

SESIÓN PRÁCTICA

2

EDP PARABÓLICA CON MÉTODO FTCS

Flujo en acuífero libre

En esta sesión se analiza, mediante el método explícito de diferencias finitas, la evolución temporal del nivel freático sobre una geometría de acuífero libre alterada por la excavación de una zanja. Las condiciones de contorno impuestas son de tipo Dirichlet (nivel piezométrico prescrito en el contorno). El objetivo principal es que el estudiante asimile las particularidades del problema físico y la influencia de los parámetros del terreno en la solución obtenida. También debe ser capaz de derivar y aplicar correctamente una formulación explícita para resolverlo, haciendo especial hincapié en la inestabilidad del método.

1. Objetivo

En este trabajo se desea estudiar el efecto que produce una excavación sobre un terreno saturado homogéneo de permeabilidad K conocida. Para ello se plantea realizar un análisis de flujo en régimen no estacionario (transitorio) bajo una geometría de acuífero libre, tal y como muestra la figura 1.

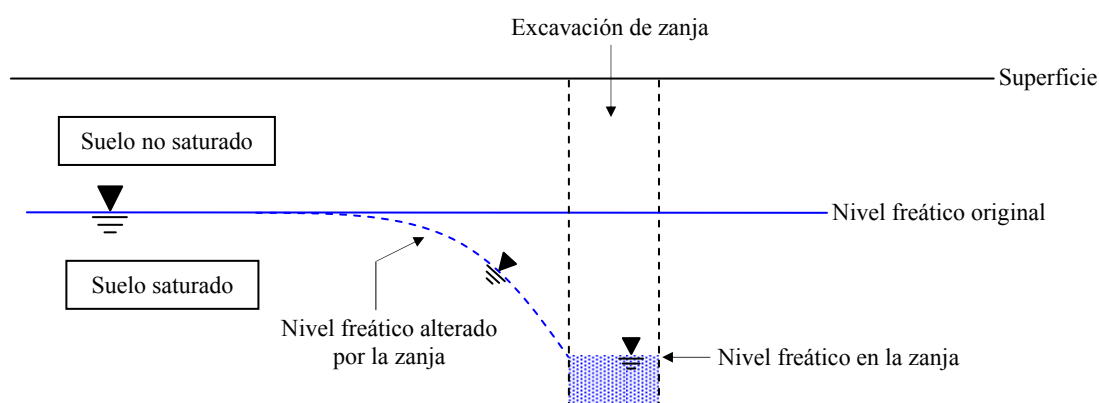


Figura 1. Esquema generalizado de la geometría de una excavación en acuífero libre

La solución de un problema de flujo reside en encontrar el nivel piezométrico h y, en consecuencia, el caudal Q filtrado en la zanja debido al gradiente de presión de agua:

$$h = z + \frac{P_w}{\gamma}$$

donde z representa la cota que tiene un punto del suelo, expresada en unidades de longitud, sobre un nivel de referencia; P_w es la presión de agua expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud; γ es el peso específico del agua (fuerza por unidad de superficie) y la relación P_w/γ representa la presión expresada en forma de columna de agua que tiene por encima dicho punto del suelo (véase figuras 2 y 3).

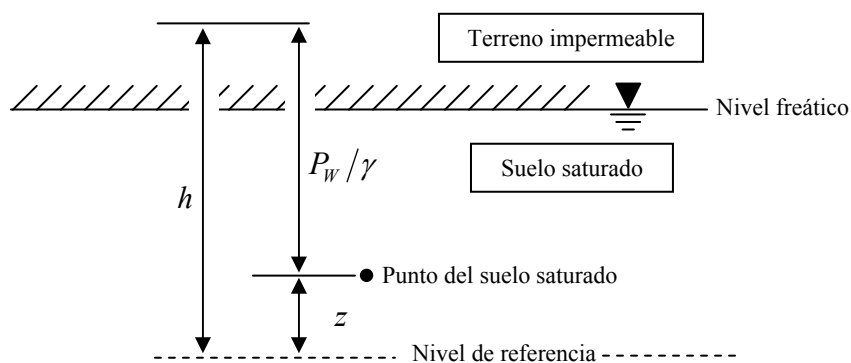


Figura 2. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero confinado

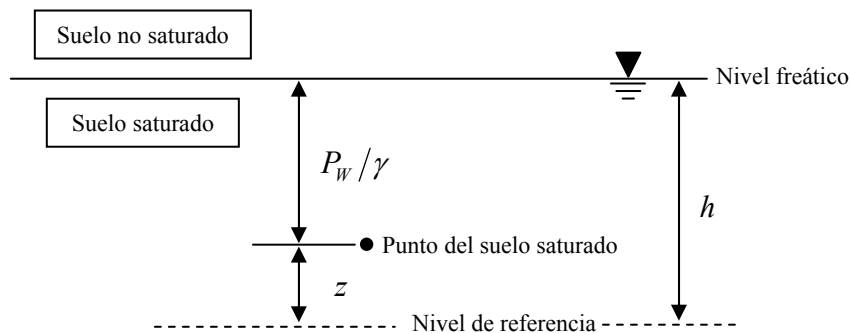


Figura 3. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero libre

Por tanto el nivel piezométrico tiene unidades de longitud, y en este caso, debido a que no se tiene confinamiento, es igual al nivel freático (cota del nivel de agua que separa físicamente la parte saturada del terreno de la que no está), según muestra la figura 3.

Consideración general: hipótesis de Dupuit

El movimiento del agua con una geometría de acuífero libre, sin confinamiento, es por lo general bidimensional, es decir, ésta se desplaza a través del suelo tanto horizontal como verticalmente (véase figura 4).

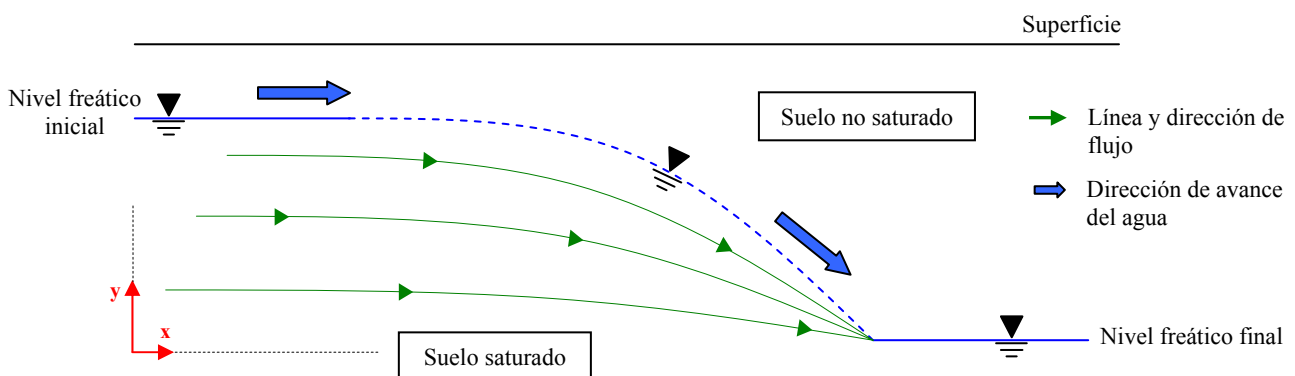


Figura 4. Flujo de agua en una geometría de acuífero libre

Sin embargo, y bajo condiciones de líneas equipotenciales de nivel lo más verticales posible, la llamada hipótesis de Dupuit asume flujo sólo horizontal y por tanto reduce el problema a uno estrictamente unidimensional. De este modo se puede considerar $h(x, y) = h(x)$ y $Q(x, y) = Q(x)$.

2. Planteamiento físico: zanja en terreno saturado y heterogéneo

Hipótesis básicas del problema:

- Se asume la hipótesis de Dupuit.
- Suelo homogéneo, isótropo y saturado.
- Análisis transitorio. Por tanto, tanto el nivel piezométrico como el caudal dependen también del tiempo: $h(x) = h(x, t)$ y $Q(x) = Q(x, t)$.

El movimiento del agua sobre el terreno viene caracterizado por la ley de flujo de Darcy, que muestra cómo ésta fluye de mayor a menor nivel piezométrico:

$$q(x, t) = -K \cdot \nabla h(x, t) \quad (1)$$

El problema general de flujo difusivo (sin considerar términos de reacción ni convección) en una geometría de acuífero libre está gobernado por la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$S_s \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot q(x, t) + r \quad (2)$$

donde los parámetros del terreno que intervienen son:

- **Recarga r** (constante): es el valor, expresado en unidades de volumen por unidad de tiempo, del caudal de agua que penetra al interior del acuífero producto de procesos activos en superficie. Depende, mayoritariamente, de la capacidad de infiltración del terreno.
- **Coefficiente de almacenamiento específico S_s** (constante): hace referencia al volumen de agua liberado por una unidad de volumen de acuífero cuando se desciende una unidad el nivel piezométrico. Está expresado en unidades del inverso de la longitud y los valores típicos que se adoptan en acuíferos libres de espesor unitario varían entre 0.3 m^{-1} y 0.01 m^{-1} .

Aplicando la ley de Darcy (1) a la ecuación (2) se obtiene:

$$S_s \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla h(x, t)) + r = K \cdot \nabla \cdot (\nabla h(x, t)) + r \quad (3)$$

Dado que el dominio espacial de la variable de estado $h(x, t)$ es unidimensional, el desarrollo del término de la divergencia $\nabla \cdot (\nabla h(x, t))$ en la expresión (3) se

simplifica resultando la siguiente ecuación en derivadas parciales (EDP) parabólica 1D, que gobierna el problema planteado en esta sesión:

$$S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + r \quad (4)$$

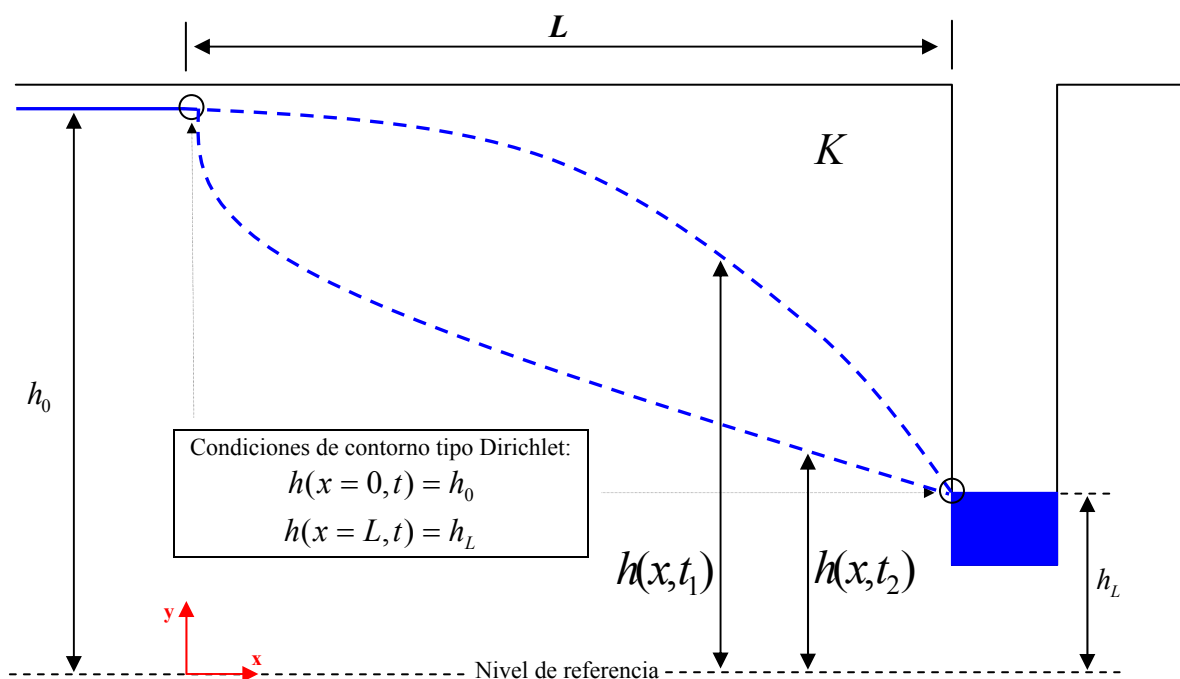


Figura 5. Variables y parámetros de un esquema de excavación en terreno saturado y homogéneo donde se han representado dos curvas de nivel piezométrico para dos instantes de tiempo ($t_1 < t_2$)

cuya solución requiere dos condiciones de contorno que, para este caso, se han propuesto de tipo Dirichlet (valor de la variable prescrito): $h(x=0, t) = h_0$ y $h(x=L, t) = h_L$. Dichas condiciones de contorno y el dominio de resolución, $x \in [0, L]$, están representados en la figura 5. Además, debido al carácter transitorio del problema, se necesita una condición inicial que haga referencia al estado del nivel piezométrico antes de ejecutar la excavación. En este caso, el nivel original es h_0 (véase figuras 1 y 5) y, por tanto, la condición inicial es $h(x, t=0) = h_0$.

3. Problema numérico

Se desea resolver mediante un esquema de diferencias finitas la siguiente EDP parabólica unidimensional con coeficiente (permeabilidad $K > 0$) constante e invariable en el tiempo y condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

Término temporal **Término difusivo**

$$\begin{aligned}
 S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + r \quad \forall x \in [0, L] \quad \forall t \in [0, T] \\
 h(x=0, t) &= h_0 \\
 h(x=L, t) &= h_L \\
 h(x, t=0) &= h_0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

El objetivo es aproximar la ecuación en derivadas parciales (5) a un problema discreto cuya resolución conduce a un sistema lineal de ecuaciones en cada paso de tiempo. Para ello es necesario definir una discretización espacial (dirección x) y temporal (tiempo t), tal y como se muestra en la figura 6:

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_0 + i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, M + 1 \\
 t^n &= t_0 + n\Delta t \quad n = 0, 1, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

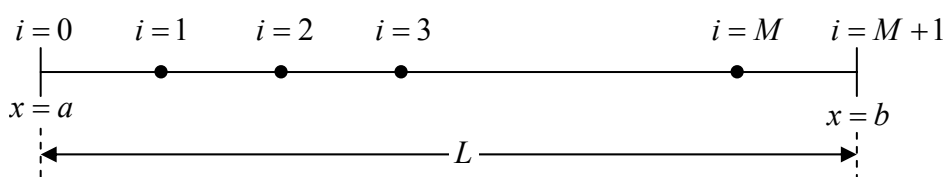


Figura 6. Discretización del problema en la dirección x

A fin de resolver numéricamente la ecuación (5) se impone que ésta se verifique en un punto x_i , $i = 1, \dots, M$, y en un instante t^n , $n = 1, \dots, N$, de la discretización (6). Para ello, de acuerdo con la figura 7, se denota el valor de la función $h(x_i, t^n)$ como h_i^n , aproximándola por H_i^n .

$$S_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \Big|_i^n = K \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \Big|_i^n + r
 \tag{7}$$

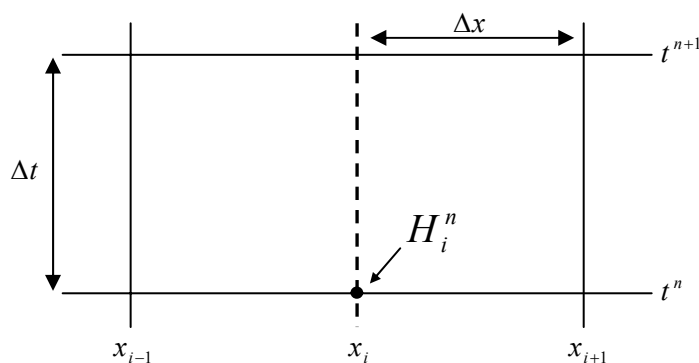


Figura 7. Discretización del problema parabólico 1D planteado

La **derivada temporal** de la ecuación (7) se aproxima mediante un esquema de diferencias finitas hacia adelante con paso Δt (ver detalles en el apéndice):

$$\left. \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \right|_i^n = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (8)$$

Asimismo, para aproximar el término difusivo (**derivada espacial**, no temporal) en un instante t^n se aplica, tal como sigue, una aproximación centrada de segundo orden (ver detalles en apéndice):

$$\left. \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \right|_i^n = \frac{h_{i-1}^n - 2h_i^n + h_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (9)$$

Por tanto ahora para obtener la EDP (5) discretizada tan sólo hay que sustituir las expresiones (8) y (9) en la ecuación (7), resultando así el siguiente problema discreto en diferencias finitas:

$h_i^{n+1} - h_i^n = R \cdot (h_{i-1}^n - 2h_i^n + h_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{S_s} r + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, M \\ n > 0 \end{matrix}$	(10)
$h_0^n = h_0 \quad n \geq 0$	
$h_{M+1}^n = h_L \quad n \geq 0$	
$h_i^0 = h_0 \quad i = 0, \dots, M + 1$	

donde se define

$$R = \frac{K}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (11)$$

Nótese que la ecuación (10) cumple exactamente la EDP (5) ya que involucra el término del error. Eliminando dichos términos se obtiene la aproximación discreta deseada:

$$\begin{aligned}
 H_i^{n+1} &= RH_{i-1}^n + (1-2R)H_i^n + RH_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{S_s} r & i = 1, \dots, M \\
 & & n > 0 \\
 H_0^n &= h_0 & n \geq 0 \\
 H_{M+1}^n &= h_L & n \geq 0 \\
 H_i^0 &= h_0 & i = 0, \dots, M+1
 \end{aligned} \tag{12}$$

Nótese cómo la ecuación (12) evalúa de forma explícita el nivel piezométrico en el instante $n+1$ en función del nivel piezométrico en el instante n . De esta manera la solución de la EDP (5) equivale a resolver la ecuación (12) para cada nodo de la figura 6 y para cada Δt hasta un tiempo final T escogido.

4. Introducción al código

Se ha elaborado un programa que contiene los siguientes dos ficheros de extensión MATLAB (*.m):

- Zanja
- diferencias_finitas_explicito

Zanja: incluye la lectura de los datos geométricos y características del terreno por pantalla incluidas las condiciones de contorno y la discretización del dominio espacial y temporal. Además realiza la gráfica del resultado y calcula, por diferencias finitas, el valor aproximado del caudal en la zanja una vez resuelta la ecuación (12).

diferencias_finitas_explicito: es la función encargada de resolver mediante una aproximación por método explícito el problema planteado, es decir, resolver la ecuación (12) utilizando correctamente las condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Para ello se almacena la solución para cada paso de tiempo en una columna de una matriz. Es en esta matriz donde, para respetar las condiciones de contorno y la condición inicial, se asignan previamente los valores prescritos del nivel piezométrico: la primera fila corresponde al valor de la condición de contorno en el extremo inicial del dominio, la última fila al valor de la condición de contorno en el extremo final, y la primera columna al valor de la condición inicial.

5. Guía de la sesión

Se desea resolver un problema preliminar de filtraciones en la base de una excavación de 10 m diseñada para calzar la cimentación superficial en placa de un edificio en construcción. Considérese que la amplitud de la obra no supera

los 300 m y que un análisis unidimensional es suficiente para obtener caudales provisionales. Además, durante la fase de excavación, la pendiente natural del terreno se modificó a la horizontal mediante motoniveladora para permitir el paso de camiones pesados. Los parámetros del terreno y el nivel freático están propuestos en la tabla 1.

Material	K (cm/s)	S_S (m^{-1})	r (m^3/s)	Profundidad nivel freático (m)
Conglomerados	10^{-1}	0.2	10^{-11}	3.5
Margas alteradas	$2 \cdot 10^{-2}$	0.2	10^{-11}	3.5

Tabla 1. Parámetros propuestos

Obsérvese que se proponen dos terrenos de alta capacidad de almacenamiento pero con baja infiltración.

Sesión dirigida:

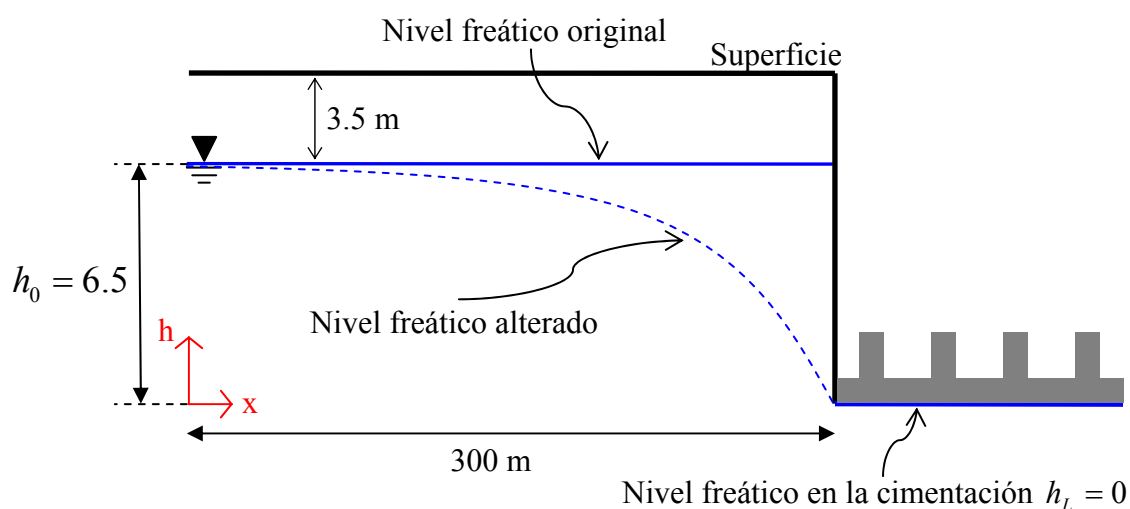


Figura 8. Geometría del problema propuesto

1. El primer paso es establecer la geometría del problema propuesto, indicando así el valor de las condiciones de contorno (véase figura 8).
2. Ejecutar el programa *Zanja* para los dos terrenos propuestos con un análisis temporal de tres días. Utilizar una discretización en el espacio de 50 intervalos (es decir, un nodo cada 6 m) y una discretización en el tiempo de 100 para obtener las gráficas mostradas en las figuras 9 y 10.

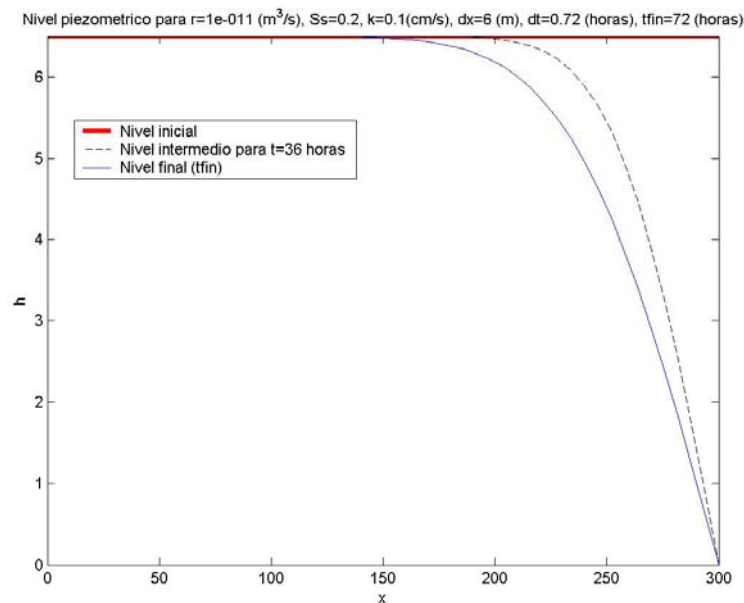


Figura 9. Solución para terreno conglomerado

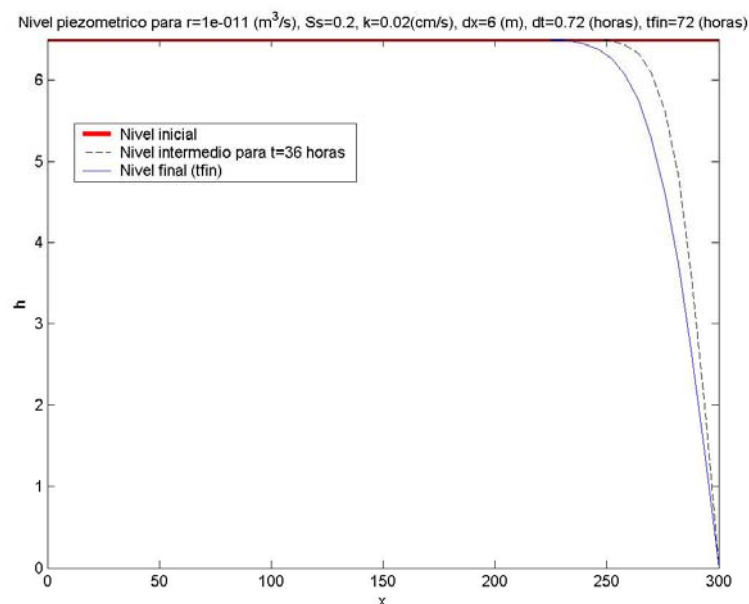


Figura 10. Solución para terreno margoso

Obsérvese cómo efectivamente en ambos casos el nivel freático va descendiendo a medida que pasa el tiempo. Sin embargo, la curva solución para el material menos permeable (margas) presenta mayor pendiente, lo cual indica que ese descenso será más rápido cuanto más permeable sea el material.

- Comprobar que el caudal obtenido en la zanja a los tres días de iniciarse la excavación es, en el caso de terreno conglomerado, un orden de magnitud superior al obtenido con terreno margoso. En vista de este resultado, ¿qué tipo de terreno es más recomendable para la obra?

- Realizar de nuevo el paso 2 para terreno conglomerado pero esta vez considerando que la superficie del terreno admite una infiltración suficiente como para considerar una recarga de $10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ (ver figura 11).

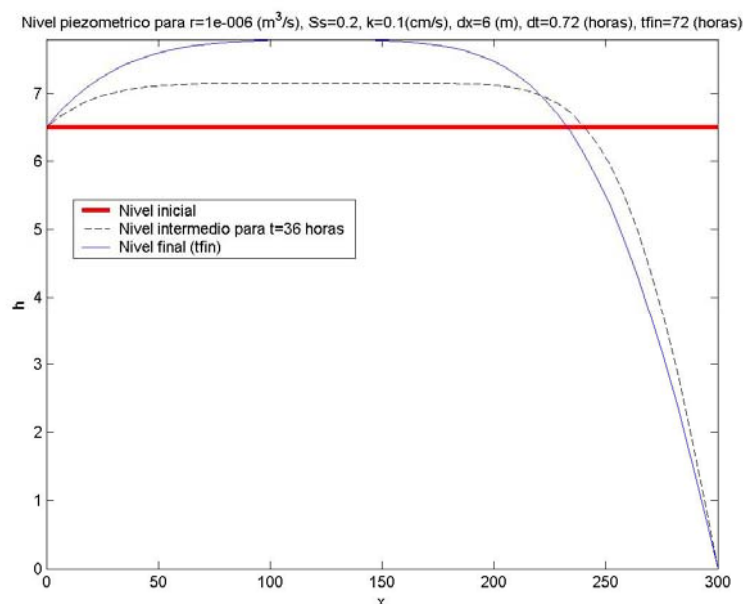


Figura 11. Solución para $r = 10^{-6}$

Notar que ahora la solución sobrepasa el nivel piezométrico inicial, sin llegar a superficie, debido a que el terreno es incapaz de almacenar el caudal de agua entrante. Recuérdese que la ecuación (5) que se está resolviendo establece un balance de masa de agua bajo régimen de flujo difusivo.

- Ejecutar el paso anterior considerando también que el terreno admite más capacidad de almacenamiento. Concretamente, tomar $S_s = 0.4$ (el doble que en los pasos anteriores) y observar cómo disminuye la zona de la figura 11 donde el nivel freático sobrepasa el nivel inicial.

6. Ejercicios propuestos

Se propone la realización de los siguientes ejercicios:

- Ejecutar el programa principal *zanja* para el terreno conglomerado de la tabla 1, utilizando una discretización temporal de 100 intervalos y dos discretizaciones espaciales: una con 58 intervalos y otra con 60. ¿Se observa algún cambio en la solución? ¿A qué puede ser debido?
- Realizar el ejercicio 1 con el terreno margoso y $x_{pas} = 60$. ¿Se esperan resultados similares? ¿Por qué?

3. Ejecutar de nuevo el mismo caso que el propuesto en el primer ejercicio pero con $x_{pas} = 500$. ¿Se observa alguna nueva característica? ¿Qué puede significar?

Apéndice

En este apéndice se deduce una aproximación a las derivadas parciales de una función $f(x,t)$, concretamente a la derivada primera respecto al tiempo (aproximación hacia atrás) y a la derivada segunda respecto al espacio (aproximación centrada). Por tanto, el objetivo es hallar una expresión que permita expresar el valor de

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^n$$

en función de los valores de $f(x,t)$ en los puntos de la discretización (x_i, t^{n+1}) , (x_{i+1}, t^n) y (x_{i-1}, t^n) . Obsérvese que dichos valores se pueden expresar como

$$f_i^{n+1} = f(x_i, t^n + \Delta t) \quad (\text{A1})$$

para el punto (x_i, t^n) , y como

$$\begin{aligned} f_{i+1}^n &= f(x_i + \Delta x, t^n) \\ f_{i-1}^n &= f(x_i - \Delta x, t^n) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

para los puntos (x_{i+1}, t^n) y (x_{i-1}, t^n) . Por tanto, desarrollando con una serie de Taylor centrada en (x_i, t^n) la expresión (A1), se obtiene

$$f_i^{n+1} = \sum_{k=0}^m \frac{\Delta t^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right|_i^n = f_i^n + \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^3) \quad (\text{A3})$$

Para obtener una aproximación hacia adelante (de primer orden) de la primera derivada temporal de $f(x,t)$ tan sólo hay que despejar de (A3) el término de dicha derivada:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{n+1} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^2) = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{A4})$$

Desarrollando ahora con una serie de Taylor centrada en (x_i, t^n) las expresiones (A2), se obtienen

$$f_{i+1}^n = \sum_{k=0}^m \frac{\Delta x^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_i^n = f_i^n + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta x^3) \quad (\text{A5})$$

$$f_{i-1}^n = \sum_{k=0}^m \frac{(-\Delta x)^k}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_i^n = f_i^n - \Delta x \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta x^3) \quad (\text{A6})$$

Para obtener ahora una aproximación centrada de segundo orden de la segunda derivada espacial de $f(x, t)$ se combinan las expresiones (A5) y (A6) como sigue

$$f_{i+1}^n + f_{i-1}^n = 2f_i^n + \Delta x^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n + \frac{\Delta x^4}{12} \cdot \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^n + O(\Delta x^6) \quad (\text{A7})$$

de modo que, despejando de (A7) el término de la segunda derivada, se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n &= \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^n + O(\Delta x^4) = \\ &= \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Ejercicio 1

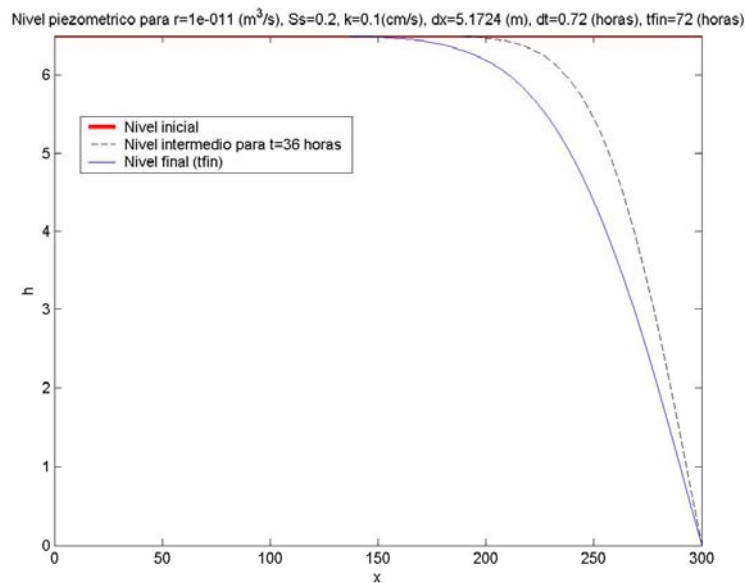


Figura 12. Solución para $x_{pas} = 58$

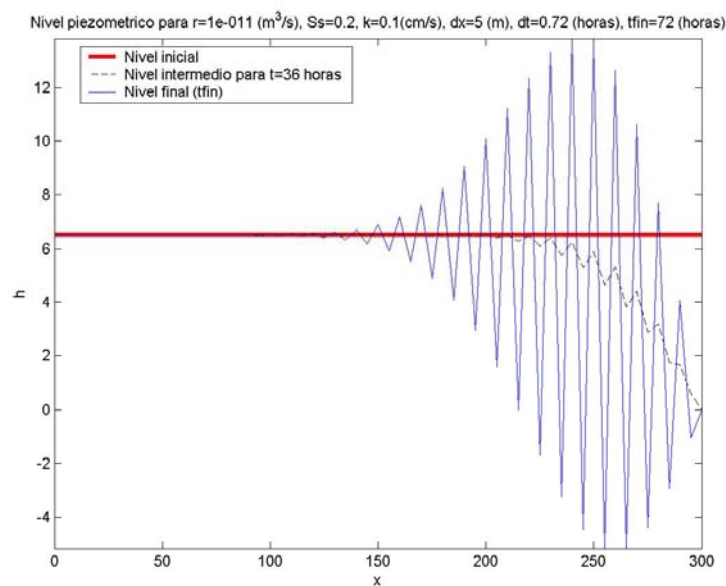


Figura 13. Solución para $x_{pas} = 60$

La figura 12 muestra una solución normal mientras que en la figura 13 las curvas oscilan ostensiblemente pese a que la única diferencia entre ambos cálculos es el hecho de haber añadido dos nodos incógnita en el caso oscilante. Nótese también cómo las oscilaciones para el tiempo intermedio son de mucha menos magnitud que para el tiempo final, indicando por tanto que la solución no está acotada temporalmente, o dicho con otras palabras, que no es estable.

Este efecto es debido a que la aproximación por un esquema explícito presenta la condición $R < 1/2$ tanto para mantener la estabilidad como para no presentar oscilaciones. En este caso, para la figura 12, el valor del parámetro es $R = 0.4844 < 0.5$ mientras que para la figura 13 es $R = 0.5184 > 0.5$.

Ejercicio 2

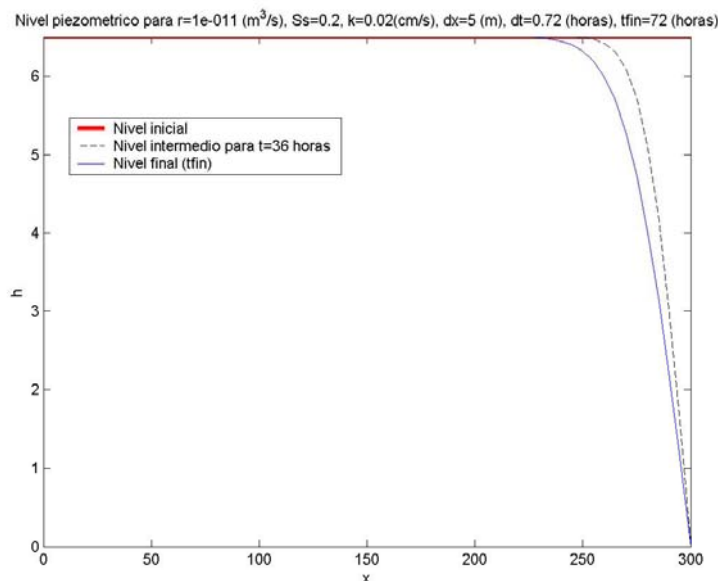


Figura 14. Solución para terreno margoso con $x_{pas} = 60$

En este caso (ver figura 14) la solución no presenta oscilaciones pese a utilizar las mismas discretizaciones que en el ejercicio 1. Esto se debe, recuérdese, a que la expresión del coeficiente R también depende de los parámetros de terreno:

$$R = \frac{K}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Por tanto ahora, al reducirse la permeabilidad un orden de magnitud, la condición de estabilidad y no oscilaciones sí se cumple.

Ejercicio 3

Obsérvese que en la figura 15 las oscilaciones alcanzan valores de 10^{211} , indicando más claramente que la solución no es estable (comprobar que $R = 36$). Nótese también que las oscilaciones se acumulan en el extremo más próximo a la zanja. Dicho fenómeno indica que el problema establecido es, en realidad, poco continuo, pues entre la condición inicial y la condición de

contorno en el extremo derecho del dominio se produce una discontinuidad que en un problema continuo no existe (es como pensar que la excavación se realiza en un instante de tiempo).

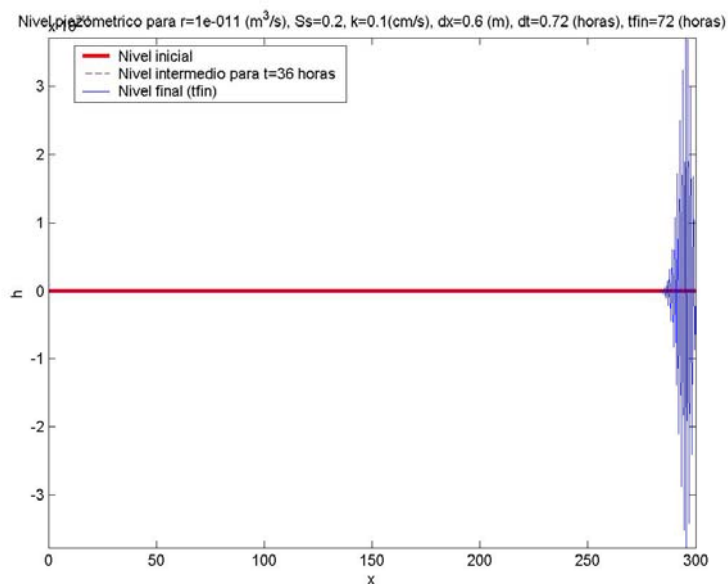


Figura 15. Solución para terreno conglomerado con $x_{pas} = 500$