

Capítol 3

Modelització numèrica de l'estructura

L'estructura s'ha calculat amb el programa CASTEM 2000 [14]. CASTEM 2000 és un codi informàtic per l'anàlisi d'estructures pel mètode d'elements finits. Es basa en el llenguatge GIBIANE, que consisteix en una sèrie d'operacions que permeten la manipulació d'objectes.

El càlcul es pot dividir en quatre passos bàsics:

- i) Creació de la geometria i la malla.
- ii) Definició del model matemàtic (propietats del material, formulació, tipus d'elements, càrregues, condicions de contorn...).
- iii) Resolució del problema discretitzat.
- iv) Anàlisi de resultats i post-procés.

A continuació es desenvolupen aquests passos amb l'ajut d'un exemple per cadascun d'ells, que ha servit per comprovar que la implementació fos correcta i per fer més entenedor el seguiment del càlcul.

3.1. Geometria

El problema que es planteja consisteix en una repetició de pòrtics en l'espai tridimensional. Geomètricament, es defineix l'estructura a dos nivells:

- a) Pòrtic elemental.
- b) Estructura completa.

Així, l'estructura completa vindrà definida per la unió de diferents tipus de pòrtics elementals. Caldrà doncs descriure l'estructura a partir de la definició dels següents paràmetres:

- i) Geometria dels diferents tipus de pòrtic elemental
- ii) Propietats seccionals i del material del pòrtic elemental
- iii) Posició de cada pòrtic elemental en l'estructura completa

3.1.1. Dimensions elementals i condicions de contorn

S'introdueixen les dimensions que permeten definir la geometria de cada pòrtic elemental. A partir d'aquestes dimensions bàsiques és possible crear el pòrtic, com veurem en l'exemple:

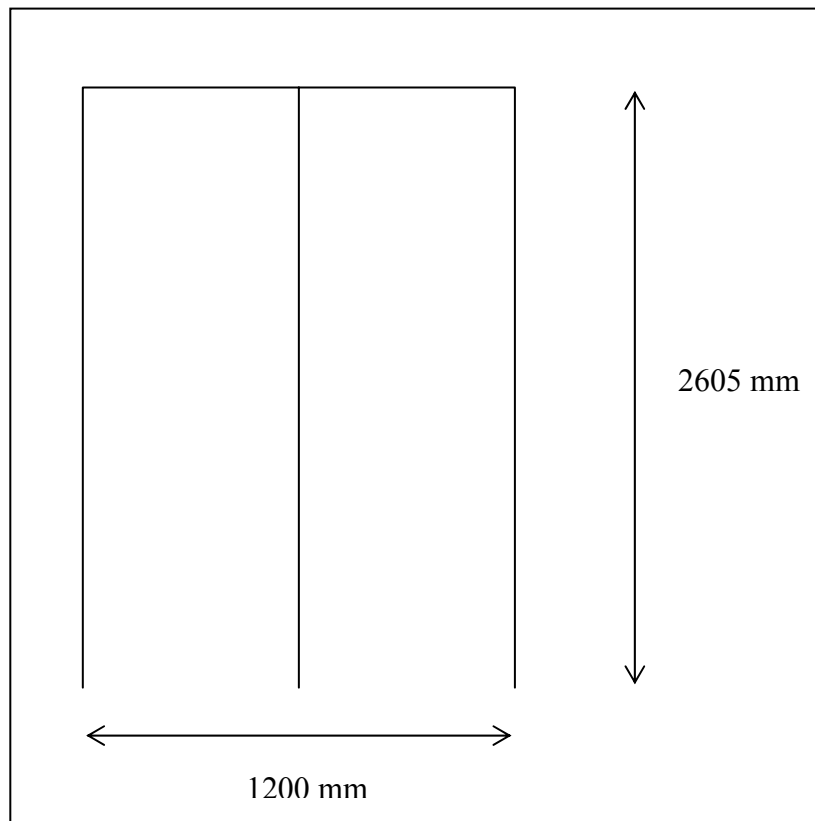


Figura 3.1. Dimensions del pòrtic.

Dimensions que s'introdueixen:

- Altura del pòrtic: $H = 2605$ mm
- Longitud de les bigues: $L = 1200$ mm

A partir d'aquests valors, el programa defineix els punts que seran vèrtexs de l'estructura. Aquests punts vénen definits per coordenades:

$$\begin{array}{lll}
 PA = (0, 0, H) & PB = (L/2, 0, H) & PC = (L, 0, H) \\
 PD = (0, 0, 0) & PE = (L/2, 0, 0) & PF = (L, 0, 0)
 \end{array}$$

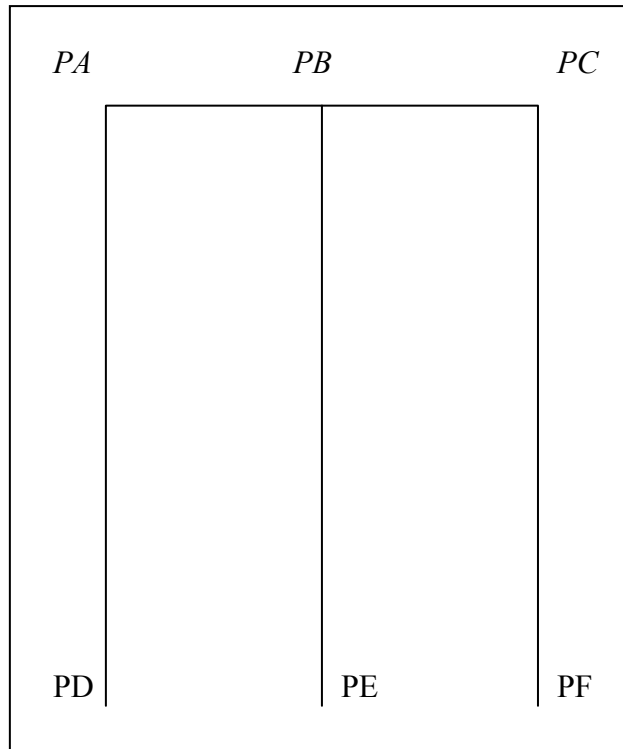


Figura 3.2. Esquema del pòrtic creat a partir dels punts.

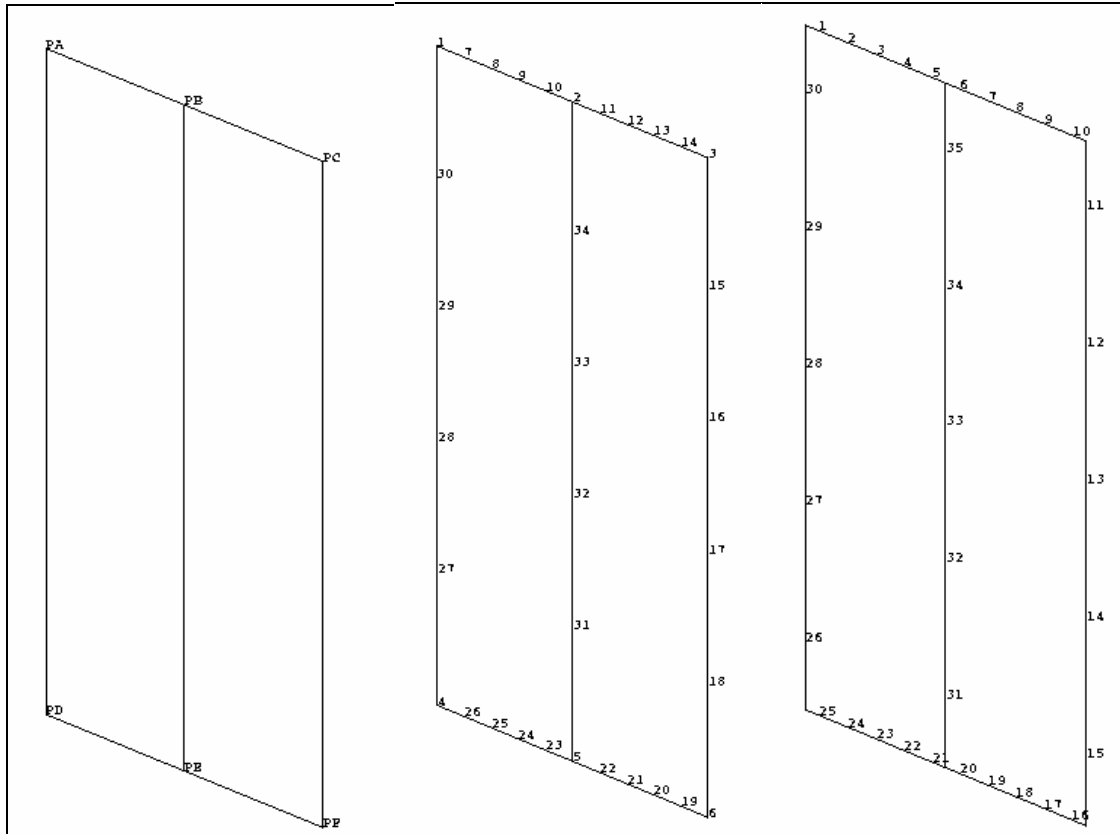


Figura 3.3. Dibuix del pòrtic elemental amb els punts, els números de node i els elements respectivament.

3.1.2. Propietats seccionals i del material

Dins de l'estructura tridimensional s'hi trobaran elements de diferent secció, i també es podria plantejar el cas d'una estructura formada per materials amb diferents propietats mecàniques.

Aquesta variabilitat seccional s'ha estudiat pel cas de dos pòrtics consecutius formats per elements de propietats mecàniques diferents.

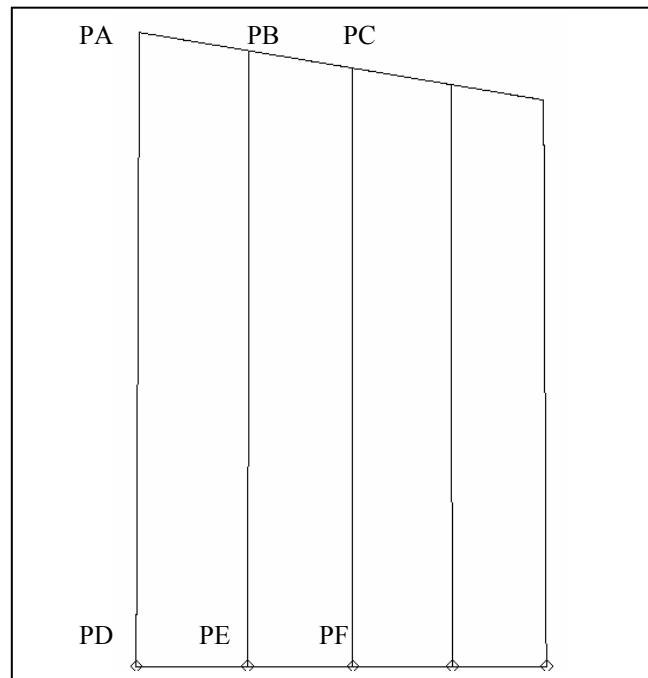


Figura 3.4. Esquema de tots dos pòrtics ja situats.

Els dos pòrtics són idèntics. La barra que uneix els punts PA i PB, així com la que va de PA a PD, tenen una rigidesa inferior (una dècima part de la rigidesa de la resta de barres). Tot seguit es carrega el pòrtic en tot el seu dintell amb una càrrega repartida uniforme.

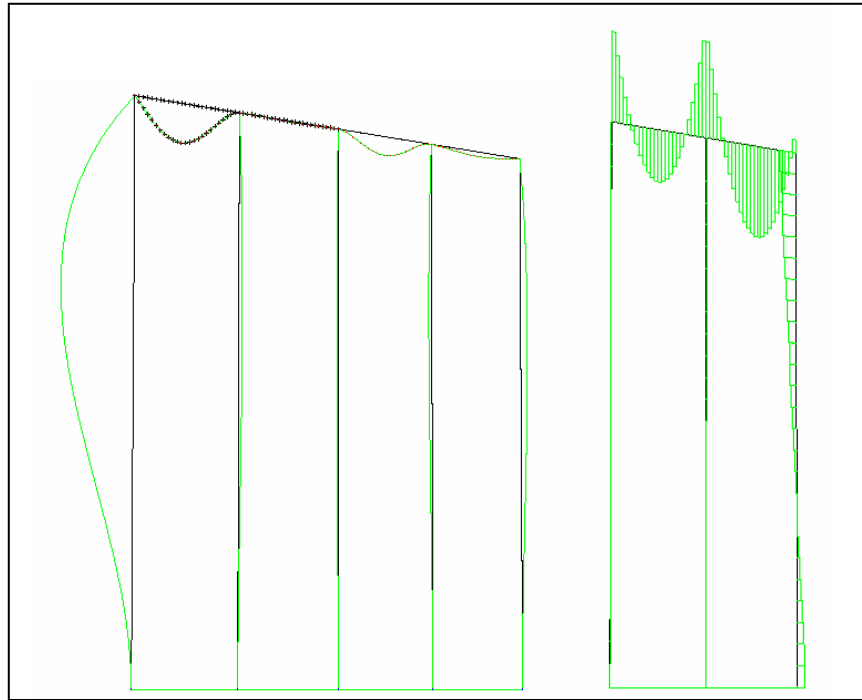


Figura 3.5. Deformada i llei de moments al primer pòrtic.

Com es pot apreciar clarament a les figures, el comportament dels pòrtics, tal com era d'esperar, va en funció de la seva rigidesa: la part més rígida absorbeix més esforços i es deforma menys, al contrari de la part flexible.

3.1.3. Posicionament de cada mòdul

Un cop tenim definit el mòdul elemental, serà necessari situar-lo en l'estructura completa. Per fer-ho, caldrà conèixer els següents paràmetres:

1. Tipus de mòdul
2. Orientació del mòdul en l'espai
3. Posició del mòdul
4. Vinculació del mòdul amb la resta de l'estructura

Definits aquests valors per cadascun dels mòduls elementals, es pot crear un bucle que vagi portant un mòdul del tipus seleccionat, amb la orientació correcta, al punt que s'especifica. Després es vincula l'element a la resta d'estructura ja situada.

Donada la particular geometria del problema que ens ocupa, ha resultat més interessant definir uns elements verticals entre mòduls que permeten una més senzilla vinculació entre els diferents pòrtics. En el cas d'una estructura que no contingués elements d'aquest tipus, es podrien disposar elements ficticis que féssin una simple funció d'unió entre elements, sense actuar estructuralment. D'aquesta manera, hom pot situar en primer lloc aquest element vertical, i després encaixar el pòrtic entre dos d'aquests elements i vincular-lo amb ells d'una forma més senzilla, còmoda i genèrica.

A continuació, es detallen uns quants passos en la creació del model d'una part de l'estructura completa. Com es pot observar, en primer lloc es col·loca el perfil tubular (element vertical) i després el mòdul.

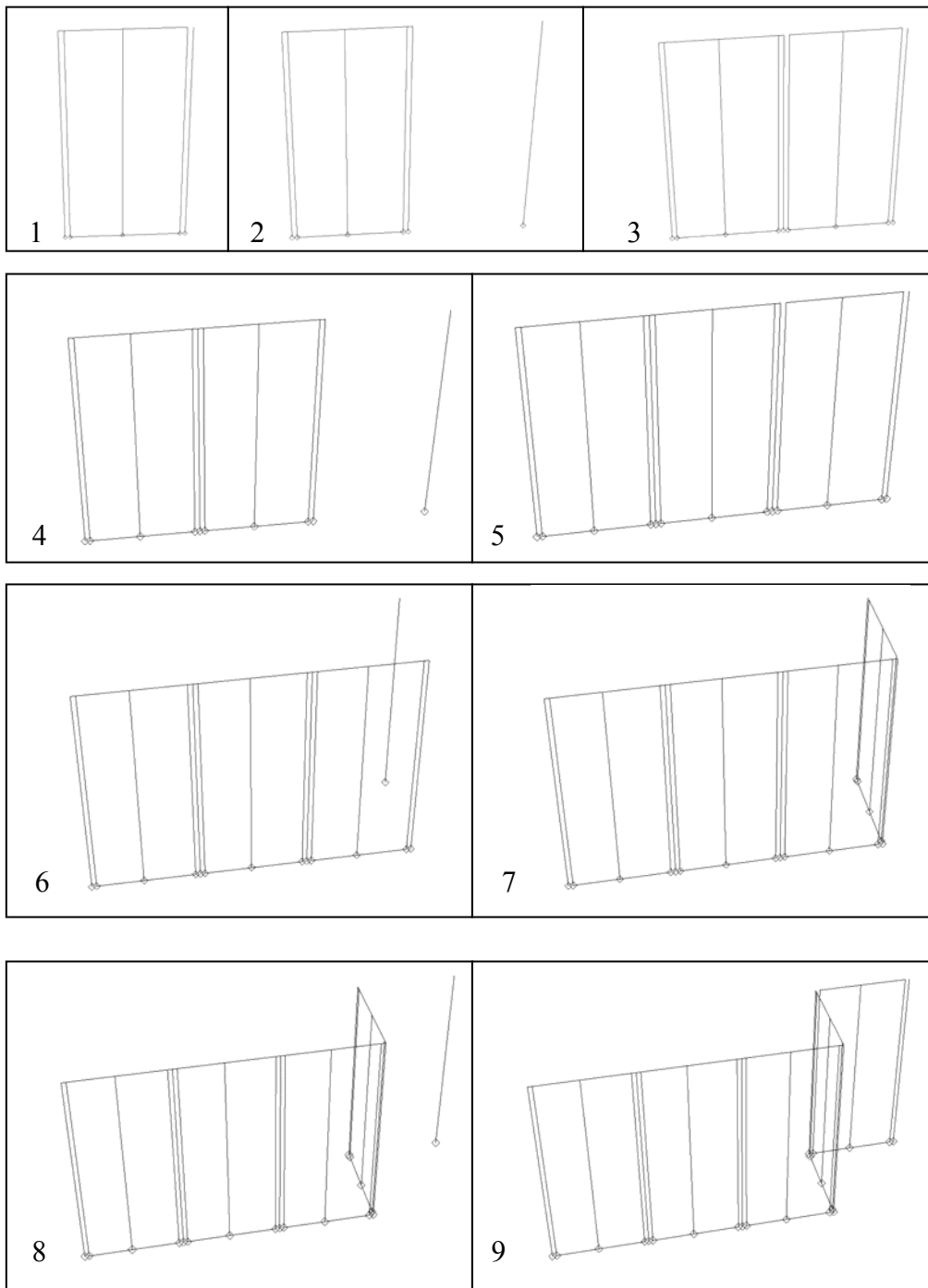
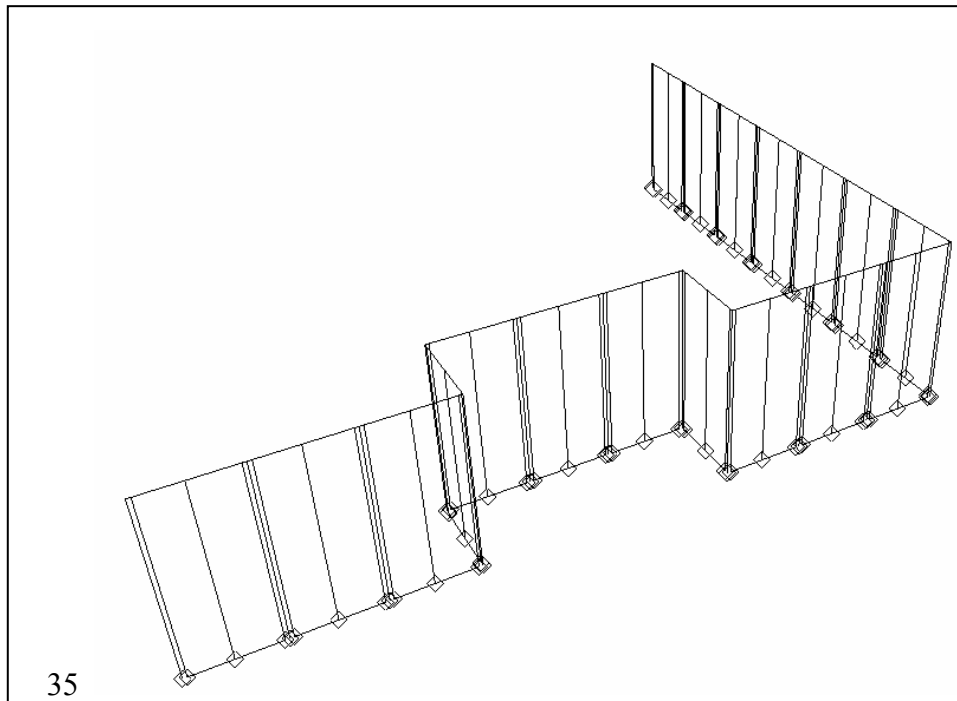


Figura 3.6. Passos del procés de modelització d'una estructura per pòrtics.



35

Figura 3.7. Darrer pas de la modelització d'una estructura per pòrtics.

A continuació s'aplica sobre l'estructura obtinguda una càrrega en les dues direccions horitzontals, per veure com es deforma solidàriament.

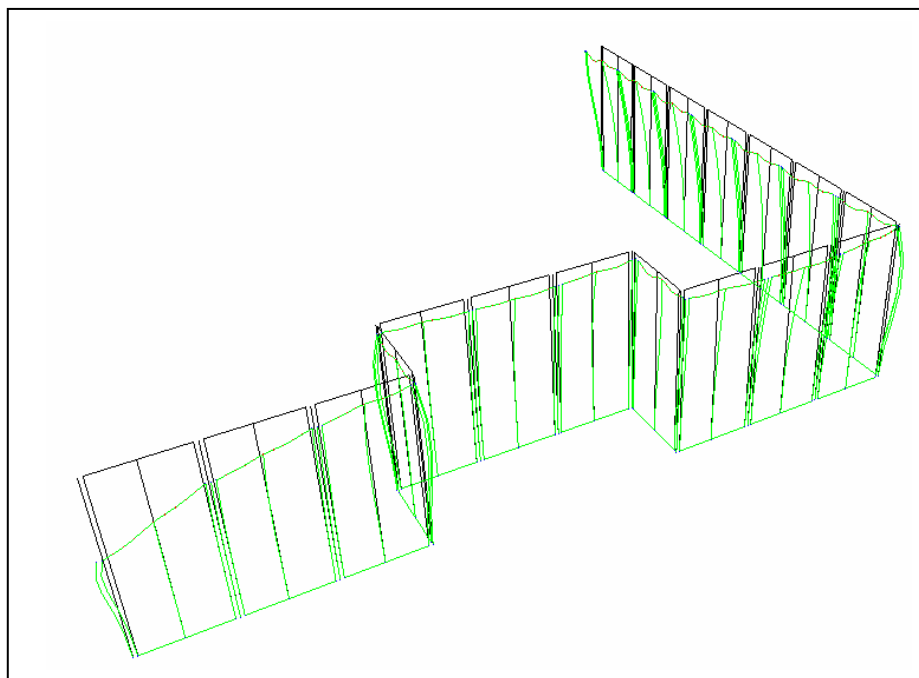


Figura 3.8. Deformada de l'estructura.

Es pot comprovar que la vinculació entre pòrtics elementals fa que tots els elements actuïn com un de sol.

3.2. Càrregues

Per a l'aplicació de les càrregues verticals sobre l'estructura, s'han estudiat dues hipòtesis de treball:

- a) Càrrega per àrea tributària
- b) Placa de càrrega

La primera opció consisteix en dividir l'àrea tancada per la coberta de pòrtic en parts que s'assignen als diferents dintells dels pòrtics. Així, els pòrtics de cantonada estan menys carregats, perquè la seva àrea tributària és menor que la dels pòrtics centrals.

S'ha aplicat aquesta hipòtesi de càrrega a un pòrtic amb les següents dimensions:

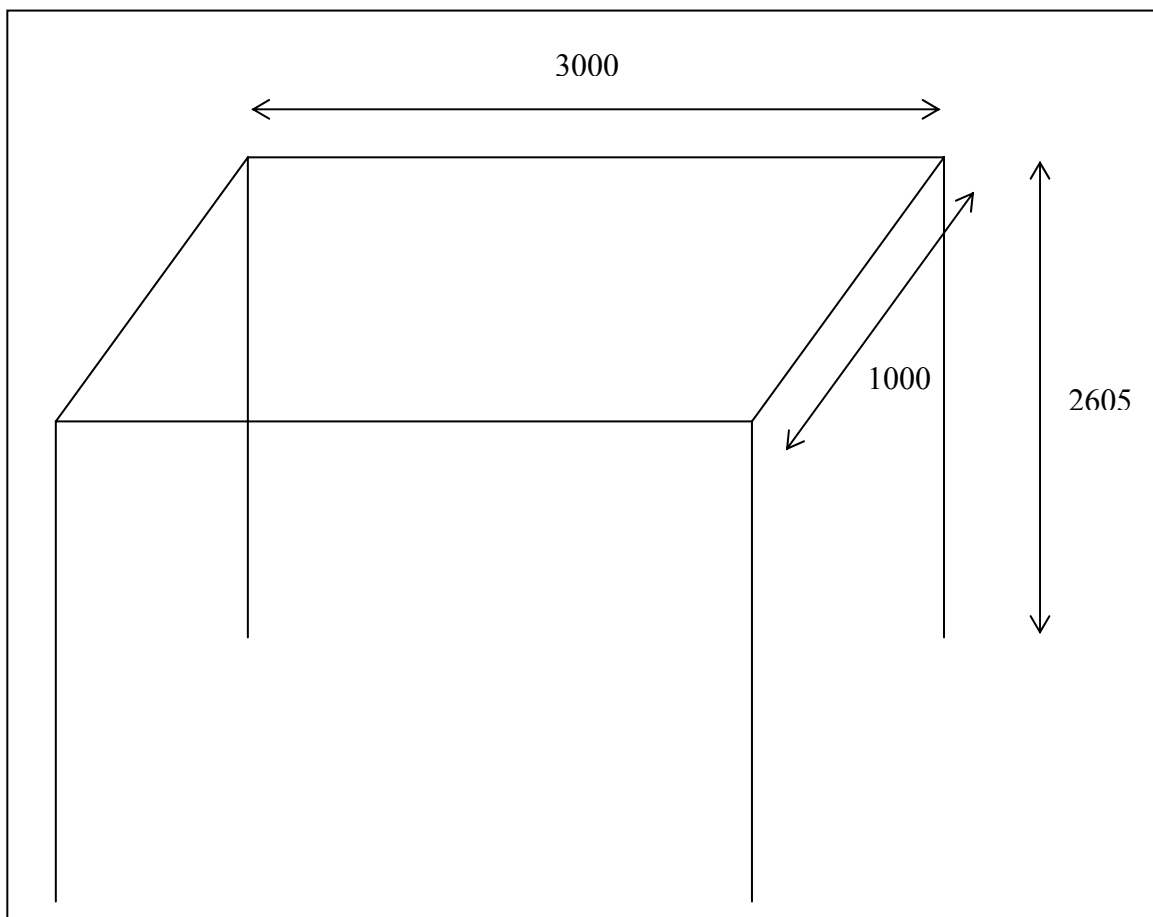


Figura 3.9. Dimensions del pòrtic

L'àrea tributària que s'ha definit per cada dintell és la que es descriu en la següent figura, on es distingeixen parts del pòrtic carregades amb el doble d'àrea que les altres:

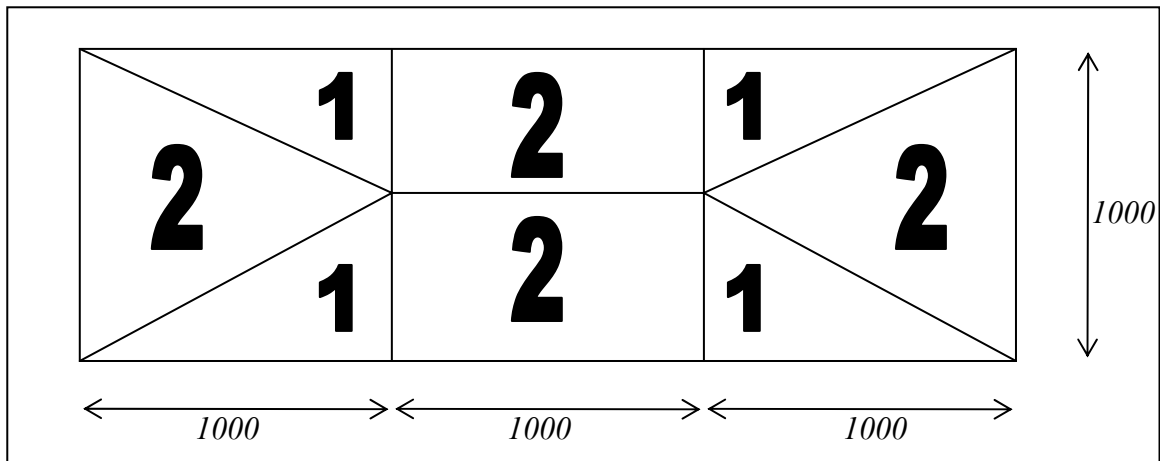


Figura 3.10. Divisió en àrees tributàries de la superfície superior del pòrtic.

Per tant, es carrega de la següent manera:

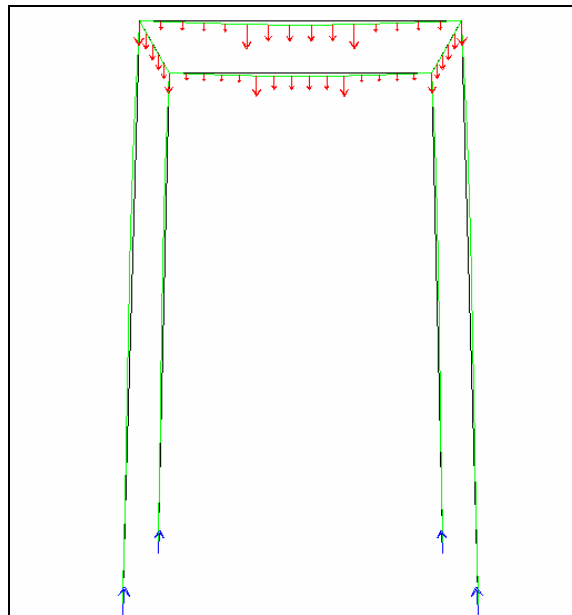


Figura 3.11. Càrregues, deformada i reaccions del pòrtic. Es poden apreciar les parts del dintell més i menys carregades.

Amb aquesta hipòtesi de càrrega s'ha obtingut un valor del moment màxim de:

$$M: 5.54 \text{ kN}\cdot\text{cm} \quad (X: 800 \text{ mm} \quad Y: 0 \text{ mm} \quad Z: 2605 \text{ mm}) \quad (3.1)$$

L'altra opció estudiada consisteix en carregar el pòrtic utilitzant una placa de càrrega situada al damunt. Aquesta placa té per funció repartir la càrrega entre els diferents pòrtics. Ha de tenir una rigidesa molt elevada, i estarà vinculada als dintells per tal que els transmeti els esforços. Amb aquests esforços es calculen els pòrtics.

En el cas del pòrtic estudiat abans per àrees tributàries, si hom aplica aquesta hipòtesi de treball s'obtenen els següents resultats:

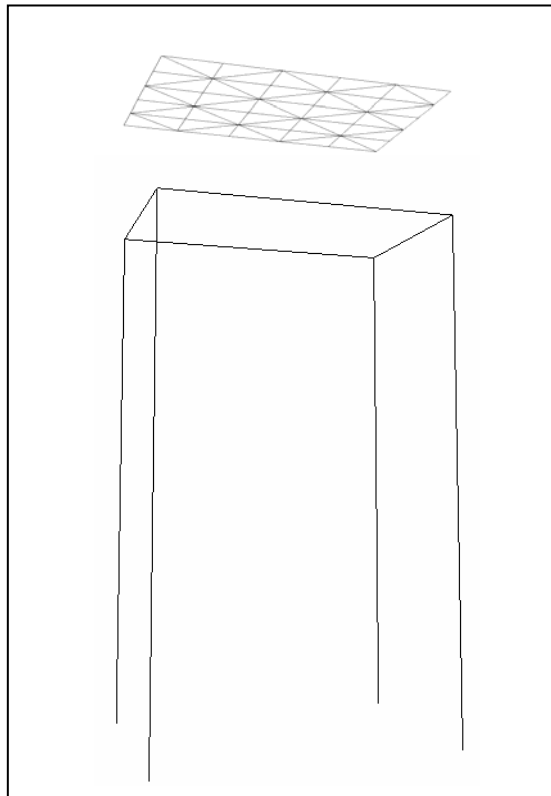


Figura 3.12. Pòrtic i placa de càrrega.

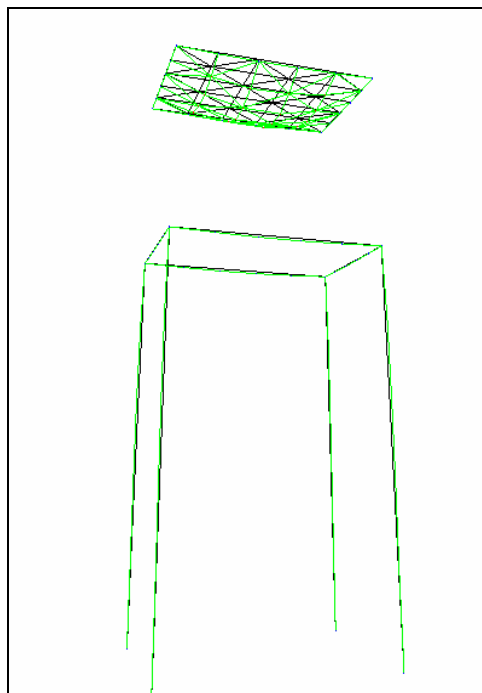


Figura 3.13. Deformada de pòrtic i placa sota l'acció de la càrrega sobre la placa.

Els valors del moment màxim que s'obtenen són de l'ordre dels obtinguts pel mètode d'àrees tributàries, tot i no coincidir:

$$M: 5.02 \text{ kN}\cdot\text{cm} \text{ (X: } 600 \text{ mm Y: } 0 \text{ mm Z: } 2605 \text{ mm)} \quad (3.2)$$

3.3. Resolució

Amb tots els paràmetres que s'han anat definint, ha quedat descrit completament el problema. Ara es pot passar a resoldre'l i obtenir el camp de desplaçaments a partir d'una matriu de rigidesa (que conté també els multiplicadors de Lagrange amb les condicions de contorn) i un camp de càrregues.

El càlcul del vinclament requereix un estudi a part. Numèricament es calcula com un mode propi de l'estructura, utilitzant l'analogia amb els modes de vibració, sota l'acció de les càrregues i tenint en compte les condicions de contorn. D'aquesta manera s'obté un càlcul tant del vinclament local de qualsevol element que formi part de l'estructura, com del vinclament d'un grup de varis elements o de l'estructura completa.

Per a calcular analíticament la càrrega crítica, es considera una columna simplement recolzada sota una càrrega de compressió P , en totes les seccions transversals es verifica $P \cdot y = M_z$.

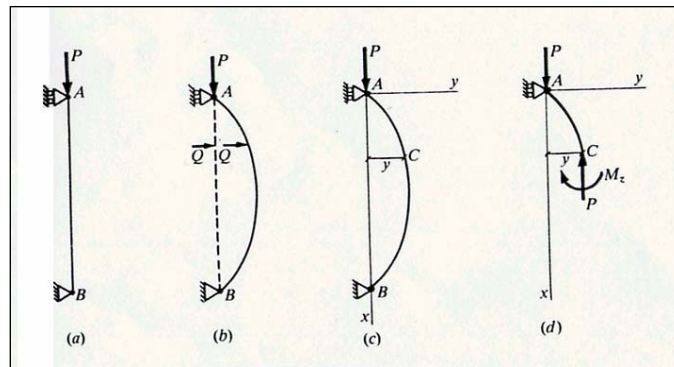


Figura 3.14. Esforços en una biga birrecolzada [18].

Donat que:

$$M_z = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.3)$$

La igualtat $P \cdot y = M_z$ equival a:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI_z} y = 0 \quad (3.4)$$

Resolent aquesta equació diferencial s'obté un valor per a la càrrega:

$$P = \frac{\pi^2 n^2 EI_z}{L^2} \quad (3.5)$$

El menor dels valors que ha de tenir la càrrega P per tal que la columna adopti un equilibri diferent de $y = 0$ és el que correspon a $n = 1$ (primer mode de vinclament, que respon a la càrrega crítica de vinclament).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (3.6)$$

En el cas d'altres condicions de contorn, l'expressió segueix sent vàlida si utilitzem una longitud de vinclament que aprofiti l'analogia amb el problema de la biga birrecolzada, i es pot obtenir també una solució analítica pel problema:

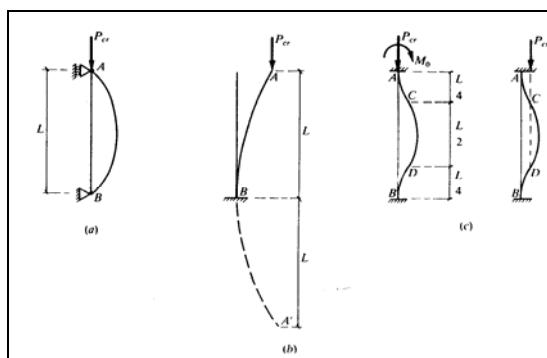


Figura 3.15. Longituds de vinclament segons les condicions de contorn [18].

S'ha estudiat el cas d'un pilar comprimit amb una càrrega unitària i sotmès a diferents condicions de contorn. El càlcul amb CASTEM [14] es realitza a través de l'analogia dels modes de vinclament amb els modes propis de vibració, resolent el problema d'autovalors $Kv = \omega^2 Mv$, que equival a resoldre l'equació (3.4) en la seva forma matricial, a partir de les matrius de rigidesa K i de rigidesa geomètrica K_σ :

$$Kv = \lambda K_\sigma v \quad (3.7)$$

En aquest cas la càrrega crítica resulta del producte del coeficient de càrrega crítica λ per la càrrega aplicada sobre l'estructura, amb la que s'ha calculat K_σ .

En el cas d'un pilar empotrat a la base i amb l'extrem lliure, amb les propietats físiques de la taula 3.1, el valor teòric de l'axil crític és, resolent el problema analíticament, $P_{crit} = 125.7 \text{ N}$.

PARÀMETRE	SÍMBOL	VALOR
Mòdul d'elasticitat	E	$1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
Inèrcia mínima	I	898.7 cm^4
Longitud	L	4200 cm

Taula 3.1. Propietats físiques de la columna assajada.

Utilitzant CASTEM [14], s'arriba a valors més precisos com més número d'elements es fan servir:

NÚMERO D'ELEMENTS	AXIL CRÍTIC (N)	ERROR (%)
5	127.80	1.667
25	125.79	0.068
125	125.71	0.004

Taula 3.2. Axil crític en un pilar en funció del número d'elements de la discretització.

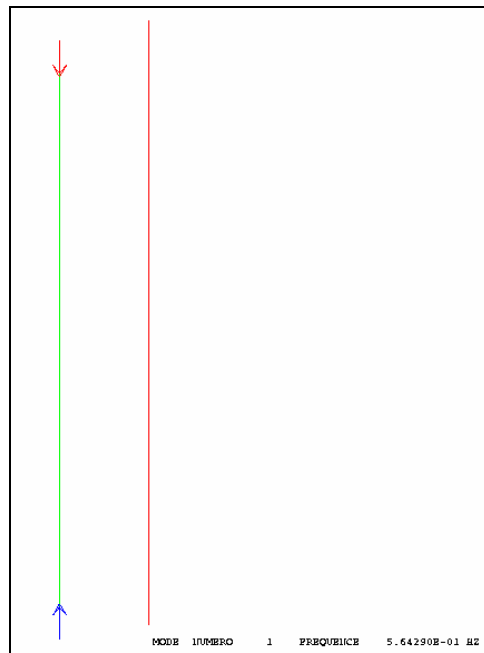


Figura 3.16. Pilar carregat per al càlcul a vinclament.

Així s'observa que el valor obtingut per discretitzacions grolleres és bo com a primera aproximació, i serveix per a fer-se una idea de si l'estructura pot tenir o no problemes de vinclament. En el cas de ser així, caldria un càlcul més acurat utilitzant una discretització amb més elements que ens donés un valor amb prou precisió.

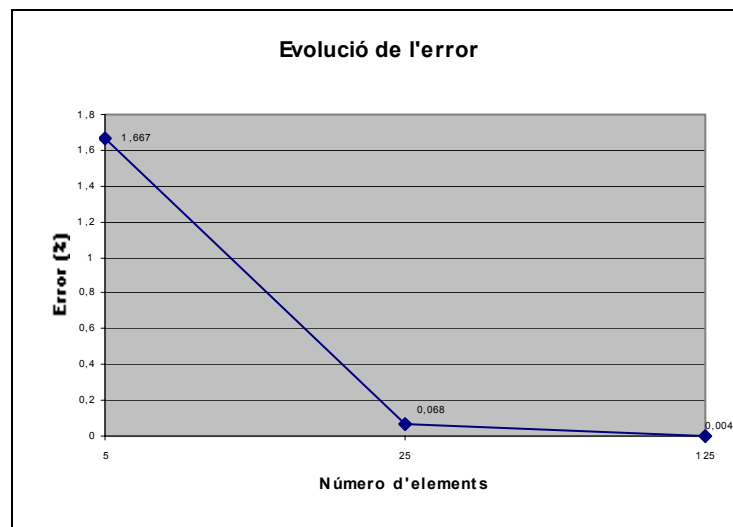


Figura 3.17. Evolució de l'error amb el nombre d'elements utilitzats en la discretització.

3.4. Post-procés

Un cop obtingut el camp de desplaçaments, es poden trobar diferents valors de tensions i desplaçaments. Aquests resultats es poden representar gràficament per visualitzar-los més clarament.

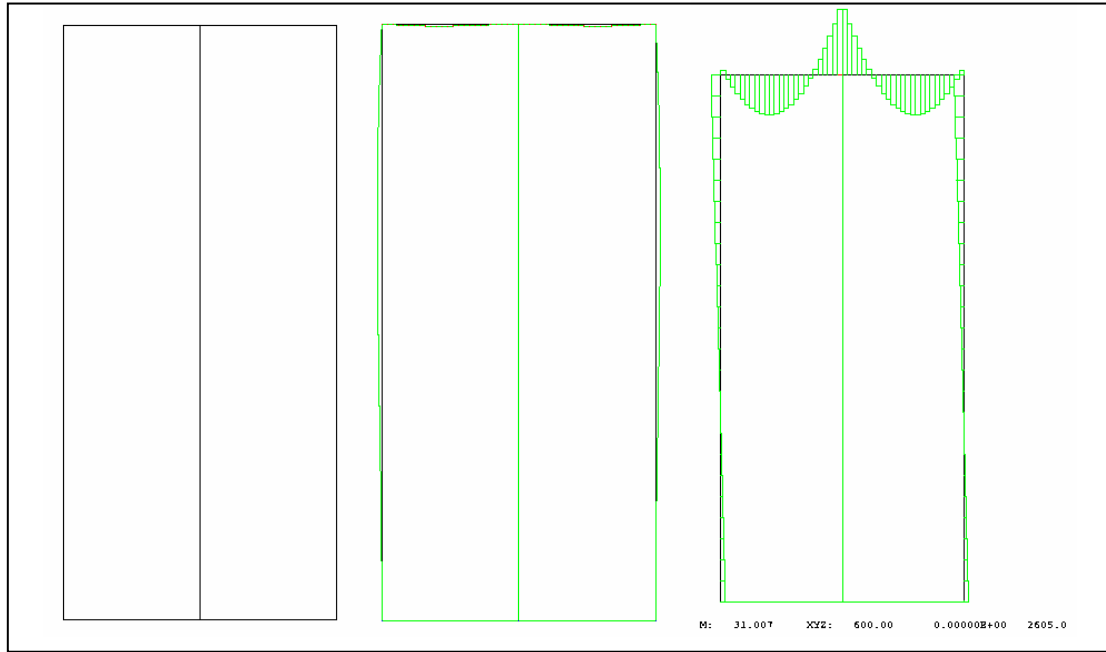


Figura 3.18. Exemple de representació gràfica de resultats d'un pòrtic: deformacions i llei d'esforços moments flectors.

En la següent figura es pot veure com a partir dels resultats i de una tensió de comparació es pot comprovar si s'esgota en algun punt una secció del pòrtic.

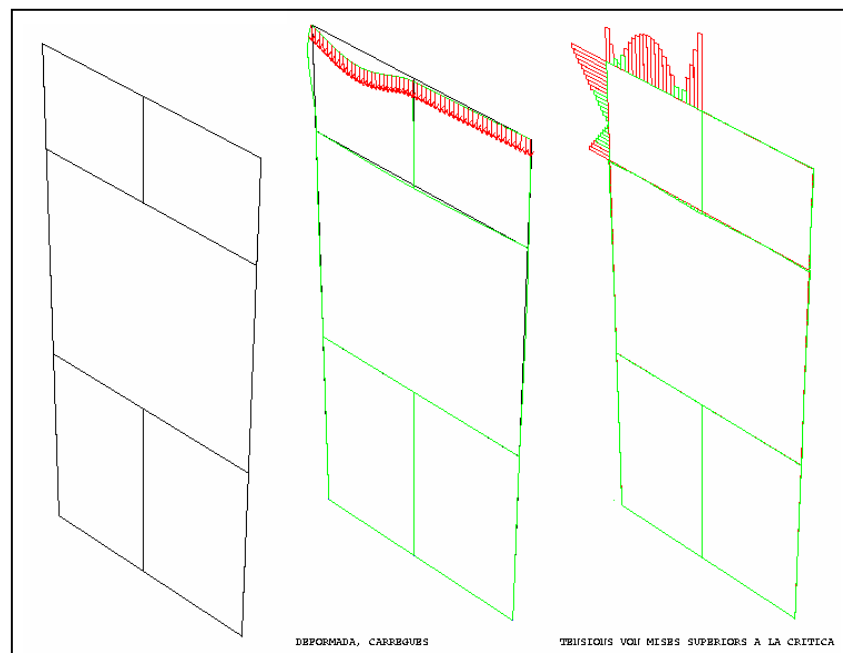


Figura 3.19. Pòrtic, càrregues i deformada, tensions (en vermell les que superen la crítica).