

SESIÓN PRÁCTICA

6

EDP ELÍPTICA CON FEM

Excavación con pantalla impermeable

En esta sesión se estudia mediante el método de elementos finitos el flujo de agua bajo una geometría de acuífero libre en excavación (con eje de simetría) en presencia de una pantalla impermeable hincada una cierta longitud de clava en el terreno. Pese al detalle matemático de la aproximación numérica, el objetivo principal es que el estudiante entre en contacto con el método de los elementos finitos gracias a un explícito guión del código facilitado. También se introduce un ejemplo práctico que permite realizar un extenso análisis de sensibilidad paramétrico.

1. Objetivo

En este trabajo se desea estudiar la filtración de agua en un medio poroso saturado, homogéneo y ortótropo de permeabilidades conocidas K_x y K_y , sometido a unas condiciones de excavación con pantalla impermeable. Con este fin se plantea un análisis bidimensional de flujo estacionario sobre la geometría de acuífero libre mostrada en la figura 1.

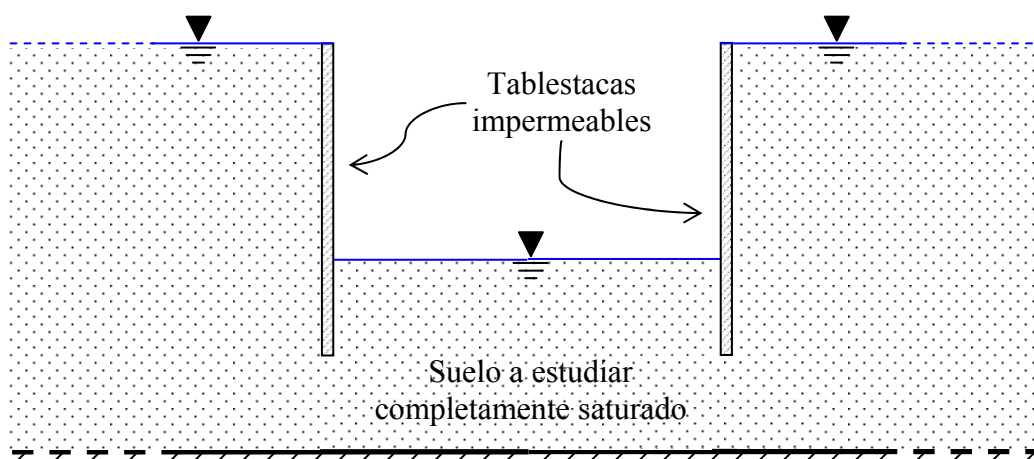


Figura 1. Esquema generalizado de la geometría de un dique seco

La solución de un problema de flujo reside en encontrar el nivel piezométrico h y, en consecuencia, el caudal Q filtrado en la base de la excavación debido al gradiente de presión de agua:

$$h = z + \frac{P_w}{\gamma}$$

donde z representa la cota que tiene un punto del suelo, expresada en unidades de longitud, sobre un nivel de referencia; P_w es la presión de agua expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud; γ es el peso específico del agua (fuerza por unidad de superficie) y la relación P_w/γ representa la presión expresada en forma de columna de agua que tiene por encima dicho punto del suelo (véase figura 2).

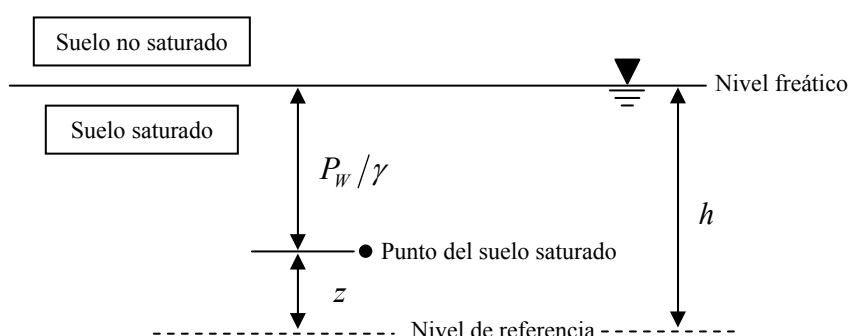


Figura 2. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero libre

Consideración general:

Véase en la figura 1 que la geometría del problema del dique seco presenta un eje de simetría en el centro de la excavación. Por tanto, a fin de reducir el coste computacional, se puede plantear el problema utilizando tan sólo la mitad del dominio inicialmente propuesto. Para usar este procedimiento se debe asegurar que la solución (nivel piezométrico) sea independiente del resto del dominio no considerado. Para ello se toma el eje medio de la excavación como un contorno impermeable del nuevo problema no simétrico.

Además, para acotar el dominio de resolución, se debe generar un contorno artificial suficientemente lejos de la región de interés (ver figura 3).

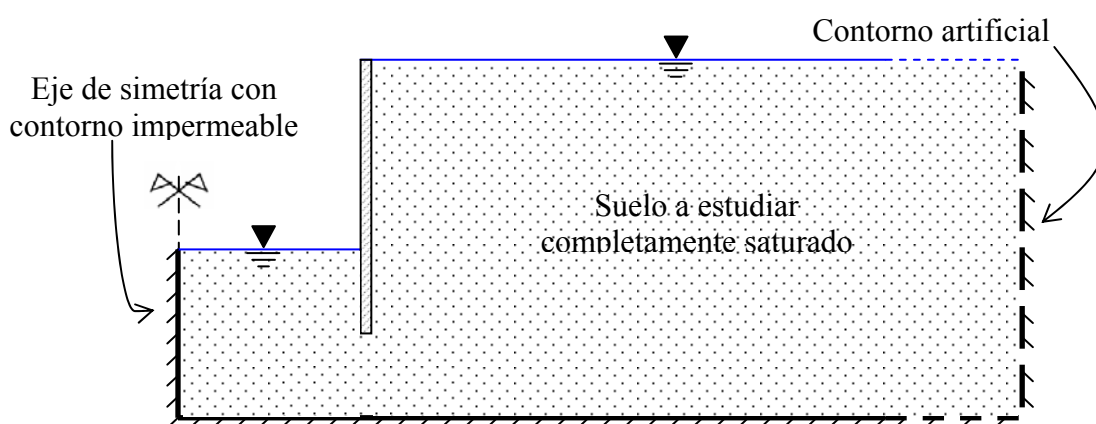


Figura 3. Geometría del problema no simétrico

Por otro lado, adviértase que la geometría del problema no acepta una interpretación unidimensional de la solución (no se admite la hipótesis de Dupuit) debido a que la tablestaca está hincada una cierta profundidad en el terreno. Dada su impermeabilidad, las líneas equipotenciales de nivel piezométrico deben amoldarse para que no haya flujo a través de la pantalla, de modo que pierden completamente la unidireccionalidad (véase figura 4).

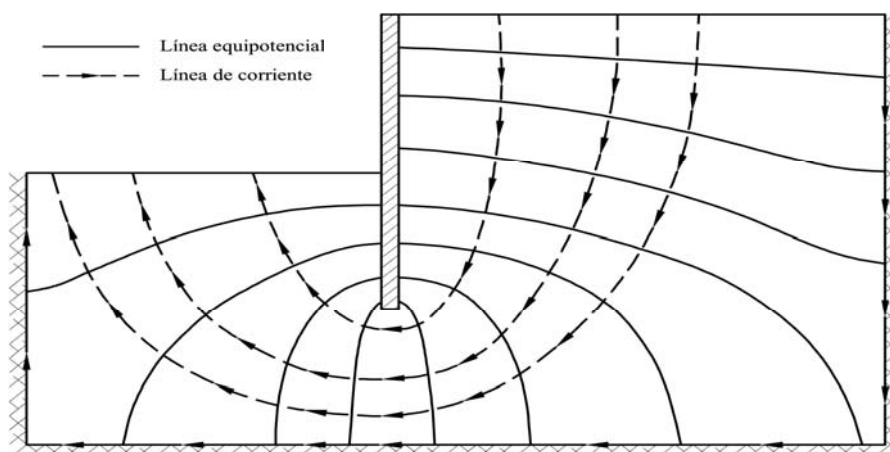


Figura 4. Mapa de líneas equipotenciales de h y líneas de flujo de Q

Por tanto el problema de flujo debe estudiarse de manera bidimensional, lo que implica $h = h(x, y)$ y $Q = Q(x, y)$.

2. Planteamiento físico: filtración de agua en terreno ortótropo

Hipótesis básicas del problema:

- Suelo homogéneo, ortótropo y saturado.
- Análisis estacionario.

El movimiento del agua sobre el terreno viene caracterizado por la ley de flujo de Darcy, que muestra cómo ésta fluye de mayor a menor nivel piezométrico:

$$\mathbf{q}(x, y) = -\mathbf{T}\nabla h(x, y) \quad (1)$$

donde \mathbf{T} es la matriz (ortótropa y constante) de permeabilidades K_x y K_y :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

El problema general de flujo difusivo estacionario (sin considerar términos de reacción ni convección) en una geometría de acuífero libre está gobernado por la ecuación que impone que el flujo sea incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(x, y) = 0 \quad (3)$$

Substituyendo (1) en (3) se obtiene la ecuación de gobierno en función del nivel piezométrico:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}\nabla h(x, y)) = 0 \quad (4)$$

Reemplazando la matriz (2) en (4) y desarrollando el término de la divergencia resulta la siguiente ecuación en derivadas parciales en términos de h :

$$K_x \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

cuya resolución requiere imponer condiciones sobre el contorno de la geometría establecida. Las más habituales en este tipo de problemas son nivel piezométrico prescrito (tipo Dirichlet) y flujo prescrito (tipo Neumann), este último a menudo nulo debido a la presencia de un contorno impermeable. Las condiciones propuestas para este caso se muestran en la figura 5.

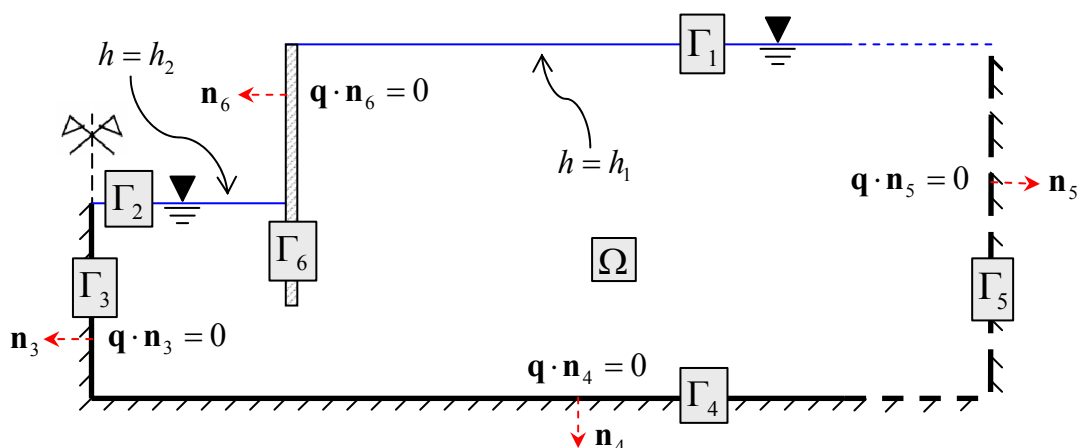


Figura 5. Condiciones de contorno sobre la geometría establecida

Nótese que en el contorno $\Gamma_N := \bigcup_{i=3}^6 \Gamma_i$ la condición impuesta es $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_i = 0$.

Utilizando la definición del flujo de Darcy (1), dicha condición se puede reescribir de la forma

$$\nabla h(x, y) \cdot \mathbf{n}_i = \frac{\partial h(x, y)}{\partial \mathbf{n}_i} = 0 \tag{6}$$

Obsérvese que es una condición de tipo Neumann (homogénea) ya que sólo involucra la diferencial de h . La ecuación (6) indica que la variación del nivel piezométrico en la dirección normal al contorno es nula, lo cual implica que no puede haber flujo en dicha dirección (advértase por tanto que esta parte de la geometría se considera impermeable).

Por otro lado, en el contorno $\Gamma_D := \bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i$ el nivel piezométrico está prescrito como

$$\left. \begin{array}{l} h = h_1 \quad \text{en } \Gamma_1 \\ h = h_2 \quad \text{en } \Gamma_2 \end{array} \right\} \Rightarrow h = h_D \quad \text{en } \Gamma_D \tag{7}$$

resultando así una condición de tipo Dirichlet.

3. Problema numérico

Se desea resolver mediante el método de Elementos Finitos la siguiente EDP elíptica bidimensional con coeficiente (matriz de permeabilidad \mathbf{T}) constante y las condiciones de contorno (6) y (7):

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{T} \nabla h(x, y)) = 0 & \text{en } \Omega \\ h = h_D & \text{en } \Gamma_D \\ \frac{\partial h(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (8)$$

Nótese que la ecuación (8) es la denominada forma fuerte del problema debido a que presenta derivadas de h de segundo orden. Sin embargo, el proceso de la discretización espacial por Elementos Finitos acaba en la representación discreta de la forma débil (o variacional) integral de la EDP (8), no de su forma fuerte. Para definir la forma débil del problema de contorno (8) se necesitan dos clases de funciones: las funciones de peso y las soluciones admisibles.

Las funciones de peso $v(x, y)$ (o funciones de test) están definidas de manera que se anulen en los contornos Dirichlet, resultando

$$v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{en } \Gamma_D \quad (9)$$

Las soluciones admisibles $h(x, y)$ de la ecuación (8) están definidas tal que cumplan las condiciones de Dirichlet establecidas. Esto es,

$$h \in H^1(\Omega) : h = h_D \quad \text{en } \Gamma_D \quad (10)$$

Obsérvese que en las definiciones (9) y (10) se impone que ambas funciones pertenezcan al denominado espacio de Sobolev H^1 en el dominio Ω . Eso implica que las funciones que aparecen en la forma débil han de ser como mínimo, tanto la función como sus primeras derivadas, cuadráticamente integrables. Nótese por tanto que la solución de la ecuación diferencial en la forma débil requerirá menos regularidad que en la forma fuerte, donde se necesita que $h \in C^2(\Omega)$.

Usando dichas definiciones, la forma débil del problema (8) pasa por encontrar la función admisible $h(x, y)$ tal que

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\mathbf{T} \nabla h) d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (11)$$

La forma integral (11) corresponde a la ecuación de residuos ponderados del problema de contorno (8). Por otro lado, las propiedades del operador divergencia y el operador gradiente permiten obtener la siguiente relación:

$$\nabla \cdot (v \mathbf{T} \nabla h) = v \nabla \cdot (\mathbf{T} \nabla h) + \nabla v (\mathbf{T} \nabla h) \quad (12)$$

Despejando de (12) el término $v \nabla \cdot (\mathbf{T} \nabla h)$ y sustituyéndolo en (11) se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \mathbf{T} \nabla h) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla v (\mathbf{T} \nabla h) d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (13)$$

donde ahora aparece un término como la integral sobre Ω de la divergencia de un campo vectorial (en concreto, dicho campo es $v \mathbf{T} \nabla h$). Este tipo de términos se pueden relacionar con integrales sobre el contorno usando para ello el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \mathbf{T} \nabla h) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (v \mathbf{T} \nabla h) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (14)$$

Como el contorno del dominio Ω es $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (unión de los contornos con condiciones Dirichlet y Neumann), la ecuación (14) queda de la forma

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \mathbf{T} \nabla h) d\Omega = \overbrace{\int_{\Gamma_N} (v \mathbf{T} \nabla h) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N}^{\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0} + \overbrace{\int_{\Gamma_D} (v \mathbf{T} \nabla h) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_D}^{v=0} = 0 \quad (15)$$

donde se ha tenido en cuenta la definición (9) de las funciones de test y la condición de contorno impuesta (6). Por tanto, substituyendo ahora (15) en la ecuación (13) se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla v (\mathbf{T} \nabla h) d\Omega = 0 \quad \forall v \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$a(v, h) \equiv \int_{\Omega} \nabla v (\mathbf{T} \nabla h) d\Omega \quad (17)$$

la forma débil del problema de contorno (8) resulta ser (véase ecuación (16)):

$$\begin{cases} a(v, h) = 0 & \text{en } \Omega \\ h = h_D & \text{en } \Gamma_D \\ v = 0 & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (18)$$

Nótese que la ecuación (18) sólo presenta, a diferencia de (8), derivadas de h de primer orden. Además las condiciones de contorno de tipo Neumann han sido introducidas implícitamente en la ecuación de manera natural. Por otro lado, adviértase que la forma $a(\bullet, \bullet)$ resulta ser bilineal (en \mathfrak{R}^2), simétrica y semidefinida positiva.

El objetivo ahora es aproximar el problema en su forma débil (18) a un problema discreto cuya resolución conduce a un sistema lineal de ecuaciones. Para ello se necesita, primero, discretizar el dominio Ω en un número finito n_{el} de elementos Ω^e ,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e \quad (19)$$

donde cada uno de estos elementos está formado por n_{en} nodos. En la figura 6 se muestra un ejemplo de discretización del dominio con un número total de nodos $n_{np} = 46$.

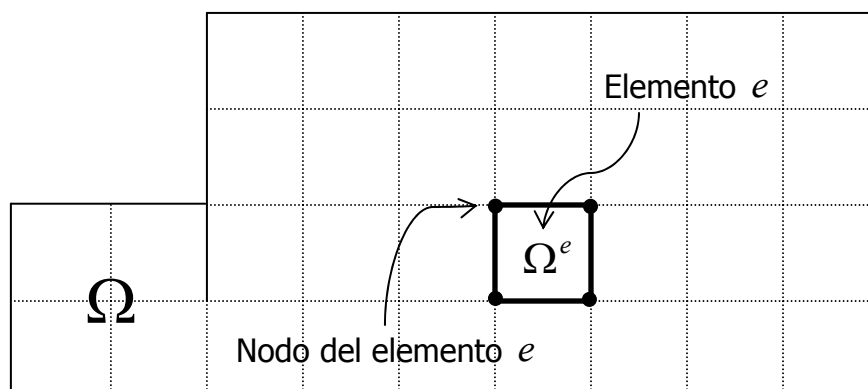


Figura 6. Ejemplo de discretización del dominio, donde $n_{el} = 32$, $n_{en} = 4$ y $n_{np} = 46$

Debido a la presencia de condiciones de contorno de tipo Dirichlet se debe hacer una distinción entre el conjunto de los nodos totales del dominio, $\eta = \{1, 2, \dots, n_{np}\}$, y el conjunto de nodos $\eta_D \subset \eta$ que pertenecen a la porción del contorno Dirichlet. Obsérvese por tanto que la notación $\eta \setminus \eta_D$ hace referencia al número total de nodos incógnita del dominio y, análogamente, $\eta^e \setminus \eta_D^e$ al número de nodos del elemento e que no tienen valor prescrito.

El segundo paso es aproximar la solución admisible $h(x, y)$ por $\hat{h}(x, y)$, definida como

$$\hat{h}(x, y) = \sum_{B \in \eta \setminus \eta_D} N_B(x, y) h_B + \sum_{B \in \eta_D} N_B(x, y) h_D(x_B, y_B) \quad (20)$$

donde h_B es la incógnita nodal y $N_B(x, y)$ es la función de forma asociada al nodo B , tal que

$$N_B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (x_B, y_B) \\ 0 & \text{en otro nodo} \end{cases} \quad (21)$$

Obsérvese como en (20) aparecen dos términos: el primer sumatorio hace referencia a los nodos incógnita del dominio, mientras que el segundo corresponde a los nodos donde el valor del nivel piezométrico está prescrito. Nótese por tanto como la función $\hat{h}(x, y)$ cumple, por definición, la condición $h = h_D$ en Γ_D establecida en la forma débil (18).

El tercer paso es elegir la aproximación $\hat{v}(x, y)$ de las funciones de test $v(x, y)$. En el método de Galerkin esta aproximación cumple que

$$\hat{v}(x, y) \in \text{span} \{N_B\}_{B \in \eta \setminus \eta_D} \quad (22)$$

La definición (22) implica que la función $\hat{v}(x, y)$ se puede escoger como

$$\hat{v}(x, y) = N_A(x, y) \quad (23)$$

Una vez discretizado el dominio y elegidas $\hat{h}(x, y)$ y $\hat{v}(x, y)$, la aproximación discreta de la forma débil resulta de sustituir las expresiones (20) y (23) en (18), de modo que

$$a(\hat{v}, \hat{h}) = a \left(N_A(x, y), \sum_{B \in \eta \setminus \eta_D} N_B(x, y) h_B + \sum_{B \in \eta_D} N_B(x, y) h_D(x_B, y_B) \right) = 0 \quad (24)$$

Debido a la bilinealidad de la forma $a(\bullet, \bullet)$, la ecuación (24) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$a\left(N_A(x, y), \sum_{B \in \eta \setminus \eta_D} N_B(x, y) h_B\right) + a\left(N_A(x, y), \sum_{B \in \eta_D} N_B(x, y) h_D(x_B, y_B)\right) = 0 \quad (25)$$

Aplicando sucesivamente la propiedad de bilinealidad a los términos con sumatorio, la ecuación (25) queda finalmente como, eliminando por comodidad la dependencia de las funciones respecto a (x, y) ,

$$\sum_{B \in \eta \setminus \eta_D} a(N_A, N_B) h_B = - \sum_{B \in \eta_D} a(N_A, N_B) h_D(x_B, y_B) \quad \forall A \in \eta \setminus \eta_D \quad (26)$$

donde $1 \leq A, B \leq n_{np}$. La ecuación (26) representa la aproximación discreta de la forma débil (18) y, debido a que debe cumplirse para cada nodo incógnita, puede reescribirse como un sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{K} \mathbf{h} = \mathbf{f} \quad (27)$$

donde \mathbf{K} representa la matriz de difusividad del sistema, \mathbf{h} es el vector de nodos incógnita y \mathbf{f} el vector que incluye, en este caso, las condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Sin embargo, en la implementación práctica del método de Elementos Finitos, el sistema global (27) resulta de ensamblar localmente la contribución nodal de cada elemento. Para ello se impone que la ecuación (26) se cumpla para un elemento cualquiera Ω^e :

$$\sum_{b \in \eta^e \setminus \eta_D^e} a(N_a, N_b) h_b^e = - \sum_{b \in \eta_D^e} a(N_a, N_b) h_D^e(x_b^e, y_b^e) \quad \forall a \in \eta^e \setminus \eta_D^e \quad (28)$$

donde ahora $1 \leq a, b \leq n_{en}$. Nótese que no todos los elementos tienen nodos con valor piezométrico prescrito, por lo que es posible que $\eta_D^e = \{\emptyset\}$. La ecuación (28) también puede ser representada como un sistema lineal de ecuaciones para el elemento Ω^e :

$$\mathbf{K}^e \mathbf{h}^e = \mathbf{f}^e \quad (29)$$

La expresión de la componente a, b de la matriz elemental \mathbf{K}^e y la componente a del vector elemental \mathbf{f}^e es, dada la definición (17) de la forma $a(\bullet, \bullet)$,

$$\mathbf{K}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N_a (\mathbf{T} \nabla N_b) d\Omega$$

$$\mathbf{f}_a^e = - \sum_{b=1}^{n_{en}} a(N_a, N_b) h_{D^b}^e \quad (30)$$

donde $h_{D^b}^e = h_D^e(x_b, y_b)$ si h_D está prescrito en el nodo b e igual a cero en otro caso. La matriz y vector globales del sistema (27) son calculados a partir del operador de ensamblaje \mathbf{A} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^e \mathbf{f}^e \quad (31)$$

De esta manera la solución de la EDP (8) mediante el método de Elementos Finitos con aproximación por Galerkin equivale a resolver el sistema lineal (27) una vez ensambladas todas las contribuciones nodales de cada elemento de la discretización del dominio.

4. Introducción al código

Se ha elaborado un programa que contiene el siguiente fichero de extensión CAST3M (*.dgibi):

- dique_seco.dgibi

en el cual, para la implementación del código, se debe tener en cuenta el desarrollo de los siguientes pasos:

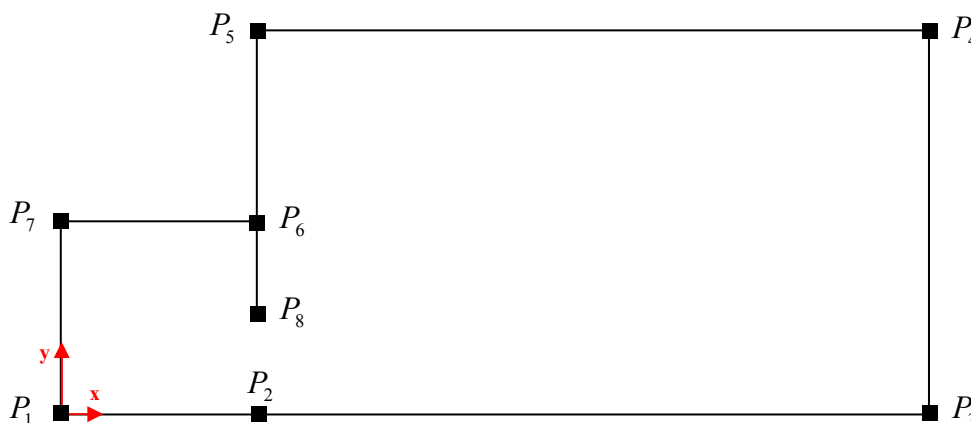


Figura 7. Puntos que forman el contorno del dominio

- I. **Introducción del contorno:** para crear una discretización del dominio el primer paso que se ha de hacer es introducir el contorno. Dada la sencilla geometría del problema (líneas rectas), se han definido 8 puntos unidos después mediante el operador (funciones de CAST3M) `DROIT`. Estos puntos dan forma al contorno tal y como se muestra en la figura 7.

Dichos puntos se unen mediante líneas especificando un número entero de nodos `n` para cada una de ellas. El contorno se define mediante la unión de estas líneas con el operador `ET`.

- II. **Creación de la malla:** en principio, el mallado se puede generar utilizando dos operadores distintos: `SURFACE` y `DALLER`. Ambos operan sobre el contorno (que debe estar previamente definido). El primero crea una discretización generando como resultado mallas no estructuradas, mientras que el segundo, en cambio, es utilizado para generar mallas que sí son estructuradas.

El dibujo de la malla se representa mediante la instrucción `TRACER`.

- III. **Elección del modelo:** una vez obtenido el objeto tipo malla, se ha de especificar qué clase de ecuación diferencial se desea resolver. Para ello se utiliza el operador `MODELISER`. En este caso, nótese que la forma de la EDP (8) es igual a la de un modelo térmico y de material ortótropo (`TERMIQUE ORTHOTROPE`) debido a que la ley que rige el movimiento del calor (ley de Fourier) tiene la misma estructura que la ley de Darcy:

$$\mathbf{J}(x, y) = -\mathbf{T}\nabla\theta(x, y) \quad (32)$$

donde, en este caso, \mathbf{T} sería la matriz (ortótropa y constante) de conductividades térmicas K_x y K_y , \mathbf{J} la densidad de corriente de energía (análoga a \mathbf{q}) y θ la temperatura del medio (análoga a h).

- IV. **Elección del material:** para especificar las propiedades del material asociadas al modelo elegido se usa el operador `MATERIAU`. Para este estudio en concreto, dichas propiedades hacen referencia a las permeabilidades conocidas K_x y K_y , asimiladas en el modelo como conductividades térmicas.

- V. **Creación de la matriz del sistema lineal:** dados los objetos material y modelo, obsérvese cómo ya es posible crear la matriz de difusividad del sistema global (27) ensamblando la contribución de cada elemento. Para

ello se debe utilizar el operador `CONDUCTIVITE` (en referencia al modelo térmico como matriz de conductividad).

Nótese que dicha matriz ha sido construida sin tener en cuenta las condiciones de contorno, considerando por el momento todos los nodos como nodos incógnita.

- VI. **Introducción de condiciones de contorno:** una vez construida la matriz del sistema hay que imponer las condiciones de contorno especificadas en la figura 5. Para ello se debe restringir dicha matriz sólo a los nodos que realmente son una incógnita del problema. Adviértase por tanto que dicha restricción sólo depende de las condiciones de tipo Dirichlet.

La forma de especificar en CAST3M una condición de valor prescrito es mediante el operador `BLOQUE`, que está asociado al objeto de tipo malla donde se desea imponer la condición. Una vez asignado el contorno, el objeto bloqueado recibe el valor de bloqueo, en este caso h_1 y h_2 , con el operador `DEPIMPOSE`.

Recuérdese que además de los valores prescritos, la ecuación diferencial necesita satisfacer, en el resto de la frontera del dominio, una condición de tipo Neumann homogénea, véase (6), correspondiente a los contornos impermeables. Este tipo de condiciones en CAST3M no necesita ninguna declaración en concreto, puesto que si no se especifica nada sobre el resto del contorno el programa considera, de forma automática, que no hay nodos donde se imponga flujo. Nótese como dicha consideración deriva en la condición $\Gamma_N = \{\emptyset\}$ que, a efectos prácticos, produce el mismo resultado que el obtenido en la ecuación (15): flujo nulo a través del contorno Γ_N .

- VII. **Solución del sistema lineal:** la matriz de conductividad \mathbf{K} que incluye las condiciones de contorno establecidas se forma a partir de la matriz generada en el paso 5 añadiendo, mediante el operador `ET`, los nodos del contorno bloqueados con `BLOQUE`. Por otro lado, el vector \mathbf{f} está formado por los objetos obtenidos al asignar el valor bloqueado con `DEPIMPOSE`.

Para obtener el objeto solución del sistema lineal (27) (nivel piezométrico en cada nodo incógnita de la malla) se debe utilizar el operador `RESOUDRE` sobre la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} .

- VIII. **Representación gráfica:** como se ha comentado anteriormente, la instrucción que permite crear un gráfico sobre un objeto de campo por puntos (como la solución del sistema lineal) y su objeto de malla asociado es el operador `TRACER`.

IX. **Cálculo del caudal (postproceso):** el flujo de agua a través de la superficie Γ_2 se define como

$$Q = \int_{\Gamma_2} \mathbf{q} \cdot d\Gamma \quad (33)$$

La expresión (33) se puede calcular con CAST3M aplicando el operador `REACTION` al objeto solución del sistema y al objeto de la malla (en este caso la superficie Γ_2) bloqueado con `BLOQUE`. Esta operación equivale a imponer la solución en el contorno bloqueado y obtener la reacción que se debe producir para asegurar el equilibrio. Dicha reacción es, en este caso, el flujo de Darcy (asimilado por el modelo térmico como flujo de calor). El valor del caudal (33) se puede estimar obteniendo la máxima resultante del campo \mathbf{q} usando para ello los operadores `MAXIMUM` y `RESULT`.

5. Guía de la sesión

Considérese la instalación de un depósito cilíndrico de 3 metros de diámetro cuya base debe estar fijada bajo tierra a 1.5 m de profundidad. Está previsto realizar la obra sobre un terreno arcilloso y homogéneo de permeabilidad horizontal $K_x = 10^{-6}$ m/s. Para evitar futuros problemas de consolidación, se ha decidido preconsolidar las arcillas mediante el peso de un terraplén superficial, de manera que la permeabilidad vertical estimada es de $K_y = 10^{-7}$ m/s.

Sesión dirigida:

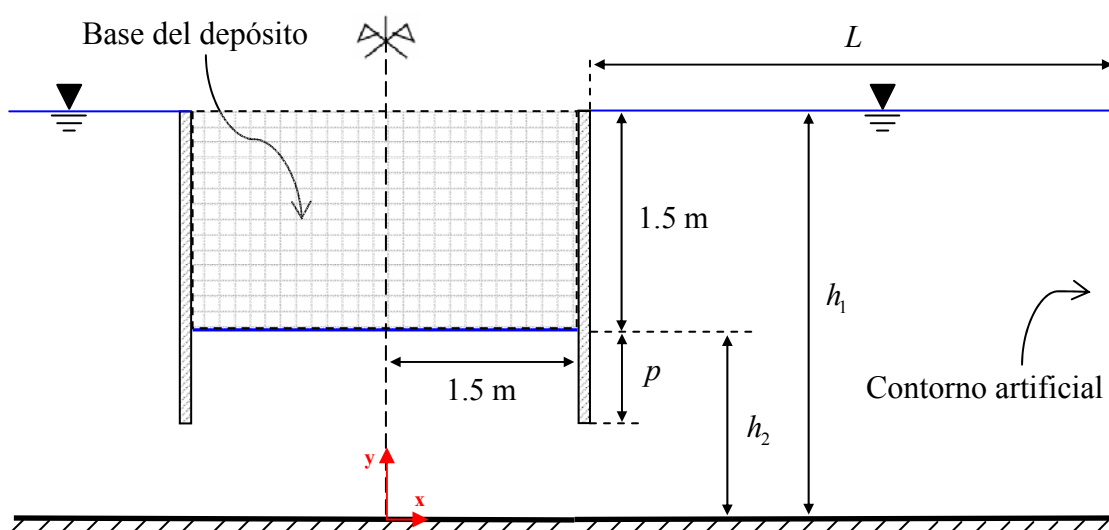


Figura 8. Geometría del problema propuesto

1. El primer paso es establecer la geometría del problema propuesto, indicando así el valor de las condiciones de contorno (véase figura 8). En este caso L hace referencia a la distancia desde la excavación al contorno artificial y p a la profundidad de la pantalla impermeable.
2. Ejecutar el programa `dique_seco` considerando una profundidad del terreno desde la solera $h_2 = 1.5$ m (nótese entonces que $h_1 = 3$ m), una profundidad de la tablestaca $p = 0.5$ m y una longitud del dominio $L = 10$ m. Usar elementos triangulares lineales (TRI3) con una malla de densidad $n = 2$ elementos por metro.

Para el cálculo, imponer una condición de flujo nulo en el contorno artificial y obtener el resultado que se muestra en la figura 9.

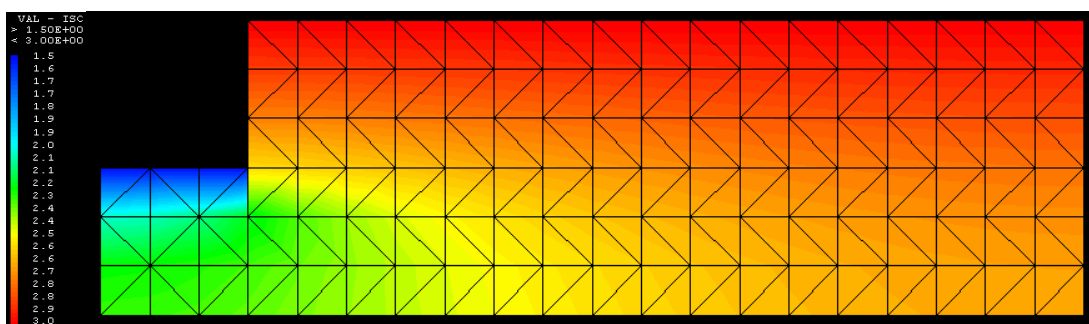


Figura 9. Solución obtenida en el paso 2 (elementos TRI3)

Nótese cómo la malla construida con el operador `DALLER` es, efectivamente, estructurada (lo que permite un mayor control del tamaño de los elementos). Nótese también que el mayor gradiente de altura piezométrica se aprecia en la zona cercana a la tablestaca, lo que indica un agrupamiento de las líneas equipotenciales entorno a la pantalla impermeable (véase figura 4).

Obsérvese que el nivel h también varía en el contorno artificial debido a que la condición impuesta es de flujo nulo, y que el volumen de agua obtenido en la excavación es de $1.78 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$ (por unidad de profundidad).

3. Ejecutar de nuevo el paso 2 usando elementos cuadriláteros bilineales (elementos QUA4, véase figura 10) y los mismos parámetros (longitud de tablestaca y dominio).

Obsérvese que ahora se obtiene un volumen de agua filtrado a la excavación de $1.71 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$, menor al calculado en el paso anterior. Adviértase por tanto que, según la ley de Darcy (1), el valor del gradiente de nivel entre la superficie del dominio (Γ_1) y la solera de la excavación (Γ_2) es, calculado con elementos triangulares lineales, más alto que con elementos cuadriláteros bilineales.

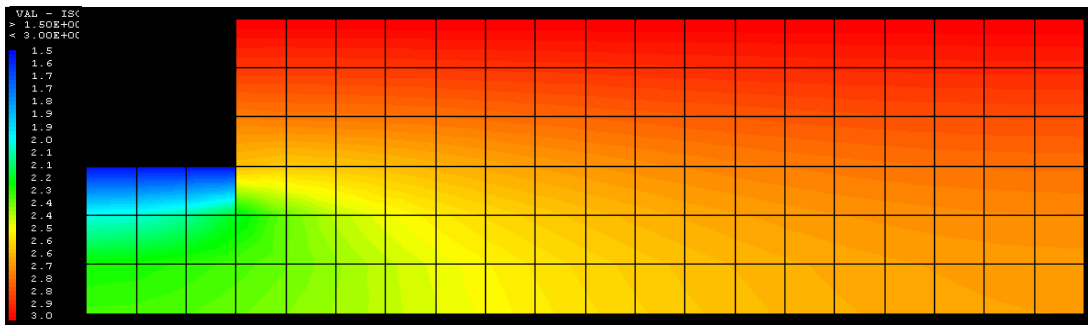


Figura 10. Solución obtenida en el paso 3 (elementos QUA4)

4. Nótese de nuevo la influencia en la solución de la malla escogida ejecutando realizando un análisis con elementos cuadriláteros bilineales, bajo los mismos supuestos que en los pasos anteriores (mismo dominio, misma longitud de clava) pero utilizando refinando la malla con una densidad de $n = 6$ (véase figura 11).

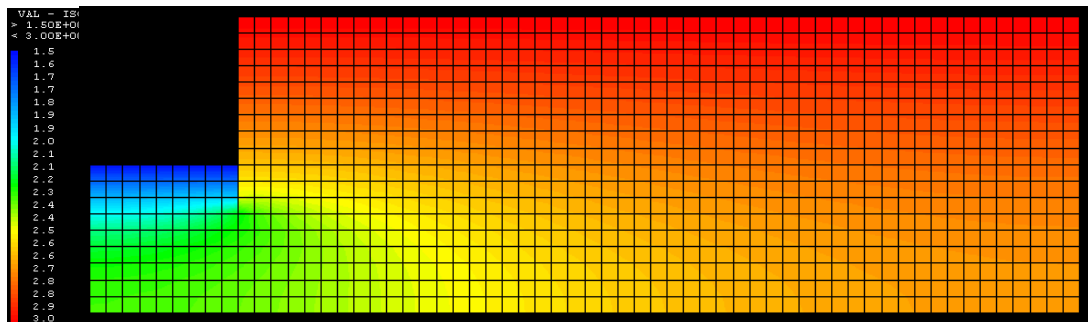


Figura 11. Solución obtenida en el paso 4 (elementos QUA4)

En este caso el volumen de agua obtenido es de $1.64 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$. Obsérvese que el cambio de valor respecto al hecho de utilizar una densidad de $n=2$ indica que la malla escogida en el paso anterior no era suficientemente densa.

5. Modificar ligeramente el programa `dique_seco` para que construya una malla no estructurada utilizando el operador `SURFACE` en lugar de `DALLER` (ver figura 12). Resolver entonces el problema planteado con los mismos datos que en el paso 2 (`TRI3`, $p = 0.5$, $L = 10$ y $n = 2$).

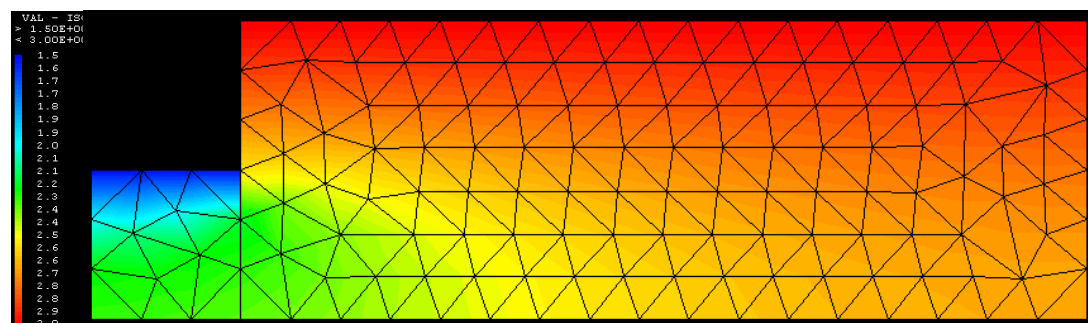


Figura 12. Solución obtenida en el paso 5 (malla no estructurada)

Obsérvese que el caudal es en este caso $1.83 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$, superior al obtenido con una malla estructurada. Vistos los resultados del paso 4, donde el caudal disminuye si se refina la malla, ¿es más recomendable utilizar una malla estructurada o una que no lo es?

6. Ejercicios propuestos

Se propone la realización de los siguientes ejercicios:

1. Resolver el problema planteado con el programa `dique_seco` imponiendo que en el contorno artificial (Γ_5) la distribución de altura piezométrica sea constante e igual a h_1 . Usar una malla estructurada de elementos cuadriláteros bilineales con densidad $n=10$, una longitud del dominio $L=10$ m y una profundidad de clava $p=0.5$ m.

Comparar el caudal obtenido con el resultante de considerar flujo nulo a través del contorno artificial con la misma geometría anterior.

2. Empleando la condición de flujo nulo en el contorno artificial, se pide analizar la sensibilidad del valor del caudal de agua al variar los siguientes parámetros del problema:

- Densidad de la malla. Utilícese un conjunto de valores comprendidos entre $n=2$ y $n=60$ y muéstrase el resultado con una representación gráfica $Q-n$.

Considérese ahora que la variación inicial del caudal viene dada por $\Delta Q_0 = Q(n=2) - Q(n=10)$. Si se define la densidad óptima como aquella a partir de la cual la variación del caudal no es superior al 1.5% de ΔQ_0 , ¿cuál es, aproximadamente, dicha densidad óptima según este criterio?

- Empleo de elementos de interpolación lineal/bilineal (`TRI3`, `QUA4`) o cuadrática (`TRI6`, `QUA8`).
- Proximidad del contorno artificial Γ_2 a la excavación. Utilícese en este caso las longitudes $L = \{5, 10, 25, 50\}$.
- Longitud de la tablestaca. Usar las profundidades de clava $p = \{0.5, 1\}$.
- Relación entre K_x y K_y . Emplear los valores $K_x / K_y = \{100, 10, 1, 0.1\}$ manteniendo $K_y = 10^{-7}$ m/s.

En cada uno de los apartados utilícese, salvo el parámetro que ha de ser modificado, una geometría con malla estructurada de densidad $n=10$, elementos `QUA4`, $L=10$ m y $p=0.5$ m.

Ejercicio 1

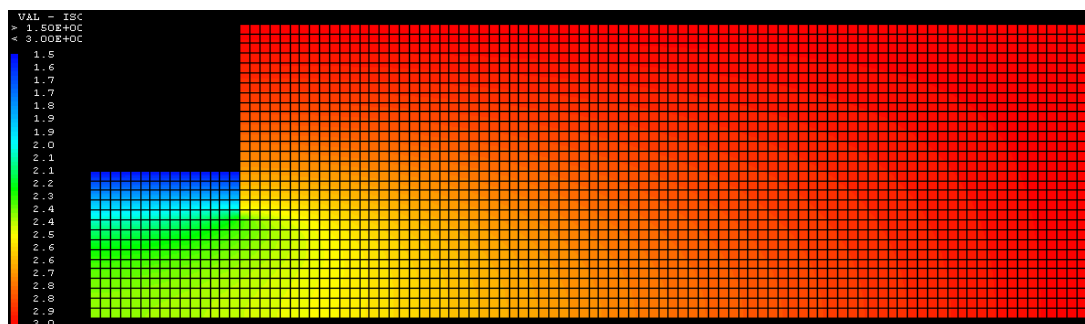


Figura 13. Altura piezométrica con condición de contorno Dirichlet ($h = h_1$) en Γ_5

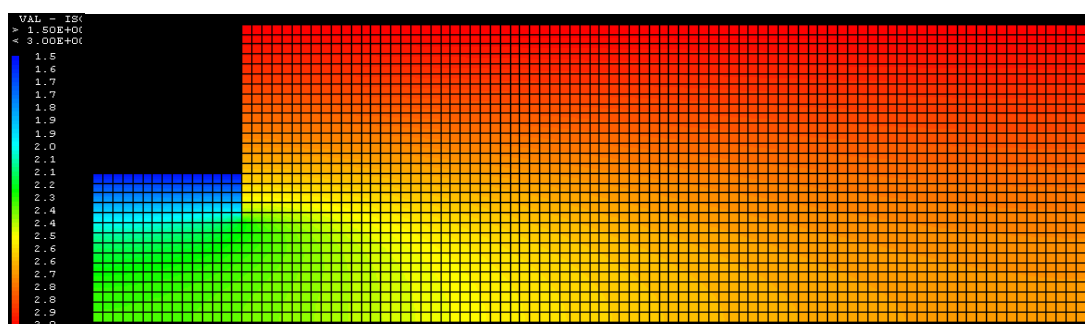


Figura 14. Altura piezométrica con condición de contorno Neumann homogénea en Γ_5

Obsérvese en la figura 13 que la distribución de nivel piezométrico cuando se impone flujo nulo a través del contorno artificial es sensiblemente diferente de la obtenida con una condición Dirichlet (figura 14). En este último caso dicha distribución es más homogénea, reduciendo el gradiente y, por tanto, también el valor del caudal ($8.29 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$), todo lo contrario que usando el contorno con condición Neumann ($1.62 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$).

Ejercicio 2.1

Para la realización de este ejercicio se ha programado una pequeña función en MATLAB (`grafica2d.m`) que permite graficar cómodamente dos listas de datos introducidos por pantalla.

La curva caudal Q – densidad de la malla n (véase figura 15) muestra que las discretizaciones menos finas dan lugar a valores más altos del caudal de manera no lineal. Nótese que, según este análisis de sensibilidad, a partir de aproximadamente $n = 28$ la variación del caudal no es superior al 1.5% de la obtenida entre $n = 2$ y $n = 10$. Por tanto esta densidad de malla sería considerada, según este criterio, óptima.

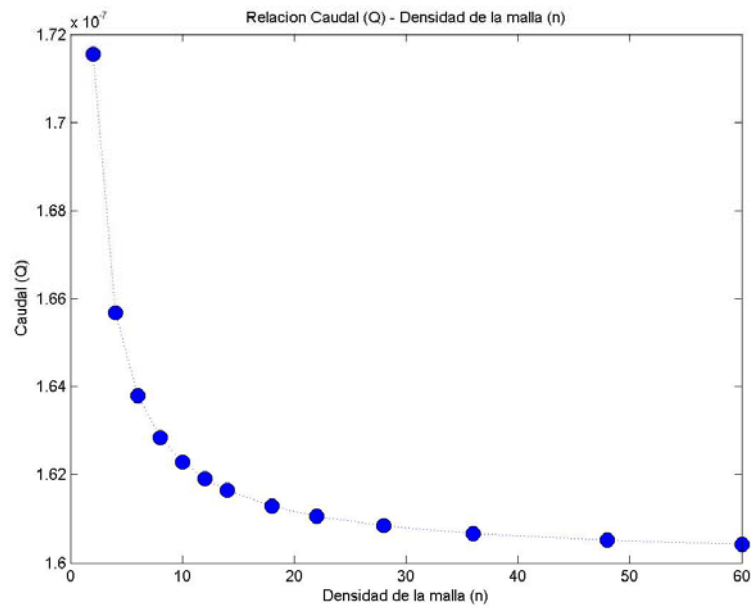


Figura 15. Curva caudal – densidad de la malla

Ejercicio 2.2

	Tipo de elemento			
	TRI3	TRI6	QUA4	QUA8
Q (m ³)	$1.64 \cdot 10^{-7}$	$1.61 \cdot 10^{-7}$	$1.62 \cdot 10^{-7}$	$1.61 \cdot 10^{-7}$

Tabla 1. Caudales obtenidos al variar el tipo de interpolación

Nótese que los caudales obtenidos (ver tabla 1) con interpolación cuadrática son, para ambos tipos de elemento (triángulos y cuadriláteros) menores que los resultantes de usar una interpolación lineal/bilineal. Sin embargo, la diferencia de caudal es mayor para el elemento lineal TRI3 que para el elemento bilineal QUA4.

Teniendo en cuenta que el error del método disminuye al aumentar el número de elementos, el resultado más preciso es que el obtiene un caudal más bajo (véase figura 15). Por tanto el elemento lineal es el que, en este caso, peor resultados obtiene.

Ejercicio 2.3

	Longitud L (m)			
	5	10	15	25
Q (m ³)	$1.26 \cdot 10^{-7}$	$1.62 \cdot 10^{-7}$	$1.69 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$

Tabla 2. Caudales obtenidos al variar la longitud del dominio

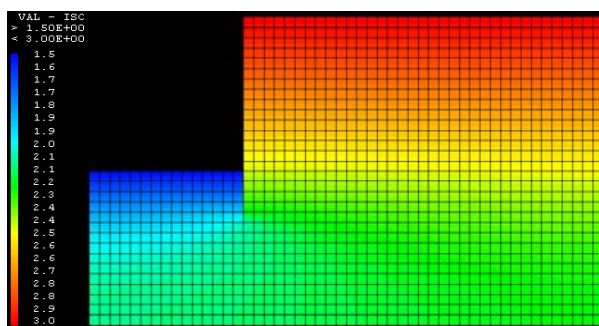


Figura 16. Altura piezométrica obtenida para una longitud $L = 5$

Obsérvese en la tabla 2 que el valor más bajo del caudal resulta de considerar el dominio de resolución más corto (figura 16). Para este caso, el hecho de colocar un contorno artificial demasiado cercano a la excavación influye en los resultados obtenidos.

Obsérvese que la distribución de nivel piezométrico para las longitudes del dominio más grandes (ver figuras 17 y 18) es similar a la obtenida imponiendo una condición de contorno de tipo Dirichlet en Γ_5 (ver figura 13). Por tanto, nótese que la influencia del contorno artificial sobre la solución decrece a medida que éste se sitúa más lejos de la zona de estudio.

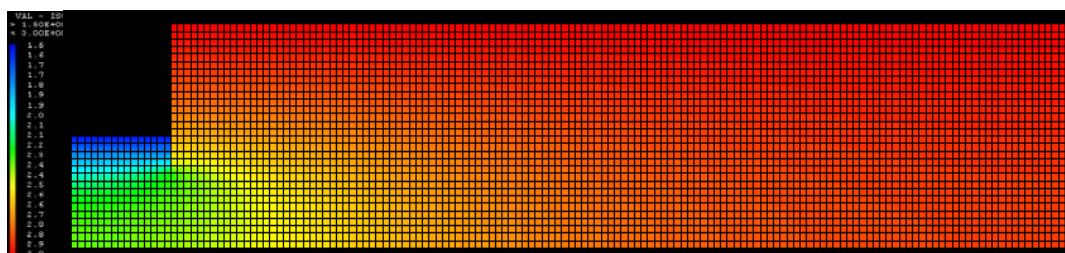


Figura 17. Altura piezométrica obtenida para una longitud $L = 15$

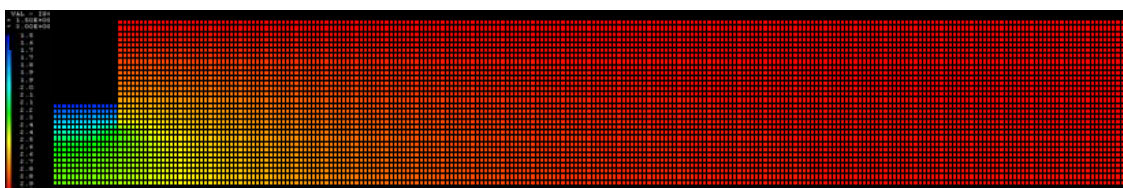


Figura 18. Altura piezométrica obtenida para una longitud $L = 25$

Ejercicio 2.4

	Profundidad p (m)	
	0.5	1
Q (m^3)	$1.62 \cdot 10^{-7}$	$1.07 \cdot 10^{-7}$

Tabla 3. Caudales obtenidos al variar la profundidad de la clava

Nótese que, como era de esperar, el caudal disminuye si se aumenta la longitud de la pantalla que está hincada en el terreno (ver tabla 3). La distribución de alturas piezométricas obtenida con la mayor longitud de la clava (ver figura 19) es, por tanto, más suave que en el caso $p = 0.5$ (véase figura 14).

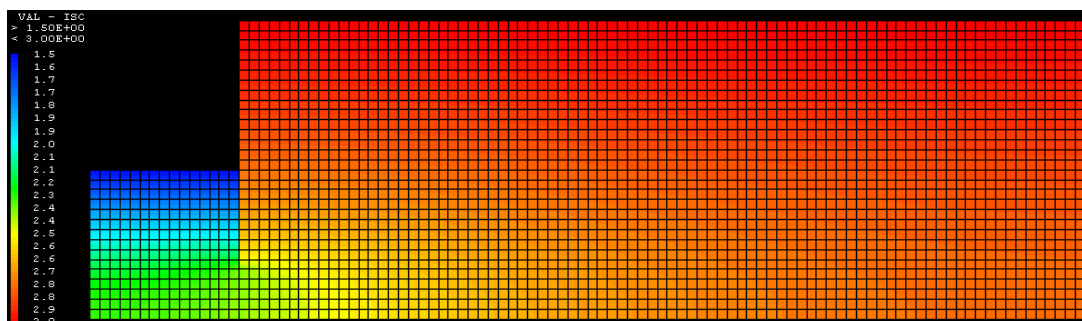


Figura 19. Altura piezométrica obtenida para una longitud de la clava de 1 m

Ejercicio 2.5

	Relación de permeabilidades K_x / K_y			
	100	10	1	0.1
Q (m ³)	$2.26 \cdot 10^{-7}$	$1.62 \cdot 10^{-7}$	$7.17 \cdot 10^{-8}$	$2.38 \cdot 10^{-8}$

Tabla 4. Caudales obtenidos al variar la relación de permeabilidades

En este caso, obsérvese que el caudal de agua filtrado en la solera disminuye a medida que K_x / K_y también se reduce (ver tabla 4). Nótese que este resultado es físicamente interpretable asumiendo que, cuanto menor es dicha relación de permeabilidades, más le cuesta al flujo avanzar en la dirección vertical y, por tanto, menos volumen de agua acaba saliendo por la excavación.