

## SESIÓN PRÁCTICA

**4**

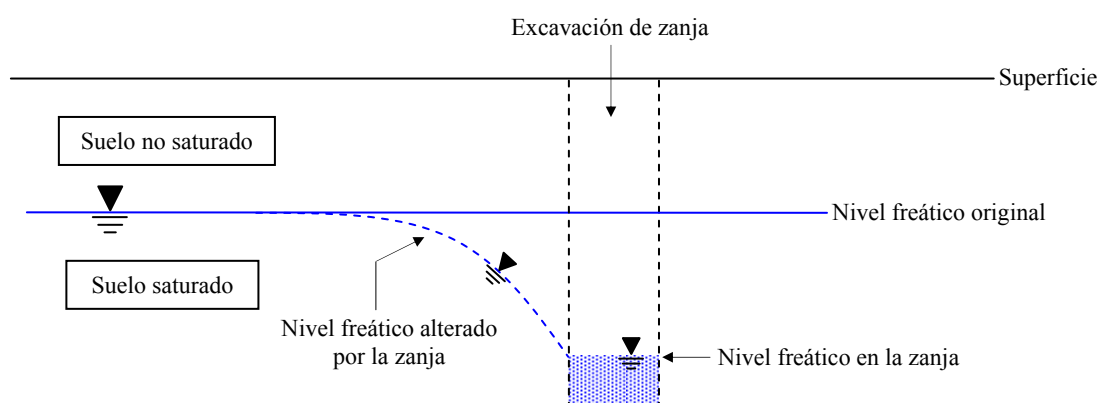
**EDP PARABÓLICA CON MÉTODO CN**

**Flujo en acuífero libre**

En esta sesión se analiza, mediante el método Crank-Nicolson de diferencias finitas, la evolución temporal del nivel freático sobre una geometría de acuífero libre alterada por la excavación de una zanja. Las condiciones de contorno impuestas son de tipo Dirichlet (nivel piezométrico prescrito en el contorno). El objetivo principal es que el estudiante sea capaz de derivar y aplicar correctamente una formulación de Crank-Nicolson para resolverlo, haciendo hincapié en la estabilidad incondicional y la presencia de oscilaciones del método.

### 1. Objetivo

En este trabajo se desea estudiar el efecto que produce una excavación sobre un terreno saturado homogéneo de permeabilidad  $K$  conocida. Para ello se plantea realizar un análisis de flujo en régimen no estacionario (transitorio) bajo una geometría de acuífero libre, tal y como muestra la figura 1.

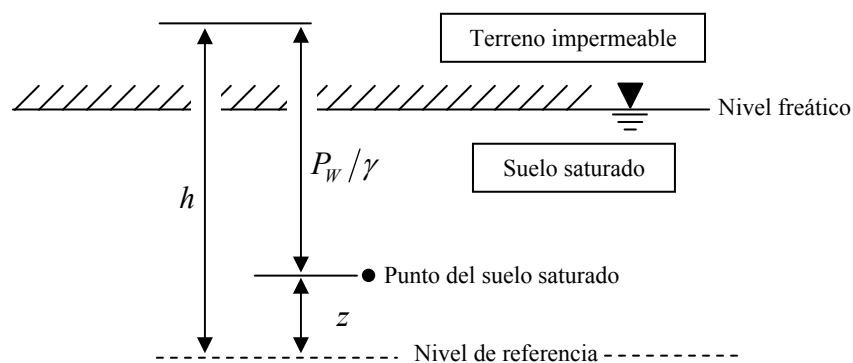


**Figura 1.** Esquema generalizado de la geometría de una excavación en acuífero libre

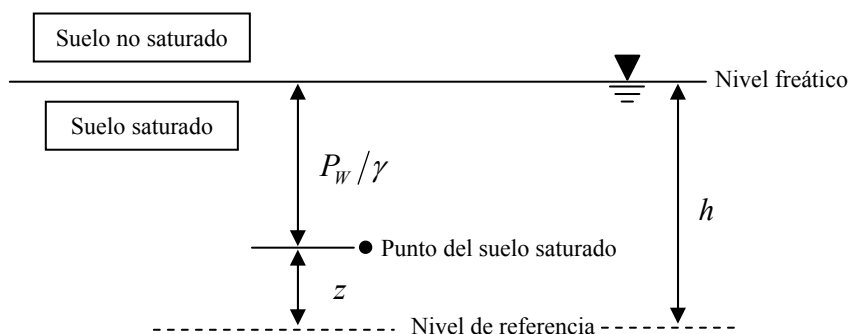
La solución de un problema de flujo reside en encontrar el nivel piezométrico  $h$  y, en consecuencia, el caudal  $Q$  filtrado en la zanja debido al gradiente de presión de agua:

$$h = z + \frac{P_w}{\gamma}$$

donde  $z$  representa la cota que tiene un punto del suelo, expresada en unidades de longitud, sobre un nivel de referencia;  $P_w$  es la presión de agua expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud;  $\gamma$  es el peso específico del agua (fuerza por unidad de superficie) y la relación  $P_w/\gamma$  representa la presión expresada en forma de columna de agua que tiene por encima dicho punto del suelo (véase figuras 2 y 3).



**Figura 2.** Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero confinado

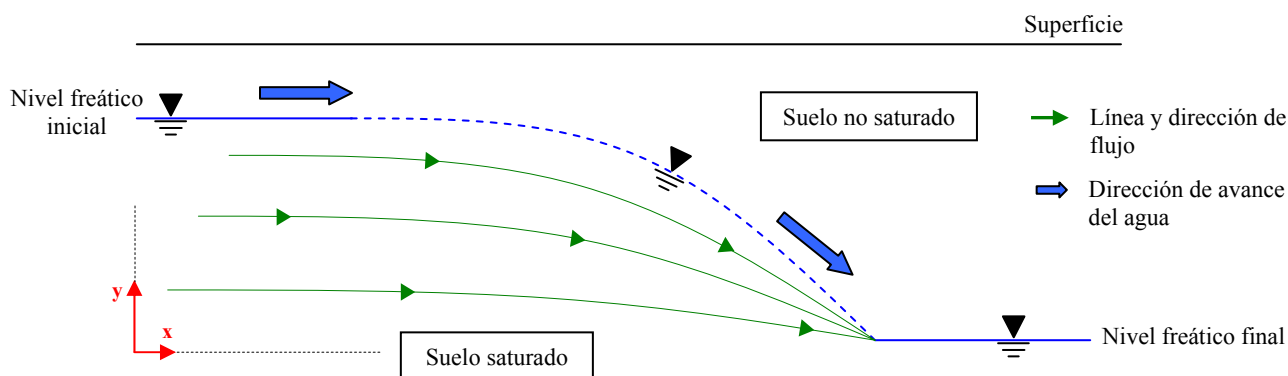


**Figura 3.** Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero libre

Por tanto el nivel piezométrico tiene unidades de longitud, y en este caso, debido a que no se tiene confinamiento, es igual al nivel freático (cota del nivel de agua que separa físicamente la parte saturada del terreno de la que no está), según muestra la figura 3.

Consideración general: hipótesis de Dupuit

El movimiento del agua con una geometría de acuífero libre, sin confinamiento, es por lo general bidimensional, es decir, ésta se desplaza a través del suelo tanto horizontal como verticalmente (véase figura 4).



**Figura 4.** Flujo de agua en una geometría de acuífero libre

Sin embargo, y bajo condiciones de líneas equipotenciales de nivel lo más verticales posible, la llamada hipótesis de Dupuit asume flujo sólo horizontal y por tanto reduce el problema a uno estrictamente unidimensional. De este modo se puede considerar  $h(x, y) = h(x)$  y  $Q(x, y) = Q(x)$ .

**2. Planteamiento físico: zanja en terreno saturado y heterogéneo**

Hipótesis básicas del problema:

- Se asume la hipótesis de Dupuit.
- Suelo homogéneo, isótropo y saturado.
- Análisis transitorio. Por tanto, tanto el nivel piezométrico como el caudal dependen también del tiempo:  $h(x) = h(x, t)$  y  $Q(x) = Q(x, t)$ .

El movimiento del agua sobre el terreno viene caracterizado por la ley de flujo de Darcy, que muestra cómo ésta fluye de mayor a menor nivel piezométrico:

$$q(x, t) = -K \cdot \nabla h(x, t) \quad (1)$$

El problema general de flujo difusivo (sin considerar términos de reacción ni convección) en una geometría de acuífero libre está gobernado por la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$S_s \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot q(x, t) + r \quad (2)$$

donde los parámetros del terreno que intervienen son:

- **Recarga  $r$**  (constante): es el valor, expresado en unidades de volumen por unidad de tiempo, del caudal de agua que penetra al interior del acuífero producto de procesos activos en superficie. Depende, mayoritariamente, de la capacidad de infiltración del terreno.
- **Coefficiente de almacenamiento específico  $S_s$**  (constante): hace referencia al volumen de agua liberado por una unidad de volumen de acuífero cuando se desciende una unidad el nivel piezométrico. Está expresado en unidades del inverso de la longitud y los valores típicos que se adoptan en acuíferos libres de espesor unitario varían entre  $0.3 \text{ m}^{-1}$  y  $0.01 \text{ m}^{-1}$ .

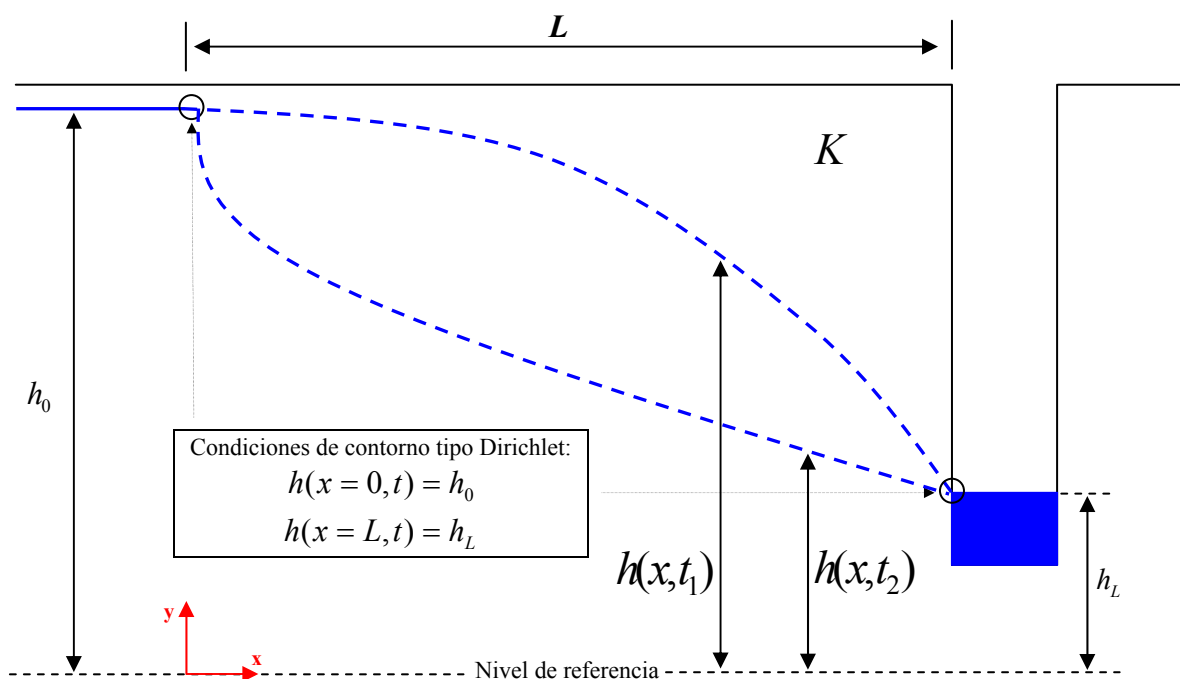
Aplicando la ley de Darcy (1) a la ecuación (2) se obtiene:

$$S_s \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla h(x, t)) + r = K \cdot \nabla \cdot (\nabla h(x, t)) + r \quad (3)$$

Dado que el dominio espacial de la variable de estado  $h(x, t)$  es unidimensional, el desarrollo del término de la divergencia  $\nabla \cdot (\nabla h(x, t))$  en la expresión (3) se

simplifica resultando la siguiente ecuación en derivadas parciales (EDP) parabólica 1D, que gobierna el problema planteado en esta sesión:

$$S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + r \quad (4)$$



**Figura 5.** Variables y parámetros de un esquema de excavación en terreno saturado y homogéneo donde se han representado dos curvas de nivel piezométrico para dos instantes de tiempo ( $t_1 < t_2$ )

cuya solución requiere dos condiciones de contorno que, para este caso, se han propuesto de tipo Dirichlet (valor de la variable prescrito):  $h(x=0, t) = h_0$  y  $h(x=L, t) = h_L$ . Dichas condiciones de contorno y el dominio de resolución,  $x \in [0, L]$ , están representados en la figura 5. Además, debido al carácter transitorio del problema, se necesita una condición inicial que haga referencia al estado del nivel piezométrico antes de ejecutar la excavación. En este caso, el nivel original es  $h_0$  (véase figuras 1 y 5) y, por tanto, la condición inicial es  $h(x, t=0) = h_0$ .

### 3. Problema numérico

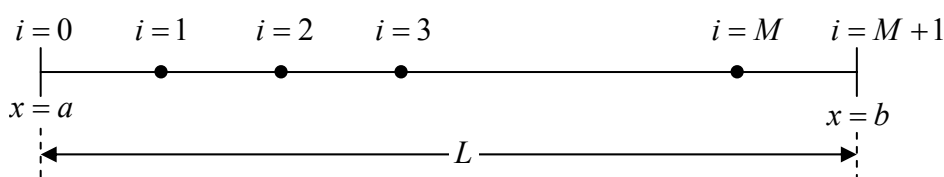
Se desea resolver mediante un esquema de diferencias finitas la siguiente EDP parabólica unidimensional con coeficiente (permeabilidad  $K > 0$ ) constante e invariable en el tiempo y condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

**Término temporal** **Término difusivo**

$$\begin{aligned}
 S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + r \quad \forall x \in [0, L] \quad \forall t \in [0, T] \\
 h(x=0, t) &= h_0 \\
 h(x=L, t) &= h_L \\
 h(x, t=0) &= h_0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

El objetivo es aproximar la ecuación en derivadas parciales (5) a un problema discreto cuya resolución conduce a un sistema lineal de ecuaciones en cada paso de tiempo. Para ello es necesario definir una discretización espacial (dirección x) y temporal (tiempo t), tal y como se muestra en la figura 6:

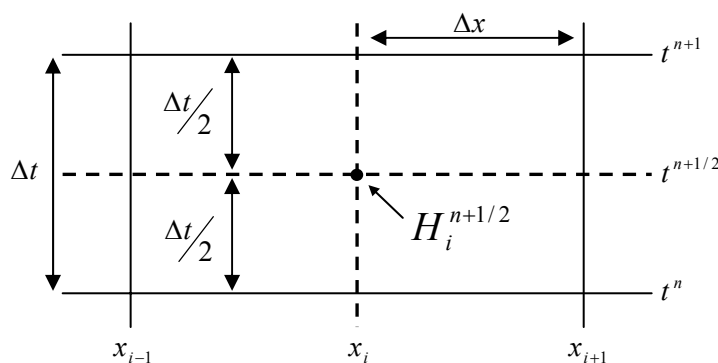
$$\begin{aligned}
 x_i &= x_0 + i\Delta x & i &= 0, 1, \dots, M + 1 \\
 t^n &= t_0 + n\Delta t & n &= 0, 1, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{6}$$



**Figura 6.** Discretización del problema en la dirección x

A fin de resolver numéricamente la ecuación (5) se impone que ésta se verifique en un punto  $x_i, i = 1, \dots, M$ , y en un instante  $t^{n+1/2}, n = 1, \dots, N - 1$ , de la discretización (6). Para ello, de acuerdo con la figura 7, se denota el valor de la función  $h(x_i, t^{n+1/2})$  como  $h_i^{n+1/2}$ , aproximándola por  $H_i^{n+1/2}$ .

$$S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \Big|_i^{n+1/2} = K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \Big|_i^{n+1/2} + r
 \tag{7}$$



**Figura 7.** Discretización del problema parabólico 1D planteado

La **derivada temporal** de la ecuación (7) se aproxima mediante un esquema de diferencias finitas centrado con paso  $\Delta t / 2$  (ver detalles en el apéndice A):

$$\left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \right|_i^{n+1/2} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (8)$$

Asimismo, para aproximar el término difusivo (**derivada espacial**, no temporal) en un instante  $t^{n+1/2}$  se interpola linealmente entre los instantes de tiempo  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , obteniendo la expresión (ver detalles en el apéndice A):

$$\left. \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right|_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right|_i^{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

de tal forma que se debe hallar ahora una discretización espacial para el término difusivo en los instantes de tiempo  $t^n$  y  $t^{n+1}$ . Para ello se aplica, tal como sigue, una aproximación centrada de segundo orden (ver detalles en apéndice B):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right|_i^n &= \frac{h_{i-1}^n - 2h_i^n + h_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \\ \left. \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right|_i^{n+1} &= \frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Por tanto ahora para obtener la EDP (5) discretizada tan sólo hay que sustituir las expresiones (10) y (8) en la ecuación (7), teniendo en cuenta la interpolación lineal del término difusivo (ecuación (9)). Sin embargo, para facilitar la lectura de la expresión resultante, se define el siguiente operador N:

$$N(h_i^u) \equiv h_{i-1}^u - 2h_i^u + h_{i+1}^u \quad (11)$$

resultando así el siguiente problema discreto en diferencias finitas:

$$\begin{aligned}
 h_i^{n+1} - h_i^n &= \frac{1}{2} R \cdot N(h_i^{n+1}) + \frac{1}{2} R \cdot N(h_i^n) + \frac{\Delta t}{S_s} r + O(\Delta t^2, \Delta x^2) & i = 1, \dots, M \\
 & & n > 0 \\
 h_0^n &= h_0 & n \geq 0 \\
 h_{M+1}^n &= h_L & n \geq 0 \\
 h_i^0 &= h_0 & i = 0, \dots, M + 1
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde se define

$$R = \frac{K}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tag{13}$$

Nótese que la ecuación (12) cumple exactamente la EDP (5) ya que involucra el término del error. Eliminando dicho término se obtiene la aproximación discreta deseada:

$$\begin{aligned}
 H_i^{n+1} - \frac{R}{2} \cdot N(H_i^{n+1}) &= H_i^n + \frac{R}{2} \cdot N(H_i^n) + \frac{\Delta t}{S_s} r & i = 1, \dots, M \\
 & & n > 0 \\
 H_0^n &= h_0 & n \geq 0 \\
 H_{M+1}^n &= h_L & n \geq 0 \\
 H_i^0 &= h_0 & i = 0, \dots, M + 1
 \end{aligned} \tag{14}$$

Substituyendo la ecuación (11) en (14) el problema se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
 -\frac{R}{2} H_{i-1}^{n+1} + (1+R)H_i^{n+1} - \frac{R}{2} H_{i+1}^{n+1} &= \frac{R}{2} H_{i-1}^n + (1-R)H_i^n + \frac{R}{2} H_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{S_s} r & i = 1, \dots, M \\
 & & n > 0 \\
 H_0^n &= h_0 & n \geq 0 \\
 H_{M+1}^n &= h_L & n \geq 0 \\
 H_i^0 &= h_0 & i = 0, \dots, M + 1
 \end{aligned} \tag{15}$$

La ecuación (15) se puede representar como un sistema lineal de ecuaciones. Dicho sistema, escrito en forma matricial, es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^n + \mathbf{G} \tag{16}$$





resultado (ésta última utilizando la función `getframe` de MATLAB). Por otro lado calcula, por diferencias finitas, el valor aproximado del caudal en la zanja una vez resuelto el sistema (16).

`diferencias_finitas_CN`: es la función encargada de resolver mediante una aproximación por el método de Crank-Nicolson el problema planteado, es decir, resolver el sistema de ecuaciones (16), creando previamente las matrices del sistema **A** y **B** mediante la instrucción `spdiags` (útil para crear matrices definidas por diagonales) y utilizando la descomposición de **A** en triangular inferior (*L*) y triangular superior (*U*).

Para utilizar correctamente las condiciones de contorno de tipo Dirichlet se almacena la solución para cada paso de tiempo en una columna de una matriz. Es en esta matriz donde, para respetar las condiciones de contorno y la condición inicial, se asignan previamente los valores preescritos del nivel piezométrico: la primera fila corresponde al valor de la condición de contorno en el extremo inicial del dominio, la última fila al valor de la condición de contorno en el extremo final, y la primera columna al valor de la condición inicial (véase figura 8).

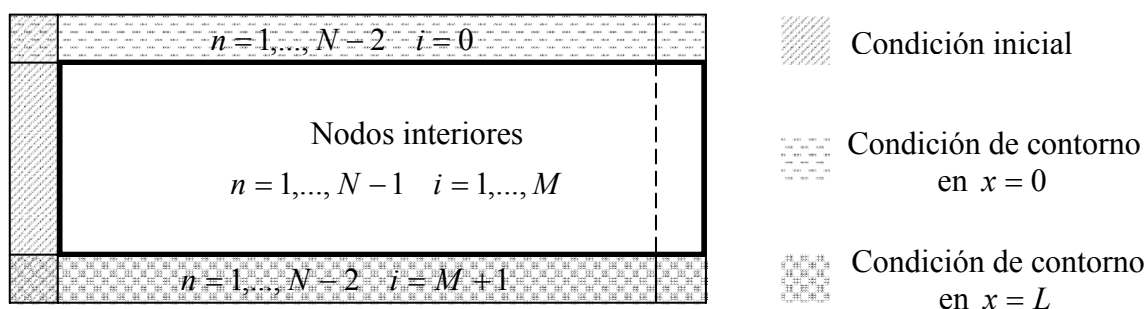


Figura 8. Estructura de la matriz solución

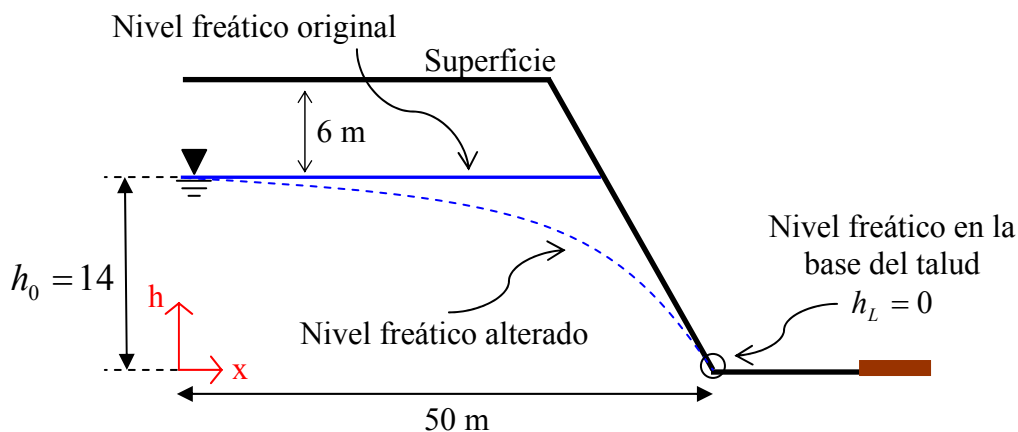
### 5. Guía de la sesión

En esta sesión se plantea el estudio del problema de flujo en un talud de 20 m cercano a una carretera. La baja permeabilidad del terreno (tabla 1) permite considerar el talud como si fuese prácticamente impermeable. Considérese, sin embargo, que unas sobreexplotaciones cercanas al otro lado de la carretera han disminuido el nivel del agua hasta la cota de la base del talud (ver figura 8), provocando la alteración del nivel freático. Debido también a la baja permeabilidad de las arcillas, tomar inicialmente un dominio espacial de 50 m.

Material	K (cm/s)	$S_s$ ( $m^{-1}$ )	$r$ ( $m^3/s$ )	Profundidad NF (m)
Capas limo-arcillosas	$2.3 \cdot 10^{-4}$	0.09	$10^{-8}$	6

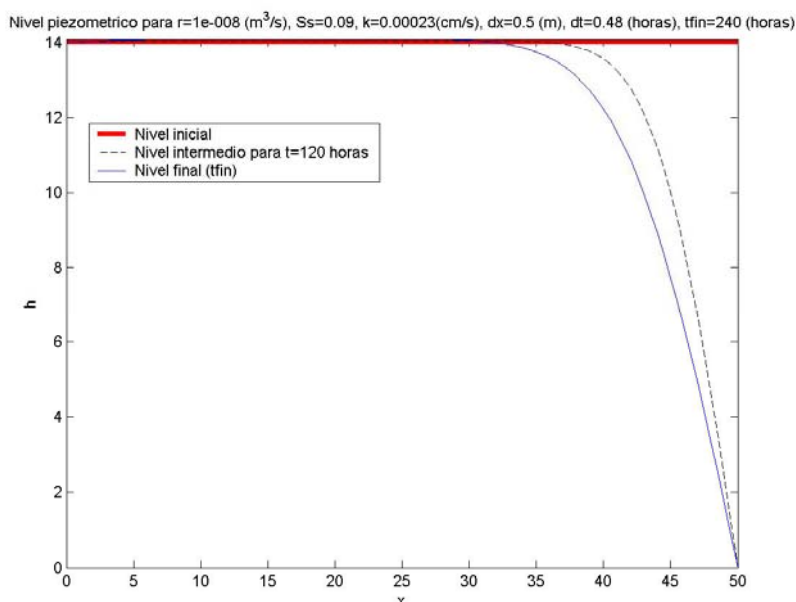
Tabla 1. Parámetros del terreno

Sesión dirigida:



**Figura 9.** Geometría del problema propuesto

1. El primer paso es establecer la geometría del problema propuesto, indicando así tanto el valor de las condiciones de contorno como el dominio de resolución (véase figura 9).
2. Ejecutar el programa principal *Zanja* con el problema propuesto. Utilizar 100 pasos en el espacio y 500 en el tiempo para un análisis temporal de diez días. Visualizar la animación y obtener el resultado que se muestra en la figura 10.



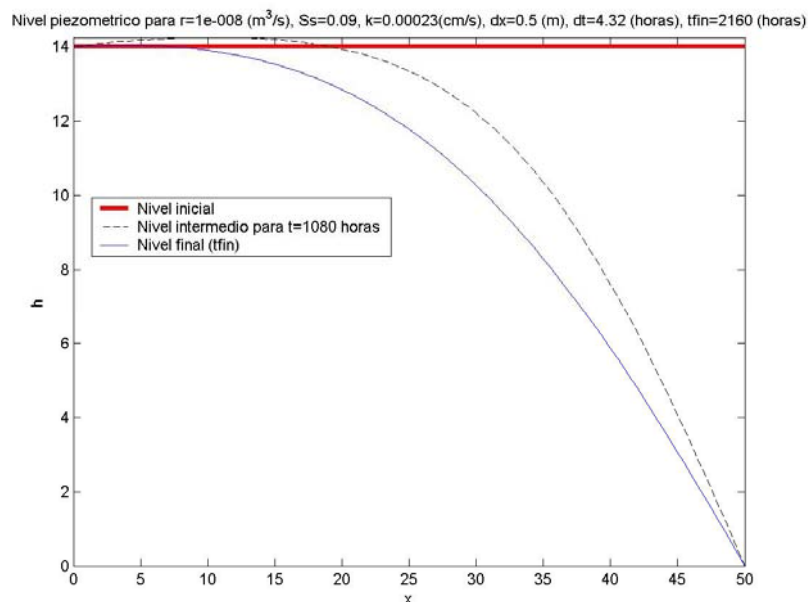
**Figura 10.** Solución obtenida en el paso 2

Observar la evolución del nivel freático a medida que avanza el tiempo. Adviértase que para este caso se obtiene un coeficiente  $R = 0.177 < 0.5$

y, según el resultado, la aproximación se mantiene estable y sin presentar oscilaciones.

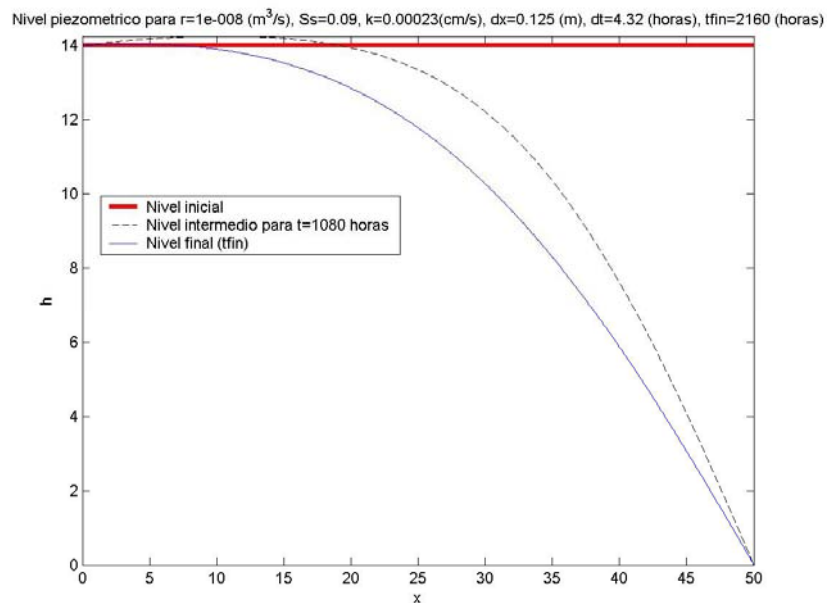
3. Ejecutar el paso anterior, manteniendo las discretizaciones, pero para un análisis temporal de tres meses (ver figura 11). Observar (ver la animación) como hay un momento donde el nivel freático sobrepasa el nivel inicial aunque finalmente, debido al almacenamiento específico, el caudal de recarga no es suficiente como para que dicho nivel se mantenga.

Nótese que para este caso el valor del coeficiente  $R$  alcanzado es de 1.58, mayor por tanto a 0.5. Recuérdese que el método de Crank-Nicolson es incondicionalmente estable pero presenta oscilaciones numéricas si  $R > 0.5$ . ¿Está el resultado obtenido acorde con este criterio?



**Figura 11.** Solución obtenida en el paso 3

4. Ejecutar de nuevo el paso 3 con una discretización espacial cuatro veces más fina y saltar la animación. Observar cómo ahora se obtiene un coeficiente  $R = 25.436$  y la aproximación mostrada en la figura 12.



**Figura 12.** Solución obtenida en el paso 4

Aparentemente, ¿se cumple el criterio de estabilidad y no oscilaciones? Nótese que en la figura 10 sólo se muestran dos curvas (tiempo final e intermedio) y que el valor del mínimo caudal obtenido en la zanja es negativo a las 4.32 h de empezar el análisis, lo cual físicamente indica que el agua está entrando en el talud en vez de salir de él. ¿Es este resultado admisible?

- Ejecutar el paso 4 y observar la animación. Notar cómo es posible distinguir pequeñas oscilaciones en extremo derecho del dominio durante los primeros segundos de visualización. Observar que dichas oscilaciones se atenúan hasta desaparecer a medida que avanza el tiempo.
- Ejecutar otra vez el paso 4 para una discretización espacial con 1000 intervalos y tan sólo 100 pasos en el tiempo, de tal manera que el coeficiente  $R$  ahora es mucho más elevado (comprobar que  $R = 794.88$ ). Como se puede comprobar tanto en la figura 13 como en la animación, las oscilaciones están ya presentes en todos los pasos de tiempo pero la solución se mantiene estable.

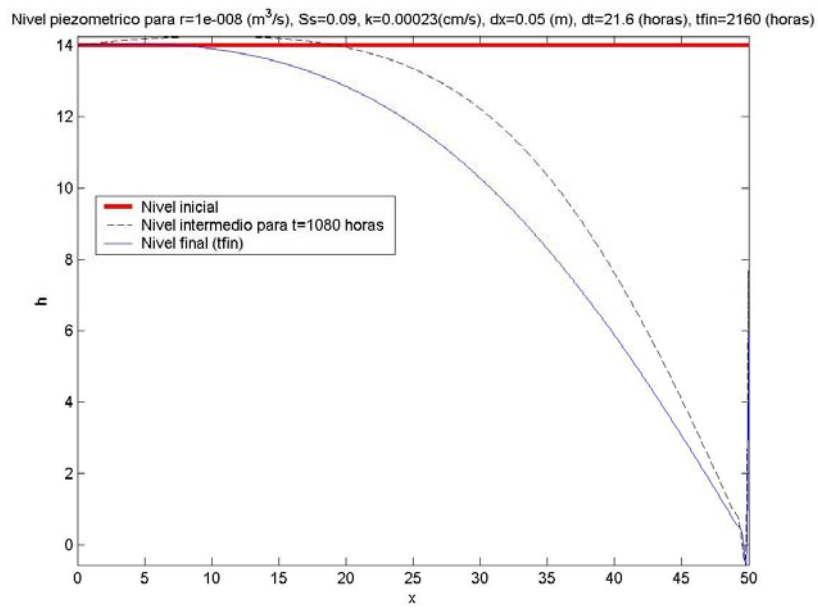
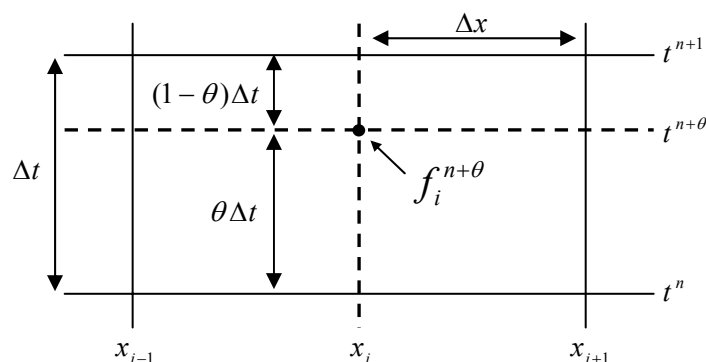


Figura 13. Solución obtenida en el paso 6

**Apéndice A****Figura A1.** Discretización del problema parabólico 1D planteado

En este apartado se deduce la expresión para aproximar numéricamente el valor de la derivada primera de una función  $f(x,t)$  respecto al tiempo en un instante  $t^{n+\theta\Delta t}$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ), situado entre los instantes  $t^n$  y  $t^{n+1}$  (ver figura A1).

Por tanto, el objetivo es hallar una expresión que permita expresar el valor de

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+\theta}$$

en función de los valores de  $f(x,t)$  en los puntos de la discretización  $(x_i, t^n)$  y  $(x_i, t^{n+1})$ . Nótese que dichos valores se pueden expresar como

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= f(x_i, t^{n+\theta} + (1-\theta) \cdot \Delta t) \\ f_i^n &= f(x_i, t^{n+\theta} - \theta \cdot \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Es importante observar que para  $\theta = 1/2$  se aproxima la derivada primera respecto al tiempo en el instante  $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$ , que es precisamente la aproximación que interesa obtener en la expresión (8) de este guión.

De modo que aplicando una aproximación de Taylor a (A1) centrada en el punto  $(x_i, t^{n+\theta})$  se obtiene

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= \sum_{k=0}^m \frac{((1-\theta) \cdot \Delta t)^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right|_i^{n+\theta} = f_i^{n+\theta} + (1-\theta) \cdot \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+\theta} + \\ &+ \frac{((1-\theta) \cdot \Delta t)^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^{n+\theta} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

$$f_i^n = \sum_{k=0}^m \frac{(-\theta \cdot \Delta t)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \Big|_i^{n+\theta} = f_i^{n+\theta} - \theta \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^{n+\theta} + \frac{(\theta \cdot \Delta t)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_i^{n+\theta} + O(\Delta t^3) \quad (A3)$$

Restando (A2) y (A3) se llega a la expresión

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} - f_i^n &= \Delta t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^{n+\theta} + (1-2\theta) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_i^{n+\theta} \\ &+ [3\theta^2 - 3\theta + 1] \cdot \frac{\Delta t^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \Big|_i^{n+\theta} + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (A4)$$

de modo que, despejando de (A4) el término de la primera derivada, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^{n+\theta} &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} - \tau_i^{n+\theta} \\ \tau_i^{n+\theta} &= (1-2\theta) \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_i^{n+\theta} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (A5)$$

Obsérvese cómo el orden de la aproximación (A5) es cuadrático si se escoge  $\theta = 1/2$ , mientras que para cualquier otro valor de  $\theta$  dicho orden será lineal. Nótese por tanto que para  $\theta = 1/2$  se obtiene la aproximación por el método de Crank-Nicolson,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^{n+1/2} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (A6)$$

Por otro lado, la interpolación temporal del término difusivo (véase ecuación (9) de el guión) también se puede discretizar a partir de las ecuaciones (A2) y (A3). Concretamente, multiplicando la ecuación (A2) por  $\theta$ , la ecuación (A3) por  $(1-\theta)$  y restando el resultado se obtiene



$$\begin{aligned}
\theta \cdot f_i^{n+1} + (1-\theta)f_i^n &= [\theta + (1-\theta)]f_i^{n+\theta} + [\theta(1-\theta) - (1-\theta)\theta] \cdot \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+\theta} + \\
&+ [\theta(1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta^2] \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^{n+\theta} + \\
&+ [\theta(1-\theta)^3 - (1-\theta)\theta^3] \cdot \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right|_i^{n+\theta} + O(\Delta t^4)
\end{aligned} \tag{A7}$$

resultando

$$\begin{aligned}
f_i^{n+\theta} &= \theta \cdot f_i^{n+1} + (1-\theta)f_i^n - \theta(1-\theta) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^{n+\theta} + O(\Delta t^3) = \\
&= \theta \cdot f_i^{n+1} + (1-\theta)f_i^n + O(\Delta t^2)
\end{aligned} \tag{A8}$$

Nótese cómo el orden de la interpolación lineal (A8) es cuadrático. Dicha interpolación, para el método de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ), resulta de la forma

$$f_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}f_i^{n+1} + \frac{1}{2}f_i^n + O(\Delta t^2) \tag{A9}$$

**Apéndice B**

En este apéndice se deduce una aproximación centrada a la derivada segunda respecto al espacio de una función  $f(x, t)$ .

Nótese que al tratarse de una derivada espacial el tiempo no influye en la aproximación pues permanece fijo. Por tanto, considerando un instante de tiempo genérico  $t^u$ , el objetivo es hallar una expresión que permita expresar el valor de

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^u$$

en función de los valores de  $f(x, t)$  en los puntos de la discretización  $(x_{i+1}, t^u)$  y  $(x_{i-1}, t^u)$ . Obsérvese que dichos valores se pueden expresar como

$$\begin{aligned} f_{i+1}^u &= f(x_i + \Delta x, t^u) \\ f_{i-1}^u &= f(x_i - \Delta x, t^u) \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

Por tanto, desarrollando con una serie de Taylor centrada en  $(x_i, t^u)$  las expresiones (B1), se obtiene

$$f_{i+1}^u = \sum_{k=0}^m \frac{\Delta x^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_i^u = f_i^u + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^u + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^u + O(\Delta x^3) \quad (\text{B2})$$

$$f_{i-1}^u = \sum_{k=0}^m \frac{(-\Delta x)^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_i^u = f_i^u - \Delta x \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^u + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^u + O(\Delta x^3) \quad (\text{B3})$$

Para obtener una aproximación centrada de segundo orden de la segunda derivada espacial de  $f(x, t)$  se combinan las expresiones de (B2) y (B3) como sigue

$$f_{i+1}^u + f_{i-1}^u = 2f_i^u + \Delta x^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^u + \frac{\Delta x^4}{12} \cdot \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^u + O(\Delta x^6) \quad (\text{B4})$$

de modo que, despejando de (B4) el término de la segunda derivada, se obtiene

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^u = \frac{f_{i-1}^u - 2f_i^u + f_{i+1}^u}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^u + O(\Delta x^4) = \frac{f_{i-1}^u - 2f_i^u + f_{i+1}^u}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{B5})$$

Obsérvese por tanto que la expresión (B5) es válida para cualquier tiempo  $t^u$ , en particular para  $t^n$  y para  $t^{n+1}$ . Substituyendo dichos tiempos se obtienen finalmente las aproximaciones deseadas:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n &= \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^n + O(\Delta x^4) = \\ &= \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^{n+1} &= \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^{n+1} + O(\Delta x^4) = \\ &= \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{B7})$$