

SESIÓN PRÁCTICA

3

EDP PARABÓLICA CON MÉTODO BTCS

Flujo en acuífero libre

En esta sesión se analiza, mediante el método implícito de diferencias finitas, la evolución temporal del nivel freático sobre una geometría de acuífero libre alterada por la excavación de una zanja. Las condiciones de contorno impuestas son de tipo Dirichlet (nivel piezométrico prescrito en el contorno). El objetivo principal es que el estudiante asimile las particularidades del problema físico y la influencia de los parámetros numéricos en la solución obtenida, sobretodo en la evolución del caudal de agua. También debe ser capaz de derivar y aplicar correctamente una formulación implícita para resolverlo, haciendo especial hincapié en la estabilidad incondicional del método.

1. Objetivo

En este trabajo se desea estudiar el efecto que produce una excavación sobre un terreno saturado homogéneo de permeabilidad K conocida. Para ello se plantea realizar un análisis de flujo en régimen no estacionario (transitorio) bajo una geometría de acuífero libre, tal y como muestra la figura 1.

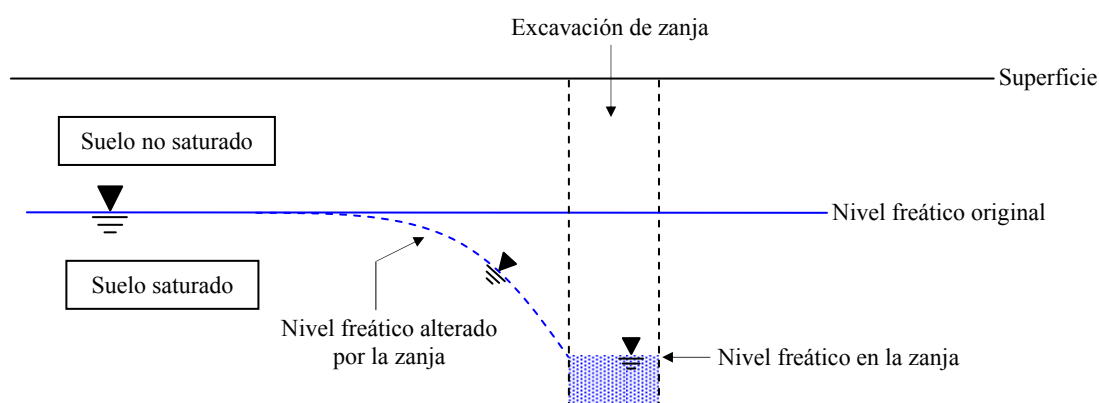


Figura 1. Esquema generalizado de la geometría de una excavación en acuífero libre

La solución de un problema de flujo reside en encontrar el nivel piezométrico h y, en consecuencia, el caudal Q filtrado en la zanja debido al gradiente de presión de agua:

$$h = z + \frac{P_w}{\gamma}$$

donde z representa la cota que tiene un punto del suelo, expresada en unidades de longitud, sobre un nivel de referencia; P_w es la presión de agua expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud; γ es el peso específico del agua (fuerza por unidad de superficie) y la relación P_w/γ representa la presión expresada en forma de columna de agua que tiene por encima dicho punto del suelo (véase figuras 2 y 3).

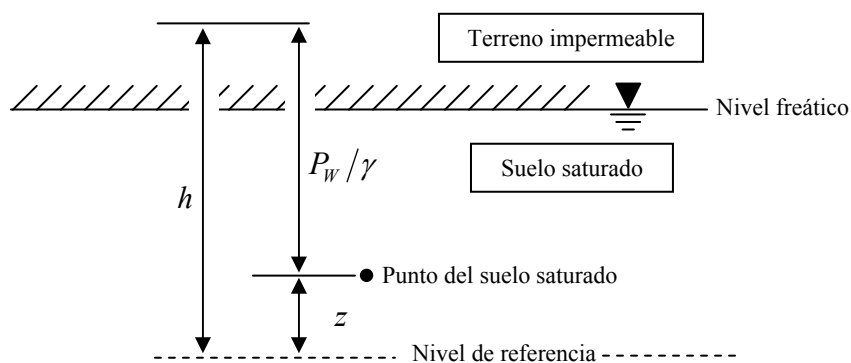


Figura 2. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero confinado

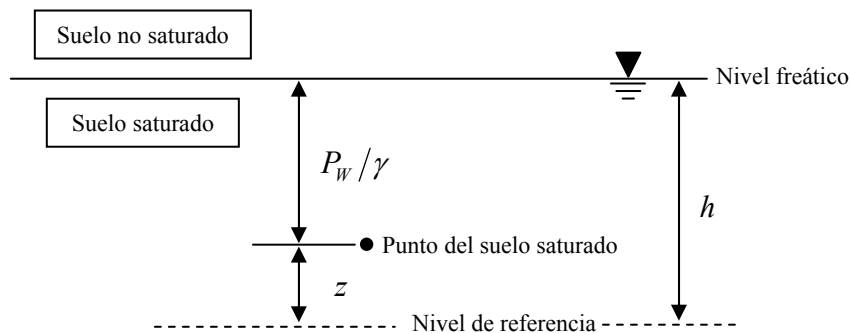


Figura 3. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero libre

Por tanto el nivel piezométrico tiene unidades de longitud, y en este caso, debido a que no se tiene confinamiento, es igual al nivel freático (cota del nivel de agua que separa físicamente la parte saturada del terreno de la que no está), según muestra la figura 3.

Consideración general: hipótesis de Dupuit

El movimiento del agua con una geometría de acuífero libre, sin confinamiento, es por lo general bidimensional, es decir, ésta se desplaza a través del suelo tanto horizontal como verticalmente (véase figura 4).

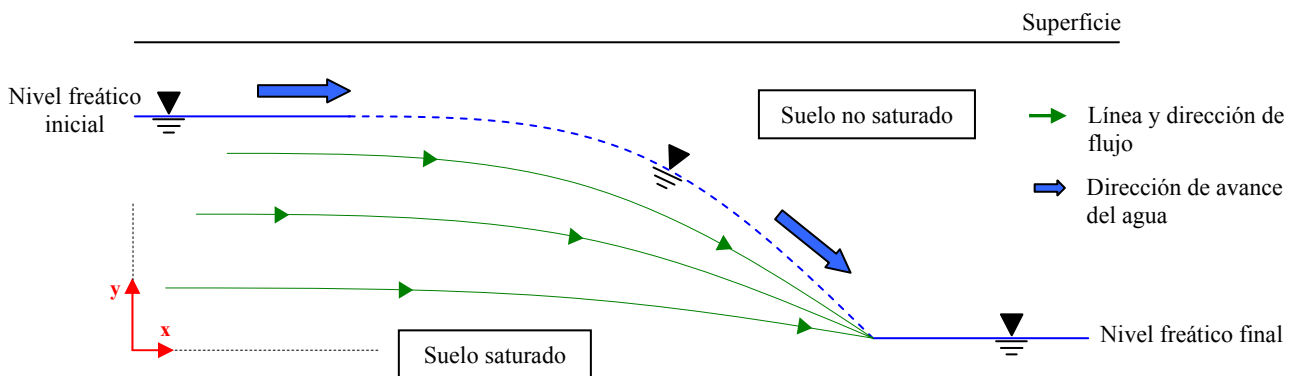


Figura 4. Flujo de agua en una geometría de acuífero libre

Sin embargo, y bajo condiciones de líneas equipotenciales de nivel lo más verticales posible, la llamada hipótesis de Dupuit asume flujo sólo horizontal y por tanto reduce el problema a uno estrictamente unidimensional. De este modo se puede considerar $h(x, y) = h(x)$ y $Q(x, y) = Q(x)$.

2. Planteamiento físico: zanja en terreno saturado y heterogéneo

Hipótesis básicas del problema:

- Se asume la hipótesis de Dupuit.
- Suelo homogéneo, isótropo y saturado.
- Análisis transitorio. Por tanto, tanto el nivel piezométrico como el caudal dependen también del tiempo: $h(x) = h(x, t)$ y $Q(x) = Q(x, t)$.

El movimiento del agua sobre el terreno viene caracterizado por la ley de flujo de Darcy, que muestra cómo ésta fluye de mayor a menor nivel piezométrico:

$$q(x, t) = -K \cdot \nabla h(x, t) \quad (1)$$

El problema general de flujo difusivo (sin considerar términos de reacción ni convección) en una geometría de acuífero libre está gobernado por la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$S_s \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot q(x, t) + r \quad (2)$$

donde los parámetros del terreno que intervienen son:

- **Recarga r** (constante): es el valor, expresado en unidades de volumen por unidad de tiempo, del caudal de agua que penetra al interior del acuífero producto de procesos activos en superficie. Depende, mayoritariamente, de la capacidad de infiltración del terreno.
- **Coficiente de almacenamiento específico S_s** (constante): hace referencia al volumen de agua liberado por una unidad de volumen de acuífero cuando se desciende una unidad el nivel piezométrico. Está expresado en unidades del inverso de la longitud y los valores típicos que se adoptan en acuíferos libres de espesor unitario varían entre 0.3 m^{-1} y 0.01 m^{-1} .

Aplicando la ley de Darcy (1) a la ecuación (2) se obtiene:

$$S_s \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla h(x, t)) + r = K \cdot \nabla \cdot (\nabla h(x, t)) + r \quad (3)$$

Dado que el dominio espacial de la variable de estado $h(x, t)$ es unidimensional, el desarrollo del término de la divergencia $\nabla \cdot (\nabla h(x, t))$ en la expresión (3) se

simplifica resultando la siguiente ecuación en derivadas parciales (EDP) parabólica 1D, que gobierna el problema planteado en esta sesión:

$$S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + r \quad (4)$$

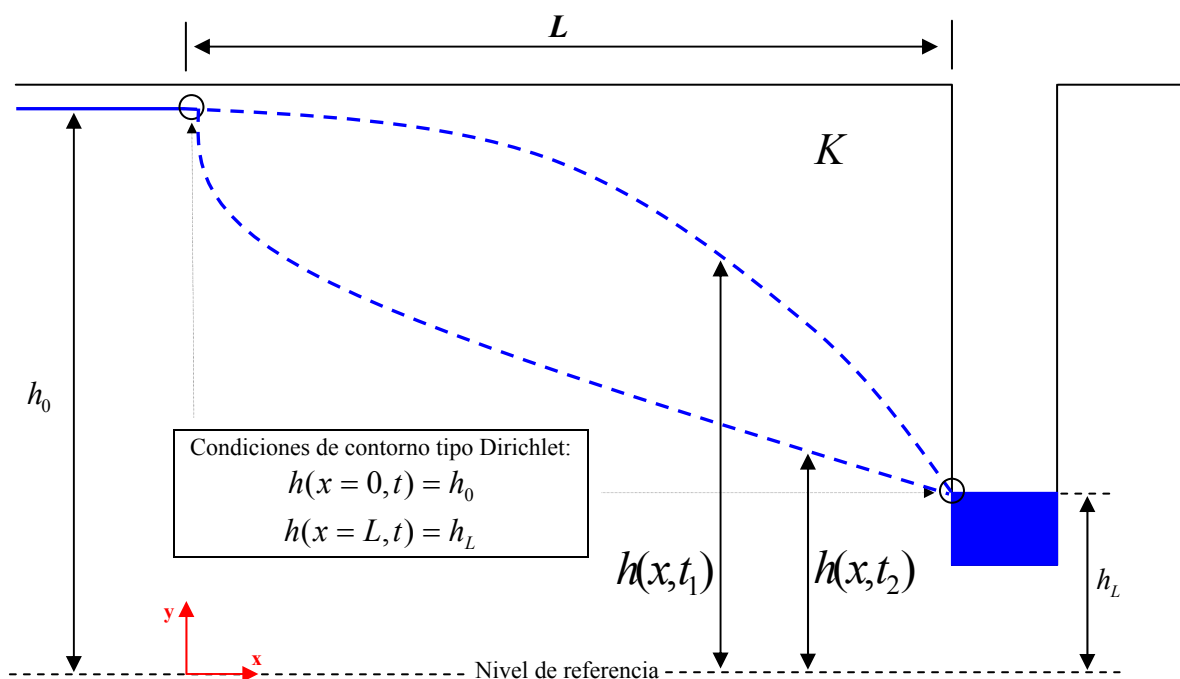


Figura 5. Variables y parámetros de un esquema de excavación en terreno saturado y homogéneo donde se han representado dos curvas de nivel piezométrico para dos instantes de tiempo ($t_1 < t_2$)

cuya solución requiere dos condiciones de contorno que, para este caso, se han propuesto de tipo Dirichlet (valor de la variable prescrito): $h(x=0, t) = h_0$ y $h(x=L, t) = h_L$. Dichas condiciones de contorno y el dominio de resolución, $x \in [0, L]$, están representados en la figura 5. Además, debido al carácter transitorio del problema, se necesita una condición inicial que haga referencia al estado del nivel piezométrico antes de ejecutar la excavación. En este caso, el nivel original es h_0 (véase figuras 1 y 5) y, por tanto, la condición inicial es $h(x, t=0) = h_0$.

3. Problema numérico

Se desea resolver mediante un esquema de diferencias finitas la siguiente EDP parabólica unidimensional con coeficiente (permeabilidad $K > 0$) constante e invariable en el tiempo y condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

Término temporal **Término difusivo**

$$\begin{aligned}
 S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + r \quad \forall x \in [0, L] \quad \forall t \in [0, T] \\
 h(x=0, t) &= H_0 \\
 h(x=L, t) &= H_L \\
 h(x, t=0) &= H_0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

El objetivo es aproximar la ecuación en derivadas parciales (5) a un problema discreto cuya resolución conduce a un sistema lineal de ecuaciones en cada paso de tiempo. Para ello es necesario definir una discretización espacial (dirección x) y temporal (tiempo t), tal y como se muestra en la figura 6:

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_0 + i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, M + 1 \\
 t^n &= t_0 + n\Delta t \quad n = 0, 1, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

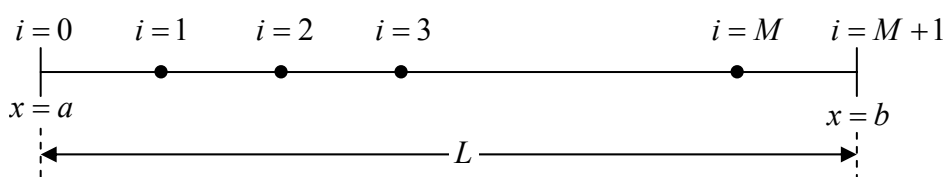


Figura 6. Discretización del problema en la dirección x

A fin de resolver numéricamente la ecuación (5) se impone que ésta se verifique en un punto x_i , $i = 1, \dots, M$, y en un instante t^{n+1} , $n = 1, \dots, N-1$, de la discretización (6). Para ello, de acuerdo con la figura 7, se denota el valor de la función $h(x_i, t^{n+1})$ como h_i^{n+1} , aproximándola por H_i^{n+1} .

$$S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \Big|_i^{n+1} = K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \Big|_i^{n+1} + r
 \tag{7}$$

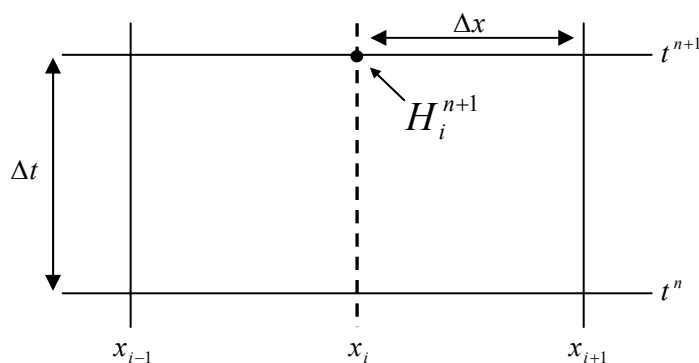


Figura 7. Discretización del problema parabólico 1D planteado

La **derivada temporal** de la ecuación (7) se aproxima mediante un esquema de diferencias finitas hacia atrás con paso Δt (ver detalles en el apéndice):

$$\left. \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \right|_i^{n+1} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (8)$$

Asimismo, para aproximar el término difusivo (**derivada espacial**, no temporal) en un instante t^{n+1} se aplica, tal como sigue, una aproximación centrada de segundo orden (ver detalles en apéndice):

$$\left. \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \right|_i^{n+1} = \frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (9)$$

Por tanto ahora para obtener la EDP (5) discretizada tan sólo hay que sustituir las expresiones (8) y (9) en la ecuación (7), resultando así el siguiente problema discreto en diferencias finitas:

$h_i^{n+1} - h_i^n = R \cdot (h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{S_s} r + O(\Delta t, \Delta x^2)$	$i = 1, \dots, M$	(10)
$h_0^n = h_0$	$n \geq 0$	
$h_{M+1}^n = h_L$	$n \geq 0$	
$h_i^0 = h_0$	$i = 0, \dots, M + 1$	

donde se define

$$R = \frac{K}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (11)$$

Nótese que la ecuación (10) cumple exactamente la EDP (5) ya que involucra el término del error. Eliminando dicho término se obtiene la aproximación discreta deseada:

$$\begin{array}{l}
 -RH_{i-1}^{n+1} + (1+2R)H_i^{n+1} - RH_{i+1}^{n+1} = H_i^n + \frac{\Delta t}{S_s} r \quad i=1,\dots,M \\
 \phantom{-RH_{i-1}^{n+1} + (1+2R)H_i^{n+1} - RH_{i+1}^{n+1} = H_i^n + \frac{\Delta t}{S_s} r} \quad n > 0 \\
 H_0^n = h_0 \quad n \geq 0 \\
 H_{M+1}^n = h_L \quad n \geq 0 \\
 H_i^0 = h_0 \quad i = 0,\dots,M+1
 \end{array} \quad (12)$$

La ecuación (12) se puede representar como un sistema lineal de ecuaciones. Dicho sistema, escrito en forma matricial, es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^n + \mathbf{G} \quad (13)$$

Obsérvese que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{\mathbb{R}}(M \times M)$, $\mathbf{H}^{n+1}, \mathbf{H}^n, \mathbf{G} \in M_{\mathbb{R}}(M \times 1)$, donde el vector \mathbf{H}^{n+1} hace referencia al nivel piezométrico discretizado en el instante de tiempo $n+1$ y el vector \mathbf{H}^n al nivel discretizado en el instante n . Obsérvese que dichos vectores contienen los valores del nivel piezométrico en los M puntos interiores de la discretización. El vector \mathbf{G} incluye el término de la recarga y las condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$\mathbf{H}^{n+1} = \begin{bmatrix} H_1^{n+1} \\ H_2^{n+1} \\ \vdots \\ H_{M-1}^{n+1} \\ H_M^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}^n = \begin{bmatrix} H_1^n \\ H_2^n \\ \vdots \\ H_{M-1}^n \\ H_M^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \frac{\Delta t}{S_s} r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \cdot h_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \cdot h_L \end{bmatrix} \quad (14)$$

La matriz \mathbf{A} es, dada la discretización de la figura 7, tridiagonal, simétrica y diagonalmente dominante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2R & -R & & & \\ -R & 1+2R & -R & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -R & 1+2R & -R \\ & & & & -R & 1+2R \end{bmatrix} \quad (15)$$

De esta manera la solución de la EDP (5) equivale a resolver el sistema lineal de ecuaciones (13) para cada Δt hasta un tiempo final T escogido.

4. Introducción al código

Se ha elaborado un programa que contiene los siguientes dos ficheros de extensión MATLAB (*.m):

- Zanja
- diferencias_finitas_implicito

Zanja: incluye la lectura de los datos geométricos y características del terreno por pantalla incluidas las condiciones de contorno y la discretización del dominio espacial y temporal. Además realiza la gráfica y la animación opcional del resultado (ésta última utilizando la función `getframe` de MATLAB). Por otro lado calcula, por diferencias finitas, el valor aproximado del caudal en la zanja una vez resuelto el sistema (13).

diferencias_finitas_implicito: es la función encargada de resolver mediante una aproximación por método implícito el problema planteado, es decir, resolver el sistema de ecuaciones (13), creando previamente la matriz del sistema A mediante la instrucción `spdiags` (útil para crear matrices definidas por diagonales) y utilizando la descomposición en triangular inferior (L) y triangular superior (U).

Para utilizar correctamente las condiciones de contorno de tipo Dirichlet se almacena la solución para cada paso de tiempo en una columna de una matriz. Es en esta matriz donde, para respetar las condiciones de contorno y la condición inicial, se asignan previamente los valores preescritos del nivel piezométrico: la primera fila corresponde al valor de la condición de contorno en el extremo inicial del dominio, la última fila al valor de la condición de contorno en el extremo final, y la primera columna al valor de la condición inicial (véase figura 8).

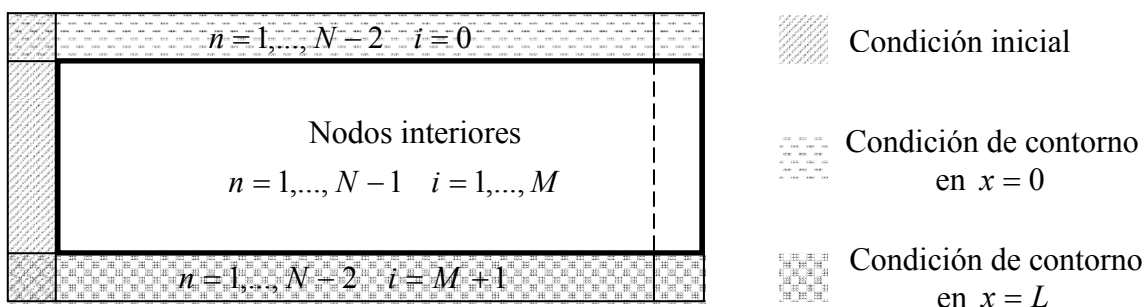


Figura 8. Estructura de la matriz solución

5. Guía de la sesión

En esta sesión se plantea el estudio del problema de flujo en un talud vertical de 15 m cercano a una vía de tren. Con el fin de evitar caudales de agua que

proporcionen fuerzas de filtración desestabilizadoras, considérese que dicho talud ha sido impermeabilizado con hormigón proyectado en toda su superficie excepto, por problemas técnicos, en su base. Nótese (ver figura 9) cómo un análisis unidimensional de este problema cumple las condiciones de contorno y la condición inicial de la ecuación (5).

El tipo de terreno y sus propiedades están especificados en la tabla 1.

Material	K (cm/s)	S_S (m^{-1})	r (m^3/s)
Areniscas calcáreas y limonitas	$5.2 \cdot 10^{-3}$	0.05	10^{-9}

Tabla 1. Parámetros del terreno

A fin de definir el dominio suponer que en la campaña geotécnica, puesta en marcha un día después de la impermeabilización, cuatro sondeos realizados a 100, 120, 130 y 135 m del talud detectaron agua a una profundidad de 4.7 m.

Sesión dirigida:

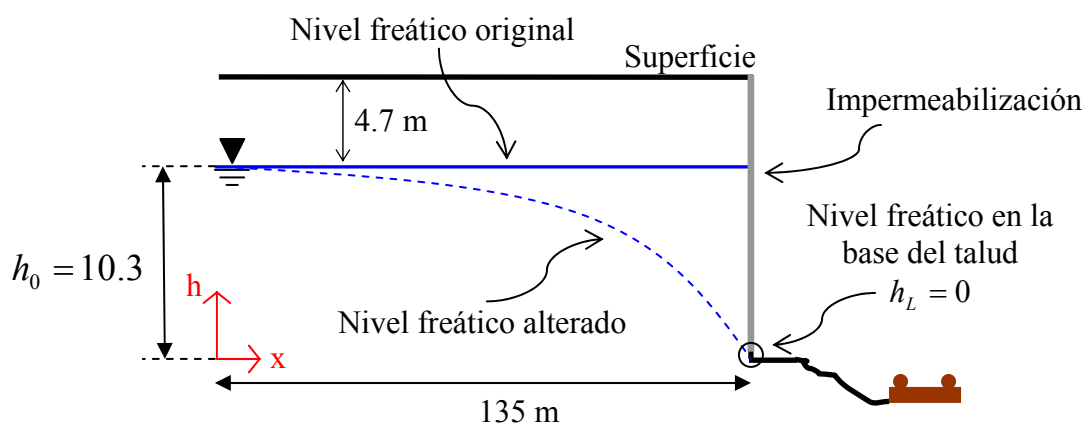


Figura 9. Geometría del problema propuesto

1. El primer paso es establecer la geometría del problema propuesto, indicando así el valor de las condiciones de contorno (véase figura 9).
2. Ejecutar el programa principal *Zanja* con el problema propuesto. Utilizar 100 pasos en el espacio y 500 en el tiempo para un análisis temporal de dos días. Visualizar la animación y obtener el resultado que se muestra en la figura 10.

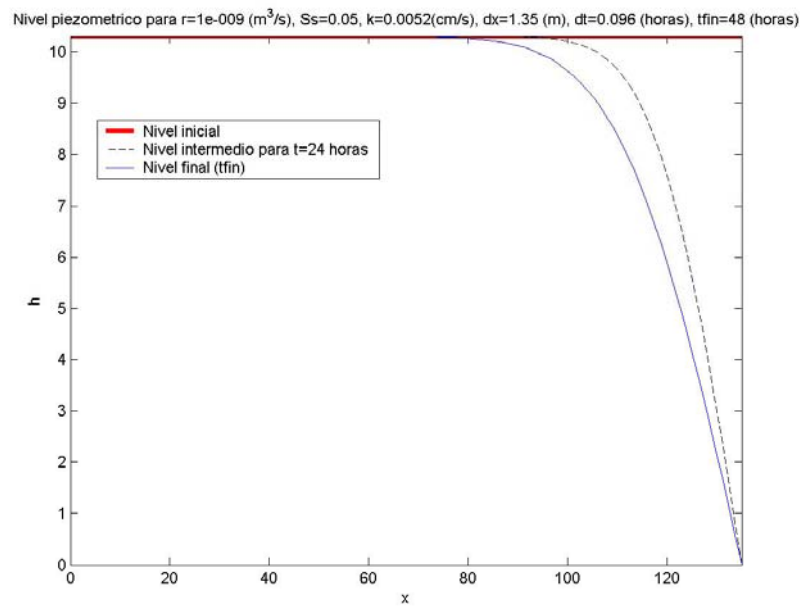


Figura 10. Solución obtenida en el paso 2

Observar la evolución del nivel freático a medida que avanza el tiempo y notar cómo la aproximación obtenida es coherente con los resultados de los sondeos geotécnicos.

Por otro lado adviértase que para este caso se obtiene un coeficiente $R = 0.197 < 0.5$ y, según el resultado, la aproximación se mantiene estable y sin presentar oscilaciones.

3. Ejecutar el paso anterior pero utilizando el doble de intervalos en el espacio y observar por la animación y la gráfica el resultado obtenido (ver figura 11).

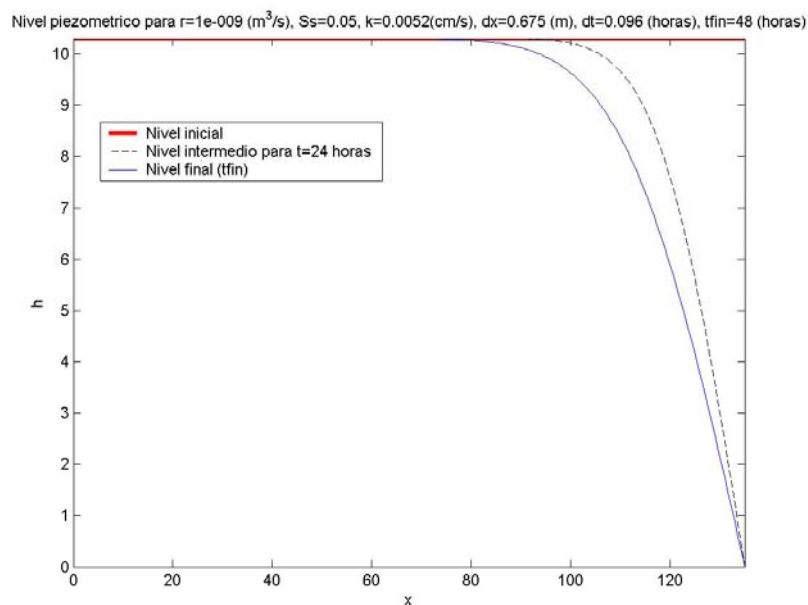


Figura 11. Solución obtenida en el paso 3

Nótese que para este caso el valor del coeficiente R alcanzado es de 0.789, mayor por tanto a 0.5. Sin embargo las curvas obtenidas siguen siendo estables y no presentan oscilaciones numéricas en ningún paso de tiempo (ver animación). Este hecho es debido a que la aproximación del problema por el método implícito es incondicionalmente estable y nunca presenta oscilaciones.

Sin embargo recuérdese que, pese a ser incondicionalmente estable, el método implícito requiere, desde un punto de vista computacional, más tiempo que una aproximación explícita ya que para cada paso de tiempo se debe resolver el sistema lineal de ecuaciones (13).

4. Ejecutar de nuevo el paso 2 con las discretizaciones espaciales propuestas en la tabla 2 y comprobar cómo la solución se mantiene estable y sin oscilaciones pese a obtener valores altos del coeficiente R .

	$xpas$	R
Caso 1	500	4.93
Caso 2	800	12.622
Caso 3	1000	19.721
Caso 4	3000	177.493

Tabla 2. Discretizaciones espaciales propuestas

6. Ejercicios propuestos

Se propone la realización de los siguientes ejercicios:

1. Realizar un análisis de la evolución del nivel freático hasta dos meses después de la impermeabilización del talud y utilizar para ello 500 intervalos tanto en el espacio como en el tiempo. Viendo la animación del resultado, ¿se nota alguna tendencia en la solución? De ser así, ¿es realista?
2. Suponer que por razones económicas interesa conocer la evolución del caudal en la zanja a lo largo de los siete primeros días. Utilizar la misma discretización temporal que en el ejercicio anterior con 100 pasos en el espacio y dibujar una gráfica caudal – tiempo.
3. Suponer ahora que un caudal superior a $10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ se considera crítico para la estabilidad del talud pese haber sido impermeabilizado. En vista del resultado obtenido en el ejercicio anterior, ¿cuánto tiempo, aproximadamente, tendrían que estar las bombas drenando el agua? ¿Y si el caudal crítico fuese de $10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$?
4. Realizar un análisis de sensibilidad del caudal obtenido en la zanja respecto la discretización del dominio espacial, manteniendo constante $tpas = 500$ para un tiempo final de siete días. Utilizar 5, 10, 20, 50 y 100

intervalos. En vista de los resultados, ¿qué se puede decir del caudal si se utilizan pocos nodos?

Apéndice

En este apéndice se deduce una aproximación a las derivadas parciales de una función $f(x,t)$, concretamente a la derivada primera respecto al tiempo (aproximación hacia atrás) y a la derivada segunda respecto al espacio (aproximación centrada). Por tanto, el objetivo es hallar una expresión que permita expresar el valor de

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^{n+1} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+1}$$

en función de los valores de $f(x,t)$ en los puntos de la discretización (x_i, t^n) , (x_{i+1}, t^{n+1}) y (x_{i-1}, t^{n+1}) . Obsérvese que dichos valores se pueden expresar como

$$f_i^n = f(x_i, t^{n+1} - \Delta t) \quad (\text{A1})$$

para el punto (x_i, t^n) , y como

$$\begin{aligned} f_{i+1}^{n+1} &= f(x_i + \Delta x, t^{n+1}) \\ f_{i-1}^{n+1} &= f(x_i - \Delta x, t^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

para los puntos (x_{i+1}, t^{n+1}) y (x_{i-1}, t^{n+1}) . Por tanto, desarrollando con una serie de Taylor centrada en (x_i, t^{n+1}) la expresión (A1), se obtiene

$$f_i^n = \sum_{k=0}^m \frac{(-\Delta t)^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right|_i^{n+1} = f_i^{n+1} - \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^{n+1} + O(\Delta t^3) \quad (\text{A3})$$

Para obtener una aproximación hacia atrás (de primer orden) de la primera derivada temporal de $f(x,t)$ tan sólo hay que despejar de (A3) el término de dicha derivada:

$$\boxed{\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+1} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^{n+1} + O(\Delta t^2) = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)} \quad (\text{A4})$$

Desarrollando ahora con una serie de Taylor centrada en (x_i, t^{n+1}) las expresiones (A2), se obtienen

$$f_{i+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^m \frac{\Delta x^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \Big|_i^{n+1} = f_i^{n+1} + \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i^{n+1} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^{n+1} + O(\Delta x^3) \quad (\text{A5})$$

$$f_{i-1}^{n+1} = \sum_{k=0}^m \frac{(-\Delta x)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \Big|_i^{n+1} = f_i^{n+1} - \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i^{n+1} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^{n+1} + O(\Delta x^3) \quad (\text{A6})$$

Para obtener ahora una aproximación centrada de segundo orden de la segunda derivada espacial de $f(x, t)$ se combinan las expresiones (A5) y (A6) como sigue

$$f_{i+1}^{n+1} + f_{i-1}^{n+1} = 2f_i^{n+1} + \Delta x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^{n+1} + \frac{\Delta x^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_i^{n+1} + O(\Delta x^6) \quad (\text{A7})$$

de modo que, despejando de (A7) el término de la segunda derivada, se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^{n+1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_i^{n+1} + O(\Delta x^4) = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{A8})$$

Ejercicio 1

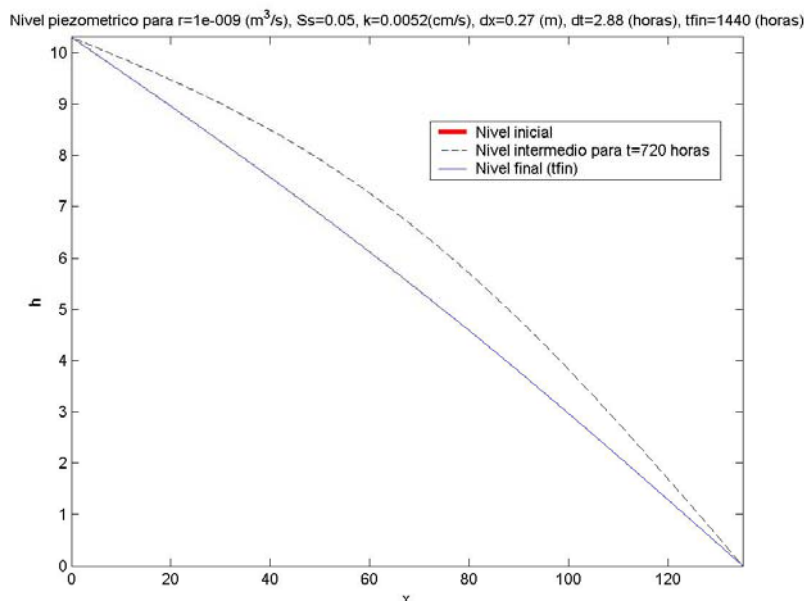


Figura 12. Evolución del nivel freático hasta dos meses después de la impermeabilización

Obsérvese que la solución tiende a un estado de equilibrio natural entre los dos puntos cuyo nivel piezométrico se encuentra preescrito (ver figura 12), es decir, una recta que une los extremos del dominio. Dicha recta es, recuérdese, la solución del problema de flujo para un acuífero confinado y caso estacionario.

Planteando esta observación desde la ecuación de gobierno (5), se puede considerar, vista la solución obtenida, que para un tiempo t^n cercano a dos meses después de la impermeabilización el nivel freático apenas varía entre dicho tiempo y el instante de tiempo siguiente, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Por tanto se puede plantear, para todos los nodos de la discretización,

$$h^{n+1} - h^n = 0 \tag{16}$$

de tal manera que, utilizando la expresión (16) en la aproximación por diferencias finitas (8), se obtiene

$$\left. \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \right|_i^{n+1} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = 0 \quad \forall i \in \{0,1,\dots,M+1\} \tag{17}$$

por lo que, según (17) y obviando el término del error, se puede considerar que en el estado de equilibrio

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = h(x) \quad (18)$$

Substituyendo (18) en la ecuación (4), se llega a

$$K \frac{d^2 h}{dx^2} + r = 0 \quad (19)$$

Suponiendo que el acuífero fuese confinado, no se tendría ninguna recarga a través de la superficie puesto que el terreno sería impermeable. Imponiendo así $r = 0$ en (19) se obtiene la ecuación de flujo ya vista en un acuífero confinado para caso estacionario:

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = 0 \quad (20)$$

Por tanto nótese como el flujo en acuífero libre (bajo la hipótesis de Dupuit) efectivamente recupera la solución del acuífero confinado estacionario para tiempos de análisis suficientemente altos (estado de equilibrio).

Por otro lado, este resultado sería posible y se podría considerar realista sólo si mediante algún mecanismo se mantuviese constante el nivel inicial a 135 m del talud, de manera que no se violase así la condición de Dirichlet en $x = 0$. De no ser ese el caso, físicamente la solución no tendría sentido ya que el nivel freático seguiría descendiendo más allá del límite del dominio establecido. Por esta razón es importante definir un radio de influencia inicial y ampliar el dominio en caso de que fuesen necesarios análisis temporales a largo plazo.

Ejercicio 2

La evolución del caudal obtenido en la excavación a lo largo del tiempo se muestra en la figura 13. Obsérvese que dista mucho de ser una relación lineal, siendo el caudal en las primeras horas cerca de 4 veces superior al que se obtendría al final del análisis.

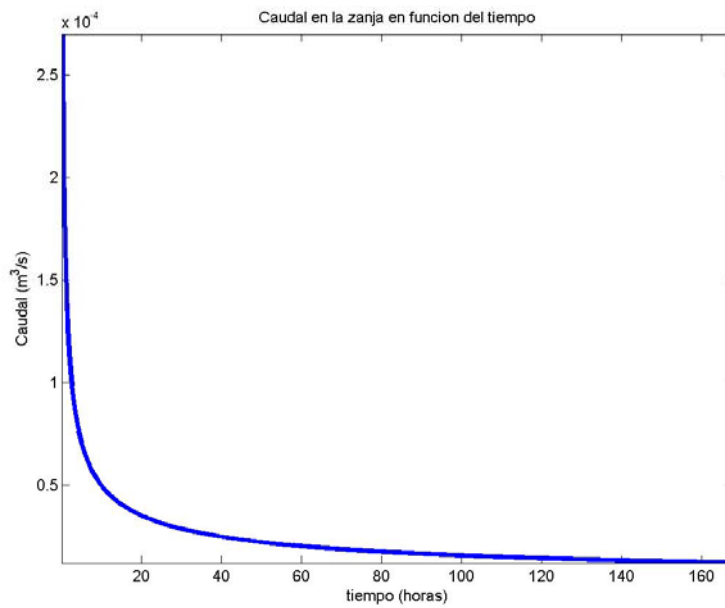


Figura 13. Gráfica caudal – tiempo

Ejercicio 3

Según la figura 13, para drenar un caudal superior a $10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ se necesitarían aproximadamente 5 ó 6 horas, mientras que si se necesitase drenar un caudal mayor de $10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ se necesitarían cerca de 6 días. Nótese por tanto la necesidad de obtener una relación caudal – tiempo lo más precisa posible.

Ejercicio 4

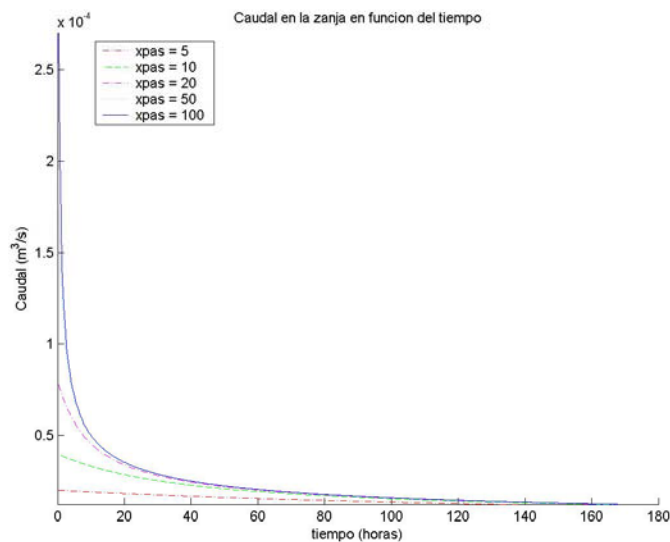


Figura 14. Curvas caudal – tiempo para diferentes discretizaciones espaciales

Obsérvese en la figura 14 que la evolución del caudal varía según la discretización espacial que se haya usado. Concretamente, nótese que la gráfica correspondiente a la discretización menos fina es la que obtiene valores más bajos del caudal. El resto de curvas obtienen progresivamente (10, 20, 50 y 100 intervalos) valores más altos, siendo apenas perceptible la diferencia entre utilizar 50 ó 100 intervalos. Nótese también que tan sólo en estos dos casos se consigue reproducir la asíntota vertical en $t = 0$.

Por tanto es importante darse cuenta de que utilizar discretizaciones espaciales con un número insuficiente de nodos puede suponer que en realidad se obtengan valores del caudal más altos que los previstos por la modelación numérica.