{F(s)F(s)^*}{\varepsilon_R^2} + \frac{P(s)P(s)^*}{\varepsilon^2} = E(s)E(s)^* \quad (\text{II. 62})$$

La part esquerra de l'equació (II.62) es construeix a base de multiplicacions polinòmiques per tal de trobar el polinomi $E(s)E(s)^*$, que ha de ser una quantitat escalar. Això implica que les $2N$ arrels d' $E(s)E(s)^*$ han de formar una patró simètric al voltant de l'eix imaginari del pla complex per tal que a qualsevol freqüència s el producte $E(s)E(s)^*$ sigui un escalar.

Tenint en compte que les arrels d' $E(s)$ són estrictament de Hurwitz, aquelles arrels d' $E(s)E(s)^*$ que es troben en el semiplà esquerra han de pertànyer a $E(s)$ i les corresponents al semiplà dret a $E(s)^*$. Escollint ara les N arrels corresponents al semiplà esquerra es pot formar el polinomi $E(s)$.

La Figura II.8 mostra un diagrama de flux d'una possible organització del procediment explicat per trobar els polinomis característics $F(s)$, $P(s)$ i $E(s)$ d'un filtre Chebyshev.

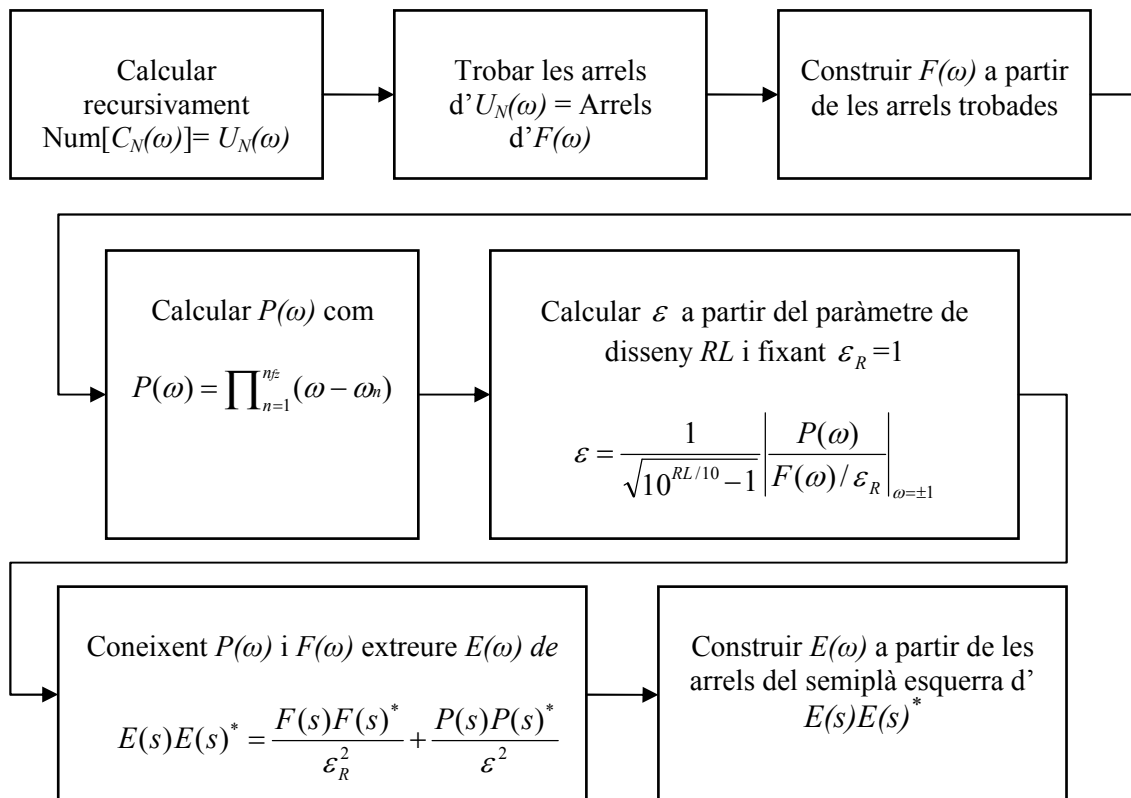


Figura II.8 Diagrama de flux per trobar $F(s)$, $P(s)$ i $E(s)$ d'un filtre Chebyshev

II.3.3 Exemples numèrics

◆ EXEMPLE 1

Per il·lustrar el procediment s'aplica el mètode recursiu a un exemple d'ordre 4 ($N=4$) amb un nivell de pèrdues de retorn de $RL=22dB$ i zeros de transmissió a $+j1.3217$ i $+j1.8082$, escollits per tal de generar dos lòbuls d'atenuació de $30dB$ cada un d'ells en la zona alta de la banda de pas.

Inicialitzant l'equació (II.58) amb $\omega_1=1.3217$ s'obté:

$$G_1(\omega) = [c_1 + d_1] = \left(\omega - \frac{1}{\omega_1}\right) + \omega' \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_1^2}\right)} = U_1(\omega) + V_1(\omega) = -0.7566 + \omega + \omega'(0.6539)$$

$U(\omega)$ conté els coeficients de la variable ω mentre que $V(\omega)$ ha de contenir aquells coeficients multiplicats per la variable transformada ω' . Agrupant els diferents termes s'arriba a:

$$U_1(\omega) = -0.7566 + \omega$$

$$V_1(\omega) = \omega'(0.6539)$$

Ara, s'avalua l'equació (II.59) a $\omega_2=1.8082$ obtenint

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= G_1(\omega) \cdot [c_2 + d_2] = [U_1(\omega) + V_1(\omega)] \cdot \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_2}\right) + \omega' \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_2^2}\right)} \right] = \\ &= U_2(\omega) + V_2(\omega) = -0.1264 - 1.3096\omega + 1.5448\omega^2 + \omega'(-0.9920 + 1.4871\omega) \\ \text{Agrupant :} \\ U_2(\omega) &= -0.1264 - 1.3096\omega + 1.5448\omega^2 \\ V_2(\omega) &= \omega'(-0.9920 + 1.4871\omega) \end{aligned}$$

i després del segon cicle, amb $\omega_3 = \infty$

$$\begin{aligned} G_3(\omega) &= G_2(\omega) \cdot [c_3 + d_3] = [U_2(\omega) + V_2(\omega)] \cdot \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_3}\right) + \omega' \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_3^2}\right)} \right] = \\ &= U_3(\omega) + V_3(\omega) = 0.9920 - 1.6134\omega - 2.3016\omega^2 + 3.0319\omega^3 + \omega'(-0.1264 - 2.3016\omega + 3.0319\omega^2) \\ \text{Agrupant :} \\ U_3(\omega) &= 0.9920 - 1.6134\omega - 2.3016\omega^2 + 3.0319\omega^3 \\ V_3(\omega) &= \omega'(-0.1264 - 2.3016\omega + 3.0319\omega^2) \end{aligned}$$

Finalment, després del tercer cicle, i amb $\omega_4 = \infty$ s'obté

$$G_4(\omega) = G_3(\omega) \cdot [c_4 + d_4] = [U_3(\omega) + V_3(\omega)] \cdot \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_4} \right) + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_4^2}} \right] = U_4(\omega) + V_4(\omega) =$$

$$= 0,1264 - 3,2936\omega - 4,7717\omega^2 - 4,6032\omega^3 + 6,0637\omega^4 + \omega'(0,9920 - 1,7398\omega - 4,6032\omega^2 + 6,0637\omega^3)$$

Agrupant :

$$U_4(\omega) = 0,1264 - 3,2936\omega - 4,7717\omega^2 - 4,6032\omega^3 + 6,0637\omega^4$$

$$V_4(\omega) = \omega'(0,9920 - 1,7398\omega - 4,6032\omega^2 + 6,0637\omega^3)$$

Una vegada acabat l'últim cicle del mètode recursiu i aplicant l'equació (II.61) s'arriba a:

$$\text{Num}[C_4(\omega)] = U_4(\omega)$$

Ara, es pot construir el polinomi característic $F(\omega)$ calculant les arrels d' $U_4(\omega)$ que són equivalents a les d' $F(\omega)$

$$F(\omega) = \omega^4 - 0.7592\omega^3 - 0.7869\omega^2 + 0.5432\omega + 0.0208$$

Recordant la relació existent entre la funció de reflexió del filtre $S_{11}(\omega)$ i el polinomi $F(\omega)$ (equació II.40) es pot observar que les arrels d' $U_4(\omega)$ són els N in-band zeros de la funció de reflexió $S_{11}(\omega)$ i que les arrels del polinomi $V_4(\omega)$ són els $N-1$ in-band punts de reflexió màxima.

El polinomi $P(\omega)$ s'obté de $P(\omega) = \prod_{n=1}^{n_{fz}} (\omega - \omega_n)$, on n_{fz} és el nombre de zeros de transmissió de posició finita, en aquest cas $n_{fz}=2$ ($\omega_1 = +j1.3217$ i $\omega_2 = +j1.8082$). D'aquí que

$$P(\omega) = \prod_{n=1}^{n_{fz}} (\omega - \omega_n) = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = (\omega - j1.3217)(\omega - j1.8082) = \omega^2 - j3.1299\omega - 2.3899$$

Resta multiplicar el polinomi $P(\omega)$ anterior per j per tal de satisfer la condició d'ortogonalitat (Taula II.1 amb $N=4$ parell, $n_{fz}=2$ parell i $N-n_{fz}=2$ parell), obtenint finalment

$$P(\omega) = [jP(\omega)] = j\omega^2 + 3.1299\omega - j2.3899$$

Sabent que les pèrdues de retorn són $RL=22dB$ i fixant $\epsilon_R=1$, es pot calcular ϵ a partir de (II.41)

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \left| \frac{P(\omega)}{F(\omega)/\epsilon_R} \right|_{\omega=\pm 1} = 1.1547$$

Coneguts dos dels tres polinomis característics es pot calcular el restant, $E(\omega)$, aplicant la condició de conservació de l'energia

$$\frac{F(s)F(s)^*}{\epsilon_R^2} + \frac{P(s)P(s)^*}{\epsilon^2} = E(s)E(s)^*$$

Aquelles arrels d' $E(s)E(s)^*$ que es troben en el semiplà esquerra han de pertànyer a $E(s)$ ja que són estrictament de Hurwitz i les corresponents al semiplà dret a $E(s)^*$ (Figura II.9).

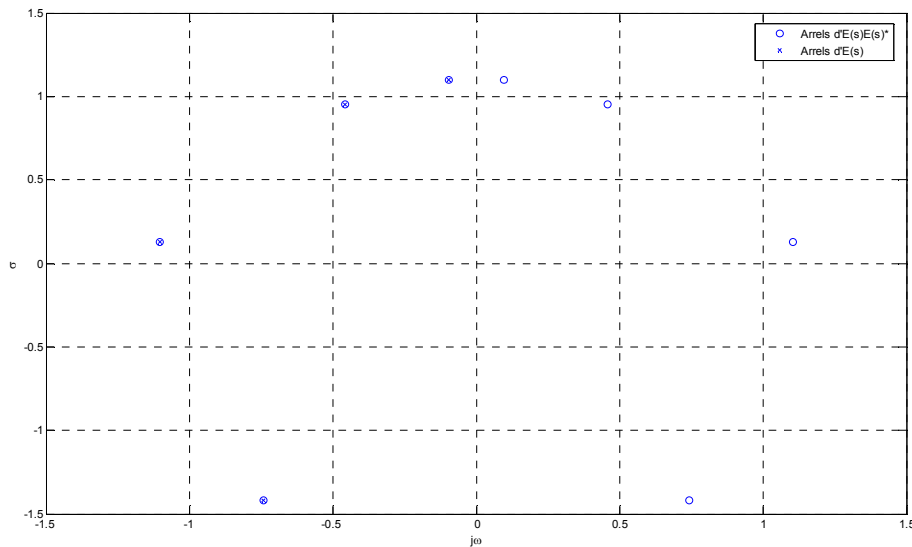


Figura II.9 Arrels d' $E(s)E(s)^*$ i arrels d' $E(s)$

Finalment, escollint les N arrels corresponents al semiplà esquerra es pot formar el polinomi $E(s)$.

$$E(\omega) = \omega^4 + (2.4015 - j0.7592)\omega^3 + (3.6705 - j2.1951)\omega^2 + (2.4873 - j3.6256)\omega - (0.1268 + j2.0658)$$

En aquest punt es disposa de tota la informació per calcular la funció de reflexió i transferència del filtre, és a dir, $S_{11}(\omega)$ i $S_{21}(\omega)$ respectivament

$$S_{11}(\omega) = \frac{F(\omega) / \epsilon_R}{E(\omega)} \quad i \quad S_{21}(\omega) = \frac{P(\omega) / \epsilon}{E(\omega)}$$

Zeros de reflexió [Arrels d' $U_4(\omega)$]	Punts de reflexió màxima [Arrels de $V_4(\omega)$]
-j0.8593	-j0.4936
-j0.0365	+j0.3796
+j0.6845	+j0.8732
+j0.9705	-

Taula II.2 Zeros de reflexió i punts de reflexió màxima d' $S_{11}(\omega)$

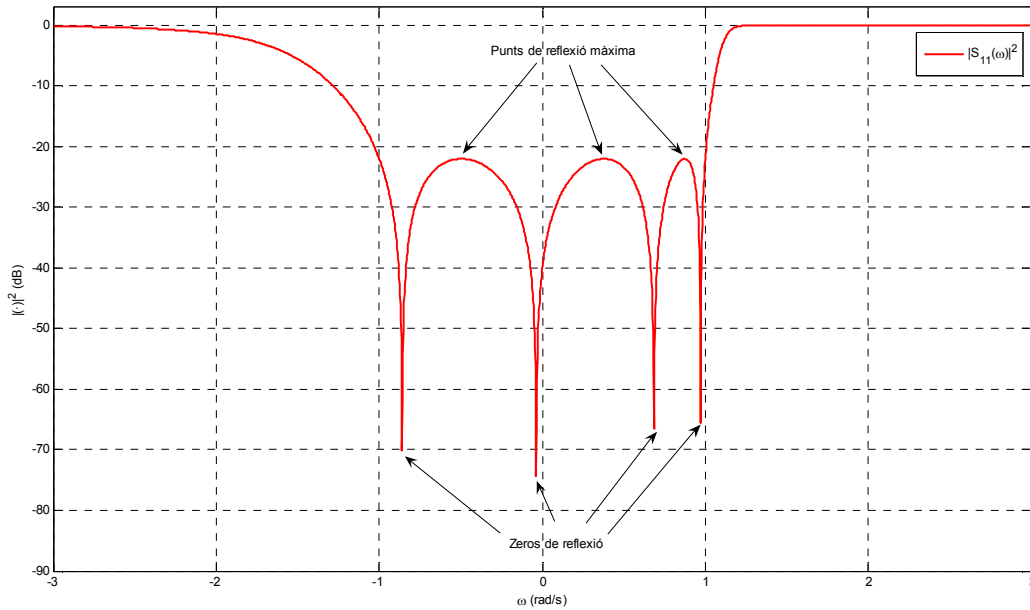


Figura II.10 Zeros de reflexió (arrels d' $U_4(\omega)$) i punts de reflexió màxima (arrels de $V_4(\omega)$)

En la taula adjunta (Taula II.3) es presenta els valors dels coeficients dels polinomis característics i les coordenades en el pla s dels seus zeros

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$
0	$-j2.3899$	$+0.0208$	$-0.1268 - j2.0658$
1	$+3.1299$	$-j0.5432$	$+2.4873 - j3.6256$
2	$+j1.0$	$+0.7869$	$+3.6705 - j2.1951$
3		$-j0.7592$	$+2.4015 - j0.7592$
4		$+1,0$	$+1,0$
\mathcal{E}		1.1547	
\mathcal{E}_R		1.0000	

Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
$+j1.8082$	$-j0.8593$	$-0.7437 - j1.4178$
$+j1.3217$	$+j0.9705$	$-1.1031 + j0.1267$
	$+j0.6845$	$-0.4571 + j0.9526$
	$-j0.0365$	$-0.0977 + j1.0976$

Taula II.3 Polinomis característics i arrels d'un filtre Chebyshev d'ordre 4 amb zeros a $+j1.3217$ i $+j1.8082$

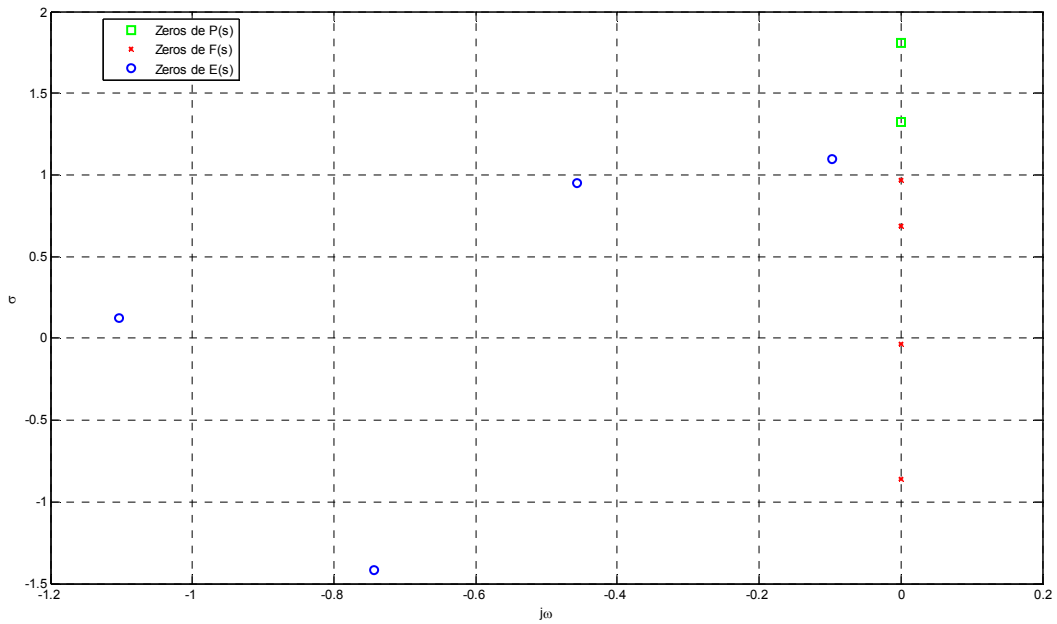


Figura II.11 Representació gràfica de les arrels dels polinomis característics $P(s)$, $F(s)$ i $E(s)$

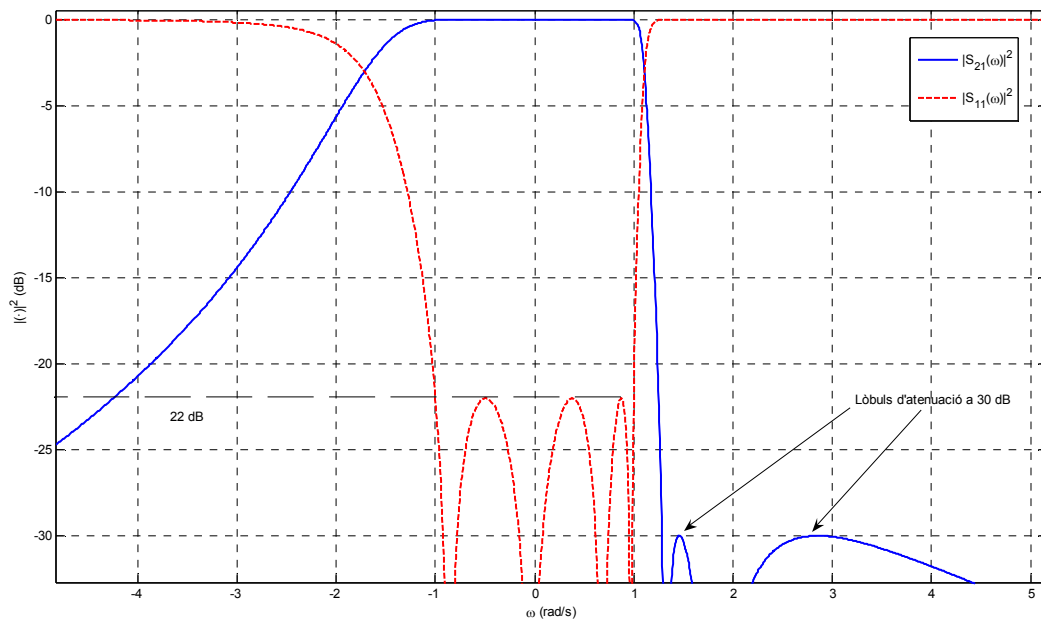


Figura II.12 Funció de transferència i reflexió del prototipus pas baix d'un filtre Chebyshev asimètric (4-2)

◆ EXEMPLE 2

Es planteja ara el disseny d'un filtre de freqüència central $f_0=4GHz$ i d'amplada de banda $BW=36Mhz$. La freqüència de tall inferior i superior són respectivament f_1 i f_2

$$f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} = 3.982Ghz$$

$$f_2 = f_0 + \frac{BW}{2} = 4.018Ghz$$

S'opta per un filtre simètric d'ordre 6 ($N=6$) amb un nivell de pèrdues de retorn de 22dB i zeros de transmissió a $+j1.6 +j1.3 -j1.3 -j1.6$. A continuació es presenta els polinomis característics del filtre i les seves arrels en el pla-s (Taula II.4).

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
0	$j \cdot 4.3264$	0.0587	0.7391	$j \cdot 1.6000$	$j \cdot 0.9788$	$-0.0750 + j \cdot 1.0699$
1	0	0	2.0956	$j \cdot 1.3000$	$j \cdot 0.7836$	$-0.3101 + j \cdot 0.9441$
2	$j \cdot 4.2500$	0.7451	3.7517	$-j \cdot 1.3000$	$-j \cdot 0.9788$	$-0.6757 + j \cdot 0.4405$
3	0	0	4.3774	$-j \cdot 1.6000$	$-j \cdot 0.7836$	$-0.6757 - j \cdot 0.4405$
4	$j \cdot 1.0000$	1.6717	3.9223	$j\infty$	$j \cdot 0.3159$	$-0.0750 - j \cdot 1.0699$
5	0	0	2.1216	$-j\infty$	$-j \cdot 0.3159$	$-0.3101 - j \cdot 0.9441$
6	0	1.0000	1			
ϵ			5.8724			
ϵ_R			1.0000			

Taula II.4 Polinomis característics per un filtre Chebyshev d'ordre 6 amb zeros a $+j1.6 +j1.3 -j1.3 -j1.6$

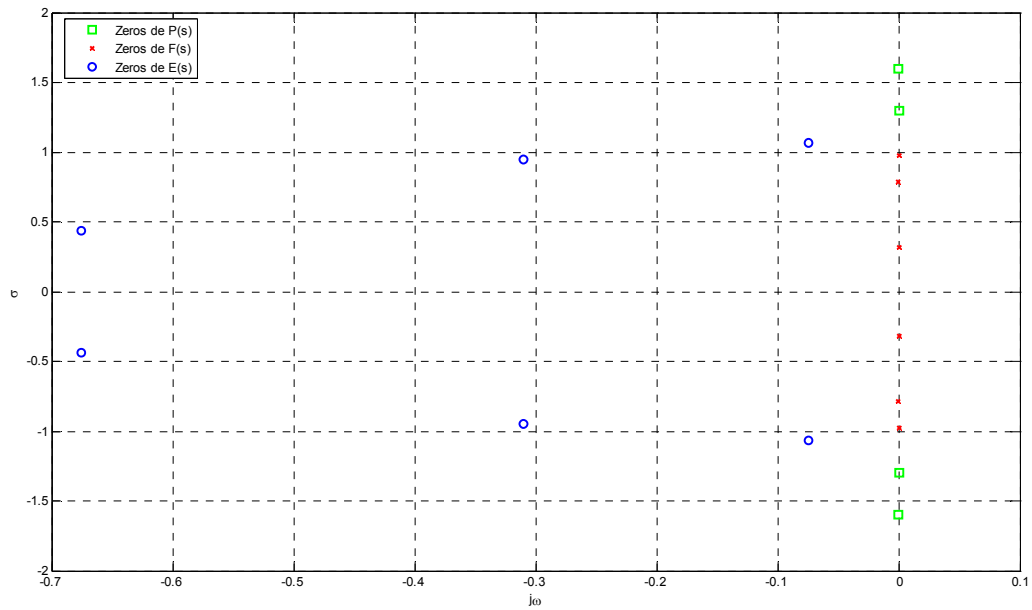


Figura II.13 Arrels dels polinomis característics d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=6$ amb zeros a $+j1.6 +j1.3 -j1.3 -j1.6$

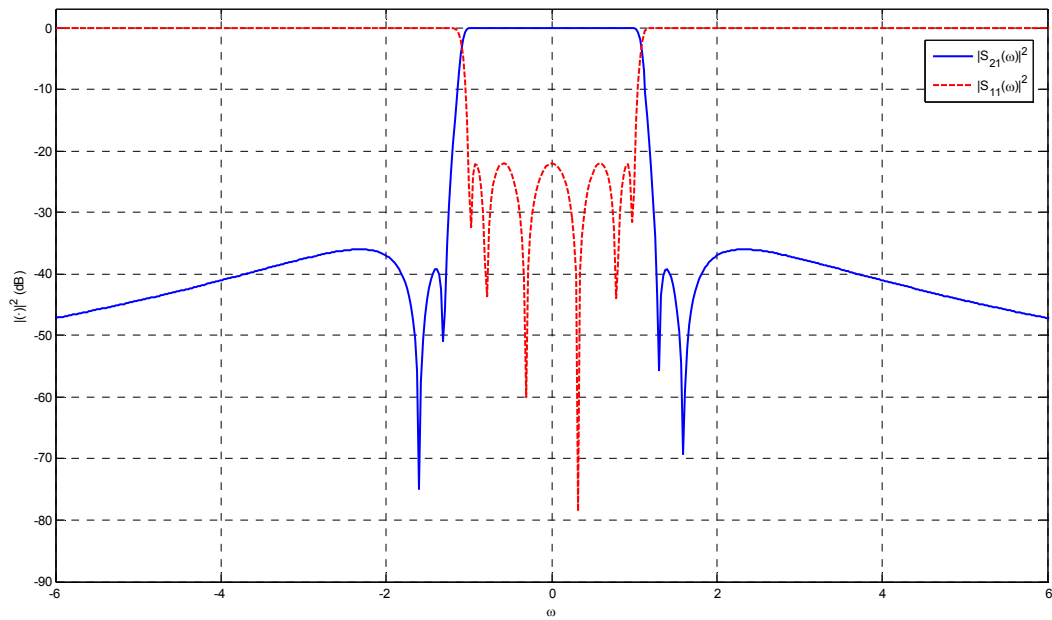


Figura II.14 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev simètric $N=6$ amb zeros a $+j1.6 +j1.3 -j1.3 -j1.6$

◆ EXEMPLE 3

Imaginem ara que, partint de l'exemple anterior, necessitem molt més rebuig a la zona alta de la banda de pas que a la zona baixa. Aquest fet, ens obliga a traslladar els dos zeros de transmissió situats a freqüències negatives ($-j1.3 -j1.6$) a freqüències positives per tal de reforçar el rebuig a la part alta de la banda de pas mantenint invariant els nombre de zeros de transmissió ($n_z=4$). En aquest cas, hem de fer ús d'un filtre asimètric, mantenint l'ordre ($N=6$) i les especificacions de l'anterior ($RL=22dB$), amb zeros de transmissió situats a $+j1.2 +j1.3 +j1.4 +j1.5$. A continuació es presenta els polinomis característics del filtre resultant i les seves respectives arrels en el pla-s (Taula II.5).

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
0	$j \cdot 3.2760$	-0.0642	$-0.7680 + j \cdot 0.3240$	$j \cdot 1.5000$	$-j \cdot 0.9031$	$-0.4879 - j \cdot 1.2935$
1	-9.7740	$-j \cdot 0.1167$	$-3.0572 - j \cdot 1.4031$	$j \cdot 1.4000$	$-j \cdot 0.2976$	$-0.8544 - j \cdot 0.2739$
2	$-j \cdot 10.9100$	-0.6843	$-2.7140 - j \cdot 5.4430$	$j \cdot 1.3000$	$j \cdot 0.9923$	$-0.5408 + j \cdot 0.5235$
3	5.4000	$-j \cdot 1.6181$	$0.6399 - j \cdot 6.8009$	$j \cdot 1.2000$	$j \cdot 0.9235$	$-0.2502 + j \cdot 0.8495$
4	$j \cdot 1.0000$	0.0729	$2.6406 - j \cdot 4.3359$		$j \cdot 0.7416$	$-0.0285 + j \cdot 1.0249$
5	0	$-j \cdot 1.8082$	$2.2661 - j \cdot 1.8082$		$j \cdot 0.3515$	$-0.1043 + j \cdot 0.9777$
6	0	1.0000	1.0000			
\mathcal{E}			3.9421			
\mathcal{E}_R			1.0000			

Taula II.5 Polinomis característics per un filtre Chebyshev asimètric d'ordre 6 amb zeros a $+j1.5 +j1.4 +j1.3 +j1.2$

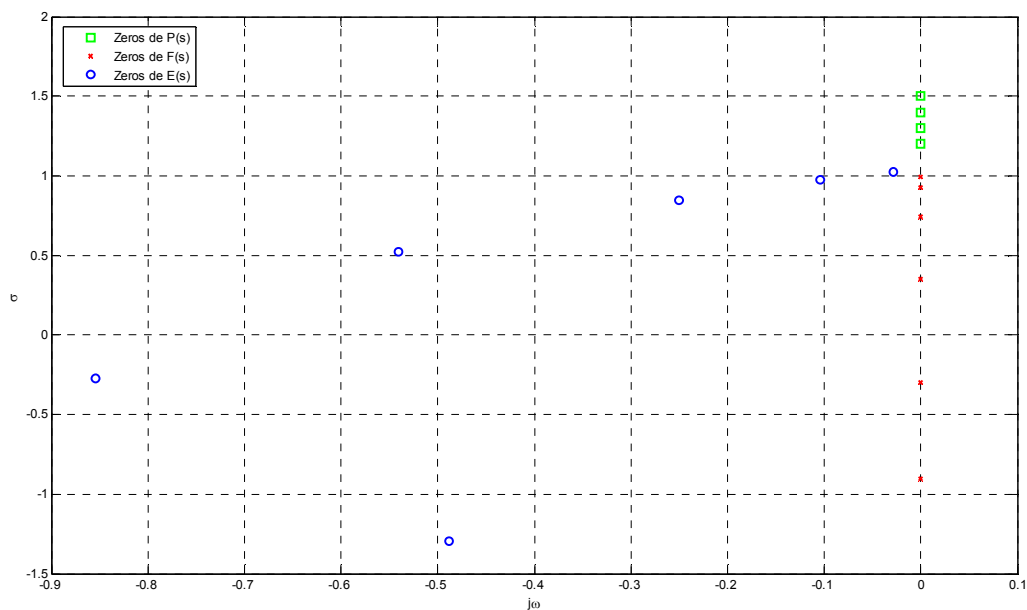


Figura II.15 Arrels dels polinomis característics per un filtre Chebyshev asimètric d'ordre $N=6$ amb zeros a $+j1.5 +j1.4 +j1.3 +j1.2$

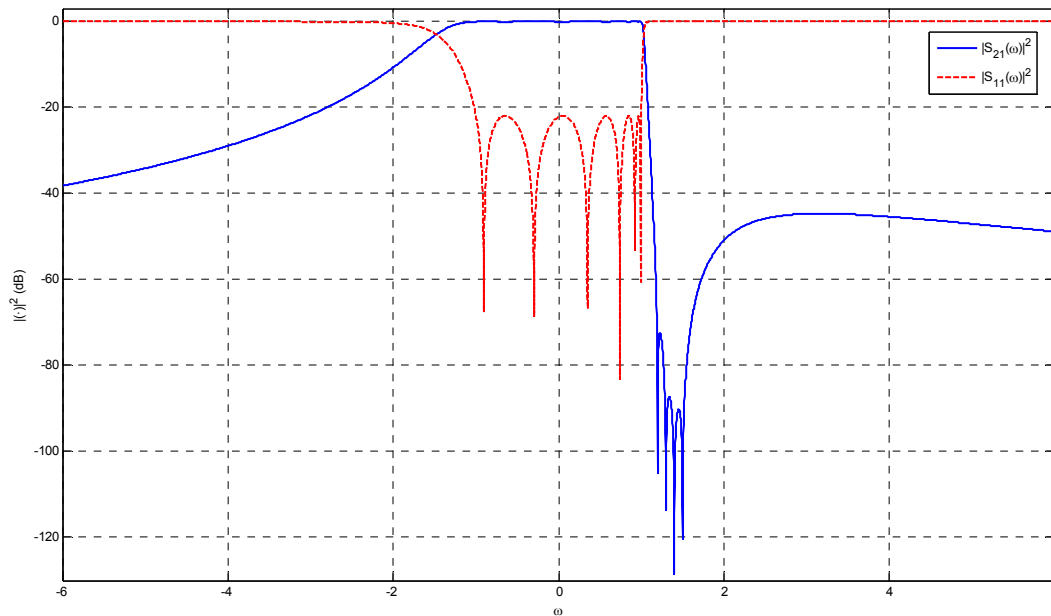


Figura II.16 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev asimètric $N=6$ amb zeros a $+j1.5 +j1.4 +j1.3 +j1.2$

◆ EXEMPLE 4

Suposem que, partint de l'exemple anterior, les especificacions a nivell d'atenuació canvien i se'ns obliga a garantir el mateix rebuig a la zona alta de la banda de pas que a la zona baixa però augmentant significativament la discriminació del filtre. Aquest canvi ens duu a proposar un filtre simètric incrementant-ne l'ordre per a poder satisfer els nous requeriments. En aquest cas, fem ús d'un filtre simètric d'ordre ($N=12$) mantenint les pèrdues de retorn a $22dB$ ($RL=22dB$), amb zeros de transmissió situats a $-j1.8 -j1.6 -j1.4 -j1.2 +j1.2 +j1.4 +j1.6 +j1.8$. A continuació es presenta els polinomis característics del filtre resultant i les seves respectives arrels en el pla-s (Taula II.6).

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
0	$j \cdot 23.4101$	0.0017	0.0212	$j \cdot 1.8000$	$j \cdot 0.9948$	$-0.0205 + j \cdot 1.0168$
1	0	0	0.1628	$j \cdot 1.6000$	$j \cdot 0.9513$	$-0.0671 + j \cdot 0.9786$
2	$j \cdot 44.5709$	0.0831	0.6705	$j \cdot 1.4000$	$j \cdot 0.8550$	$-0.1279 + j \cdot 0.8903$
3	0	0	1.8722	$j \cdot 1.2000$	$j \cdot 0.6926$	$-0.2040 + j \cdot 0.7331$
4	$j \cdot 30.8368$	0.7433	4.0526	$-j \cdot 1.2000$	$-j \cdot 0.9948$	$-0.2820 + j \cdot 0.4916$
5	0	0	6.7728	$-j \cdot 1.4000$	$-j \cdot 0.9513$	$-0.0205 - j \cdot 1.0168$
6	$j \cdot 9.2000$	2.5958	9.6641	$-j \cdot 1.6000$	$-j \cdot 0.8550$	$-0.0671 - j \cdot 0.9786$
7	0	0	10.6866	$-j \cdot 1.8000$	$-j \cdot 0.6926$	$-0.1279 - j \cdot 0.8903$
8	$j \cdot 1.0000$	4.2739	10.7460		$j \cdot 0.4570$	$-0.2040 - j \cdot 0.7331$
9		0	7.6935		$-j \cdot 0.4570$	$-0.3338 + j \cdot 0.1743$
10		3.3399	5.4840		$j \cdot 0.1604$	$-0.2820 - j \cdot 0.4916$
11		0	2.0708		$-j \cdot 0.1604$	$-0.3338 - j \cdot 0.1743$
12		1	1			
ϵ_R		1.0000				
ϵ		$1.1057 \cdot 10^3$				

Taula II.6 Polinomis característics per un filtre Chebyshev simètric d'ordre 12 amb zeros a $-j \cdot 1.8 - j \cdot 1.6 - j \cdot 1.4 - j \cdot 1.2 + j \cdot 1.2 + j \cdot 1.4 + j \cdot 1.6 + j \cdot 1.8$

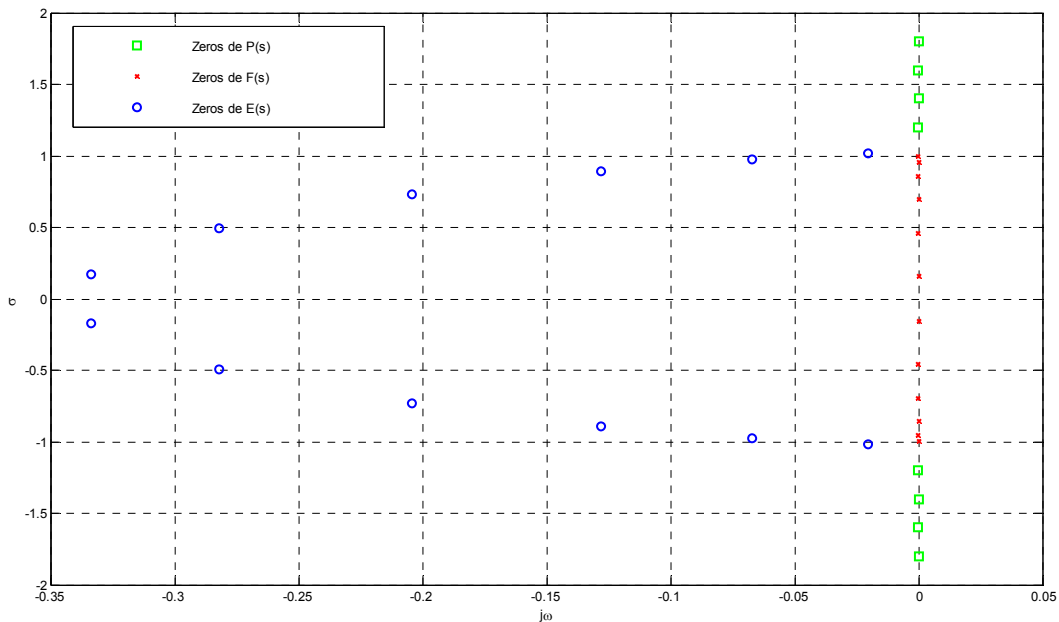


Figura II.17 Arrels dels polinomis característics per un filtre Chebyshev simètric d'ordre $N=12$ amb zeros a $-j \cdot 1.8 - j \cdot 1.6 - j \cdot 1.4 - j \cdot 1.2 + j \cdot 1.2 + j \cdot 1.4 + j \cdot 1.6 + j \cdot 1.8$

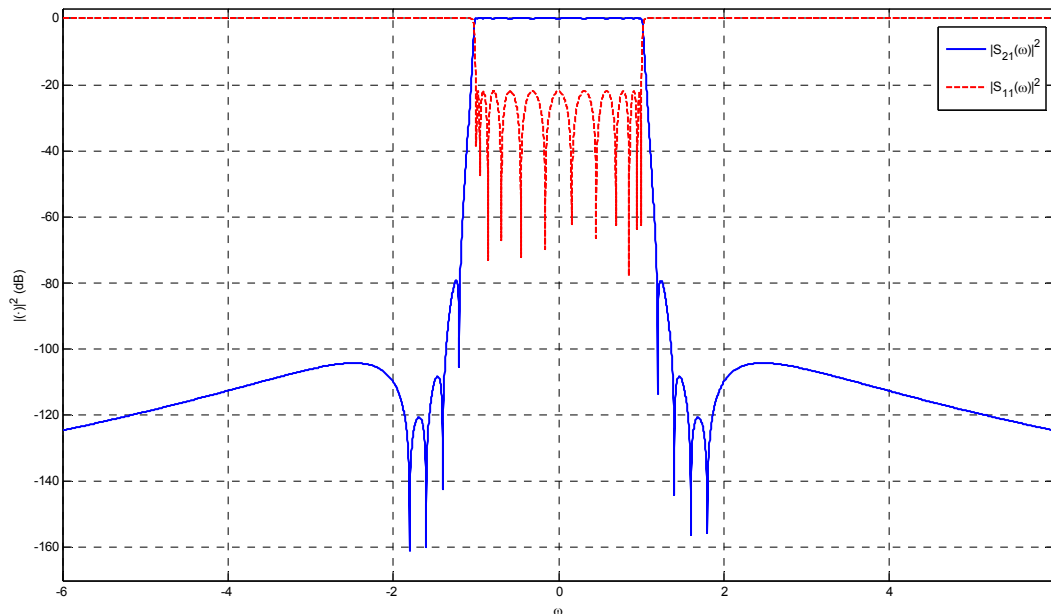


Figura II.18 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev simètric $N=12$ amb zeros a $-j1.8 -j1.6 -j1.4 -j1.2 +j1.2 +j1.4 +j1.6 +j1.8$

II.4 CONCLUSIONS

Els punts claus que es pot extreure d'aquest capítol són:

- Les condicions del filtre ideal no es poden assolir i és necessari relaxar-les. En funció dels requeriments de cada aplicació s'ha de controlar la distorsió introduïda sobre el senyal i complir unes determinades condicions de discriminació i selectivitat.
- Els polinomis característics caracteritzen les funcions de transferència i reflexió d'un filtre. És necessari, però, que compleixin unes determinades condicions per tal que el filtre sigui realitzable.
- El polinomis generals de Chebyshev, a diferència dels tabulats o convencionals, permeten generar respostes amb zeros de transmissió i fase equalitzada. Són una eina molt eficaç i flexible per tal de generar respostes de filtres avançats.
- La tècnica recursiva és un procediment sistemàtic que és capaç de generar els polinomis característics del filtre en funció d'uns determinats paràmetres de disseny.

Com s'ha pogut comprovar al llarg del capítol, s'ha generat satisfactòriament respostes de Chebyshev amb zeros de transmissió (localitzats en funció de les necessitats de disseny). La funció recursiva és capaç de generar correctament els polinomis i constants característiques del filtre a partir dels paràmetres de disseny introduïts (ordre, localització dels zeros de transmissió i pèrdues de retorn) emmascarant la matemàtica associada a la síntesi.

III - SÍNTESE DE RESPOSTES AVANÇADES

L'objectiu del primer apartat d'aquest capítol és determinar quina és la resposta del filtre quan es consideren les pèrdues introduïdes pels elements que el constitueixen i quines tècniques es poden aplicar per tal d'intentar compensar-ne els seus efectes, utilitzant com a eina els polinomis característics obtinguts en el capítol anterior.

La tècnica que es proposa és la predistorsió, tant en la seva variant total com parcial. Aquesta, consisteix bàsicament en modificar lleugerament els polinomis obtinguts de la resposta amb pèrdues per tal d'arribar a obtenir-ne una d'ideal. A continuació es presenta un exemple, pas a pas, d'implementació d'aquest mètode.

L'objectiu del segon apartat és obtenir respostes en fase lineal, aplicant un mètode d'optimització del retard de grup del filtre, mitjançant els polinomis característics.

III.1 SÍNTESE DE RESPOSTES PREDISTORSIONADES

III.1.1 Efecte de les pèrdues

En les tècniques de síntesi descrites anteriorment s'ha assumit que el filtre està constituït per elements sense pèrdues (no existeix dissipació). En la pràctica, tots els components dissipen energia. La resposta d'un filtre amb components dissipadors és menys selectiva i té una banda de pas més arrodonada comparada amb la del prototip sense pèrdues. Els zeros de transmissió i reflexió són lleugerament diferents i, en filtres passabanda, els colzes de la resposta a prop dels marges de la banda de pas també s'arrodoneixen.

La Figura III.1 mostra la resposta en amplitud d'un filtre passabanda (6-2) asimètric de 36MHz d'amplada a 4GHz en funció del factor de qualitat Q_u .

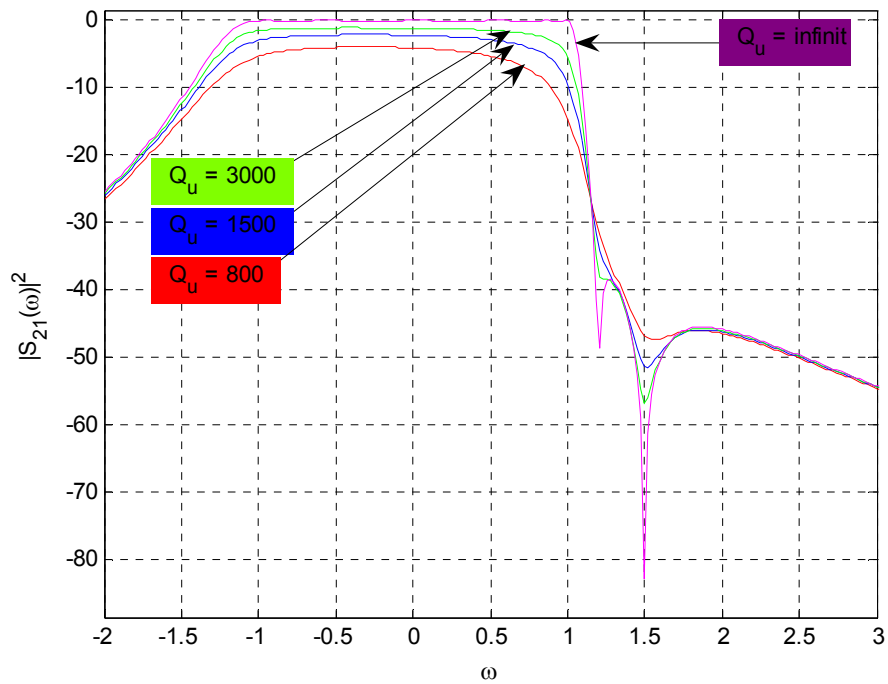


Figura III.1 Funció de transferència d'un filtre passabanda asimètric d'ordre 6 ($N=6$) amb TZ a $j \cdot 1.2$ i $j \cdot 1.5$ en funció del factor de qualitat Q_u

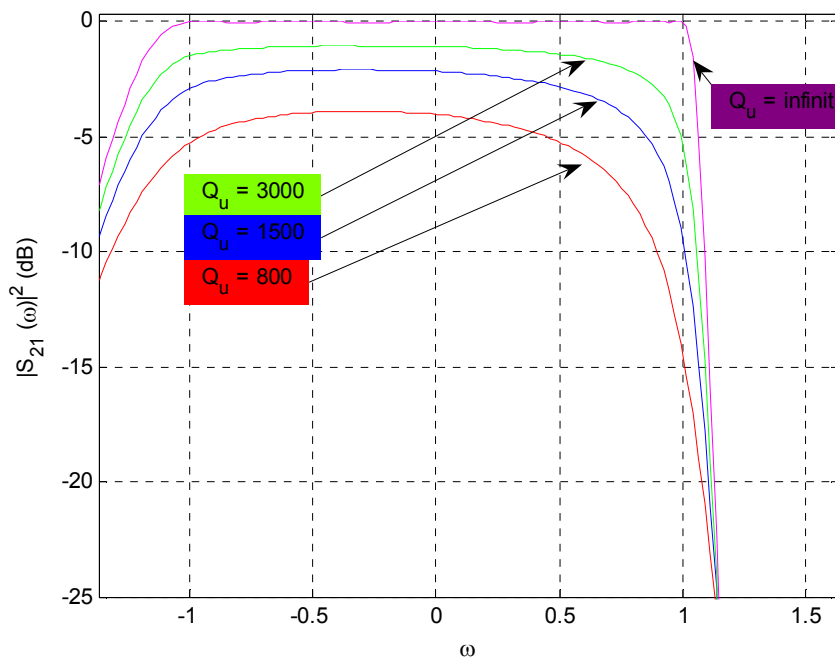


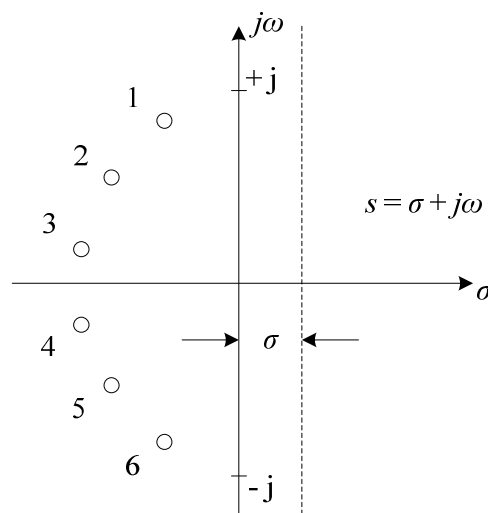
Figura III.2 Efecte del factor de qualitat Q_u sobre les pèrdues d'inserció en la banda de pas

III.1.2 Descripció matemàtica de la resposta predistorsionada i obtenció de polinomis

Per tal d'analitzar la funció de transferència i reflexió d'un filtre amb un factor de qualitat finit Q_u , s'afegeix un factor real i positiu σ a la variable de freqüència imaginària pura $s=j\omega$, tal que $s=\sigma+j\omega$, on σ s'obté de

$$\sigma = \frac{f_o}{BW} \cdot \frac{1}{Q_u} \quad (\text{III. 1})$$

on Q_u és el factor de qualitat dels ressonadors del filtre, f_o i BW són, respectivament, la freqüència central i l'amplada de banda requerida del filtre passabanda. L'efecte d'afegir σ a la variable freqüència provoca sobre s un moviment cap a la dreta respecte l'eix $j\omega$ resultant en un moviment de $-j\infty$ a $+j\infty$ en freqüència.



○ Pols de la funció de transferència

Figura III.3 Moviment experimentat per la variable freqüència s en el pla complex per un valor finit de Q_u

Es pot arribar als mateixos resultats de l'anàlisi pel cas sense pèrdues si totes les singularitats de transferència/reflexió basades en el prototip de filtre sense pèrdues es desplacen una quantitat σ a la dreta. Si s'aplica aquest desplaçament, es troba que les magnituds i fases dels vectors traçats entre la posició de la variable de freqüència i la posició dels pols i zeros de la funció del filtre roman sense canvis. D'aquesta manera, s'analitza realment un circuit sense pèrdues però el desplaçament cap a la dreta de les singularitats resulta en una anàlisi equivalent al cas amb pèrdues.

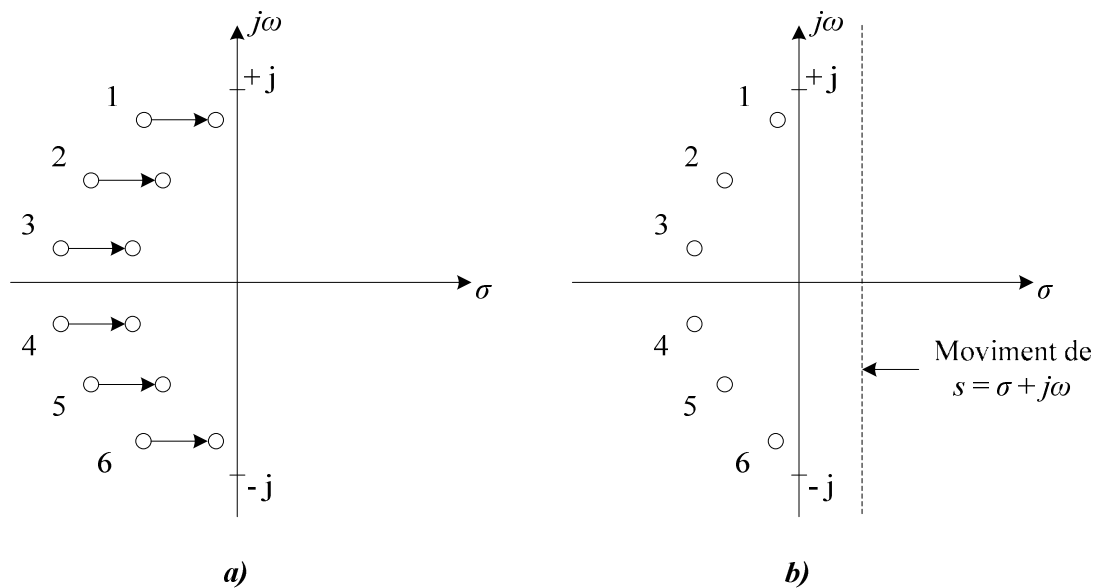


Figura III.4 Síntesi de la predistorsió: a) desplaçament dels pols una quantitat σ abans de la síntesi; b) posició nominal dels pols respecte del moviment de la variable freqüència amb pèrdues ($s = \sigma + j\omega$) per a poder realitzar una anàlisi sense pèrdues

La síntesi de la predistorsió implica sintetitzar una funció de transferència ideal i després moure tots els pols de la funció del filtre (zeros del polinomi característic $E(s)$) cap a la dreta una quantitat σ , obtinguda a partir del valor Q_u dels ressonadors [10]. Amb els pols en la nova posició l'anàlisi sense pèrdues dona la resposta predistorsionada. En presència del valor de Q_u , que ja s'ha anticipat pels ressonadors del filtre real, la variable freqüència $s = \sigma + j\omega$ és mou cap a la dreta de l'eix imaginari una quantitat σ . No obstant, donat que els pols del filtre ja havien sofert un desplaçament cap a la dreta de la mateixa quantitat, ara es troben en la posició relativa adequada en relació amb la variable freqüència s d'un filtre ideal sense pèrdues. La Figura III.4 il·lustra aquest procediment.

En el cas de filtres amb zeros de transmissió finits no és possible recuperar la resposta ideal amb elements dissipatius. Això es deu a que ha d'existir simetria dels zeros de transmissió sobre l'eix imaginari per tal de sintetitzar una xarxa realitzable. Per tant, no és possible moure'ls una quantitat σ . No obstant són els pols del filtre els que dominen la resposta en la banda de pas, i la diferència entre la funció de transferència $S_{21}(s)$ i la resposta ideal és insignificant si els zeros de transmissió romanen en la seva posició original.

El procediment que es pot seguir per a sintetitzar una xarxa predistorsionada consisteix en:

1. Obtenir els polinomis característics d' $S_{21}(s)$, $E(s)$ i $P(s)$, de la resposta ideal.
2. Calcular el valor de σ utilitzant l'equació (III.1) a partir de la freqüència central i l'amplada de banda de disseny del filtre i en funció del factor de qualitat Q_u dels ressonadors.
3. Desplaçar els pols (zeros de $E(s)$) una quantitat real $+\sigma$, $e_k \rightarrow e_k + \sigma$, $k = 1, 2, \dots, N$, on e_k són les arrels del polinomi $E(s)$. La part real d' e_k ha de ser sempre negativa per a satisfer la condició de Hurwitz.
4. A partir del polinomi característic $P(s)$ original es torna a calcular el valor d' ϵ , fent $|P(s)/E(s)| \leq 1$ per a qualsevol valor d' s .

5. Tornar a calcular el polinomi numerador d' $S_{11}(s)$, $F(s)$, i la constant característica ε_R aplicant l'equació de conservació d'energia (II.27).

El fet de compensar completament l'efecte d'un Q_u finit respecte del cas ideal ($Q_u = \infty$) porta, normalment, a un increment de les pèrdues de retorn. A la pràctica, és usual només compensar parcialment l'efecte d'un Q_u finit. L'equació de σ en el cas d'una compensació parcial és:

$$\sigma = \frac{f_o}{BW} \left(\frac{1}{Q_u} - \frac{1}{Q_{eff}} \right) \quad (\text{III. 2})$$

on Q_{eff} és un valor finit suficientment elevat.

La compensació parcial duu a reduir les pèrdues d'inserció i millorar les pèrdues de retorn sense degradar en excés la linearitat en la banda de pas respecte el cas d'un filtre totalment compensat.

Sabent que el polinomi característic $E(s)$ del filtre predistorsionat ha de ser de Hurwitz, el desplaçament real σ que pateixen els pols ha de garantir que la part real de les noves arrels del polinomi $E(s)$ sigui sempre negativa. D'aquí que σ hagi de complir el següent:

$$\sigma < |Re(e_k)|_{\min} \quad (\text{III. 3})$$

On e_k són les arrels del polinomi característic $E(s)$ del filtre abans d'aplicar-li la predistorsió. I, a partir de (III. 2) i del valor màxim de $\sigma_{\max} = |Re(e_k)|_{\min}$, s'arriba a que Q_u ha de complir la següent relació per tal que el filtre sigui realitzable:

$$Q_u > \frac{1}{\sigma_{\max} BW + \frac{1}{Q_{eff}}} \quad (\text{III. 4})$$

III.1.3 Exemple i comparativa dels diferents mètodes de predistorsió

Amb l'objectiu de comparar els diferents mètodes de predistorsió comentats anteriorment prenem com a exemple un filtre Chebyshev d'ordre 6 ($N=6$) centrat a 4 GHz ($f_o = 4\text{GHz}$), amb una amplada de banda de 36MHz ($BW=36\text{MHz}$), amb unes pèrdues de retorn de 22dB ($RL=22\text{dB}$) i zeros de transmissió situats a $+j1.5 +j1.3 -j1.3 -j1.5$. La següent taula (Taula III.1) mostra els polinomis característics i arrels del filtre en qüestió:

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
0	$j \cdot 3.8030$	0.0610	0.7690	$j \cdot 1.5000$	$j \cdot 0.9790$	$-0.0720 + j \cdot 1.0680$
1	0	0	2.1260	$j \cdot 1.3000$	$j \cdot 0.7880$	$-0.3020 + j \cdot 0.9500$
2	$j \cdot 3.9400$	0.7580	3.7890	$-j \cdot 1.3000$	$-j \cdot 0.9790$	$-0.6850 + j \cdot 0.4540$
3	0	0	4.3940	$-j \cdot 1.5000$	$-j \cdot 0.7880$	$-0.6850 - j \cdot 0.4540$
4	$j \cdot 1.0000$	1.6830	3.9290	$j \infty$	$j \cdot 0.3200$	$-0.0720 - j \cdot 1.0680$
5	0	0	2.1190	$-j \infty$	$-j \cdot 0.3200$	$-0.3020 - j \cdot 0.9500$
6	0	1.0000	1.0000			
ε		4.9589				
ε_R		1.0000				

Taula III.1 Polinomis característics per un filtre Chebyshev d'ordre 6 amb zeros a $+j1.5 + j1.3 - j1.3 - j1.5$

En la Figura III.5 es presenta la resposta del filtre ideal i en la Figura III.6 la representació gràfica de les arrels dels seus polinomis característics.

Considerant ara que la xarxa està constituïda per elements amb pèrdues, anem a limitar el factor de qualitat del filtre Q_u a un valor de 1600 ($Q_u = 1600$). Com es pot observar en la Figura III.7 i com s'ha comentat a l'inici del capítol, la resposta d'un filtre amb pèrdues és menys selectiva, s'arrodoneix en la banda de pas i en els colzes i els zeros de transmissió i reflexió no estan tan ben definits.

El nostre objectiu és compensar l'efecte de les pèrdues sobre la resposta del filtre utilitzant la tècnica de la predistorsió. Per aquest motiu necessitem saber, primerament, quin és el desplaçament σ que hem d'aplicar sobre els pols del filtre (zeros d' $E(s)$). Utilitzant l'equació (III.1) s'obté $\sigma = 0.0694$. Sabent que el polinomi característic $E(s)$ del filtre predistorsionat ($E_p(s)$) ha de ser de Hurwitz, aquest desplaçament σ , en aquest exemple, ha de ser tal que de (III.3) $\sigma < |\text{Re}(e_k)|_{\min} = 0.0720$. D'aquí que, per garantir que el filtre sigui realitzable, la Q_u mínima ha de complir $Q_u < f_o / (BW \cdot \sigma_{\max})$ obtenint $Q_{u\min} = 1543.21$.

A partir d' $E_p(s)$ i del polinomi característic $P(s)$ original (considerant $P_p(s) = P(s)$) es calcula el nou valor d' ε fent $|P_p(s)/E_p(s)| \leq 1$ per a qualsevol s , obtenint $\varepsilon = 131.6286$.

Resta només calcular el polinomi característic $F_p(s)$ ($F(s)$ del filtre predistorsionat) a partir de $P_p(s)$, d' $E_p(s)$ i del nou valor de la constant ε aplicant l'equació de conservació de l'energia (II.27) i factoritzant (Annex C) el polinomi resultant $|F_p(s)|^2$.

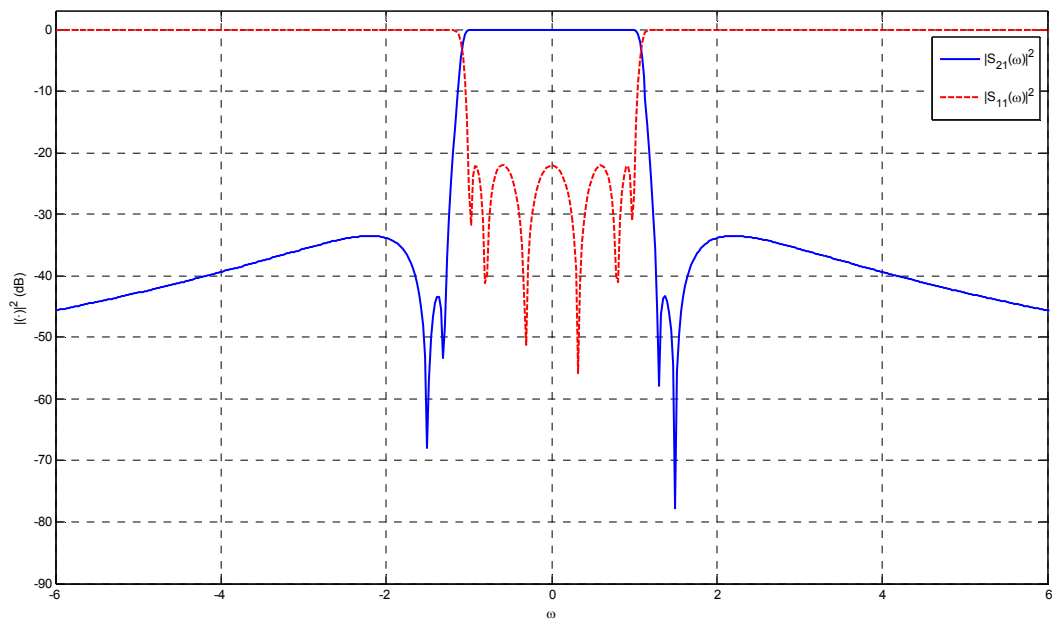


Figura III.5 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev simètric $N=6$ amb zeros a $+j1.5 +j1.3 -j1.3 -j1.5$

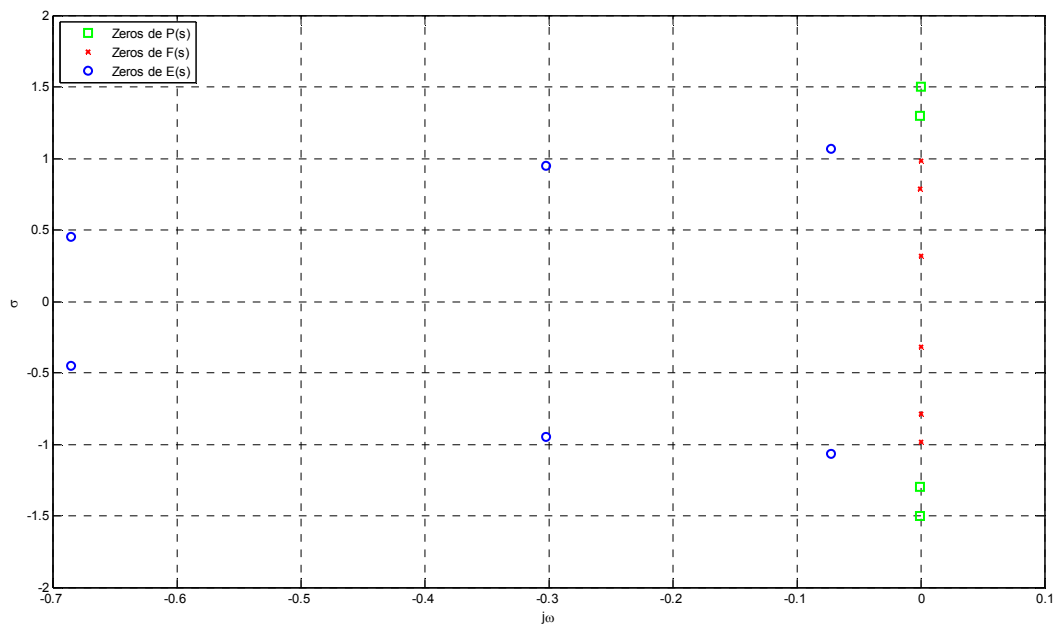


Figura III.6 Arrels dels polinomis característics d'un filtre Chevyshev d'ordre $N=6$ amb zeros a $+j1.5 +j1.3 -j1.3 -j1.5$

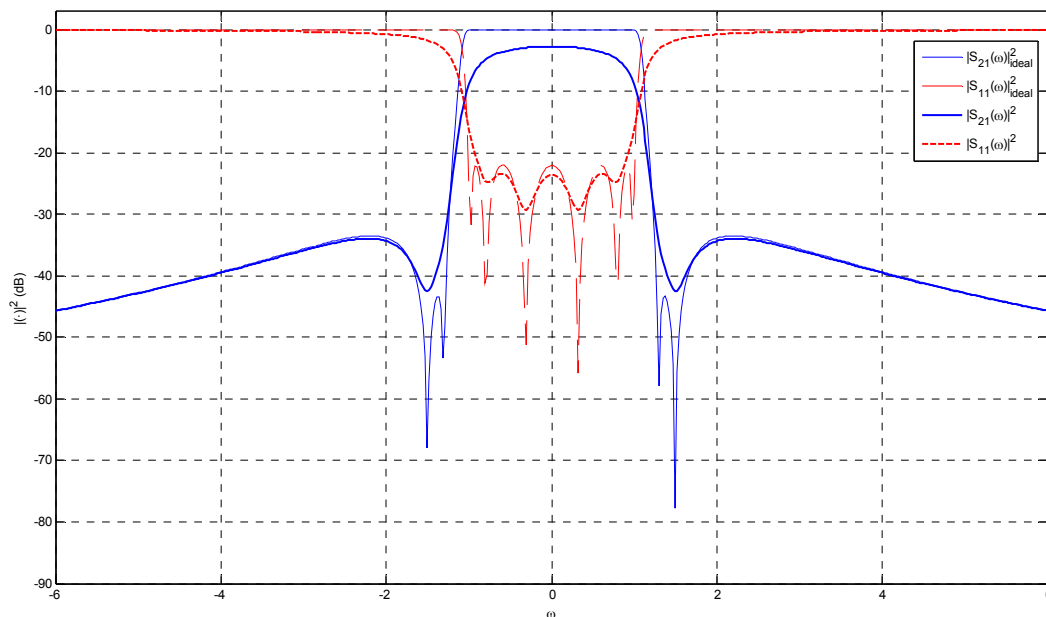


Figura III.7 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev simètric $N=6$ amb zeros a $+j1.5 +j1.3 -j1.3 -j1.5$ per $Q_u = \infty$ (ideal) i per $Q_u = 1600$

$s^i, i =$	$P_p(s)$	$F_p(s)$	$E_p(s)$
0	$j-3.8030$	$0.1140-j-6280$	0.6390
1	0	0	1.6580
2	$j-3.9400$	$0.8700-j-0.6830$	2.9810
3	0	0	3.3980
4	$j-1.0000$	$1.8160-j-0.1160$	3.2660
5	0	0	1.7030
6	0	1.0000	1.0000
\mathcal{E}	131.6286		
\mathcal{E}_R	1.0000		

Arrels de $P_p(s)$	Arrels d' $F_p(s)$	Arrels d' $E_p(s)$
$j-1.5000$	$j-1.0680$	$-0.0030 + j-1.0680$
$j-1.3000$	$-0.2330 + j-0.9500$	$-0.2330 + j-0.9500$
$-j-1.3000$	$0.6150 + j-0.4540$	$-0.6160 + j-0.4540$
$-j-1.5000$	$0.2330 - j-0.9500$	$-0.6160 - j-0.4540$
$j\infty$	$-j-1.0680$	$-0.0030 - j-1.0680$
$-j\infty$	$-0.6150 - j-0.4540$	$-0.2330 - j-0.9500$

Taula III.2 Polinomis característics del filtre Chebyshev predistorsionat d'ordre 6 amb zeros a $+j1.5 +j1.3 -j1.3 -j1.5$

Les arrels que pertanyen a $F_p(s)$ es poden escollir en funció del paràmetre μ (Annex C). La resposta del filtre, però, no depèn d'aquest valor. En aquest exemple s'ha optat per un valor de $\mu=0$. La nova disposició de les arrels per aquest cas ($\mu=0$) és del la Figura III.8 on es pot observar que les arrels d' $F_p(s)$ ja no es troben sobre l'eix imaginari sinó que formen una el·lipse al seu voltant semblant al de les arrels d' $E_p(s)$.

En la Figura III.9 es pot observar la comparativa entre la resposta del filtre amb pèrdues ($Q_u = 1600$) i la del filtre predistorsionat ($\sigma=0.0694$) derivat dels polinomis i constants característiques de la Taula III.2. Aquí queda palès l'augment significatiu de les pèrdues de retorn en la resposta

predistorcionada, el lleuger increment de les pèrdues d'inserció i les "orelles" en els extrems de la banda de pas característiques d'aquest tipus de resposta.

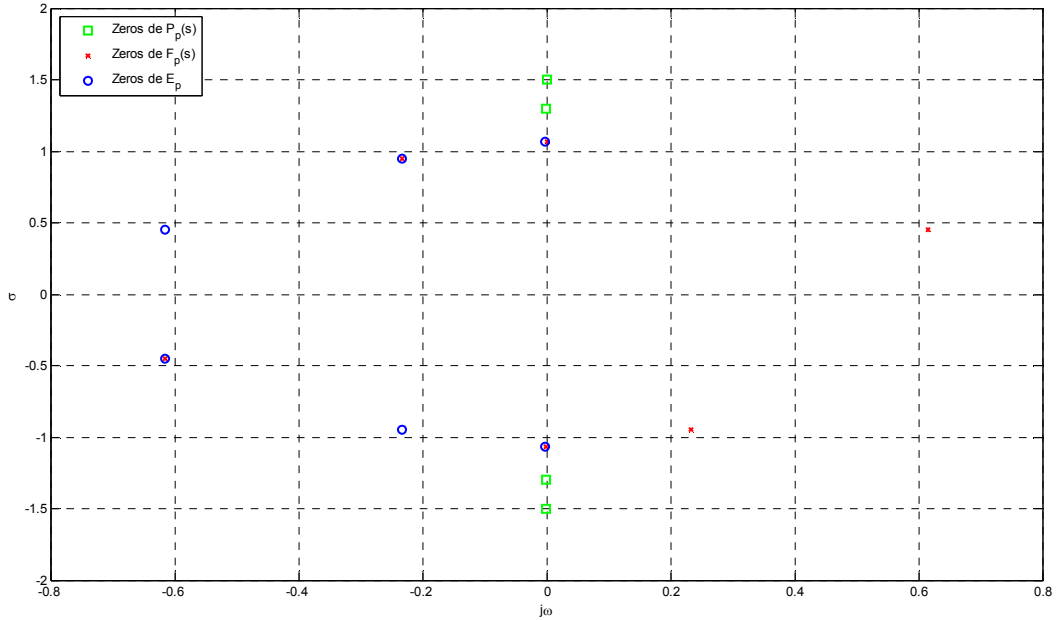


Figura III.8 Possible distribució de les arrels d' $F_p(s)$ d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=6$ amb zeros a $+j1.5 + j1.3 - j1.3 - j1.5$ i $\mu=0$

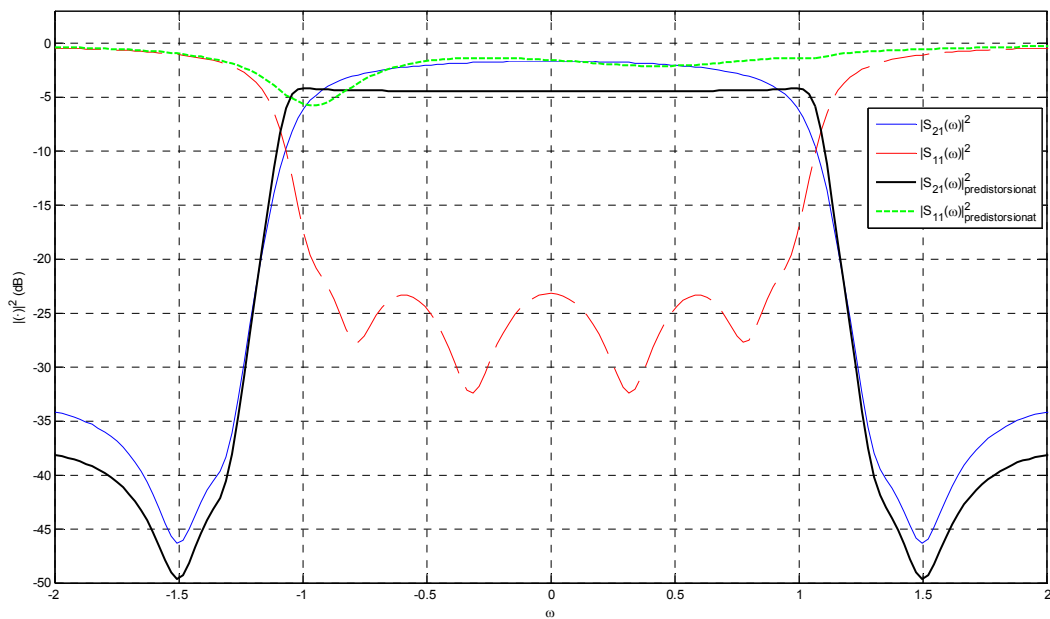


Figura III.9 Comparativa de la resposta del filtre amb pèrdues ($Q_u=1600$) i del filtre predistorcionat ($\sigma=0.0694$)

Com s'ha comentat anteriorment i com hem pogut observar en l'exemple precedent, compensar completament l'efecte d'un Q_u finit ($Q_u = 1600$) respecte del cas ideal ($Q_u = \infty$) ens ha provocat un augment de les pèrdues de retorn. A la pràctica, és habitual compensar només parcialment l'efecte d'un Q_u finit. Aquesta tècnica es coneix com a predistorsió parcial i el seu objectiu és pal·liar l'efecte de les pèrdues sense arribar a compensar-les totalment però obtenint una millora en les pèrdues de retorn i la linearitat en la banda de pas respecte de la predistorsió total.

En el cas de la predistorsió parcial el desplaçament σ dels pols s'obté de (III.2). Per tal de visualitzar els efectes de la compensació parcial es proposa dues possibles Q_{eff} ($Q_{eff} = 3200$ i $Q_{eff} = 4800$) amb σ :

$$Q_{eff} = 3200 \quad \sigma = \frac{f_o}{BW} \left(\frac{1}{Q_u} - \frac{1}{Q_{eff}} \right) = 0.0347$$

$$Q_{eff} = 4800 \quad \sigma = \frac{f_o}{BW} \left(\frac{1}{Q_u} - \frac{1}{Q_{eff}} \right) = 0.0463$$

En la Figura III.10 es pot veure la resposta del filtre predistorsionat parcialment per tres valors de Q_{eff} diferents ($Q_{eff} = \infty$ (predistorsió total), $Q_{eff} = 3200$ i $Q_{eff} = 4800$)

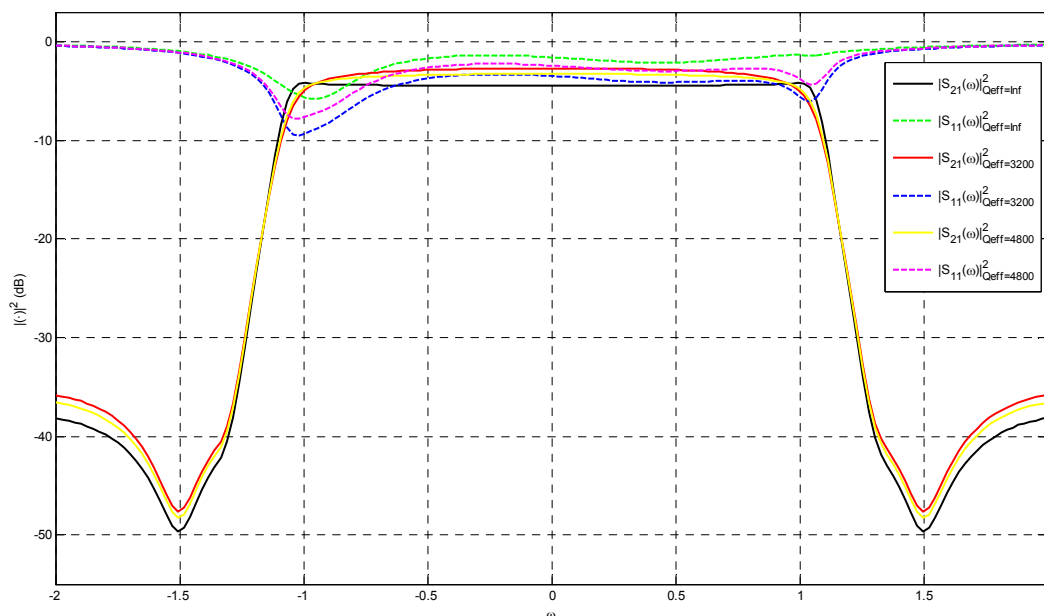


Figura III.10 Predistorsió total ($Q_{eff} = \infty$) vs predistorsió parcial ($Q_{eff} = 3200$ i $Q_{eff} = 4800$)

Com es pot observar a la Figura III.10 les pèrdues de retorn van incrementant a mesura que Q_{eff} augmenta aproximant-se progressivament a les pèrdues del filtre predistorsionat totalment. Les pèrdues d'inserció també augmenten amb el valor de Q_{eff} . La resposta del filtre predistorsionat parcialment és, també, més lineal en la banda de pas.

III.2 SÍNTESI DE RESPOSTES EN FASE LINEAL

III.2.1 Optimització del retard de grup

El retard de grup és una mesura del temps de trànsit d'un senyal a través d'un dispositiu en relació amb la freqüència i és una mesura molt útil de la distorsió de fase.

La fase i el retard de grup de filtres de fase mínima o convencionals està relacionada únicament amb la seva resposta en amplitud [11]. Els filtres de fase mínima es caracteritzen per la distribució dels zeros de la funció de transferència al llarg de l'eix imaginari (filtres el·líptics i quasi-el·líptics) o a l'infinit (filtres maximalment plans i Chebyshev). Per aquests, una vegada s'ha optimitzat la resposta d'amplitud s'ha d'acceptar el retard de grup introduït ja que és únic per aquesta resposta. És possible, però, millorar el retard de grup sense afectar l'amplitud utilitzant equalitzadors passatot.

Una forma alternativa de millorar el retard de grup consisteix en situar alguns dels zeros de la funció de transferència [zeros de $P(s)$] al llarg de l'eix real o en parells distribuïts simètricament al llarg de l'eix imaginari. Els zeros de $P(s)$ han de tenir simetria respecte l'eix imaginari per tal de satisfer la condició de realitzable com s'ha descrit anteriorment. Aquests filtres són coneguts com a filtres de fase lineal, autoequalitzadors o de fase no mínima. L'amplitud i la fase d'aquests tipus de filtres ja no estaran únicament relacionades. Els filtres de fase lineal poden ésser optimitzats per a obtenir una millora del retard de grup en detriment de la resposta d'amplitud. Aquest fet implica que s'hagi de recórrer a un filtre de major grau per a aconseguir la resposta d'amplitud desitjada i un retard de grup millorat. Com sempre, existeix un compromís entre la complexitat del filtre i el seu rendiment. La notació més utilitzada alhora d'identificar els diferents tipus de zeros de $P(s)$, usualment anomenats zeros de transmissió (TZ), és el grau del filtre, els TZ al llarg de l'eix imaginari seguit dels TZ fora d'aquest eix. A mode d'exemple, (10-2-4) representa un filtre d'ordre deu amb dos TZ al llarg de l'eix $j\omega$ (no necessàriament simètrics) i quatre TZ distribuïts simètricament al llarg de l'eix $j\omega$. L'últim índex d'aquesta notació ha de ser sempre un enter parell.

Ara el problema és determinar la posició dels zeros per tal de minimitzar les variacions del retard de grup. Pel fet d'existir únicament en parells simètrics al llarg de l'eix imaginari, els zeros per si mateixos no contribueixen a la característica global de la fase del filtre ja que s varia al llarg de l'eix imaginari (exceptuant aquells que són múltiples de π radians), i conseqüentment no afecten el retard de grup. La introducció dels zeros, però, modifica els polinomis característics i, aquest fet, la funció de transferència i reflexió del filtre. Els polinomis $F(s)$ i $E(s)$ s'hauran de regenerar per tal de restaurar les característiques originals de les funcions del filtre (ex. arriusat constant a la banda de pas en el cas de la família de filtres de Chebyshev). Com s'ha comentat anteriorment, les característiques de la fase i el retard de grup venen determinades exclusivament pel polinomi $E(s)$.

Les característiques del retard de grup i de la pendent d'atenuació d'un filtre es poden calcular a través dels polinomis de transferència.

Si $S_{21}(s) = P(s)/\varepsilon E(s)$ és una funció de transferència i $S'_{21}(s)$ n'és la seva primera derivada respecte a la variable freqüència s , la part real de $-S'_{21}(s)/S_{21}(s)$ és la funció del retard de grup $\tau(s)$ i la part imaginària és la pendent de guany de la característica de transferència. La prova d'això ve pel fet que

$$-\frac{S'_{21}(s)}{S_{21}(s)} = -\frac{d}{ds}[\ln S_{21}(s)] = -\frac{d}{ds}[\ln(|S_{21}(s)|e^{j\phi})] = -\frac{d}{ds}[\ln|S_{21}(s)| + j\phi]$$

on ϕ és la fase d' $S_{21}(s)$. Tenint en compte que $s=j\omega$ i que $ds=jd\omega$

$$-\frac{S'_{21}(s)}{S_{21}(s)} = j\frac{d}{d\omega}[\ln|S_{21}(s)| + j\phi] = -\frac{d\phi}{d\omega} + j\frac{dA}{d\omega} \quad (\text{III. 5})$$

on $A=\ln|S_{21}(s)|$ és el guany en nepers. Així, $\text{Re}[-S'_{21}(s)/S_{21}(s)]$ és el retard de grup en segons i $-8.6859\text{Im}[-S'_{21}(s)/S_{21}(s)]$ és la pendent d'atenuació en dB per rad/s (radians per segon). Es pot observar fàcilment que

$$-\frac{S'_{21}(s)}{S_{21}(s)} = \frac{E'(s)}{E(s)} - \frac{P'(s)}{P(s)} \quad (\text{III. 6})$$

on $E'(s)$ i $P'(s)$ són les derivades dels polinomis $E(s)$ i $P(s)$ respecte a s . Tenint en compte que qualsevol zero de transmissió és sobre l'eix imaginari o en parells simètrics respecte aquest eix el segon terme de l'equació serà sempre imaginari pur i no és necessari calcular-lo per obtenir el retard de grup.

III.2.1.1 Implementació del procés d'optimització

Encara que existeixen mètodes analítics per dissenyar filtres de fase lineal el procediment més estès és l'optimització. Amb la velocitat i potència dels ordenadors actuals el procés d'optimització convergeix en breus instants, fins i tot per aquells casos més complexos. A més, amb aquest mètode, és possible optimitzar simultàniament els zeros de transmissió per un determinat refús dels lòbuls amb el cas asimètric.

La Figura III.11 mostra un diagrama de flux d'una possible organització del procediment d'optimització del retard de grup. El procés es resumeix en:

- Comprovar que el nombre total de TZs (per l'equalització del retard de grup i pel refús de lòbuls) compleix la norma de la topologia de filtre pretesa. El pas següent consisteix en seleccionar una fracció de l'amplada de banda sobre la qual s'aplicarà l'equalització del retard de grup. Aproximadament un 50% en el cas d'un parell de zeros sobre l'eix real i un 65-70% en el cas de parells complexos. Existeix un compromís entre l'amplada de banda d'equalització i l'amplitud de l'arriestat del retard de grup en aquesta banda.
- Seleccionar la posició inicial dels TZs complexos. Per a característiques simètriques s'utilitzen generalment $\pm 0.8+j0.0$ per a parells sobre l'eix real i $\pm 0.8\pm j0.5$ per a parells complexos.
- Establertes les posicions dels TZs es forma el polinomi $P(s)$ i es genera els polinomis $F(s)$ i $E(s)$.

- Calcular el retard de grup τ_i amb un nombre N_S de mostres s_i al llarg de l'amplada de banda d'equalització (o la meitat de l'amplada de banda des del centre a l'extrem en el cas de característiques simètriques). El retard de grup, a una freqüència mostra s_i , es calcula amb el polinomi $E(s)$ a través de l'equació (III.7):

$$\tau_i = \operatorname{Re} \left[\frac{E'(s_i)}{E(s_i)} \right] \quad (\text{III. 7})$$

on la prima denota derivació.

- Calcular l'error quadràtic mínim

$$\tau(\omega) = m\omega + c \quad (\text{III. 8})$$

on

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \tau_i (\omega_i - \omega_{av})}{\sum_{i=1}^{N_S} (\omega_i - \omega_{av})^2}$$

$$c = \tau_{av} - m\omega_{av}$$

$$\omega_{av} = \text{mitjana de les mostres de freqüència} = \left[\sum_{i=1}^{N_S} \omega_i \right] / N_S$$

$$\tau_{av} = \text{mitjana del retard de grup} = \left[\sum_{i=1}^{N_S} \tau_i \right] / N_S$$

$$\omega_i = -js_i = \text{freqüència de la mostra } i\text{-èsima}$$

$$m = \text{pendent de l'error quadràtic mínim, } c \text{ és la seva constant i } N_S \text{ és el nombre de mostres}$$

Una vegada calculada la pendent i la constant de l'error quadràtic mínim, la desviació *rms* (*root-mean-square*) del retard de grup respecte de l'error quadràtic mínim ve donada per

$$\Delta \tau_{rms} = \left[\sum_{i=1}^{N_S} [\tau_i - (m\omega_i + c)]^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III. 9})$$

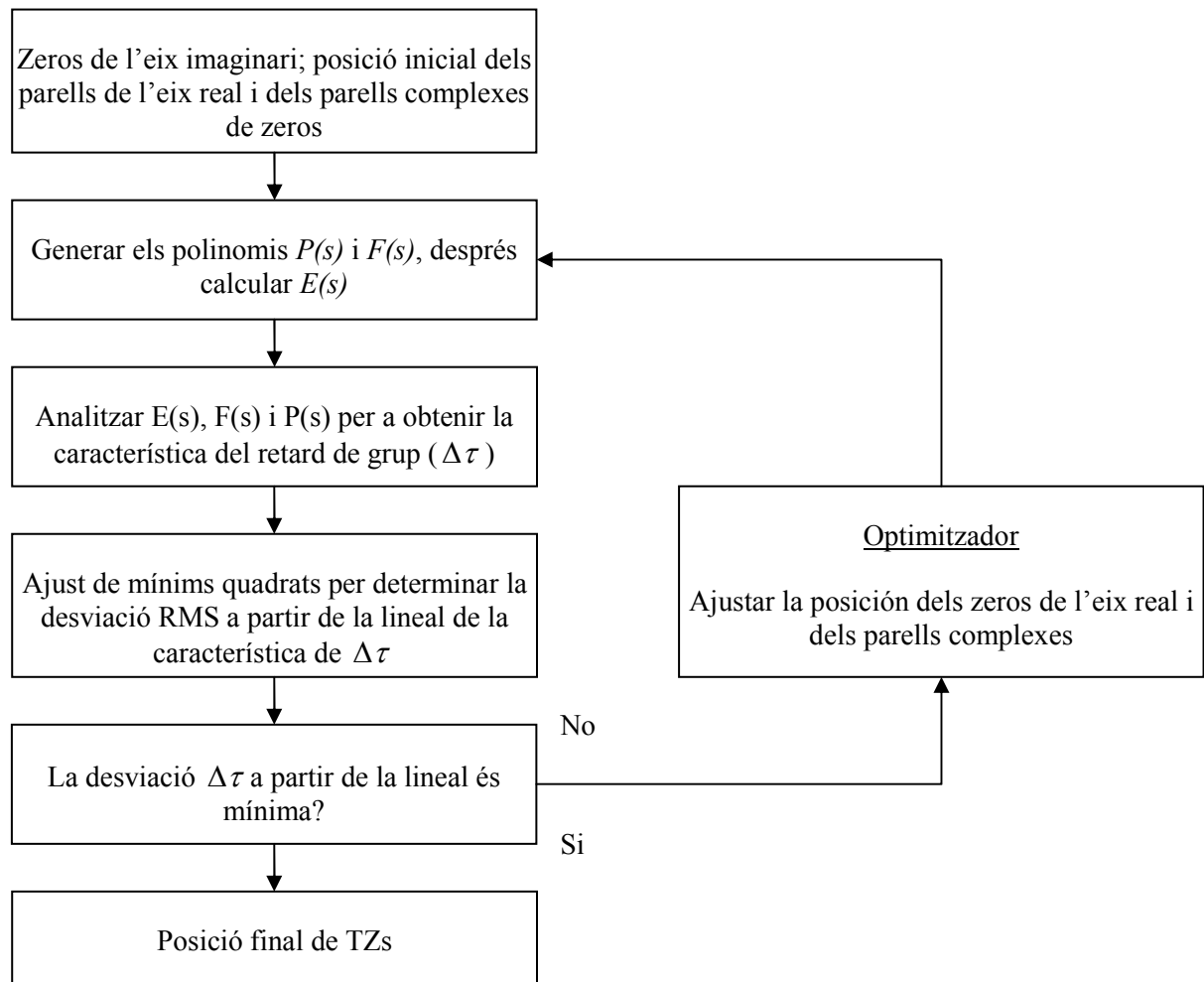


Figura III.11 Diagrama de flux del procediment d'optimització del retard de grup

◆ EXEMPLE

A continuació es presenta un exemple d'aplicació d'aquest mètode sobre un filtre Chebyshev simètric d'ordre $N=8$ centrat a $f_0=4\text{GHz}$ i amb una amplada de banda de $BW=36\text{MHz}$. El nivell de pèrdues de retorn és de $RL=22\text{dB}$, el factor de qualitat $Q_u=1600$ i els zeros de transmissió estan situats a $+j1.5 -j1.5$ (equivalents en freqüència a 4.0271GHz i 3.9731GHz respectivament).

La fracció de l'amplada de banda que es pretén equalitzar és d'un 70% i es parteix d'una posició inicial dels zeros (parells complexos conjugats) de $\pm 0.8 \pm j0.5$. Una vegada definits els zeros de transmissió es genera els polinomis característics mitjançant el mètode recursiu presentat en el capítol II.

A continuació es presenta una taula resum (Taula III.3) amb els polinomis i constants característiques així com les seves arrels.

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
0	$j \cdot 1.7822$	0.0057	0.1275	$j \cdot 1.5000$	$j \cdot 0.9783$	$-0.1063 + j \cdot 1.1074$
1	0	0	0.8038	$-j \cdot 1.5000$	$-j \cdot 0.9783$	$-0.3176 + j \cdot 0.9049$
2	$j \cdot 0.9629$	0.2087	2.4744	$0.8000 + j \cdot 0.5000$	$j \cdot 0.8115$	$-0.1063 - j \cdot 1.1074$
3	0	0	4.8152	$0.8000 - j \cdot 0.5000$	$-j \cdot 0.8115$	$-0.3176 - j \cdot 0.9049$
4	$j \cdot 1.4700$	1.1368	6.6896	$-0.8000 + j \cdot 0.5000$	$j \cdot 0.5245$	$-0.4015 + j \cdot 0.5561$
5	0	0	6.6769	$-0.8000 - j \cdot 0.5000$	$-j \cdot 0.5245$	$-0.4447 + j \cdot 0.2008$
6	1.0000	1.9236	5.1498	$+j \cdot \infty$	$j \cdot 0.1812$	$-0.4015 - j \cdot 0.5561$
7	0	0	2.5402	$-j \cdot \infty$	$-j \cdot 0.1812$	$-0.4447 - j \cdot 0.2008$
8	0	1.0000	1.0000			
\mathcal{E}		13.9945				
\mathcal{E}_R		1.0000				

Taula III.3 Polinomis característics per un filtre Chebyshev simètric d'ordre 8 amb zeros a $+j1.5 -j1.5$ i $\pm 0.8 \pm j0.5$

En la Figura III.12 es pot observar la disposició de les arrels en el pla complex s . A diferència d'altres disposicions observades anteriorment, cal destacar la presència dels parells complexos conjugats $\pm 0.8 \pm j0.5$, en les arrels del polinomi $P(s)$, que s'utilitzaran per a la posterior equalització.

En la Figura III.13 es presenta la funció de transferència i reflexió del filtre abans de ser equalitzada en comparació amb el mateix filtre sense equalització. Queda palès que la resposta en amplitud del filtre abans de ser equalitzat respecte al cas sense equalització és lleugerament menys selectiva i la discriminació és menor. Aquest fet es deu a la utilització de zeros de transmissió del filtre per al posterior procés d'equalització. Es pot observar també l'efecte de les pèrdues, comentat en l'apartat anterior, que arrodoneix la banda de pas i els colzes de la resposta, a part de difuminar els dos zeros de transmissió i augmentar les pèrdues d'inserció.

Per obtenir la característica del retard de grup s'aplica l'equació (III.7) al polinomi $E(s)$ generat. La representació gràfica del retard de grup del filtre abans de l'equalització en funció de la freqüència (f) és la mostrada en la Figura III.14. Es pot veure que la funció no presenta un retard constant al llarg de la banda de pas, és a dir, els components freqüencials del senyal presentaran retards diferents.

Posteriorment, es duu a terme el procés d'optimització fins arribar a un valor de la desviació $\Delta\tau$ mínim. Quan s'assoleix aquest valor ja es té la posició final dels zeros de transmissió i es pot generar els polinomis característics del filtre equalitzat. A la Taula III.4 es pot observar els polinomis i constants característiques així com les seves arrels del filtre ja equalitzat. La resposta del filtre equalitzat és pràcticament idèntica a la del filtre preequalitzat (Figura III.16) i, com queda palès en la Figura III.15, el retard de grup de la resposta equalitzada és pràcticament plana en la banda de pas, garantint que pràcticament tots els components freqüencials de la banda de pas experimentaran el mateix retard.

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	Arrels de $P(s)$	Arrels d' $F(s)$	Arrels d' $E(s)$
0	$j \cdot 2.0110$	0.0053	0.1195	$j \cdot 1.5000$	$j \cdot 0.9783$	$-0.1054 - j \cdot 1.1072$
1	0	0	0.7784	$-j \cdot 1.5000$	$-j \cdot 0.9783$	$-0.3200 - j \cdot 0.9087$
2	$-j \cdot 1.9058$	0.2032	2.4315	$0.8853 + j \cdot 0.4020$	$j \cdot 0.8105$	$-0.1054 + j \cdot 1.1072$
3	0	0	4.7666	$0.8853 - j \cdot 0.4020$	$-j \cdot 0.8105$	$-0.3200 + j \cdot 0.9087$
4	$j \cdot 1.0058$	1.1237	6.6481	$-0.8853 + j \cdot 0.4020$	$j \cdot 0.5196$	$-0.4115 - j \cdot 0.5470$
5	0	0	6.6544	$-0.8853 - j \cdot 0.4020$	$-j \cdot 0.5196$	$-0.4329 - j \cdot 0.1863$
6	$j \cdot 1.0000$	1.9154	5.1403	$+j \cdot \infty$	$j \cdot 0.1773$	$-0.4115 + j \cdot 0.5470$
7	0	0	2.5397	$-j \cdot \infty$	$-j \cdot 0.1773$	$-0.4329 + j \cdot 0.1863$
8	0	1.0000	1.0000			
\mathcal{E}		16.8488				
\mathcal{E}_R		1.0000				

Taula III.4 Polinomis característics del filtre Chebyshev simètric equalitzat d'ordre 8 amb zeros a $\pm j1.5$ de l'exemple

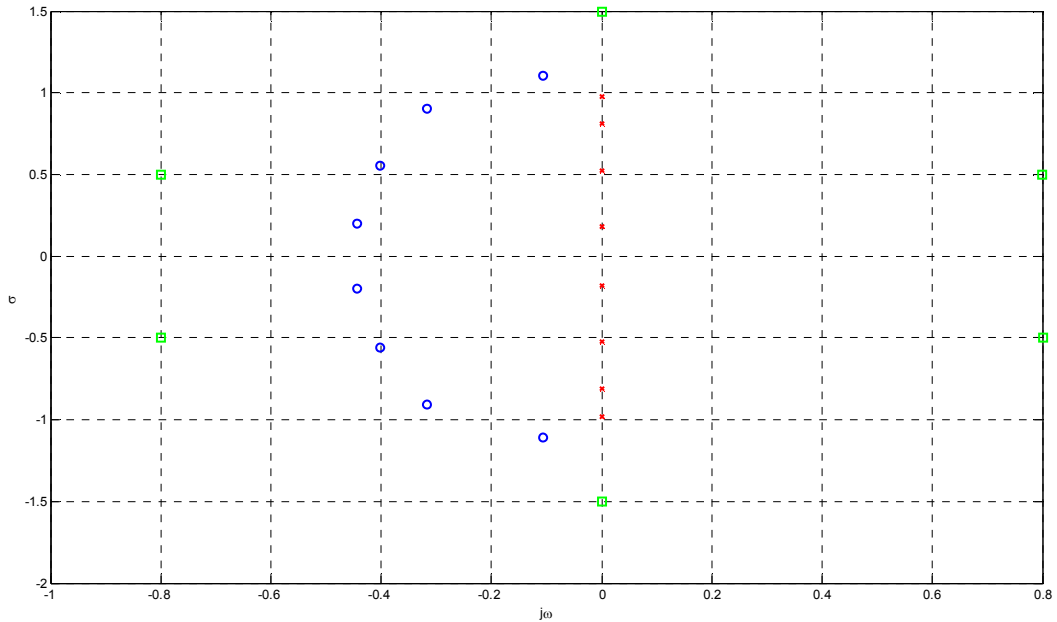


Figura III.12 Disposició de les arrels dels polinomis característics d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=8$ amb zeros a $\pm j1.5$ i $\pm 0.8 \pm j0.5$

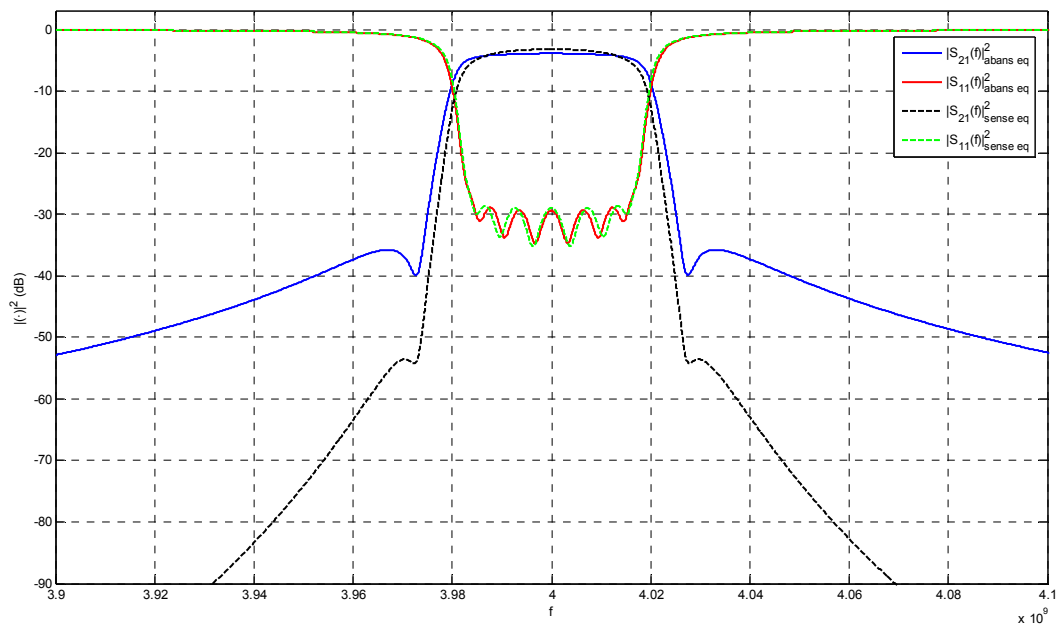


Figura III.13 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=8$ amb zeros a $+j1.5 -j1.5$ i $\pm 0.8 \pm j0.5$ abans de l'equalització en comparació amb el mateix filtre sense equalitzar

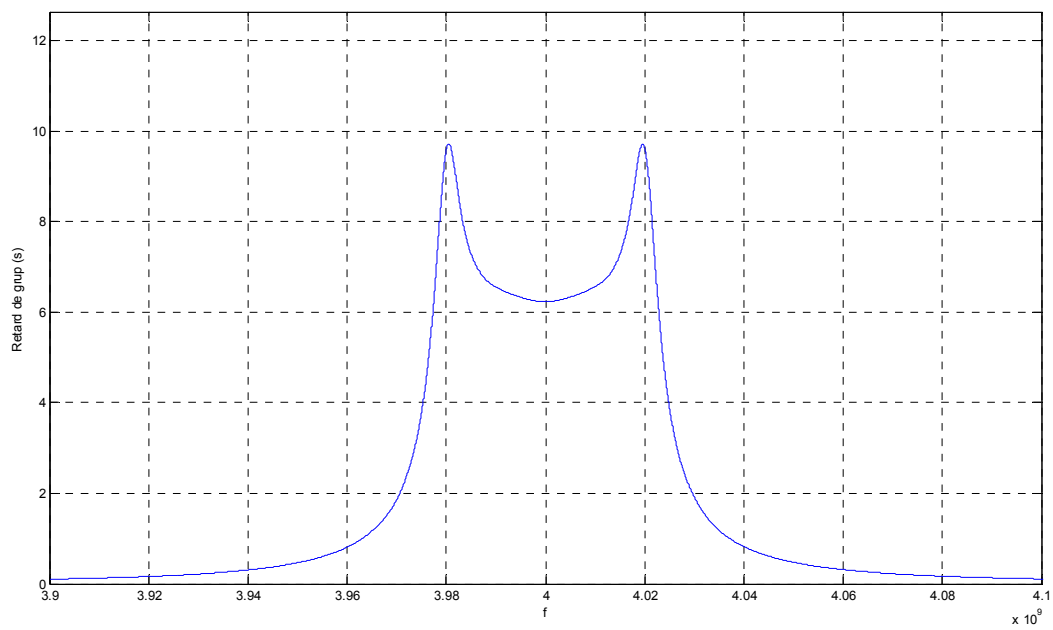


Figura III.14 Retard de grup d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=8$ amb zeros a $+j1.5 -j1.5$ i $\pm 0.8 \pm j0.5$

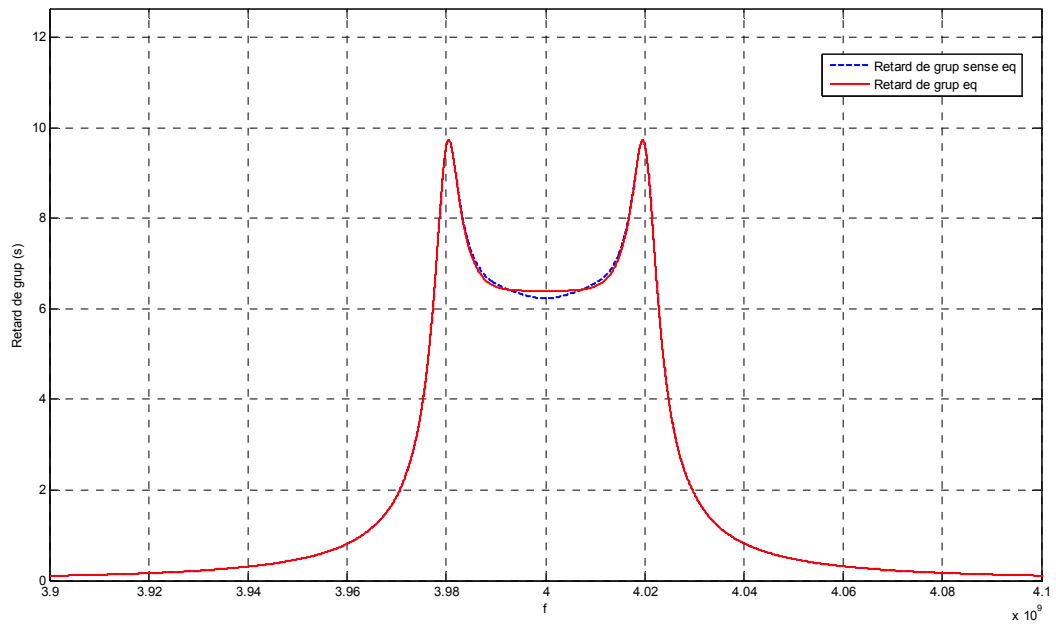


Figura III.15 Retard de grup d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=8$ amb zeros a $+j1.5 - j1.5$ i $\pm 0.8 \pm j0.5$ en comparació amb el retard de grup del mateix filtre després de l'equalització

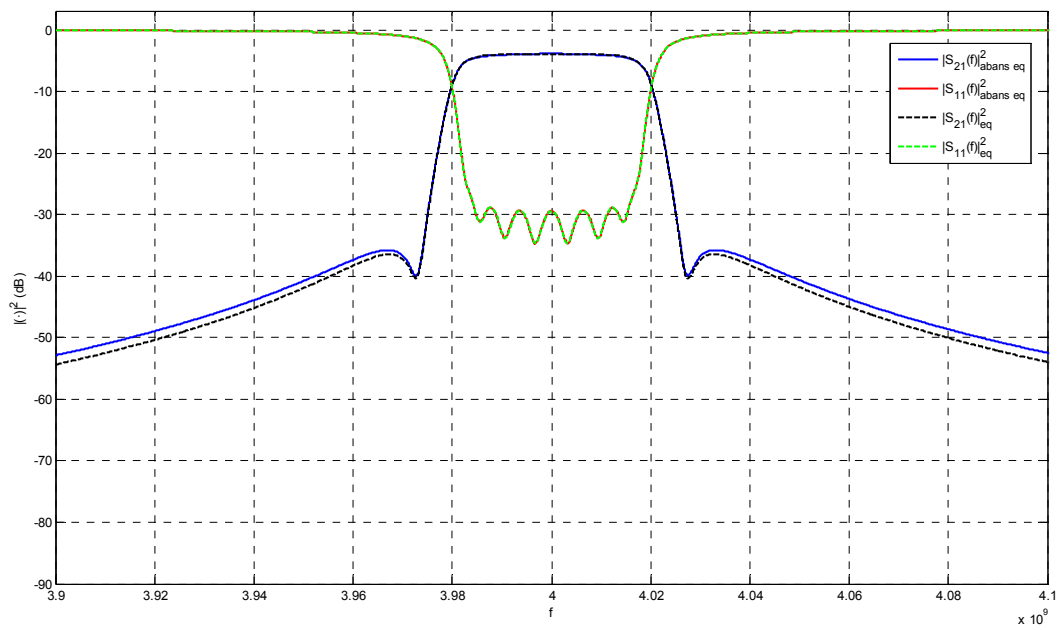


Figura III.16 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev d'ordre $N=8$ amb zeros a $+j1.5 - j1.5$ i $\pm 0.8 \pm j0.5$ abans de l'equalització en comparació amb el mateix filtre equalitzat

III.3 CONCLUSIONS

Els punts claus que es pot extreure d'aquest capítol són:

- La resposta d'un filtre amb pèrdues és menys selectiva, té una banda de pas i colzes més arrodonits i els zeros de transmissió i reflexió es difuminen respecte al filtre constituït per elements no dissipadors.
- La predistorsió total pretén compensar completament l'efecte de les pèrdues en detriment d'un augment significatiu de les pèrdues de retorn.
- La predistorsió parcial pal·lia els efectes dels elements dissipadors, sense arribar a compensar-los, millorant les pèrdues de retorn de la compensació total.
- En el cas dels polinomis generals de Chebyshev, a diferència dels convencionals, és possible aplicar un procés d'equalització per obtenir filtres amb fase lineal. Existeix, però, un compromís entre la resposta en amplitud i l'equalització de la banda de pas. S'ha presentat un mètode sistemàtic d'equalització basat en la utilització d'alguns dels zeros de la funció de transferència.

Com s'ha demostrat, el mètode de la predistorsió s'ha aplicat satisfactòriament en el cas dels polinomis generals de Chebyshev obtenint, en cada cas, les respostes esperades. De forma similar, la tècnica d'equalització presentada ha estat capaç de generar correctament filtres Chebyshev de fase lineal.

IV - SÍNTESE MATRICIAL

En aquest capítol es pretén examinar la matriu d'acoblements que representa els filtres de microones i obtenir un equivalent circuital de la xarxa a través d'una síntesi matricial.

Modelar un circuit en forma matricial és força útil ja que totes les operacions que es poden aplicar sobre una matriu poden ésser aplicades després sobre la representació matricial d'aquest. Aquestes operacions simplifiquen el procés de síntesi i reconfiguració de la topologia i milloren el rendiment de la simulació de circuits complexes. La matriu d'acoblements pot incloure algunes de les propietats del *món real* dels elements del filtre, i, a més, permet establir una relació unívoca entre cada element d'aquesta i el seu corresponent element del filtre.

IV.1 SÍNTESE DE LA MATRIU $N+2$

IV.1.1 Matriu d'acoblements $N+2$

En aquest apartat es presenta un mètode per sintetitzar la matriu d'acoblements $N+2$ associada a una xarxa de dos ports. La matriu d'acoblements $N+2$ millora algunes de les deficiències de la síntesi de la matriu d'acoblements convencional $N \times N$ [12]. La matriu d'acoblements $N+2$ és més senzilla de sintetitzar que la matriu d'acoblements convencional $N \times N$ ja que no és necessari l'ús del mètode d'ortonormalització de Gram–Schmidt. La matriu d'acoblements $N+2$ té dues files i dues columnes que n'envolten el nucli (matriu d'acoblements convencional $N \times N$). La matriu d'acoblements $N+2$ presenta els següents avantatges respecte a la matriu convencional $N \times N$:

1. Permet considerar, a més dels acoblaments interns, els acoblaments d'entrada i sortida de la xarxa.
2. Pot sintetitzar filtres canònics.
3. Presenta certs avantatges en el procés de reducció de matrius ja que disposa de dues files i columnes extres.

La matriu d'acoblements $N+2$ associada a un filtre es genera a partir de la síntesi de la matriu d'acoblements d'un circuit “transversal” d'ordre N .

IV.1.1.1 Síntesi de la matriu d'admitància $[Y_N]$ a partir dels polinomis i constants característiques d'un filtre

Les funcions de transferència i reflexió per un filtre general de Chebyshev es poden expressar com (II.40)

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)}, \quad S_{11}(s) = \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \quad (\text{IV. 1})$$

Els polinomis numerador i denominador dels elements $y_{21}(s)$ i $y_{22}(s)$ de $[Y_N]$ es construeixen directament a partir dels polinomis de la funció de transferència i reflexió, $S_{21}(s)$ i $S_{11}(s)$. En el cas d'una xarxa de dos ports amb terminacions a la font i a la càrrega d' 1Ω [13], s'obté

$$\begin{aligned} \text{Per } N \text{ parell:} \quad y_{21}(s) &= \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{(P(s)/\varepsilon)}{m_1(s)} \\ y_{22}(s) &= \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{n_1(s)}{m_1(s)} \\ \text{Per } N \text{ imparell:} \quad y_{21}(s) &= \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{(P(s)/\varepsilon)}{n_1(s)} \\ y_{22}(s) &= \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{m_1(s)}{n_1(s)} \end{aligned} \quad (\text{IV. 2})$$

on

$$\begin{aligned} m_1(s) &= \text{Re}(e_0 + f_0) + j \text{Im}(e_1 + f_1)s + \text{Re}(e_2 + f_2)s^2 + \dots \\ n_1(s) &= j \text{Im}(e_0 + f_0) + \text{Re}(e_1 + f_1)s + j \text{Im}(e_2 + f_2)s^2 + \dots \end{aligned}$$

i e_i i f_i , $i=0,1,2,3,\dots,N$, són els coeficients complexos d' $E(s)$ i $F(s)/\varepsilon_R$ respectivament. Es podria trobar també l'element $y_{11}(s)$ però no és necessari en la síntesi de la matriu $N+2$.

Coneixent els polinomis denominador i numerador per $y_{21}(s)$ i $y_{22}(s)$, s'ha de trobar els seus residus r_{21k} i r_{22k} , $k=1,2,\dots,N$, i els valors propis reals λ_k de la xarxa a partir de les arrels del polinomi denominador $y_d(s)$, comú a ambdós $y_{21}(s)$ i $y_{22}(s)$. Les arrels del polinomi de grau N $y_d(s)$ són imaginàries pures $=j\lambda_k$. Expressant aquests residus en forma matricial s'obté la següent equació per la matriu d'admitàncies de la xarxa:

$$[Y_N] = \frac{1}{y_d(s)} \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 0 & K_\infty \\ K_\infty & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(s - j\lambda_k)} \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 3})$$

Aquí, la constant real $K_\infty = 0$, excepte en el cas de tenir un filtre canònic, pel qual el nombre de zeros de transmissió de posició finita n_{fz} és igual a l'ordre del filtre N ($n_{fz}=N$). En aquest cas, el grau

de $y_{21n}(s)$ és igual al grau del denominador $y_d(s)$ i K_∞ s'ha d'extreure primer de $y_{21}(s)$, per reduir-ne el seu grau en un, abans de poder-ne trobar el seu residu r_{21k} . Cal destacar que en el cas canònic, on la quantitat entera $N-n_{fz}=0$ és parella, és necessari multiplicar $P(s)$ per j per assegurar que la condició d'unitarietat en la matriu d' scattering es satisfà.

El valor de K_∞ per filtres canònics el podem trobar com:

$$jK_\infty = \left. \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} \right|_{s=j\infty} = \left. \frac{jP(s)/\varepsilon}{y_d(s)} \right|_{s=j\infty} \quad (\text{IV. 4})$$

El procés de construcció de $y_d(s)$ a partir de l'equació (IV.2) resulta en un valor del coeficient de major grau de $1+1/\varepsilon_R$; i com que el coeficient de major grau de $P(s)=1$, el valor de K_∞ es pot trobar com segueix

$$K_\infty = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(1+1/\varepsilon_R)} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} \frac{1}{(\varepsilon_R+1)} \quad (\text{IV. 5})$$

Partint de l'equació (II.37) es pot expressar K_∞ com

$$K_\infty = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} (\varepsilon_R - 1) \quad (\text{IV. 6})$$

El nou polinomi numerador $y'_{21n}(s)$ es determina ara

$$y'_{21n}(s) = y_{21n}(s) - jK_\infty y_d(s) \quad (\text{IV. 7})$$

que és de grau $N-1$, i els residus r_{21k} de $y'_{21}(s) = y'_{21n}(s)/y_d(s)$ poden ser ara determinats amb normalitat.

IV.1.1.2 Síntesi de la matriu d'admitància $[Y_N]$ a partir de l'anàlisi de la xarxa transversal canònica

La matriu d'admitàncies $[Y_N]$ es pot sintetitzar, a més de amb el mètode vist anteriorment, a partir de la consideració de la xarxa transversal canònica de la Figura IV.1.

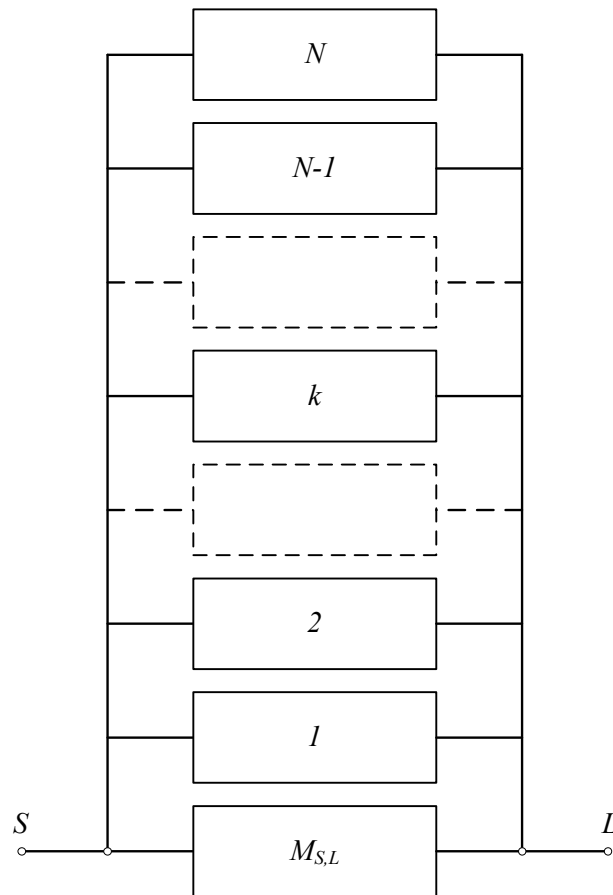


Figura 0.1 Matriu transversal d'N ressonadors incloent l'acoblament directe entre la font i la càrrega

La matriu transversal està constituïda per una sèrie d'N seccions individuals de primer grau (ressonadors) connectats en paral·lel entre la font i la càrrega de la xarxa. L'inversor de l'acoblament directe entre la font i la càrrega M_{SL} s'ha d'incloure per permetre la realització de la funció de transferència canònica. Segons la regla de la ruta més curta (n_{fmax}), el nombre màxim de zeros de transmissió que poden realitzar-se amb una xarxa = $N - n_{min}$ on n_{min} és el nombre de nodes ressonants en el camí més curt entre la font i la càrrega. Tenint en compte que en les xarxes canòniques $n_{min}=0$ es té que $n_{fmax}=N$, l'ordre de la xarxa. Es demostra [8] que el valor d' M_{SL} és igual a K_{∞} .

Cada una de les N seccions passabaix consisteix en un condensador en paral·lel C_k i una susceptància invariant en freqüència B_k connectats a través d'inversors d'admitància d'admitància característica M_{S_k} i M_{L_k} a la font i a la càrrega respectivament.

El ressonador k -èssim de la xarxa de la Figura 0.1 es pot veure en més detall en la Figura IV.2.

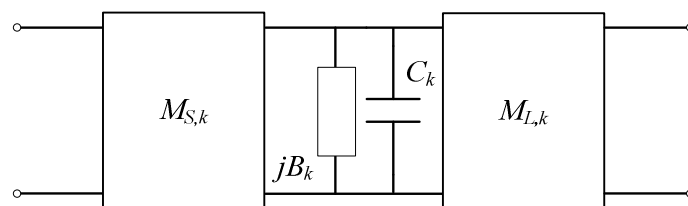


Figura 0.2 Circuit equivalent del ressonador k -èssim de la matriu transversal

La matriu $[ABCD]$ de la xarxa de la Figura 0.2 és:

$$[ABCD]_k = - \begin{bmatrix} \frac{M_{Lk}}{M_{Sk}} & (sC_k + jB_k) \\ 0 & \frac{M_{Sk}M_{Lk}}{M_{Lk}} \\ & \frac{M_{Sk}}{M_{Lk}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 8})$$

Aquesta, es pot convertir directament a la matriu de paràmetres y equivalent

$$\begin{aligned} [y_k] &= \begin{bmatrix} y_{11k}(s) & y_{12k}(s) \\ y_{21k}(s) & y_{22k}(s) \end{bmatrix} = \frac{M_{Sk}M_{Lk}}{(sC_k + jB_k)} \begin{bmatrix} \frac{M_{Sk}}{M_{Lk}} & 1 \\ 1 & \frac{M_{Lk}}{M_{Sk}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(sC_k + jB_k)} \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk}M_{Lk} \\ M_{Sk}M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV. 9})$$

Així, la matriu d'admitància $[Y_N]$ de la xarxa transversal canònica de la Figura IV.1 es pot generar sumant les matrius d'admitància $[y_k]$ de cada una de les N seccions més la matriu d'admitància de l'inversor d'acoblament entre l'entrada i la sortida de la xarxa $[y_{SL}]$

$$\begin{aligned} [Y_N] &= \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = [y_{SL}] + \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} y_{11k}(s) & y_{12k}(s) \\ y_{21k}(s) & y_{22k}(s) \end{bmatrix} \\ &= j \begin{bmatrix} 0 & M_{SL} = K_\infty \\ M_{SL} = K_\infty & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(sC_k + jB_k)} \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk}M_{Lk} \\ M_{Sk}M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV. 10})$$

IV.1.1.3 Síntesi de la matriu $[M]$ d'acoblements transversal $N+2$

Igualant ambdues expressions obtingudes de la matriu $[Y_N]$, una en termes de residus (IV.3) i l'altra en termes dels elements del circuit transversal de la Figura IV.1 (IV.10), s'obté:

$$\frac{r_{21k}}{(s - j\lambda_k)} = \frac{M_{Sk} M_{Lk}}{(sC_k + jB_k)} \quad (\text{IV. 11})$$

$$\frac{r_{22k}}{(s - j\lambda_k)} = \frac{M_{Lk}^2}{(sC_k + jB_k)}$$

d'on, resolent, es té

$$C_k = 1 \quad (\text{IV. 12})$$

$$B_k (\equiv M_{kk}) = -\lambda_k \quad (\text{IV. 13})$$

$$M_{Lk}^2 = r_{22k}, \quad M_{Lk} = \sqrt{r_{22k}} = T_{Nk} \quad (\text{IV. 14})$$

$$M_{Sk} M_{Lk} = r_{21k}, \quad M_{Sk} = r_{21k} / \sqrt{r_{22k}} = T_{1k} \quad (\text{IV. 15})$$

per $k=1,2,3,\dots,N$.

En aquest punt, s'extreu que:

- M_{Sk} i M_{Lk} constitueixen els autovectors T_{1k} i T_{Nk} , respectivament, de la matriu ortogonal $[T]$
- Els condensadors C_k de la xarxa són unitaris.
- Els elements $B_k = -\lambda_k$ representen els auto-acoblaments M_{kk} .

Ara, definits i calculats tots els elements de la xarxa, es pot construir la matriu $[M]$ d'acoblaments transversal $N+2$ representada en la Figura 0.3:

	S	1	2	3	\dots	k	\dots	$N-1$	N	L
S		$M_{S,1}$	$M_{S,2}$	$M_{S,3}$	\dots	$M_{S,k}$	\dots	$M_{S,N-1}$	$M_{S,N}$	K_{inf}
1	$M_{L,1}$	M_{11}								$M_{L,1}$
2	$M_{L,2}$		M_{22}							$M_{L,2}$
3	$M_{L,3}$			M_{33}						$M_{L,3}$
\vdots	\vdots				\ddots					\vdots
k	$M_{L,k}$					M_{kk}				$M_{L,k}$
\vdots	\vdots						\ddots			\vdots
$N-1$	$M_{L,N-1}$							\ddots		$M_{L,N-1}$
N	$M_{L,N}$								M_{NN}	$M_{L,N}$
L	K_{inf}	$M_{S,L}$	$M_{S,L}$	$M_{S,L}$	\dots	$M_{S,L}$	\dots	$M_{S,L}$	$M_{S,L}$	

Figura 0.3 Matriu $[M]$ d'acoblaments transversal canònica $N+2$

IV.1.2 Matriu d'acoblaments “Folded Coupling Matrix” [FCM]

Els elements no nuls de la matriu d'acoblaments $[M]$, resultant del procés de síntesi anterior, són els representats en la Figura IV.3. La diagonal principal conté els “offsets”, respecte la freqüència central de cada ressonador (sintonitzats asimètricament), que apareixen en xarxes elèctricament asimètriques. Fora de la diagonal principal, els valors no nuls mostren els acoblaments entre cada ressonador i el node d'entrada i sortida i els altres ressonadors i els nodes d'entrada i sortida. La topologia transversal és poc pràctica de realitzar per a la majoria dels casos i s'ha de transformar ,aplicant un conjunt de rotacions, per minimitzar els acoblaments i obtenir una topologia més convenient.

Hi ha diverses formes de manipular la matriu d'acoblaments sense alterar-ne la seva resposta freqüencial. Una de les més útils resulta ser la seva forma “folded” [14]-[15]. En la Figura 0.5 es pot observar la “folded coupling matrix” $N+2$, a la que a partir d'ara ens referirem com a matriu d'acoblaments [FCM]. En la Figura 0.4 es presenta una xarxa canònica en la seva forma “folded”.

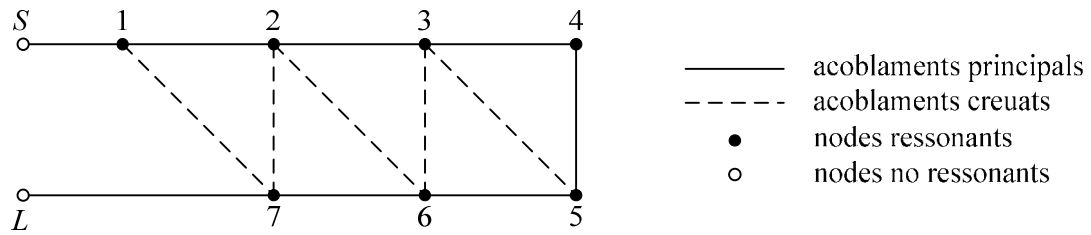


Figura 0.4 Xarxa canònica 7x7 en la seva forma "folded"

	1	2	3	4	5	6	7
1	<i>s</i>	<i>m</i>					<i>xa</i>
2	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>m</i>			<i>xa</i>	<i>xs</i>
3		<i>m</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>xa</i>	<i>xs</i>	
4			<i>m</i>	<i>s</i>	<i>m</i>		
5			<i>xa</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	
6		<i>xa</i>	<i>xs</i>		<i>m</i>	<i>s</i>	<i>m</i>
7	<i>xa</i>	<i>xs</i>				<i>m</i>	<i>s</i>

Els elements no nuls són

- s* → auto-acoblaments
- m* → acoblaments principals
- xa* → acoblaments creuats asimètrics
- xs* → acoblaments creuats simètrics

Figura 0.5 Matriu FCM 7x7 (per xarxes amb característiques simètriques els acoblaments *s* i *xa* són igual a zero)

La matriu d'acoblaments FCM es genera a través d'un procés de reducció de matrius, descrit en projectes previs, aplicant el que es pot anomenar rotacions matricials.

IV.1.3 Exemple de síntesi matricial

◆ EXEMPLE 1

Com a primer exemple de topologia es parteix d'un filtre Chebyshev simètric d'ordre 6 ($N=6$) amb tots els zeros de transmissió a $\pm j\infty$ (Chebyshev *convencional*) i unes pèrdues de retorn de $L_r = 22$ dB.

A partir dels polinomis i constants característiques del filtre resumits en la Taula IV.1 s'obté els valors necessaris per construir la matriu $[M]$ d'acoblements transversals $N+2$.

$s^i, i =$	$P(s)$	$F(s)$	$E(s)$	<i>Arrels de P(s)</i>	<i>Arrels d'F(s)</i>	<i>Arrels d'E(s)</i>
0	$j1.0000$	0.0310	0.3930	$-j\infty$	$-j0.9660$	$-0.5440-j0.2970$
1	0	0	1.5890	$-j\infty$	$-j0.7070$	$-0.3990-j0.8120$
2	0	0.5620	3.2530	$-j\infty$	$-j0.2590$	$-0.1460-j1.1090$
3	0	0	4.1600	$j\infty$	$j0.2590$	$-0.1460+j1.1090$
4	0	1.5000	3.8710	$j\infty$	$j0.7070$	$-0.3990+j0.8120$
5	0	0	2.1780	$j\infty$	$j0.9660$	$-0.5440+j0.2970$
6	0	1.0000	1.0000			
\mathcal{E}		2.5499				
\mathcal{E}_R		1.0000				

Taula IV.1 Polinomis característics per un filtre Chebyshev simètric d'ordre $N=6$ amb zeros a $\pm j\infty$ i $L_r = 22$ dB

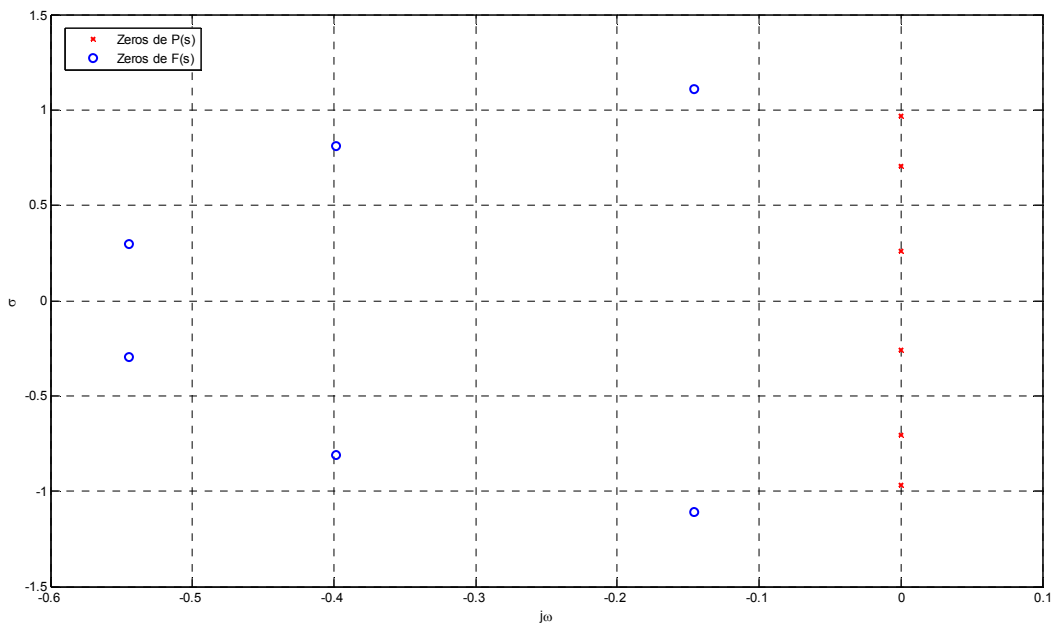


Figura IV.6 Arrels dels polinomis característics en el pla-s

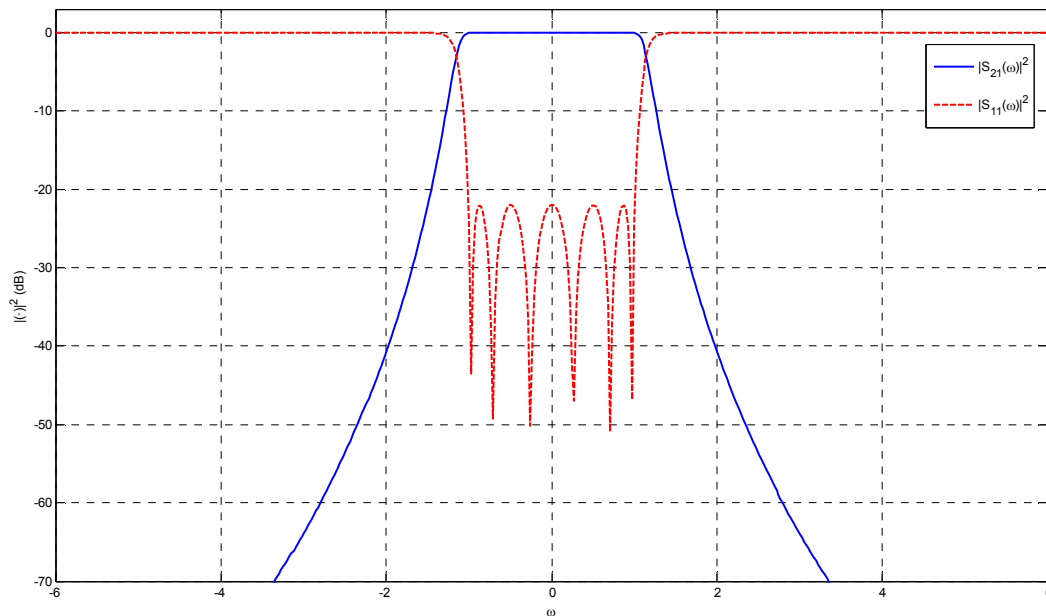


Figura IV.7 Funció de transferència i reflexió d'un filtre Chebyshev d'ordre N=6 i zeros a $\pm j\infty$

I trobem la matriu d'acoblements $[M]$ i la matriu d'acoblements $[FCM]$ que representen al filtre Chebyshev:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0.3350 & -0.4650 & 0.4640 & -0.4640 & 0.4650 & -0.3350 & 0 \\ 0.3350 & 1.2360 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3350 \\ -0.4650 & 0 & 1.0110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4650 \\ 0.4640 & 0 & 0 & 0.3690 & 0 & 0 & 0 & 0.4640 \\ -0.4640 & 0 & 0 & 0 & -0.3690 & 0 & 0 & 0.4640 \\ 0.4650 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0110 & 0 & 0.4650 \\ -0.3350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2360 & 0.3350 \\ 0 & 0.3350 & 0.4650 & 0.4640 & 0.4640 & 0.4650 & 0.3350 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[FCM] = \begin{bmatrix} 0 & 1.0430 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0430 & 0 & 0.8810 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8810 & 0 & 0.6250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6250 & 0 & 0.5940 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5940 & 0 & 0.6250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6250 & 0 & 0.8810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8810 & 0 & 1.0430 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0430 & 0 \end{bmatrix}$$

En la Figura IV.8 podem veure el circuit associat a la matriu d'acoblaments $[FCM]$ anterior i els valors dels acoblaments principals entre els nodes ressonants.

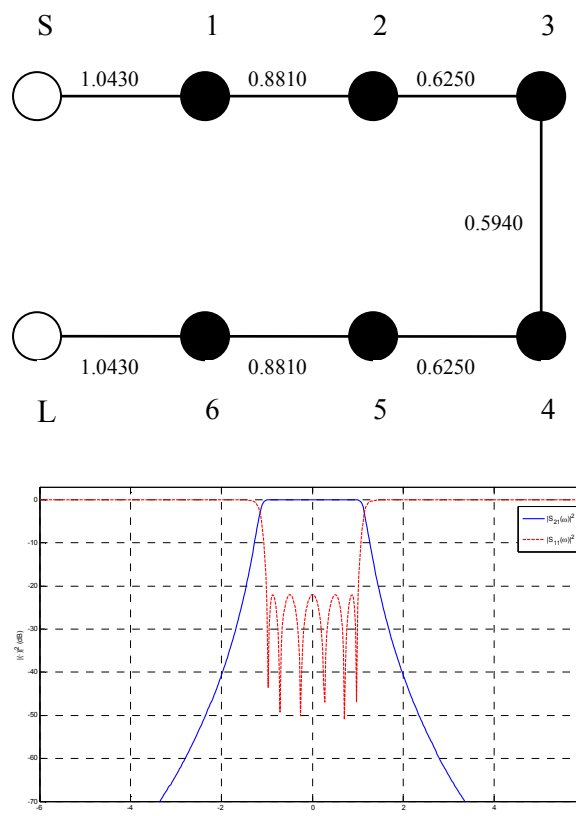


Figura IV.8 Xarxa que representa un filtre Chebyshev simètric d'ordre 6 amb $L_r = 22 \text{ dB}$ i zeros a $\pm j\infty$

La xarxa representada en la Figura IV.8 es coneix com topologia en línia. Aquesta no permet camins addicionals ni zeros de transmissió. Els zeros de la diagonal principal de la matriu $[FCM]$ comporten que les freqüències centrals de ressonància de cada ressonador són síncrones (sintonitzades simètricament).

◆ EXEMPLE 2

Aquest exemple es basa en el filtre anterior (Chebyshev simètric d'ordre 6 amb $L_r = 22dB$) però afegint zeros de transmissió a $+j1.6 +j1.3 -j1.3 -j1.6$. A partir dels polinomis característics ja calculats en el capítol II (Taula II.4) podem extraure les matrius següents:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0.2900 & -0.4170 & 0.5220 & -0.5220 & 0.4170 & -0.2900 & 0 \\ 0.2900 & 1.1640 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2900 \\ -0.4170 & 0 & 1.0940 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4170 \\ 0.5220 & 0 & 0 & 0.4960 & 0 & 0 & 0 & 0.5220 \\ -0.5220 & 0 & 0 & 0 & -0.4960 & 0 & 0 & 0.5220 \\ 0.4170 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0940 & 0 & 0.4170 \\ -0.2900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1640 & 0.2900 \\ 0 & 0.2900 & 0.4170 & 0.5220 & 0.5220 & 0.4170 & 0.2900 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[FCM] = \begin{bmatrix} 0 & 1.0300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0300 & 0 & 0.8530 & 0 & 0 & 0 & 0.0800 & 0 \\ 0 & 0.8530 & 0 & 0.5390 & 0 & -0.3220 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5390 & 0 & 0.8080 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8080 & 0 & 0.5390 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3220 & 0 & 0.5390 & 0 & 0.8530 & 0 \\ 0 & 0.0800 & 0 & 0 & 0 & 0.8530 & 0 & 1.0300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0300 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriu $[FCM]$ se'n deriva el circuit presentat en la Figura IV.9. En aquest es mostra els signes dels acoblaments principals i creuats entre els nodes ressonants. El que diferencia la topologia del primer exemple de l'actual és l'aparició d'acoblaments creuats entre els nodes ressonants i que alguns d'aquests acoblaments són de signe negatiu. Això és el que permet tenir respostes amb zeros de transmissió. Els valors de la diagonal principal de la matriu $[FCM]$ continuen sent nuls i com a conseqüència, es manté la sincronia de les freqüències centrals de ressonància dels ressonadors.

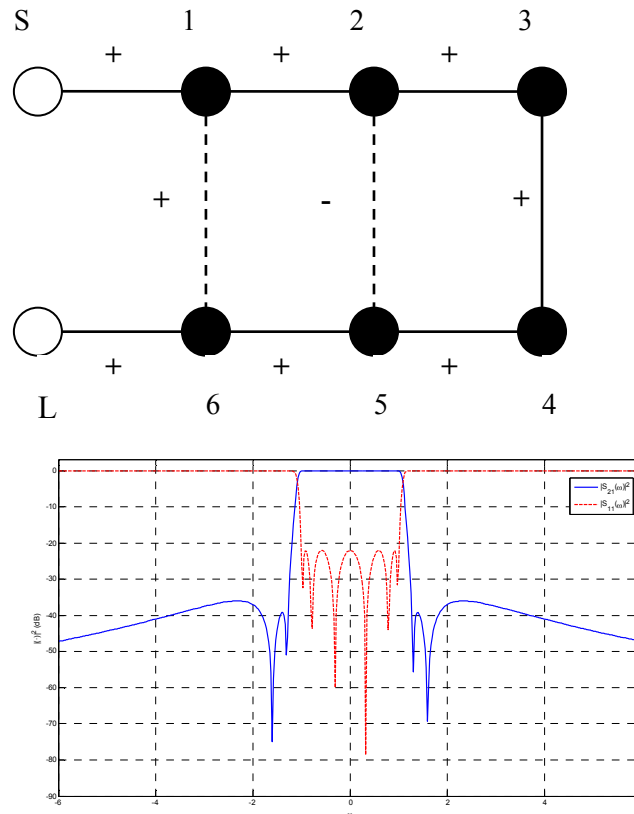


Figura IV.9 Xarxa d'un filtre Chebyshev simètric d'ordre 6 amb $L_r = 22 \text{ dB}$ i zeros a $+j1.6 + j1.3 - j1.3 - j1.6$

◆ EXEMPLE 3

Finalment, es presenta un exemple de filtre Chebyshev asimètric d'ordre 6 ($N=6$) amb els zeros de transmissió a $+j1.2 + j1.3 + j1.4 + j1.5$ i unes pèrdues de retorn de $L_r=22\text{dB}$. És un filtre analitzat també en el capítol II i els seus polinomis característics es troben a la Taula II.5. Les matrius resultants, en aquest cas, són:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0.4990 & -0.6260 & 0.4480 & -0.2670 & 0.3420 & -0.3210 & 0 \\ 0.4990 & 1.4500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4990 \\ -0.6260 & 0 & 0.4550 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6260 \\ 0.4480 & 0 & 0 & -0.5380 & 0 & 0 & 0 & 0.4480 \\ -0.2670 & 0 & 0 & 0 & -0.9320 & 0 & 0 & 0.2670 \\ 0.3420 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1190 & 0 & 0.3420 \\ -0.3210 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1230 & 0.3210 \\ 0 & 0.4990 & 0.6260 & 0.4480 & 0.2670 & 0.3420 & 0.3210 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[FCM] = \begin{bmatrix} 0 & 1.0640 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0640 & 0.1050 & 0.9280 & 0 & 0 & 0 & 0.1120 & 0 \\ 0 & 0.9280 & 0.0940 & 0.3690 & 0 & 0.4310 & 0.4080 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3690 & -0.7930 & 0.0320 & 0.2100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0320 & -0.9910 & 0.1270 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4310 & 0.2100 & 0.1270 & -0.3290 & 0.8330 & 0 \\ 0 & 0.1120 & 0.4080 & 0 & 0 & 0.8330 & 0.1050 & 1.0640 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0640 & 0 \end{bmatrix}$$

En aquest cas la matriu $[FCM]$ dona lloc a la següent xarxa (Figura IV.9):

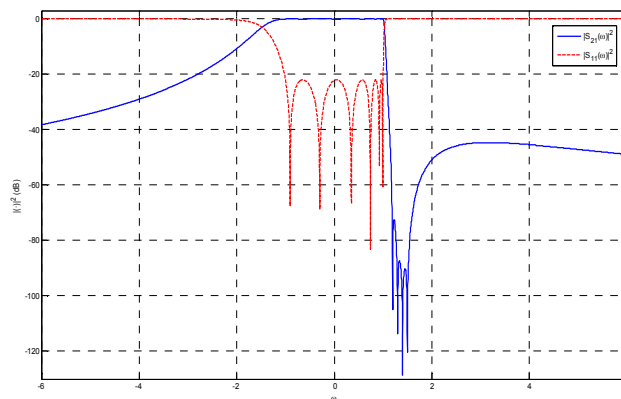
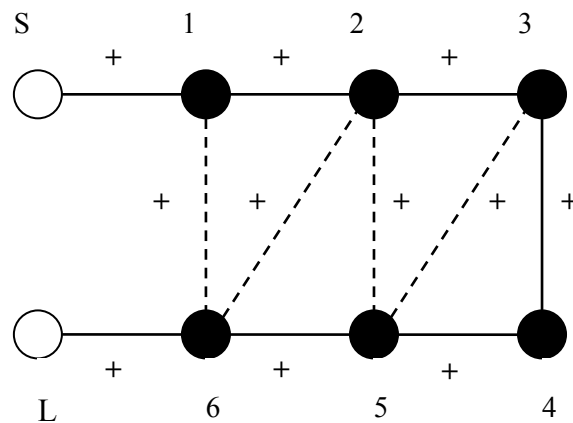


Figura IV.10 Xarxa d'un filtre Chebyshev asimètric d'ordre 6 amb $L_r = 22 \text{ dB}$ i zeros a $+j1.2 + j1.3 + j1.4 + j1.5$

En el circuit de la Figura IV.10 es mostra els signes dels acoblaments principals i creuats entre els nodes ressonants. El nombre d'acoblaments creuats respecte de l'exemple anterior ha augmentat i ara els valors de la diagonal principal (auto-acoblaments) de la matriu $[FCM]$ són no nuls. Aquests

valors representen els “offsets” de la freqüència central de ressonància de cada ressonador (sintonitzats asimètricament) i només apareixen per xarxes elèctricament asimètriques.

IV.2 CONCLUSIONS

Els punts claus que es pot extreure d'aquest capítol són:

- La representació del circuit en forma matricial permet simplificar el procés de síntesi i reconfiguració de la topologia ja que les operacions que s'apliquen sobre la matriu es poden traduir sobre el circuit.
- S'ha construït la matriu $[M]$ d'acoblaments transversal $N+2$ igualant les síntesis de la matriu d'admitàncies $[Y_N]$ a partir dels polinomis i constants característiques i a partir de la xarxa transversal canònica.
- S'ha aplicat satisfactòriament un procés de reducció (rotació) matricial, descrit en projectes anteriors, sobre la matriu d'acoblaments de filtres Chebyshev generals per obtenir la matriu “*folded coupling matrix*” o $[FCM]$ que presenta una topologia molt més pràctica de realitzar i amb menys acoblaments que la transversal. Finalment, s'ha mostrat diferents exemples de topologies corresponents filtres Chebyshev generals.

V - CONCLUSIONS I LINIES FUTURES

Aquest projecte ha contribuït dins el projecte *New Class of Receiver filter for Space applications*, que s'està desenvolupant per l'Agència Espacial Europea, en el desenvolupament genèric dels polinomis generals de Chebyshev i la síntesi de filtres Chebyshev generals. El mètode recursiu resultant d'aquest desenvolupament permet calcular els polinomis i constants característiques de filtres Chebyshev generals en funció d'uns determinats paràmetres de disseny. Aquesta funció recursiva s'ha incorporat finalment al *software* definitiu.

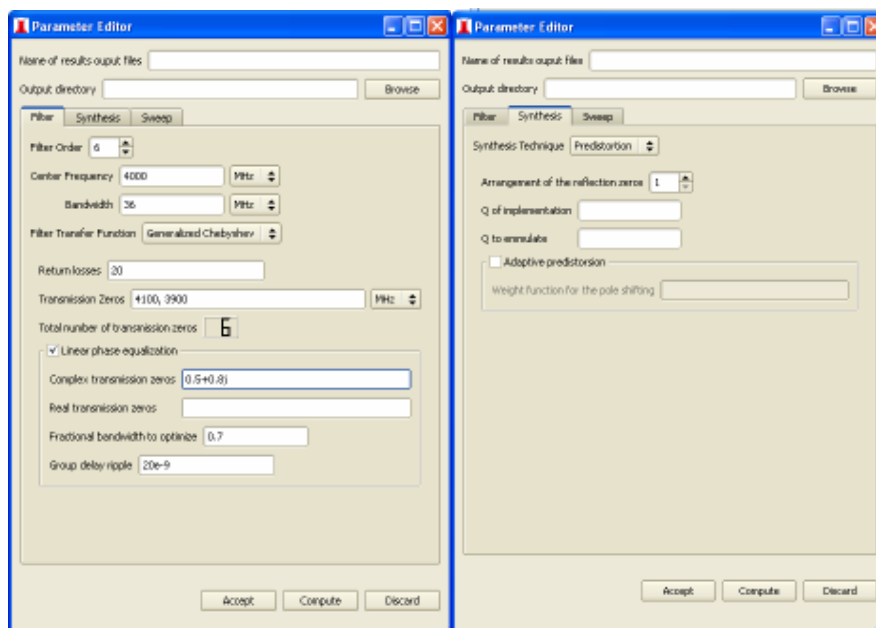


Figura V.1 Pantalla de selecció dels paràmetres de disseny per a la generació de la resposta d'un filtre Chebyshev General

A partir d'aquí s'ha adaptat el mètode de la predistorsió, tant total com parcial, per poder-lo aplicar sobre els polinomis resultants de la síntesi del filtre. Aquesta adaptació resulta en una millora de la resposta del filtre en la banda de pas en detriment de les pèrdues de retorn. Aquest augment de la reflexió de la xarxa es pot pal·liar amb la inserció d'aïlladors a l'entrada i sortida de la xarxa. Una limitació afegida d'aquesta tècnica és que el límit inferior del factor de qualitat ve fixat per la freqüència central del filtre, la seva amplada de banda i el valor mínim de la part real de les arrels del polinomi $E(s)$ que representa el filtre. S'ha proposat també un mètode d'equalització, basat en aquests polinomis, que permet obtenir filtres Chebyshev amb fase equalitzada.

Finalment, s'ha generat la matriu d'acoblements que representa els filtres de microones i, utilitzant rotacions matricials desenvolupades en projectes anteriors, s'ha arribat a la *folded coupling matrix*. Aquesta síntesi matricial està justificada pel fet que la forma *folded* és més pràctica d'implementar i redueix el nombre d'acoblements respecte de la transversal.

Com a futures línies d'actuació es pot pensar en la obtenció de noves matrius d'acoblament que ens donin la mateixa resposta freqüencial. Fixem-nos que aquest punt es altrament important des del punt de vista pràctic ja que ens determina la forma en que els ressonadors es troben distribuïts al llarg de la xarxa i quin acoblament tenen entre ells. Com a resultat ens podem trobar que dues

xarxes diferents que donen la mateixa resposta elèctrica tinguin unes prestacions mecàniques totalment diferents, de manera que la sensibilitat, toleràncies i fins i tot efectes tèrmics siguin molt diferents. La possibilitat doncs de tenir noves xarxes ens permetria escollir quina és la millor configuració de xarxa en funció tecnologia a utilitzar (ja siguin estructures planar or estructures 3D) i l'aplicació i entorn en que es trobarà el nostre filtre.

Annex A – NORMES ASSOCIADES A LA CONDICIÓN UNITÀRIA D'ORTOGONALITAT

Partint de les equacions d'unitarietat:

$$S_{11}(s) \cdot S_{11}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{21}(s)^* = 1 \quad (\text{AA. 1})$$

$$S_{22}(s) \cdot S_{22}(s)^* + S_{12}(s) \cdot S_{12}(s)^* = 1 \quad (\text{AA. 2})$$

$$S_{11}(s) \cdot S_{12}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{22}(s)^* = 0 \quad (\text{AA. 3})$$

La consideració de la condició unitària d'ortogonalitat (AA. 3) proporciona una important relació entre les fases dels polinomis $S_{11}(s)$, $S_{22}(s)$ i $S_{21}(s)$ i entre els zeros d' $S_{11}(s)$ i $S_{22}(s)$ en el pla complex s . Aplicant la condició de reciprocitat $S_{12}(s) = S_{21}(s)$ a les condicions d'unitarietat descrites en (AA. 1), (AA. 2) i (AA. 3) s'obté:

$$S_{11}(s) \cdot S_{11}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{21}(s)^* = 1 \quad (\text{AA. 4})$$

$$S_{22}(s) \cdot S_{22}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{21}(s)^* = 1 \quad (\text{AA. 5})$$

$$S_{11}(s) \cdot S_{21}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{22}(s)^* = 0 \quad (\text{AA. 6})$$

Passant aquests vectors a coordenades polars i obviant, de moment i per simplificar la presentació, la notació d' s , $S_{11} = |S_{11}| \cdot e^{j\theta_{11}}$, $S_{22} = |S_{22}| \cdot e^{j\theta_{22}}$ i $S_{21} = |S_{21}| \cdot e^{j\theta_{21}}$. De les equacions (AA. 4), (AA. 5) i (AA. 6) es pot extreure que $|S_{11}| = |S_{22}|$, i per tant :

$$|S_{21}|^2 = 1 - |S_{11}|^2 \quad (\text{AA. 7})$$

i reescrivint l'equació (AA. 6) en la seva forma polar, s'obté:

$$\begin{aligned} |S_{11}| \cdot e^{j\theta_{11}} \cdot |S_{21}| \cdot e^{-j\theta_{21}} + |S_{21}| \cdot e^{j\theta_{21}} \cdot |S_{22}| \cdot e^{-j\theta_{22}} &= 0 \\ |S_{11}| \cdot |S_{21}| \cdot (e^{j(\theta_{11}-\theta_{21})} + e^{j(\theta_{21}-\theta_{22})}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{AA. 8})$$

Aquesta equació només es satisfà si:

$$e^{j(\theta_{11}-\theta_{21})} = -e^{j(\theta_{21}-\theta_{22})} \quad (\text{AA. 9})$$

Substituint el signe negatiu de la part dreta de la igualtat per $e^{j(2k \pm 1)\pi}$, on k és enter llavors tenim:

$$e^{j(\theta_{11}-\theta_{21})} = e^{j((2k \pm 1)\pi + \theta_{21} - \theta_{22})} \quad (\text{AA. 10})$$

o, indistintament:

$$\theta_{21} - \frac{(\theta_{11} + \theta_{22})}{2} = \frac{\pi}{2}(2k \pm 1) \quad (\text{AA. 11})$$

Donat que els vectors $S_{11}(s)$, $S_{22}(s)$ i $S_{21}(s)$ estan representats per polinomis en la variable s i comparteixen un denominador polinòmic comú $E(s)$ les seves fases són:

$$\begin{aligned} \theta_{21}(s) &= \theta_{n21}(s) - \theta_d(s) \\ \theta_{11}(s) &= \theta_{n11}(s) - \theta_d(s) \\ \theta_{22}(s) &= \theta_{n22}(s) - \theta_d(s) \end{aligned} \quad (\text{AA. 12})$$

on $\theta_d(s)$ és l'angle del denominador polinòmic comú $E(s)$, i $\theta_{n21}(s)$, ... són els angles del numerador polinòmic $S_{21}(s)$, etc.

Substituint aquestes fases separades en l'equació (AA. 11), els $\theta_d(s)$ es cancel·len i s'obté la següent important relació:

$$-\theta_{n21}(s) - \frac{(\theta_{n11}(s) + \theta_{n22}(s))}{2} = \frac{\pi}{2}(2k \pm 1) \quad (\text{AA. 13})$$

Aquesta equació estableix que per qualsevol valor de freqüència s , la diferència entre l'angle del numerador del vector $S_{21}(s)$ i la mitja de les fases dels numeradors dels vectors $S_{11}(s)$ i $S_{22}(s)$ ha de ser un múltiple imparell de $\pi/2$ radians, això és, ortogonals. La independència d' s de la part dreta de l'equació (AA. 13) permet extraure dos propietats importants de $\theta_{n21}(s)$, $\theta_{n11}(s)$ i $\theta_{n22}(s)$:

- El polinomi numerador d' $S_{21}(s)$ ($P(s)/\varepsilon$) ha de tenir els seus zeros en l'eix imaginari del pla complex s o en parelles conjugades simètricament disposades al llarg de l'eix imaginari. Així, el valor de $\theta_{n21}(s)$ [l'angle de $P(s)$] ha de romandre en un nombre enter de $\pi/2$ a qualsevol posició d' s , al llarg de l'eix imaginari des de $-j\infty$ fins a $+j\infty$.
- Igualment, la mitja de les fases dels polinomis numeradors d' $S_{11}(s)$ i d' $S_{22}(s)$, $(\theta_{n11}(s) + \theta_{n22}(s))/2$, han de ser avaluades per un nombre enter de $\pi/2$ per qualsevol valor des de $-j\infty$ fins a $+j\infty$. Això implica que els zeros del polinomi numerador d' $S_{11}(s)$ [és a dir, les arrels d' $F(s)$] i els zeros del polinomi numerador d' $S_{22}(s)$ [és a dir, les arrels d' $F_{22}(s)$], han de ser iguals en l'eix imaginari o han d'estar disposats com parelles conjugades al llarg de l'eix imaginari.

Cal remarcar que formalment, si el numerador d' $S_{22}(s)$ és $F_{22}(s)$, llavors el numerador d' $S_{11}(s)$ hauria de ser $F_{11}(s)$. No obstant, l'ús comú fa que $F(s) \equiv F_{11}(s)$.

En la Figura A.1 i en la Figura A.2 es pot observar la definició d'aquests angles.

De les dues propietats esmentades, la segona permet relacionar els polinomis numerador d' $S_{11}(s)$ i d' $S_{22}(s)$, és a dir, $F(s)$ i $F_{22}(s)$, respectivament. Si els seus zeros (arrels) coincideixen amb l'eix

imaginari o estan disposats simètricament al llarg de l'eix imaginari, llavors el zero i -èssim d' $F_{22}(s)$, és a dir, s_{22i} , es relaciona amb el corresponent zero d' $F(s)$, (s_{11i}) com segueix:

$$s_{22i} = -s_{11i}^* \quad (\text{AA. 14})$$

on $i = 1, 2, \dots, N$.

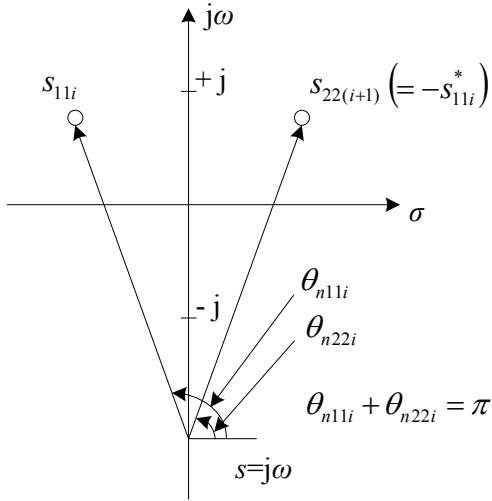


Figura A.1 Angles per una parella de zeros d' $S_{21}(s)$ per una posició arbitrària del valor de freqüència s en l'eix imaginari.

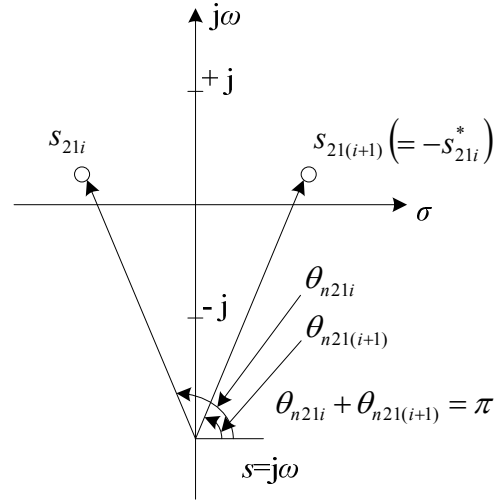


Figura A.2 Angles per un zero d' $S_{21}(s)$ i el seu zero complementari $S_{22}(s)$ per una posició arbitrària del valor de freqüència s en l'eix imaginari

Construint el polinomi $F_{22}(s)$, a partir d' s_{22i} , s'obté:

$$F_{22}(s) = \prod_{i=1}^N (s - s_{22i}) = \prod_{i=1}^N (s + s_{11i}^*) = (-1)^N \cdot \prod_{i=1}^N (s - s_{11i})^* \quad (\text{AA. 15})$$

Sabent que el polinomi $F(s) = \prod_{i=1}^N (s - s_{11i})$, s'arriba a que:

$$F_{22}(s) = (-1)^N \cdot F(s)^* \quad (\text{AA. 16})$$

Això, condueix a la primera norma associada a la condició d'ortogonalitat:

- 1. El numerador polinòmic d' $S_{22}(s)$, $F_{22}(s)$, pot formar-se a partir del producte dels zeros conjugats negatius d' $F(s)$, o a partir del conjugat del polinomi $F(s)$ multiplicat per -1 quan N és un enter imparell.**

La multiplicació per -1 , quan N és imparell, dona una expressió per l'angle d' $F_{22}(s)$:

$$\theta_{n22}(s) = -\theta_{n11}(s) + N\pi \quad (\text{AA. 17})$$

I, substituint l'equació (AA. 17) en l'equació (AA. 13), es té:

$$-\theta_{n_{21}}(s) + \frac{N\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2k \pm 1) \quad (\text{AA. 18})$$

Finalment, es torna a $\theta_{n_{21}}(s)$. Aquest és l'angle del polinomi denominador de $S_{21}(s)$, $P(s)$, que és de grau n_{fz} , el nombre de posicions finites dels zeros de transmissió de la funció de transferència. Donada la simetria d'aquests zeros de transmissió sobre l'eix imaginari, $\theta_{n_{21}}(s)$ és un número enter de $\pi/2$ tot i el valor d' s i d' n_{fz} (Figura A.1), representat com:

$$\theta_{n_{21}}(s) = \frac{n_{fz}\pi}{2} + k_1\pi \quad (\text{AA. 19})$$

on k_1 és un enter. I, substituint en l'equació (AA. 18), s'obté:

$$\begin{aligned} -\frac{n_{fz}\pi}{2} - k_1\pi + \frac{N\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}(2k \pm 1) & (\text{AA. 20}) \\ (N - n_{fz})\frac{\pi}{2} - k_1\pi &= \frac{\pi}{2}(2k \pm 1) \end{aligned}$$

L'equació (AA. 20) implica que el nombre enter de vegades $(N - n_{fz})$ ha de ser un número imparell, de forma que, la part dreta de l'equació es satisfaci. Pels casos en que $(N - n_{fz})$ sigui parell, llavors s'ha d'afegir $\pi/2$ radians a la part esquerra de l'equació (AA. 20) per mantenir la condició d'ortogonalitat, que és el mateix que afegir $\pi/2$ a $\theta_{n_{21}}(s)$ en la part esquerra de l'equació (AA. 19). Afegir $\pi/2$ a $\theta_{n_{21}}(s)$ és l'equivalent a multiplicar el polinomi $P(s)$ per j , que constitueix la segona de les normes associades a la condició d'ortogonalitat:

2. **Quan els coeficients de major grau dels polinomis de grau N , $E(s)$ i $F(s)$ i el polinomi de grau n_{fz} ($\leq N$) es normalitzen a la unitat (és a dir són polinomis mònic), llavors el polinomi $P(s)$ s'ha de multiplicar per j quan la quantitat entera $(N - n_{fz})$ és parell.**

Annex B – CONJUGAT D'UN POLINOMI

Per un polinomi de grau N , $Q(s)$, amb variable $s = j\omega$ purament imaginària i coeficients complexos q_i , $i = 1, 2, \dots, N$, $Q(s)^*$ és equivalent a $Q^*(s^*)$ o $Q^*(-s)$, forma poder més familiar.

Si

$$Q(s) = q_0 + q_1 \cdot s + q_2 \cdot s^2 + \dots + q_N \cdot s^N \quad (\text{AB. 1})$$

Llavors:

$$Q(s)^* = Q^*(-s) = q_0^* - q_1^* \cdot s + q_2^* \cdot s^2 - \dots + q_N^* \cdot s^N \quad \text{per } N \text{ parell} \quad (\text{AB. 2})$$

$$\dots - q_N^* \cdot s^N \quad \text{per } N \text{ imparell}$$

L'efecte d'aquesta operació de conjugació (altrament dit, paraconjugació) és reflectir la simetria de les singularitats complexos de $Q(s)$ sobre l'eix imaginari [de forma oposada a l'efecte de reflectir sobre l'eix real mitjançant l'operació $Q(s) \rightarrow Q^*(s)$]. Si les N singularitats en el pla complex de $Q(s)$ son s_{0k} , $k = 1, 2, \dots, N$, llavors les singularitats de $Q(s)^*$ o $Q^*(-s)$ seran $-s_{0k}^*$. Quan generem el polinomi $Q(s)^*$ o $Q^*(-s)$ a partir de les singularitats de $Q(s)$ utilitzant la transformació $s_{0k} \rightarrow -s_{0k}^*$, el polinomi resultant ha de multiplicar-se per $(-1)^N$ per donar el signe correcte als nous coeficients:

$$Q(s)^* = Q^*(-s) = (-1)^N \cdot \prod_{k=1}^N (s + s_{0k}^*) \quad (\text{AB. 3})$$

Annex C – FACTORITZACIÓ POLINÒMICA

Donat un polinomi de la forma $|Q(x)|^2$ s'entén per factoritzar trobar el polinomi $Q_F(x)$ que compleix:

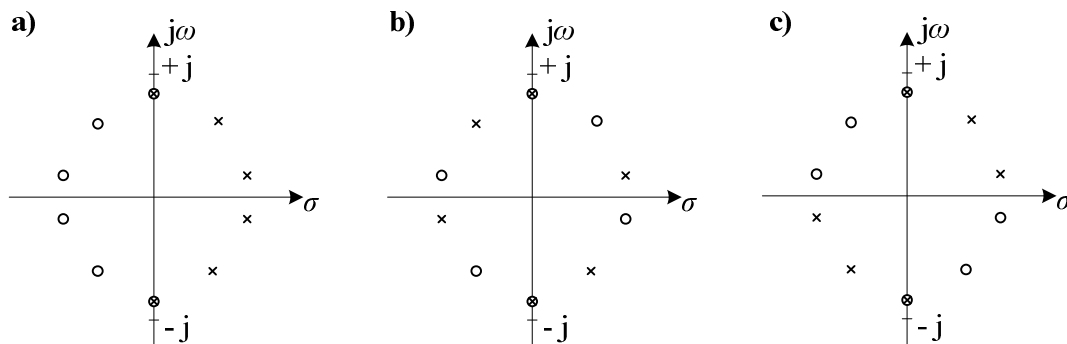
$$|Q(x)|^2 = k \cdot Q_F(x) \cdot Q_F(x)^* \quad (\text{AD. 1})$$

On k és la constant de normalització. Per tant si $|Q(x)|^2$ és un polinomi de grau $2N$ i q_k , $k = 1, 2, \dots, 2N$, en són les seves arrels, llavors, els polinomis $Q_F(x)$ i $Q_F(x)^*$ són polinomis de grau N i les seves arrels es troben a partir de les arrels q_k de $|Q(x)|^2$.

Existeix diferents maneres de distribuir les arrels. Per tal de diferenciar entre les diverses opcions es defineix el paràmetre μ , com segueix:

$$\mu = \left| \sum_{k=1}^N \text{Re}(q_k) \right| \quad (\text{AD. 2})$$

En la Figura C.1 s'observen diverses opcions a l'hora de triar les arrels que formaran part de $Q_F(s)$.



Si \circ són les arrels de $Q_F(s)$, llavors \times són les arrels de $Q_F(s)^*$
 Si \times són les arrels de $Q_F(s)$, llavors \circ són les arrels de $Q_F(s)^*$

Figura C.1 Diverses distribucions possibles de les arrels dels polinomis $Q_F(s)$ i $Q_F(s)^*$: a) $\mu = \text{màx.}$; b) $\mu = 0$; c) $\mu = 0$.

Cal mencionar que si s'escull l'opció a) el polinomi $Q_F(s)$ seria de Hurwitz.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B.P. Lathi, “*Signals, Systems and Communications*”, John Wiley & Sons, Inc. 1965
- [2] D. Pozar, “*Microwave Engineering*”, John Wiley & Sons, Inc., 1998
- [3] A.E. Atia and A.E. Williams, “*New types of bandpass filters for satellite transponders*”, COMSAT Tech. Rev., 1, 21-43, 1971.
- [4] A.E. Atia, A.E. Williams and R.W. Newcomb, “*Narrow-band multiple-coupled cavity synthesis*”, IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-21, 649-655, 1974
- [5] G. Matthaei, L. Young, and E.M.T. Jones, “*Microwave Filters, Impedance Matching Networks and Coupling Structures*”, Artech House, 1980
- [6] M.E. Van Valkenburg, “*Modern Network Synthesis*”, John Wiley & Sons, Inc. 1960.
- [7] G.C. Temes and S. Mitra, “*Modern Filter Theory and Design*”, John Wiley & Sons, Inc. 1973.
- [8] R.J. Cameron, C.M. Kudsia and R.R. Mansour, “*Microwave filters for communication systems: Fundamentals, Design and Applications*”, John Wiley & Sons, Inc. 2007.
- [9] R.J. Cameron, “*Fast generation of Chebyshev filter prototypes with asymmetrically prescribed transmission zeros*”, ESA J. 6, 83-95, 1982.
- [10] A.E. Williams, W.G. Bush, and R.R. Bonetti, “*Predistorsion technique for multicoupled resonator filters methods for Chebyshev filtering functions*”, IEEE Transactions on microwave theory and techniques, MTT-33, 402-407, 1985
- [11] J.D. Rhodes, “*Theory of Electrical Filters*”, Wiley, 1976
- [12] R.J. Cameron, “*A novel realization for microwave bandpass filters*”, ESA J. 3, 281-287, 1979.
- [13] O. Brune, “*Synthesis of a finite two terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency*”, Journal Math and Physics, vol. 10, No. 3, 1931.
- [14] J.D. Rhodes, “*A low pass prototype network for microwave linear phase filters*”, IEEE Transactions on microwave theory and techniques, MTT 30, 1335-1340, September 1982.
- [15] J.D. Rhodes and A.S. Alseyab, “*The generalized Chebyshev low pass prototype filter*”, International J. Circuit Theory Application 8, 113-125, 1980.
- [16] M. Yu, W.-C. Tang, A. Malarky, V. Dokas, R.J. Cameron, and Y. Wang, “*Predistorsion technique for cross-coupled filters and its application to satellite communication system*”, IEEE Transaction on microwave theory and techniques, MTT-51, 2505-2515, 2003.