

SESIÓN PRÁCTICA

1

EDO CON CONDICIONES DE CONTORNO

Flujo en acuífero confinado

En esta sesión práctica se plantea el estudio del movimiento del agua a través de un medio poroso bajo una geometría de acuífero confinado. El objetivo básico es que el estudiante sea capaz de distinguir un problema de contorno de un problema de valores iniciales clásico, así como su resolución numérica utilizando el método del disparo.

1. Objetivo

El objetivo principal de esta sesión es analizar el movimiento del agua cuando ésta se desplaza a través de un terreno saturado, de permeabilidad K (m/s) conocida, situado espacialmente entre dos materiales, a efectos prácticos, impermeables ($K = 0$). El estudio de este problema es conocido como un análisis de flujo en acuífero confinado, cuya geometría general se presenta en la figura 1.

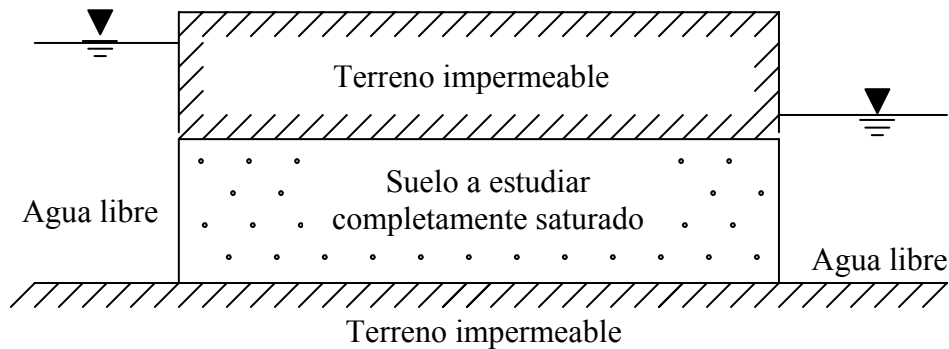


Figura 1. Esquema generalizado de un acuífero confinado

La solución de un problema de flujo reside en encontrar el nivel piezométrico h y, en consecuencia, el caudal filtrado Q (m^3/s) debido al gradiente de presión de agua:

$$h = z + \frac{P_w}{\gamma}$$

donde z representa la cota que tiene un punto del suelo, expresada en unidades de longitud, sobre un nivel de referencia; P_w es la presión de agua expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud; γ es el peso específico del agua (fuerza por unidad de superficie) y la relación P_w/γ representa la presión expresada en forma de columna de agua que tiene por encima dicho punto del suelo (véase figuras 2 y 3).

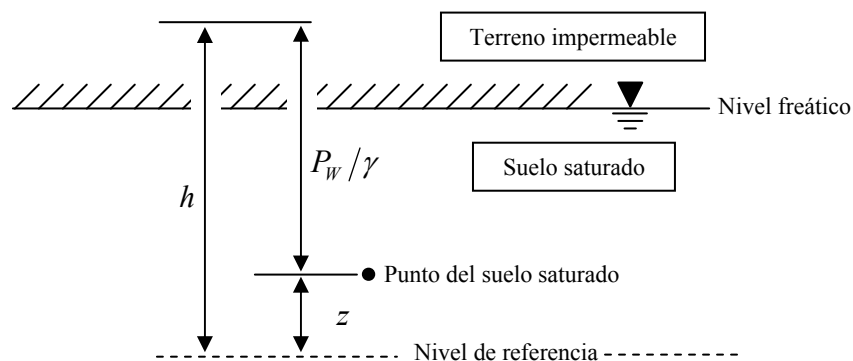


Figura 2. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero confinado

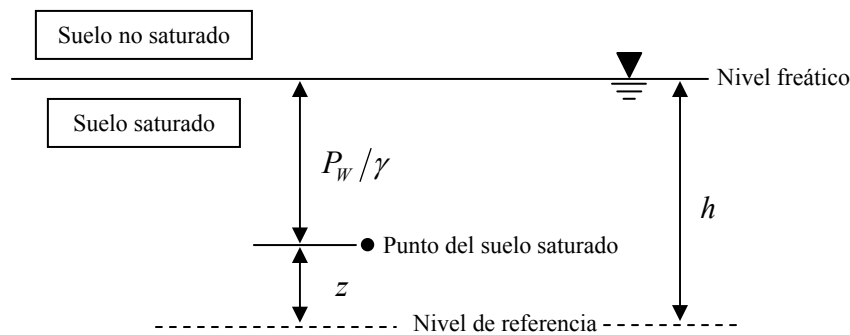


Figura 3. Representación del nivel piezométrico con geometría de acuífero libre

Por tanto el nivel piezométrico tiene unidades de longitud, y sólo será igual al nivel freático (cota del nivel de agua) cuando se pierda el confinamiento, resultando una geometría de acuífero libre (véase figura 3).

Consideración general:

Por definición el flujo de agua se produce perpendicularmente a las equipotenciales de nivel piezométrico. Si se toman los contornos impermeables como líneas de flujo el resultado es un mapa de equipotenciales verticales en todo el dominio del acuífero (figura 4).

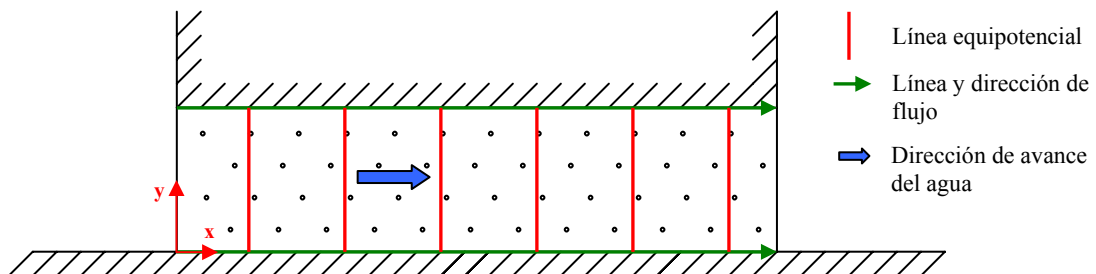


Figura 4. Flujo de agua en una geometría de acuífero confinado

Por tanto, en acuíferos confinados el flujo se puede tratar como un problema unidimensional, sin considerar movimientos verticales del agua. De este modo $h(x, y) = h(x)$ y $Q(x, y) = Q(x)$.

En esta sesión se plantea el estudio de este problema para el caso general estacionario (h no varía con el tiempo) y condiciones de infiltración en la base del acuífero.

2. Planteamiento físico: acuífero confinado con infiltraciones

Hipótesis básicas del problema:

- El nivel en los depósitos de agua permanece invariante respecto al tiempo (caso estacionario).

- Suelo homogéneo, isótropo y saturado.
- Se supone un caudal de infiltración representado por N (m/s) en la base del acuífero.

Desarrollo mediante análisis diferencial:

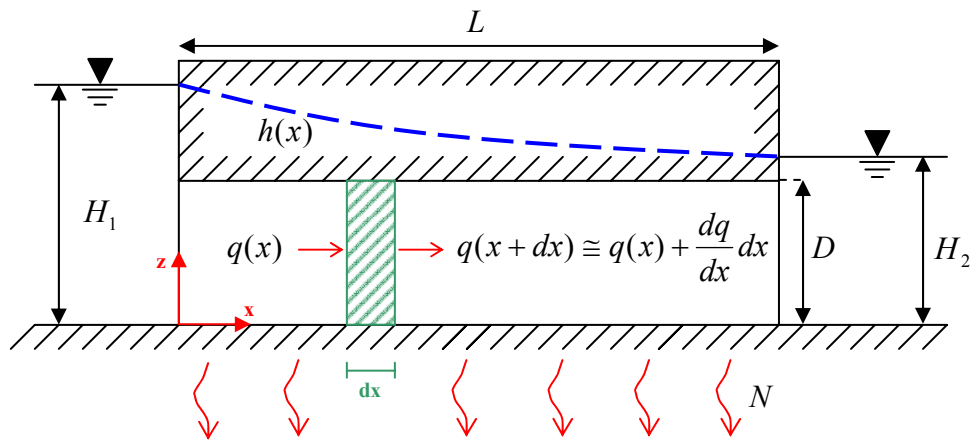


Figura 5. Esquema del desarrollo mediante análisis diferencial

El movimiento del agua sobre el terreno viene caracterizado por la ley de flujo de Darcy, que muestra cómo ésta fluye de mayor a menor nivel piezométrico:

$$q(x) = \frac{Q(x)}{D} = -K \cdot \nabla h(x) \quad (1)$$

donde D es el espesor del acuífero. Considerando un elemento diferencial de longitud dx y aproximando linealmente el flujo de salida de dicho elemento $q(x+dx)$ (véase figura 5), se puede establecer una relación de conservación de la masa de agua como:

$$Q_{entra} - Q_{sale} = \frac{dV_{agua}}{dt} = 0 \quad (2)$$

Cuyos términos son, en virtud de la ecuación (1):

$$\begin{aligned} Q_{entra} &= q \cdot D \\ Q_{sale} &= \left(q + \frac{dq}{dx} dx \right) \cdot D + N \cdot dx \end{aligned} \quad (3)$$

Substituyendo (3) en (2) y simplificando la expresión resultante se llega a:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{N}{D} \quad (4)$$

Tomando la ecuación (1) y substituyendo en (4) la expresión de $q(x)$, finalmente se obtiene la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden:

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{N}{D \cdot K} \quad (5)$$

cuya variable es el nivel piezométrico $h(x)$. Su resolución requiere dos condiciones de contorno que, para este caso, son de tipo Dirichlet (valor de la variable prescrito): $h(x=0) = H_1$ y $h(x=L) = H_2$. Dicha ecuación tiene solución analítica conocida:

$$h(x) = \frac{N}{2KD} x \cdot (x-L) + \frac{H_2 - H_1}{L} x + H_1 \quad (6)$$

Substituyendo la ecuación (6) en (1) se obtiene la expresión analítica del caudal para una sección dada:

$$Q(x) = q(x) \cdot D = -K \cdot \frac{dh}{dx} \cdot D = -K \cdot D \cdot \left(\frac{N}{2KD} x + \frac{H_2 - H_1}{L} - \frac{N}{2KD} L \right) \quad (7)$$

Nótese como de las ecuaciones (6) y (7) se deduce que el nivel $h(x)$ desciende de manera cuadrática entre un depósito de agua y otro con caudal lineal.

2.1 Caso particular: acuífero confinado sin infiltraciones

Del mismo modo se puede establecer un planteamiento teórico sin considerar fracturas en el material impermeable de base (infiltración nula). Para ello basta con substituir el valor $N = 0$ en la ecuación (5):

$$\frac{d^2h}{dx^2} = 0 \quad (8)$$

manteniendo las condiciones de contorno $h(x=0) = H_1$ y $h(x=L) = H_2$. La solución analítica de (8) viene dada por la expresión:

$$h(x) = \frac{H_2 - H_1}{L}x + H_1 \quad (9)$$

El caudal ahora viene dado por:

$$Q(x) = q(x) \cdot D = -K \cdot \frac{dh}{dx} \cdot D = K \cdot D \cdot \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (10)$$

Nótese como de las ecuaciones (9) y (10) se deduce que el nivel $h(x)$ desciende de manera lineal entre un depósito de agua y otro con caudal constante.

3. Problema numérico

Se desea resolver el siguiente problema general con condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d^2 h}{dx^2} = f(x, h) & \forall x \in [0, L] \\ h(x=0) = H_1 \\ h(x=L) = H_2 \end{cases} \quad (11)$$

Obsérvese que para el caso de un acuífero confinado con infiltraciones, según la ecuación (5), se tiene que $f(x, h) = -N/(K \cdot D)$, mientras que para el caso de no haber infiltración se obtiene $f(x, h) = 0$.

La resolución numérica de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (11) consta de dos pasos:

1. Primero se transforma la ecuación de segundo grado en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer grado. Para ello se utiliza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} h_1(x) = h(x) \\ h_2(x) = \frac{dh_1(x)}{dx} \end{cases} \quad (12)$$

Substituyendo el cambio de variable (12) en la ecuación (11) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1(x)}{dx} &= h_2(x) \\
 \frac{dh_2(x)}{dx} &= f(x, h_1) \\
 h_1(x=0) &= H_1 \\
 h_1(x=L) &= H_2
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Obsérvese que estas ecuaciones diferenciales efectivamente son de primer grado. Sin embargo los métodos tradicionales necesitan dos condiciones iniciales para poderse aplicar. En cambio, en el sistema (13) aparecen condiciones de contorno para la variable h_1 : una condición en el extremo inicial $h_1(x=0) = H_1$ y otra condición en el extremo final $h_1(x=L) = H_2$. De este modo la segunda ecuación, que involucra la derivada de h_2 , no se puede resolver.

2. Para solventar este inconveniente se puede aplicar el método del disparo (shooting method). Dicho método consiste básicamente en imponer una condición inicial sobre la derivada (imponer pendiente en el extremo inicial como $h_2(x=0) = \theta$) tal que, resolviendo numéricamente las EDO's impuestas, el nivel piezométrico resultante en el extremo final no se diferencie del valor real ($h_1(x=L) = H_2$) en más de una cierta tolerancia escogida.

Se trata, por tanto, de hallar de manera iterativa (modificando la pendiente inicial θ) bajo los métodos de resolución de EDO's de Euler explícito, Euler modificado, Heun y Runge-Kutta (de orden 4) la solución al siguiente problema de valores iniciales (PVI) de segundo grado:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2h}{dx^2} &= f(x, h) \quad \forall x \in [0, L] \\
 h(x=0) &= H_1 \\
 \frac{dh}{dx}(x=0) &= \theta
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Tal y como se ha visto, la ecuación (14) puede transformarse aplicando el cambio de variable (12) como:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(x)}{dx} &= h_2(x) \\ \frac{dh_2(x)}{dx} &= f(x, h_1) \\ h_1(x=0) &= H_1 \\ h_2(x=0) &= \theta \end{aligned} \quad (15)$$

Obsérvese que, en diferencia con el sistema (13), el nuevo sistema (15) sí está definido bajo condiciones iniciales, no de contorno. Una vez resuelto (15) el objetivo es modificar iterativamente la pendiente θ , hasta conseguir que el nivel piezométrico para $x=L$ (obtenido al resolver dicho sistema) sea lo más parecido posible al nivel real H_2 . Para ello se define el error E obtenido en $x=L$ y debido al valor escogido θ como:

$$E(\theta) = h(L, \theta) - h(L) = h(L, \theta) - H_2 \quad (16)$$

En consecuencia la idea principal del método del disparo (véase figura 6) se traduce ahora en reducir el error (16) a un valor menor que una tolerancia dada, resolviendo así el siguiente problema de ceros de funciones:

$$E(\theta) = h(L, \theta) - H_2 = 0 \quad (17)$$

Obsérvese que dada una aproximación a la derivada en el inicio del intervalo θ^k se obtiene el error:

$$E(\theta^k) = h(L, \theta^k) - H_2 \quad (18)$$

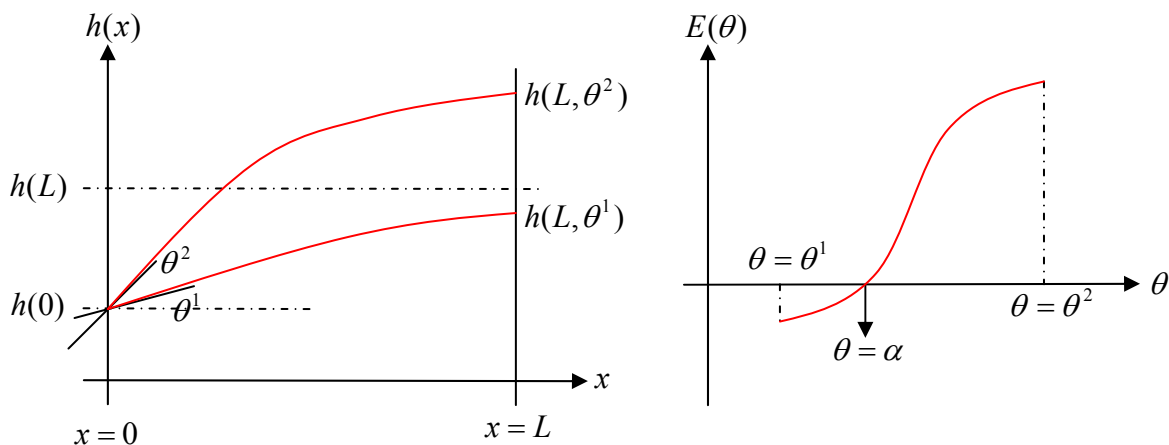


Figura 6. Representación gráfica del método del disparo y del problema de ceros de funciones

La solución al problema (17) puede realizarse a través del paso iterativo del método de la secante (método de Newton-Raphson con la aproximación secante de la derivada de la función $E(\theta^k)$):

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \frac{E(\theta^k)}{\frac{dE(\theta^k)}{d\theta^k}} = \theta^k + \frac{E(\theta^k)}{\frac{E(\theta^k) - E(\theta^{k-1})}{\theta^k - \theta^{k-1}}} = \theta^k + E(\theta^k) \frac{\theta^k - \theta^{k-1}}{E(\theta^k) - E(\theta^{k-1})} \quad (19)$$

donde $E(\theta^k) = h(L, \theta^k) - H_2$ se puede evaluar una vez resuelto el sistema (15) y obtenido por tanto el valor de la aproximación $h(L, \theta^k)$.

4. Introducción al código

Se ha elaborado un programa que contiene los siguientes trece ficheros de extensión MATLAB (*.m):

- Ac_infiltracion
- analitica
- caudal
- disparo
- eulerex
- eulermo
- comparar
- fuente
- heun
- metodo
- runku
- secante
- shooting_method

Ac_infiltración: incluye la lectura de los datos geométricos y características del terreno por pantalla incluidas las condiciones de contorno, la discretización del dominio, el cálculo del error y el dibujo de las curvas solución, aproximación y error, así como la presentación en pantalla del caudal.

analítica: se trata del fichero que calcula la solución analítica de la ecuación diferencial.

shooting_method: este fichero se encarga básicamente de leer las dos primeras aproximaciones iniciales de la derivada (θ^k) y ejecutar los ficheros **disparo** y **secante**.

disparo: calcula la aproximación del sistema (15) para una pendiente dada θ^k y dibuja las trayectorias en un subplot para los cuatro métodos de cálculo escogidos.

comparar: función auxiliar que ayuda a construir los vectores necesarios para dibujar las trayectorias de los disparos.

secante: resuelve la ecuación (19) utilizando para ello las dos aproximaciones iniciales de la rutina `disparo` y la evaluación del error (18) mediante el fichero `metodo`.

metodo: escoge el método de resolución (ficheros `eulerex`, `eulermo`, `heun` y `runku`) del sistema (15) según una variable auxiliar.

fuentes: evalúa el término fuente $f(x, h)$ de la ecuación diferencial para el sistema (15).

caudal: este fichero calcula el caudal en una o varias secciones de posición dada (eje x). Como estas posiciones generalmente no coincidirán con exactitud con los nodos de la discretización, el fichero primero aproxima la sección dada al nodo más cercano antes de aproximar por diferencias finitas el gradiente de nivel piezométrico de la ecuación (1), con un esquema hacia delante si se está en la posición $x = 0$, hacia atrás si la posición es $x = L$, y un esquema centrado en el resto de nodos.

5. Guía de la sesión

Considérese un acuífero semiprofundo (base situada a 30 m de profundidad) de un terreno compuesto básicamente por gravas y conglomerados ($K \cong 10^{-1}$ cm/s) confinado entre un material arcilloso superior ($K \cong 10^{-5}$ cm/s) de elevada potencia y unas cuarcitas masivas inferiores afectadas por un sistema de diaclasas conjugadas de longitud y abertura geotécnicamente estables. Aún así, preocupa que la capacidad de infiltración de dichas fracturas ponga en peligro el carácter del acuífero, hasta ahora fuente de abastecimiento de aguas subterráneas, y en consecuencia afectar algunos pozos importantes. Se ha estimado que la extensión del acuífero es aproximadamente 500 m y su espesor medio 10 m. Se sabe que este acuífero recibe el agua de un terreno cercano muy permeable con cota del nivel freático (respecto al nivel del mar) de 50 m. Asimismo, se sabe que dicho acuífero desagua al mar.

Sesión dirigida:

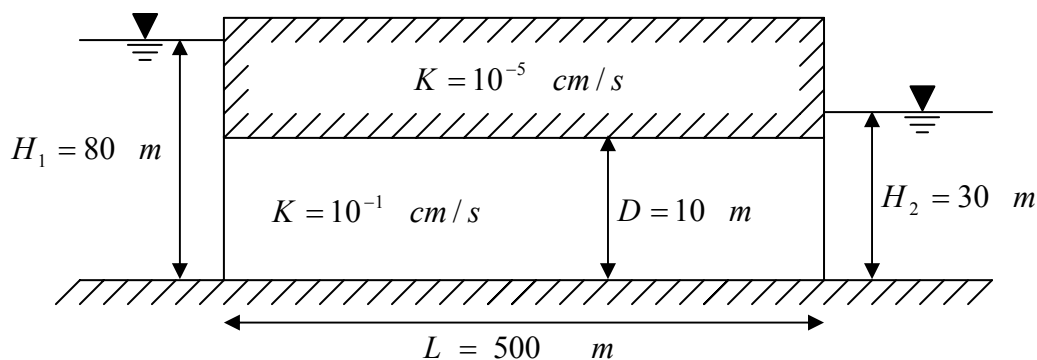


Figura 7. Geometría propuesta

1. El primer paso es establecer la geometría del problema propuesto, indicando así el valor tanto de las condiciones de contorno como de los parámetros geométricos del acuífero (véase figura 7).
2. Ejecutar el programa `Ac_infiltración` con la geometría propuesta, una discretización en 30 intervalos y considerando una base cuarcítica totalmente impermeable (¿cuál es el valor de N que se debe utilizar?). Para realizar el método del disparo utilizar respectivamente ángulos de 45° y -45° (figura 8).

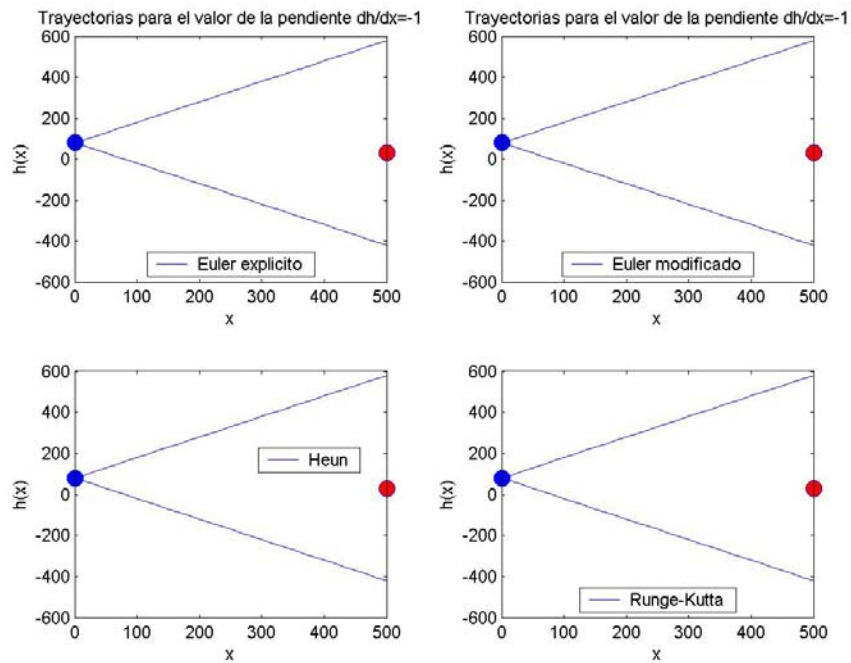


Figura 8. Resultado de los disparos a 45° y -45° respectivamente

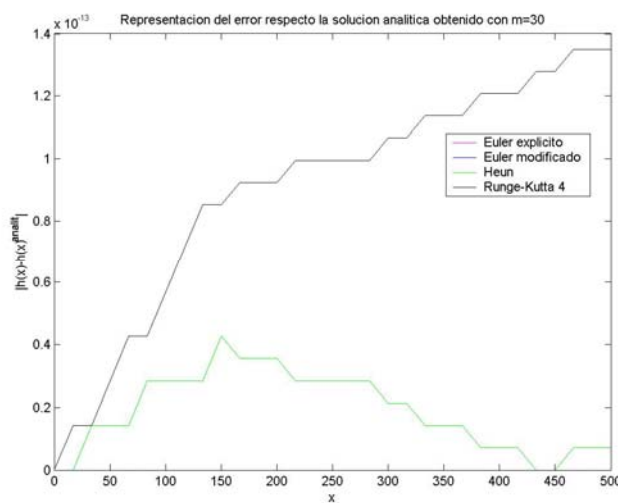


Figura 9. Representación de la gráfica de errores

- Elegir unas tolerancias de 10^{-5} en el método de la secante y comprobar que se converge al valor $\theta = \alpha = -5.71^\circ$ en una iteración para cada método de resolución de la EDO. Obtener la gráfica de errores respecto la solución analítica (figura 9) y comprobar que las curvas obtenidas se ajustan a la curva analítica (figura 10).

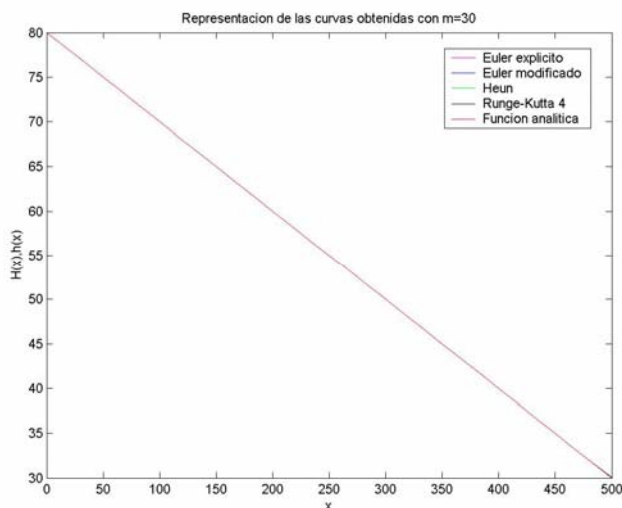


Figura 10. Curvas obtenidas

- Comprobar que el caudal es igual a $10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ constante para cualquier sección y cada método de resolución de la EDO.

6. Ejercicios propuestos

Se propone la realización de los siguientes ejercicios:

- Verificar que las ecuaciones (6) y (7) son solución analítica de la ecuación diferencial ordinaria (5).
- Ejecutar el programa principal con los datos proporcionados y los casos de una capacidad de infiltración de las cuarcitas igual al 1% y al 5% de la permeabilidad del acuífero. ¿Qué diferencia se observa en la gráfica de la solución? ¿Alguno de los dos casos podría afectar un pozo situado a 100 m del mar? ¿Qué significado se le podría dar a la gráfica de errores obtenida?
- Calcular, para el caso concreto de una infiltración de un 1%, el caudal en las secciones situadas a 50, 100, 200 y 400 m del mar. ¿Se observa alguna diferencia en el valor del caudal para cada método de resolución de la EDO? ¿Cambia algo de una sección a otra? En caso afirmativo, ¿qué puede significar?

4. Probar a ejecutar el programa principal con las condiciones de contorno intercambiadas y calcular de nuevo los caudales para las mismas secciones que el punto 4. ¿Qué diferencia se observa respecto a los valores anteriores? ¿A qué puede ser debido?
5. Comprobar la sensibilidad, bajo el mismo caso propuesto que en los apartados anteriores, que tiene el valor del caudal al variar el número de intervalos de la discretización.
6. Se propone estudiar el caso de que las diaclasas que afectan a las cuarcitas de la base del acuífero se encuentren demasiado meteorizadas hasta el punto 220 m como para tomar constante el valor de la infiltración en todo el dominio. Por tanto se pide ejecutar el programa imponiendo que en ese tramo la infiltración sea igual al doble de la considerada en los apartados anteriores. ¿Se observan diferencias importantes en la solución entre los métodos de resolución de EDO's?

NOTA: se puede implementar una función que evalúe el valor de $N(x)$ asumiendo un coste computacional extra o bien, si se prefiere, construir un vector \bar{N} de tantas componentes como necesite la resolución del sistema (15) por los métodos escogidos.

Ejercicio 2

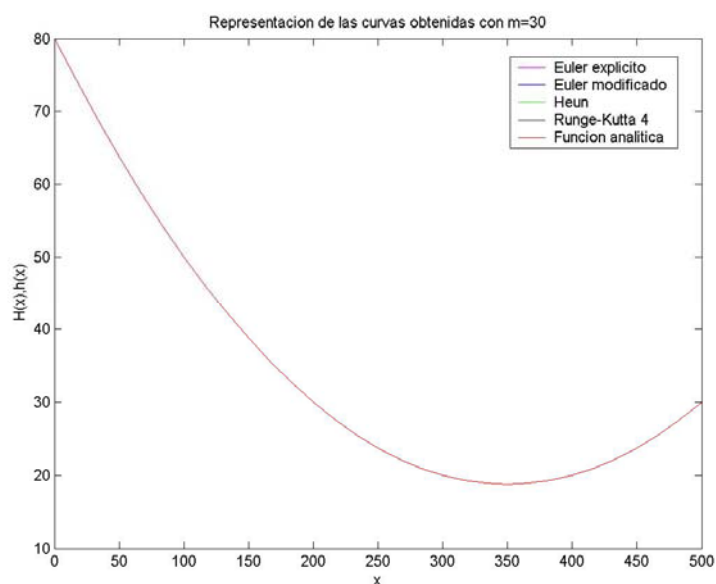


Figura 11. Curvas obtenidas con una infiltración del 1%

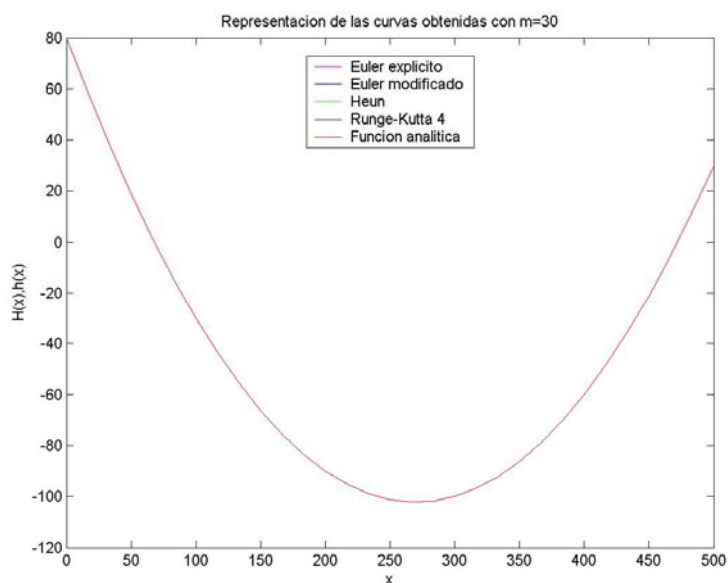


Figura 12. Curvas obtenidas con una infiltración del 5%

Las figuras 11 y 12 muestran las curvas solución en ambos casos. Se puede observar claramente como para una infiltración de 1% la línea de nivel piezométrico se mantiene durante todo el dominio por encima de la cota 10 m. Sin embargo, para el 5% el acuífero pasa a ser libre rápidamente (a una distancia situada entre 440 y 450 m del mar), por lo que un pozo situado a 100 m de la costa no estaría extrayendo agua bajo condiciones de confinamiento y, en consecuencia, se perderían las bases de cálculo planteadas en los apartados

1 y 2 (véase figura 4). Obsérvese que los errores, respecto la solución analítica, que proporcionan todos los métodos son del orden de 10^{-13} . En consecuencia, se puede afirmar que dicho error es debido básicamente al error del redondeo.

Ejercicio 3

Los valores del caudal son los que se muestran en la tabla 1, sin variaciones entre los métodos de resolución de EDO's empleados pues el nivel piezométrico aproximado por cada uno es prácticamente idéntico, con una diferencia de medio grado en el cálculo de la pendiente inicial por el método de Euler explícito en relación al resto. Los valores negativos del caudal están justificados porque su cálculo depende de cómo se realice la aproximación del gradiente de nivel piezométrico ∇h que aparece en la ley de Darcy (1). En este caso se ha implementado como positivo el caudal que sigue la dirección del eje x. Debido a la infiltración aparece un mínimo de nivel $h(350) = 18.75$ m y, por tanto, el caudal en las secciones cuya posición sea mayor a $x = 350$ m aparece con valor negativo, indicando así que el sentido del flujo del agua en dichas secciones es contrario al reflejado en la figura 4.

Posición (eje x)	Caudal aproximado (m^3/s)
450	-10^{-3}
400	$-5 \cdot 10^{-4}$
300	$5 \cdot 10^{-4}$
100	$2.5 \cdot 10^{-3}$

Tabla 1. Valores del caudal para las secciones propuestas

Ejercicio 4

Intercambiar las condiciones de contorno equivale a obtener una solución invertida a la del caso anterior (véase figura 13) y, por tanto, para conseguir el mismo valor del caudal se han de introducir en el programa las secciones teniendo en cuenta que la relación entre el nuevo eje x^* y el eje x anterior es $x^* = L - x$.

El signo de los valores obtenidos (tabla 2) es contrario al caso anterior ya que no se ha modificado el criterio de mantener positivo el caudal dado por un flujo de agua en el mismo sentido que el eje (en este caso el eje x^*).

Posición (eje x^*)	Caudal aproximado (m^3/s)
50	10^{-3}
100	$5 \cdot 10^{-4}$
200	$-5 \cdot 10^{-4}$
400	$-2.5 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2. Valores del caudal para las secciones propuestas y c.c. intercambiadas

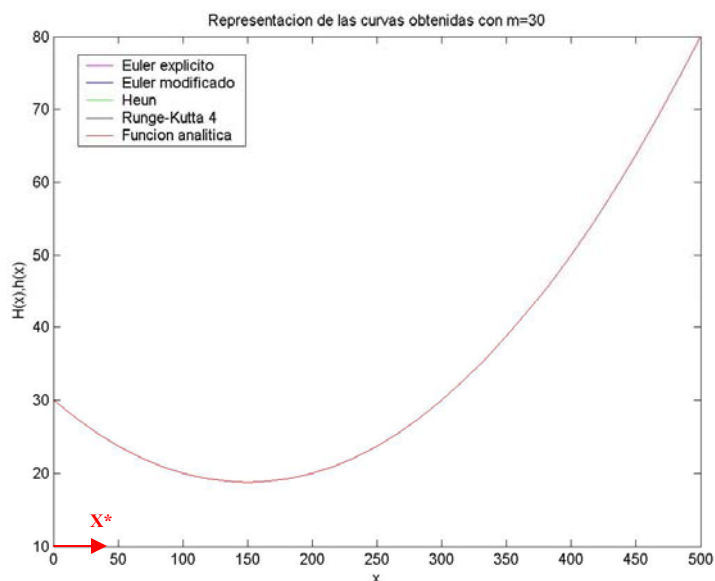


Figura 13. Curvas obtenidas con las c.c. intercambiadas

Ejercicio 5

Para este caso concreto (véase tabla 3) con una discretización de $m = 10$ ó $m = 30$ ya se obtienen los mismos resultados que al afinar hasta $m = 500$.

Posición	Caudal aproximado (m^3/s) para cada valor de m				
	$m = 3$	$m = 10$	$m = 30$	$m = 100$	$m = 500$
50	$-7 \cdot 10^{-4}$	-10^{-3}	-10^{-3}	-10^{-3}	-10^{-3}
100	$2 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$
200	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
400	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$

Tabla 3. Valores del caudal para diversas discretizaciones

Ejercicio 6

Las diferencias en las curvas solución entre los distintos métodos de resolución son apreciables (véase figura 14) y, de hecho, la convergencia a la pendiente inicial es distinta para cada uno. El caso es especialmente crítico para los métodos de Euler explícito y Heun, ya que ambos muestran en algunos nodos un nivel piezométrico por debajo de 10 m, perdiendo así el confinamiento y la validez del desarrollo numérico planteado en el apartado 2.

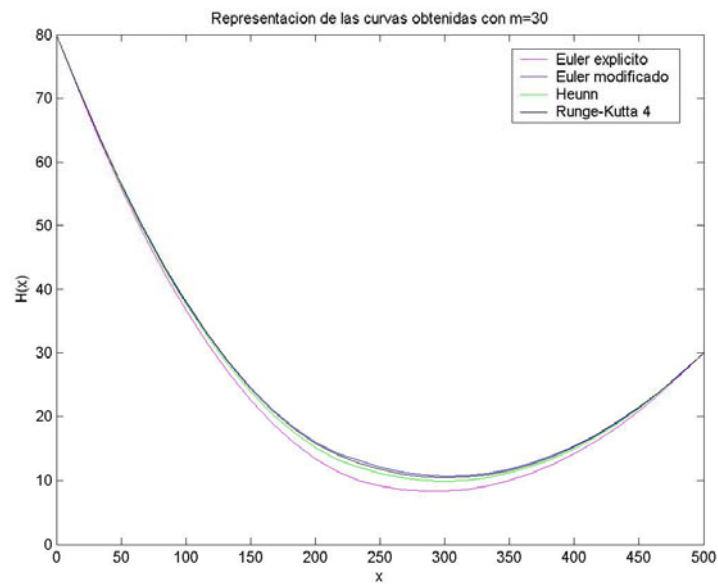


Figura 14. Curvas obtenidas con la condición de infiltración variable propuesta