

Capítol 3. Breu explicació del model acoblat TINSA

3.1. Introducció

En els últims anys s'ha presenciada una evolució constant dels models de càlcul per a l'anàlisi no lineal de les estructures de formigó armat i pretensat.

Quan es tracta de simular el comportament d'estructures completes o bé subestructures més o menys grans d'estructures reticulades, els models basats en elements finits tipus barra són els més utilitzats, tant en la pràctica informal com en la investigació. Això és degut a la seva versatilitat, facilitat d'ús, construcció del model numèric i precisió dels resultats obtinguts.

Els models amb elements finits tipus barres que permeten càlcul no lineal – models on existeix un model seccional no lineal associat a cada punt d'integració de l'element biga –, es poden classificar en dos tipus ben diferenciats. Uns primers són aquells que es basen en ròtules plàstiques, concentrant tota la no linealitat en unes poques seccions i mantenint-se en règim elàstic en la resta de l'estructura. L'altre classe de models són els anomenats models no lineals d'inelasticitat distribuïda, que presenten major precisió i possibilitats d'ús. Actualment, els primers són els més usats, i la majoria de programes comercials, com el SAP2000 ([12]), són d'aquest tipus. Tanmateix, els segons tenen perspectives d'acabar desbancant els primers. CONS (Marí, A.R. [17]) és un exemple de model d'inelasticitat distribuïda.

Les respostes no lineals d'aquest tipus de models depenen, bàsicament, de la capacitat del model seccional de reproduir determinats efectes locals. En aquest sentit, el model seccional fa d'equació constitutiva de l'element barra.

Els models, han anat evolucionant al llarg de les últimes dècades. Primerament, van aparèixer els anomenats models de fibres, que discretitzen la secció en elements (fibres) i utilitzen models tensió – deformació uniaxials no lineals. Els resultats d'aquests models són bons per a sol·licitacions a flexocompressió, i poden realitzar un anàlisi diferit. Els resultats però no s'ajusten a la realitat quan la peça falla a tallant o torsió. L'efecte de confinament del formigó dins dels estreps s'ha d'introduir artificialment utilitzant models tensodeformacionals diferents segons el grau de confinament de cada fibra.

Més endavant, van aparèixer models capaços de tenir esforços tallants, però només en un pla. Inicialment, es coneixien com models duals (Dual-sectionanalysis) perquè requerien dues seccions transversals per a calcular el tallant amb l'increment de moment entre seccions; d'aquesta manera, els elements barra tenien dos tipus de punts de Gauss: els de flexió i els de tallant, emplaçats alternativament (Vecchio i Collins, [24]).

Seguidament, van desenvolupar-se models seccionals per a flexocompressió i tallant en una sola secció. En aquest tipus de model, el tallant és calculat mitjançant equilibri diferencial enlloc d'utilitzar dues seccions diferents, (Bentz [6]). El problema d'aquest tipus de models és que segueixen sent plans i no permeten descriure correctament el comportament de seccions sotmeses a tallant o flexió esbiaixada. Per tant, només permeten l'anàlisi en seccions simètriques respecte el pla de càrrega, i el torsor tampoc pot ser analitzat correctament (ni, conseqüentment, la problemàtica global 3D flexiótorsió).

J. M. Bairán ([1], [3] i [4]) estudia la interacció total flexió-torsió, juntament amb els efectes propis de la geometria i la fissuració del formigó en diferents angles. Això obliga a tractar el formigó fissurat com un material anisòtrop. El model, segueix sent seccional i es basa en l'equilibri diferencial en 3D, de manera que no requereix un anàlisi dual de seccions. El problema però passa a ésser hiperestàtic, de manera que també cal considerar, a més, compatibilitat de deformacions i treballar amb una determinada llei constitutiva, que permeten tenir en compte la distorsió i guerxesa de la secció. Com a conseqüència, apareix un avantatge afegit: l'efecte del confinament s'obté directament ja que se sotmet cada fibra a una equació constitutiva triaxial.

3.2. El model TINSA

El model acoblat TINSA, acrònim de Total Interaction Sectional Analysis, (Bairán ,[1], Bairán i Marí, [3] i [4])), és un model seccional aplicable a seccions de qualsevol forma.

3.2.1. Resposta seccional

La hipòtesi fonamental del model és que els desplaçaments (i deformacions) seccionals es poden descompondre en dos camps de desplaçaments continus. La primera component (u^{ps}) és la que compleix amb la hipòtesi de secció plana de Navier-Bernoulli. La segona (u^w), és la component addicional que té en compte els fenòmens de guerxesa i distorsió; u^w , és una magnitud vectorial perquè no només recull la guerxesa de la secció sinó també el seu possible canvi de forma (distorsió), com s'observa en la figura 3.1.

$$u = u^{ps} + u^w \quad (3.1)$$

Així, per les deformacions es té:

$$\varepsilon = \varepsilon^{ps} + \varepsilon^w \quad (3.2)$$

amb $\varepsilon^{ps} = [\varepsilon_x^{ps} \quad \varepsilon_y^{ps} \quad \varepsilon_z^{ps} \quad \gamma_{xy}^{ps} \quad \gamma_{xz}^{ps} \quad \gamma_{yz}^{ps} \quad \gamma_{xy}^{ps}]^T$ i $\varepsilon^w = [\varepsilon_x^w \quad \varepsilon_y^w \quad \varepsilon_z^w \quad \gamma_{xy}^w \quad \gamma_{xz}^w \quad \gamma_{yz}^w]^T$

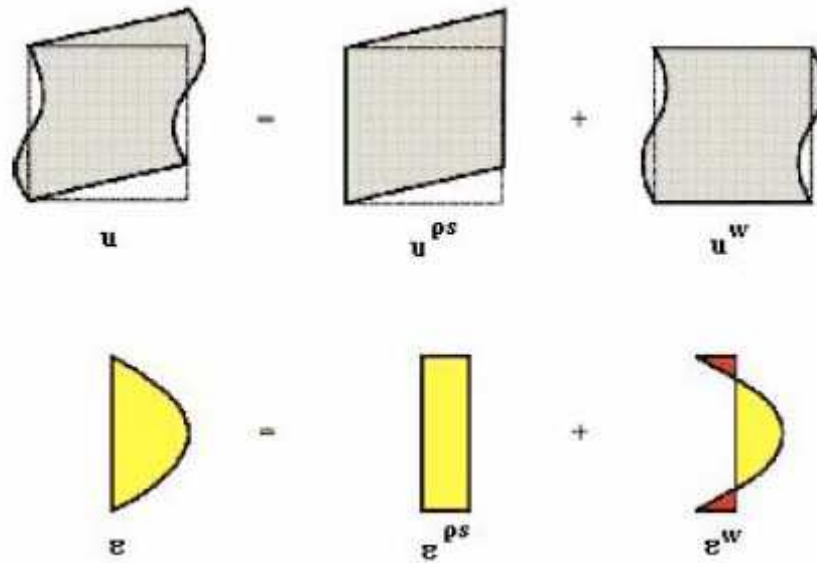


Figura 3.1. Superposició de desplaçaments i deformacions (extreta de Bairán i Marí, [3])

És possible relacionar ε^{ps} amb el vector tradicional de deformacions generalitzades $\varepsilon_{ps}^* = [\varepsilon_0 \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$:

$$\varepsilon^{ps} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & z - z_0 & -(y - y_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(z - z_0) & 0 & 0 \\ 0 & y - y_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= N^{ps}} \cdot \varepsilon_s^* \quad (3.3)$$

Per altra banda, la relació entre ε^w i les deformacions generalitzades ε_s^* no és tan immediata si no es vol imposar una condició cinemàtica de distribució de deformacions. Aquesta, es dedueix a partir de l'equilibri intern d'una llesca diferencial d'una biga (d'una secció transversal). El procediment seguit es descriu a continuació.

L'equació de Cauchy (o d'equilibri) en absència de forces massiques estableix que:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (3.4)$$

és descomposta en dos operadors, un contenint les derivades al llarg de la directriu de la peça i l'altra, amb les derivades contingudes dins la secció

$$\nabla_x \cdot \sigma + \nabla_\Omega \cdot \sigma = 0 \quad \text{on } \nabla_x \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } \nabla_\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

L'equació (3.5) és transformada en la seva forma feble multiplicant per una funció de pes arbitrària u^{w*} , i integrant en un domini contingut en la secció d'estudi. Posteriorment, una integració per parts és realitzada en el membre amb ∇_Ω , i si simplifiquem el terme corresponent al contorn de Dirichlet on no hi ha traccions (t_Γ) aplicades, s'obté

$$g = \int_{\Omega} u^{w*} \cdot \nabla_x \cdot \sigma \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_N} u^{w*} \cdot t_\Gamma \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} u^{w*} \cdot \nabla_\Omega \cdot \sigma \cdot d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Seguint una estratègia incremental, aquesta expressió és linealitzada amb el mètode de Newton-Raphson, de manera que si s'usa el punt per a denotar increments, es té

$$g \cong g_0 + g = 0$$

$$\text{amb } g = \int_{\Omega} u^{w*} \cdot \nabla_x \cdot \sigma \cdot d\Omega - \int_{\Omega} u^{w*} \cdot \nabla_\Omega \cdot \sigma \cdot d\Omega \quad (3.7)$$

Amb aquesta última expressió, les quatre extres que s'obtenen de considerar que els moviments de sòlid rígid no interfereixen en l'estat tensional i les relacions per a petits increments

$$\begin{aligned} \sigma^{ps} &= D \cdot \varepsilon^{ps} \\ \sigma^w &= D \cdot \varepsilon^w \\ \sigma &= \sigma^{ps} + \sigma^w \\ \text{on } D &= \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.8)$$

es pot arribar a escriure l'expressió que es buscava, escrita més avall. Per fer-ho, és més senzill si es considera que les components de guerxesa i distorsió són constants al llarg de la directriu de la barra. D'aquesta manera, s'obvia la torsió de guerxesa i les tensions normals degudes a la guerxesa o la distorsió.

$$K_{w\xi} \cdot \xi^* + K_{ww} \cdot d^w = g_0 \quad (3.9)$$

Sent $K_{w\xi}$ i K_{ww} dos operadors matricials que es calculen amb la integració numèrica d'altres operadors matricials, d^w és el vector amb els valors nodals de u^w i ξ^* és un nou vector de vuit components que recull les quatre deformacions generalitzades de la secció i les seves derivades al llarg de la directriu de la biga. Si amb un ' es denota aquesta derivada,

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \xi_s^* \\ \xi_s^* \end{pmatrix} = (\varepsilon_0 \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z \quad \varepsilon_0' \quad \phi_x' \quad \phi_y' \quad \phi_z')^T \quad (3.10)$$

L'equació (3.9) és usada en un procés iteratiu. Un cop s'ha convergit en un estat determinat, es pot escriure:

$$d^w = \underbrace{K_{ww}^{-1} \cdot K_{x\xi}}_{=A} \cdot \xi^* \quad (3.11)$$

on es veu que la matriu de distorsió A conté les funcions de forma del camp de distorsions.

Finalment, amb la igualació del treball virtual generat per un increment amb un camp de deformacions compatible amb el treball virtual generat per l'increment d'esforços generalitzats actuant en la secció, es pot obtenir una relació entre ξ^* (que recull les quatre deformacions generalitzades de la secció i les seves derivades) i els esforços generalitzats que genera, σ_ξ :

$$\sigma_\xi = K^* \cdot \xi^* \quad (3.12)$$

S'observa però que aquesta relació arrossega 8 graus de llibertat, de manera que aquesta matriu de rigidesa no es podria implementar en cap model de barres, on els graus de llibertats tradicionals són 6: les quatre primeres components de ξ^* i dues deformacions a tallant. Com que el model s'ha de poder implementar dins d'altres models amb formulació tradicional, cal reduir dos dels graus de llibertat necessaris i posteriorment calcular les deformacions a tallant a partir de les deformacions ja conegudes. El primer pas s'ha de fer suposant que l'axil i el moment torsor de la peça romanen constants al llarg de la seva directriu, ja que cal eliminar dos graus de llibertat. D'aquesta manera, els dos vectors es poden relacionar amb una matriu Ξ :

$$\xi^* = \Xi \cdot \xi \quad (3.13)$$

El càlcul de les deformacions de tallant, sense imposar-ne cap forma, s'aconsegueix mitjançant consideracions energètiques tot imposant la compatibilitat entre ϕ_x i les deformacions a tallant. Aquestes consideracions proporcionen la matriu de relació Ω :

$$\xi = \Omega \cdot \varepsilon_s \quad (3.14)$$

Amb aquestes dues últimes relacions, ja es pot escriure la matriu de rigidesa de la secció amb vectors generalitzats tradicionals:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= K_s \cdot \varepsilon_s \\ \text{on } K_s &= \Omega^T \cdot \Xi^T \cdot K^* \cdot \Xi \cdot \Omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.2. Model constitutiu

Qualsevol model constitutiu 3D pot ser aplicat al model TINSA. Actualment, s'usa la superfície de falla de William-Warnke. La llei constitutiva que el model fa servir es basa, pel comportament a compressió, en la teoria modificada del camp de compressió, modificada convenientment per acceptar càrregues cícliques. La descàrrega en compressió s'efectua per una branca plàstica. Pel que fa al comportament a tracció, s'empra un model de dany amb descàrregues a tracció lineals a origen. Esquemes d'aquestes relacions poden veure's en la figura 3.2.

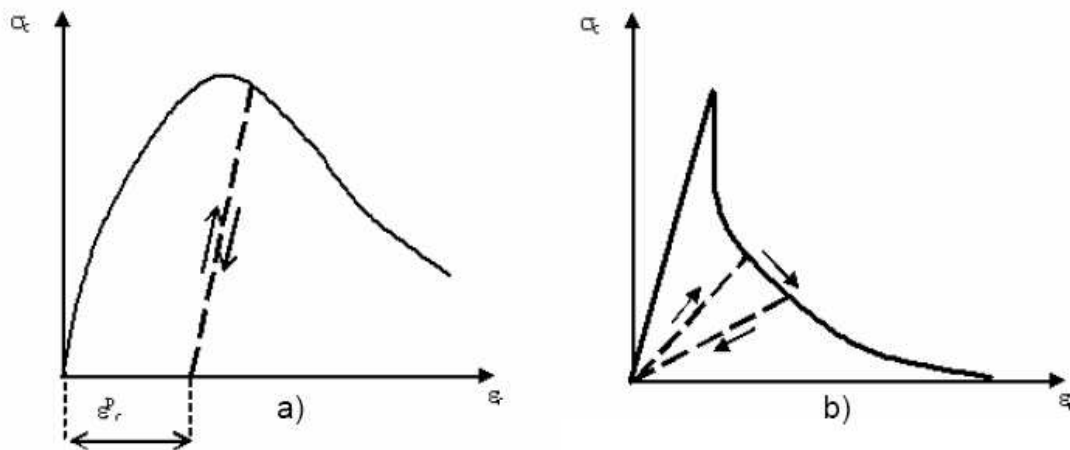


Figura 3.2. Relacions tensió - deformació per a càrregues i descàrregues a) en compressió, b) a tracció. (extretes de Bairán, [1])

3.2.3. Llibreria d'elements seccionals

Els elements finits utilitzats en la discretització són de 3 tipus (figura 3.3). Els que representen el formigó de la secció són quadrilàters, de 4 nodes; així com triangulars de 3 nodes, les funcions d'interpolació són bilineals i la quadratura usada és de Gauss-Lagrange, amb 4 i 3 punts d'integració en cada element respectivament. Per altra banda, també existeixen elements unidimensionals per a representar els estreps; tenen dos nodes, dos punts de Gauss i les funcions s'interpolen amb funcions de forma lineals. Finalment, existeixen també elements puntuals per a la representació de barres d'acer perpendiculars a la secció.

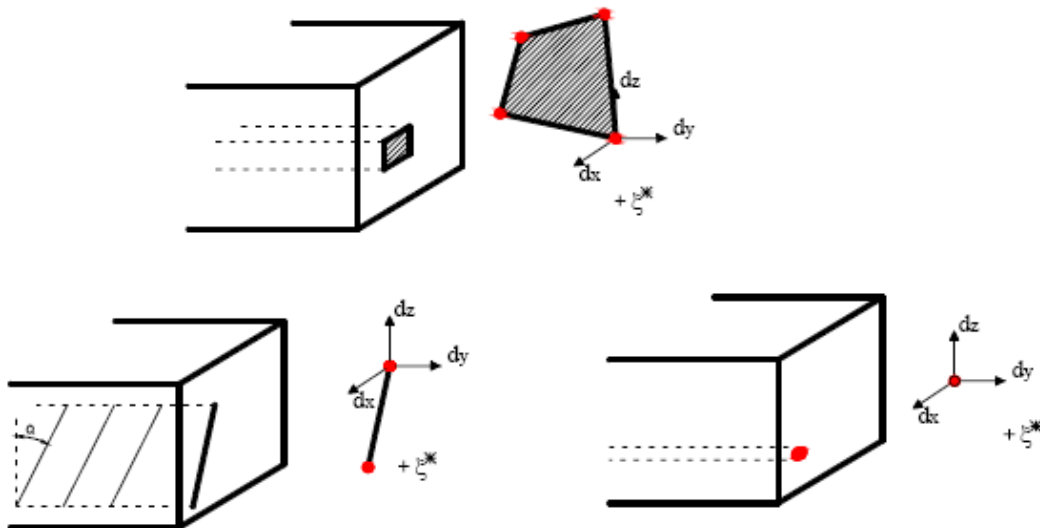


Figura 3.3. Tipus d'elements finits utilitzats (extreta de Bairán,[1])

3.2.4. Estratègia d'anàlisi no lineal

Els passos de càrrega s'apliquen segons una estratègia incremental segons l'estructura típica del mètode de Newton-Raphson. Així, s'aconsegueix una convergència ràpida i es ressegueix tota l'evolució dels estats de la secció a mesura que aquesta es va carregant.

Actualment el mètode disposa d'algunes tècniques per a facilitar la convergència tals com el line search o el control de desplaçaments.

3.2.5. Valoració final

El model ha estat validat amb la comparació dels resultats de certs problemes de solució coneguda amb els que calcula el model, tant en materials isòtrops com anisòtrops. Les comparacions són molt satisfactòries ja que les respostes conegudes i les que ofereix el model presenten un molt bon ajust.

El model manté l'estructura usual els graus de llibertat tradicionals (deformacions generalitzades de les seccions) i els relaciona amb els esforços generalitzats tradicionals amb una matriu de rigidesa de la secció. Això permet utilitzar el model directament en un element barra en 3D com a resposta seccional d'un punt d'integració. Es tracta d'un avantatge important de TINSA ja que permet ser implementat dins d'altres paquets d'anàlisi d'estructural.