

6. MODELO MORFODINÁMICO

6.1. INTRODUCCIÓN

El profesor Allen Bateman desarrolló un modelo morfodinámico de erosión local basado en los experimentos hechos por Fernández Mireia (2004), en el *Estudio de la evolución temporal de la erosión local en pilas de puente a largo plazo*. En dicho trabajo el modelo se validó para pilas cuadradas, y se intentó adaptar el modelo a pilas circulares, sin embargo, la falta de datos experimentales no lo permitió. Uno de los objetivos de la presente tesina es aplicar dicho modelo en pilas circulares y comparar los resultados con las formulaciones empíricas existentes. A continuación se expone brevemente el modelo explicado en dicha tesina.

6.2. POTENCIA DEL FLUJO

El modelo está basado en *la potencia del flujo*. Precisamente la potencia del flujo es la que produce la capacidad para mover las partículas, o sea, para erosionar. Esta potencia es constante en el tiempo, es decir, no se pierde, aunque la erosión sí que se detiene. Lo que sucede es que, a pesar de que la potencia es la misma, la cantidad de masa que tiene que movilizar en cada momento va aumentando con el paso del tiempo debido al aumento de la erosión y por lo tanto del volumen del foso. Esto es lo que provoca la disminución de la velocidad de erosión hasta llegar a cero.

Para entender el fenómeno de erosión local, hay que describirlo como la suma de dos subprocesos: uno llamado activo y otro pasivo.

El **fenómeno activo** se desarrolla en la parte baja del foso, justo al lado de la pila, aguas arriba de ésta. En esta zona es donde se sitúa el motor de la erosión, que es precisamente el vórtice que forma el agua al chocar contra el obstáculo.

Por otro lado está el **fenómeno pasivo**, que es el derrumbe de la pared del foso cuando el foso causado por el fenómeno activo profundiza. Esto significa que está causado por el primero y depende completamente de él. De esta manera si el primero para, éste también lo haría. Por lo tanto se puede afirmar que el fenómeno pasivo funciona gracias al vórtice que se forma delante de la pila.

Esto implica que existe relación directa entre ambas partes. Es más, entre ellas hay un intercambio continuo de información, que se establece en forma de caudal sólido, Q_s . Este Q_s es exactamente el sedimento que podría colapsar en un instante, es decir, que podría pasar de la zona pasiva a la zona activa para ser arrastrado aguas abajo posteriormente. Este proceso de derrumbamiento es complejo, pues no ocurre de forma continua sino que lo hace en forma de colapsos o deslizamientos intermitentes.

6.2.1. Potencia de erosión del vórtice

La potencia de los vórtices es la que proporciona la capacidad de erosión al sistema. Tal y como lo demostró Batchelor (1958), la energía contenida en el vórtice está dada por la relación:

$$\text{Potencia por unidad de masa} = \frac{u^3}{l_v} \quad (6.1)$$

La velocidad del flujo se la puede definir como : $u = \frac{q}{(y_0 + e)}$, donde q es el caudal unitario, y_0 el calado, e la erosión.

Se puede aceptar que la longitud del vórtice es del orden : $l_v = \alpha_1 * (e + y_0)$, donde el coeficiente α_1 es para determinar con más exactitud el tamaño del vórtice

Además hay que tener en cuenta que el flujo no emplea toda la potencia que posee en el vórtice de herradura, ya que también existen otros pequeños vórtices, que utilizan parte de la potencia total y no influyen en la erosión. Por lo tanto la potencia del vórtice principal, que es la que interesa, es proporcional a $\frac{u^3}{l}$. Finalmente sacando las constantes se puede expresar la potencia del vórtice como:

$$\alpha_2 * \frac{u^3}{l} = \alpha * \frac{q^3}{(y_0 + e)^4} \quad (6.2)$$

De esta relación se deduce que la longitud del vórtice depende de las condiciones del flujo, que son el caudal q y su velocidad u .

El hecho de que el tamaño del vórtice no dependa de las dimensiones del obstáculo puede parecer un poco extraño, pero es debido a que el vórtice es de eje horizontal y no vertical. Es por esto que su tamaño viene controlado por el nivel de agua. En el instante inicial, cuando la erosión es cero, la longitud del vórtice es del orden del calado y_0 , sin importar el tamaño de la pila, ya que por grande que sea ésta, el vórtice no puede ser mayor que el calado, porque su eje es horizontal, debido a la naturaleza de problema. Luego al ir aumentando la erosión, va aumentando el tamaño del vórtice.

6.2.2. Potencia de erosión

Para que la erosión se produzca, la potencia del vórtice debe ser suficiente para movilizar el material de la zona activa. Esta potencia debe ser proporcional al peso del material que se va a movilizar y a la velocidad con que se moviliza. Es decir, es el producto de la fuerza (peso sumergido del material) por la velocidad de erosión. Por tanto la relación será:

$$\text{Potencia para mover el sedimento} = W_s \frac{de}{dt} = \text{Velocidad} * \text{Fuerza} \quad (6.3)$$

donde $\frac{de}{dt}$ es la derivada de la erosión respecto del tiempo ; W_s es el peso sumergido de las partículas = $\rho g(S_s - 1)V = \rho gRV$, siendo R la relación de reducción de densidad.

6.2.3. Velocidad del foso activo

Juntando las dos ecuaciones obtenidas (6.1) y (6.3), es decir igualando potencia por unidad de masa, y además teniendo en cuenta que el material tiene una porosidad λ , se obtiene la siguiente relación:

$$(1 - \lambda) * \frac{u^3}{l} = W_s * \frac{de}{dt} * \frac{1}{m} \quad (6.4)$$

Si lo que se busca es potencia por unidad de masa y de volumen, se obtiene lo siguiente:

$$(1 - \lambda) * \frac{u^3}{l} * \frac{1}{g} = \frac{de}{dt} * R \quad (6.5)$$

Y multiplicando a ambos lados por A , que es el área del foso pequeño sometido a los vórtices, se obtiene:

$$\left[(1 - \lambda) * \frac{u^3}{g * R * l} \right] * A = \left[\frac{de}{dt} \right] * A = \frac{dV_{exc}}{dt} \quad (6.6)$$

que es la **velocidad de excavación a la que el material sale del foso**.

El área en planta del foso activo A depende únicamente del tamaño de la pila y se considera constante a lo largo de todo el ensayo. Es del orden de $A=B*B/2$, donde B es en ancho efectivo de la pila. Así pues A es el parámetro a través del cual se manifiesta la influencia del tamaño de la pila en la erosión, ya que es evidente que una pila mayor siempre tendrá más erosión que otra más pequeña.

En una pila circular no todas las líneas de corriente que inciden en el ancho de la pila generan vórtices, las más exteriores son capaces de deslizar alrededor de ésta sin formar vórtices que son en definitiva los principales causantes de la erosión.

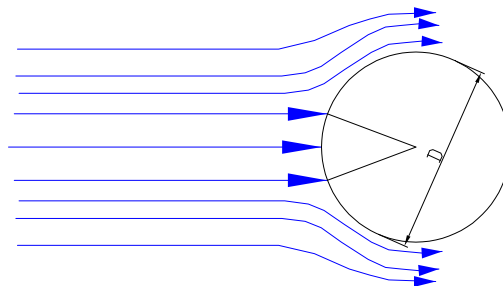


Figura 7.9. Líneas de corriente en una pila circular.

Esto significa que el ancho efectivo (que es el que tiene en cuenta el modelo) es mucho menor que el real.

Por otro lado, sustituyendo (6.2) en la ecuación (6.6) se obtiene:

$$A * \left[\frac{de}{dt} \right] = \left[(1 - \lambda) * \frac{\alpha * q^3 * A}{g * R * (y_0 + e)^4} \right] \quad (6.7)$$

En esta ecuación se observa que la potencia incrementa con la potencia tercera del caudal (q^3). Esto significa que la erosión es muy sensible a cualquier cambio en el caudal, por pequeño que éste sea, aunque para los ensayos aquí realizados este parámetro era constante.

Obviando las constantes la ecuación (6.7) tiene los siguientes órdenes de magnitud:

$$de * (y_0 + e)^4 = dt * k$$

donde k es una constante.

Luego integrando se obtiene algo del orden:

$$(y_0 + e)^5 * \frac{1}{5} = t * k_2 \longrightarrow e = t^{1/5} * k_3$$

Esto indica que la erosión e aumenta con el tiempo, proporcionalmente $t^{1/5}$, es decir, que durante los primeros instantes, cuando solamente interviene el fenómeno activo, la erosión es muy rápida, y a medida que va transcurriendo el tiempo, cada vez es más lento el proceso de erosión. Es decir, la evolución de la velocidad de erosión con respecto al tiempo, es monótona decreciente.

6.2.4. Colapso del material de las paredes del foso, fenómeno pasivo

El proceso activo es el único autor mientras la erosión aún ha profundizado poco. Cuando el foso activo ha profundizado lo suficiente, aproximadamente B , empieza el fenómeno pasivo, es decir, los sucesivos derrumbes o colapsos, de manera que los dos fenómenos actúan a la vez. Su efecto sobre la erosión es una disminución en la velocidad, que se puede observar en el cambio de pendiente de las gráficas de erosión.

Al sustituir la definición del flujo en la ecuación obtenida (6.7) y aplicando la conservación de la masa, se consigue la siguiente ecuación, que ya incluye los dos procesos, el activo y el pasivo:

$$A * \left[\frac{de}{dt} \right] = \left[(1 - \lambda) * \frac{\alpha * q^3 * A}{g * R * (y_0 + e)^4} \right] - Q_s \quad (6.8)$$

donde Q_s es el caudal sólido que pasa de la zona de los taludes del foso hacia el foso activo. Justo es el valor del caudal sólido en la zona de transición.

Comparando la ecuación (6.8), en la que actúan los dos fenómenos, con la (6.7), en la que sólo interviene el activo, la diferencia es únicamente el caudal sólido, que aparece restando en último término. Por lo tanto esto es precisamente lo que explica la disminución de la velocidad de erosión comentada anteriormente. Mientras el fenómeno activo saca material del foso, el fenómeno pasivo genera colapsos de material dentro del foso activo.

6.2.5. Caudal sólido

El comportamiento real del caudal sólido es discontinuo, pero debido a la complejidad del fenómeno, se trata mediante una función continua. Se estableció una analogía entre el comportamiento que tendría el agua a la salida de una cuenca, con el que tendrían las partículas sólidas al pasar del foso pasivo al activo en la sucesión de los colapsos. En definitiva, se sustituye el caudal líquido por un caudal sólido y la cuenca por el foso de erosión.

Suponiendo un mecanismo continuo de flujo de arena del foso pasivo hacia el foso activo, la hipótesis hidrológica consiste en que este caudal Q_s es proporcional al volumen de material almacenado V_c en el foso pasivo y que es capaz de colapsar hacia el foso activo. Es decir que por unidad de tiempo se obtiene:

$$\frac{dQ_s}{dt} = K * \left\{ \frac{dV_c}{dt} \right\} \quad (6.9)$$

El volumen que puede colapsar V_c , es igual a la diferencia del volumen total hasta el nivel actual de erosión V_e , menos el que ha sido erosionado hasta el momento V_h , que es:

$$V_c = V_e - V_h \quad (6.10)$$

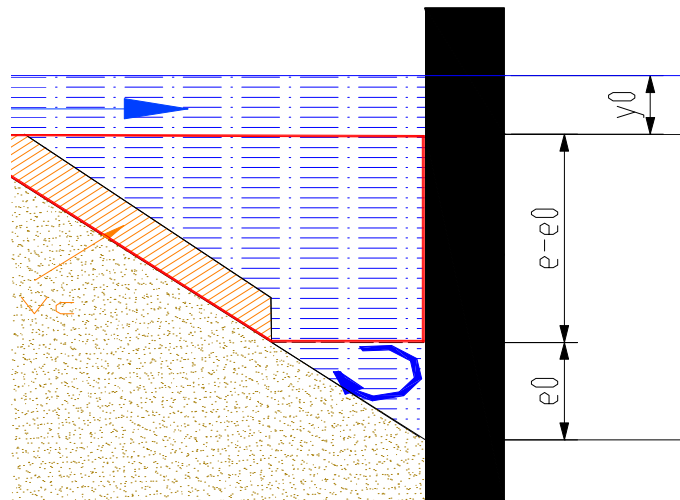


Figura 6.1. Vista lateral del foso de erosión de forma lo más simplificada posible.

Si se supone que el volumen ya erosionado V_h es proporcional al caudal sólido en la sección de conexión entre ambos fosos y aplicando la ecuación (6.9), se obtiene que:

$$\frac{dQ_s}{dt} = K * \frac{dV_e}{dt} - K * Q_s^n \quad (6.11)$$

En la ecuación (6.11) se ha añadido un exponente (n) al caudal sólido. Éste se hallará en la calibración del modelo morfodinámico, y su razón de ser es tener en cuenta la diferencia entre el modelo hidrológico, que está desarrollado para un fluido como es el agua, y su adaptación al cálculo del caudal sólido, que trata con el sedimento.

Por otro lado el volumen de material que potencialmente puede colapsar se asemeja a un cono invertido. Por lo tanto tenemos:

$$V_e = G(e - e_0)^3 \quad \text{con} \quad G = \frac{3}{2} * \theta * \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2 \phi} + 1} \quad (6.12)$$

Donde e_0 es la profundidad de erosión del foso activo, donde se aloja el vórtice, antes de que empiece el fenómeno pasivo. Se ha estimado que e_0 es del orden del ancho B de la pila. Por lo tanto en el momento que la erosión llega a una profundidad igual al ancho de la pila, el fenómeno pasivo se pone en marcha. Mientras no se alcanza este valor, el caudal sólido Q_s en la interfase de los fosos es nulo.

Por otro lado θ es el ángulo máximo de recepción del material que se puede ver en la figura 6.2. Y ϕ es el ángulo de reposo del sedimento.

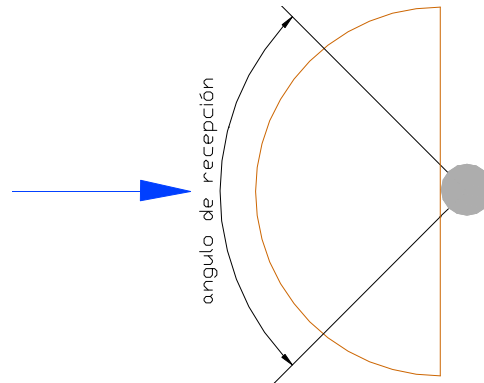


Figura 6.2. Vista superior de la forma del foso.

Con base a la experiencia y en los ensayos realizados se puede asegurar que el ángulo de recepción es aproximadamente unos 120 grados.

La ecuación resultante de combinar (6.11) y (6.12) resulta ser:

$$\boxed{3 * K * G * (e - e_0)^2 * \frac{de}{dt} - \frac{dQ_s}{dt} = K * Q_s^n} \quad (6.13)$$

De la ecuación (6.13) se deduce que la variación de volumen potencial que puede colapsar en cada instante es directamente proporcional a la velocidad de erosión y al ángulo de recepción, así como también es proporcional al cuadrado de la erosión. Es precisamente este último factor el que predomina sobre los demás y por lo tanto provoca que V_e aumente con el paso del tiempo.

6.2.6. Sistemas de ecuaciones a resolver:

Al final se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias en los que las variables a resolver son la erosión e y el caudal de transmisión entre foso pasivo y activo Q_s .

$$\boxed{A * \left[\frac{de}{dt} \right] = \left[(1 - \lambda) * \frac{\alpha * (q^3 * A)}{g * R * (y_0 + e)^4} \right] - Q_s} \quad (6.8)$$

$$\boxed{3 * K * G * (e - e_0)^2 * \frac{de}{dt} - \frac{dQ_s}{dt} = K * Q_s^n} \quad (6.13)$$

Es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden ser resueltas por medio de métodos numéricos, como el de Runge Kutta. Las condiciones iniciales son importantes por lo que hay que analizarlas por separado.

6.3. ANÁLISIS DEL MODELO

6.3.1. Análisis de las ecuaciones:

Las ecuaciones del modelo morfodinámico no conducen por si solas al equilibrio, ya que su crecimiento es ilimitado. Lo que hay que hacer es encontrar un límite físico que detenga el proceso.

La condición para describir el momento de la detención de la erosión, está basada en las tensiones de corte en el fondo. Se sabe que el vórtice es el que mueve las partículas y las levanta o arranca, pero es el flujo el encargado de arrastrarlas y transportarlas, desde delante de la pila hacia aguas abajo, por los laterales de ésta.

Luego, cuando las tensiones de corte al lado de la pila sean menores que la tensión crítica, la erosión parará ya que el flujo no posee suficiente capacidad para mover el sedimento. Por lo tanto la condición que detendría el proceso sería:

$$\tau = \frac{\gamma * Rh * n^2 * Q_E^2}{A^2 * Rh^{4/3}} < \tau_c \quad (6.14)$$

donde Q_E es la parte proporcional del caudal que circula por la sección transversal en cuestión.

Para aplicar este concepto en el modelo y con el objetivo de encontrar un límite para parar la erosión de las ecuaciones, se impone una condición en términos de velocidades.

El equilibrio se alcanza en el momento en el que la velocidad media al lado de la pila es igual a la velocidad que tendría el flujo si no existiese el obstáculo.

Se definen ambas velocidades. En primer lugar está la velocidad media del flujo sin obstáculo que se puede calcular fácilmente como:

$$v = \frac{q}{y_0} \quad (6.15)$$

Y en segundo lugar está la velocidad cuando hay un obstáculo y se está erosionando el lecho:

$$vel = \frac{q*(D+2*l)}{Area_1 + Area_2} \quad (6.16)$$

donde D es el diámetro de la pila

l es la magnitud de la figura 6.3

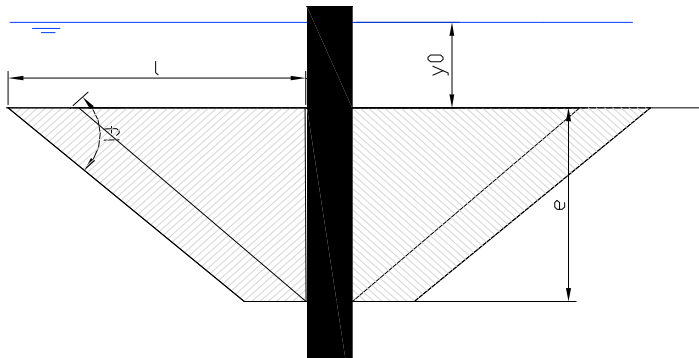


Figura 6.3. Área transversal aproximada del foso de erosión

Se calcula como: $l = \frac{e}{\text{tg}\phi}$, donde el ϕ es el ángulo de reposo del material.

$Area_1$ es el área transversal por donde circula flujo cuando no hay erosión, es decir, $Area_1 = 2*l*y_0$, mientras que $Area_2$ es el área transversal erosionada por donde circula flujo, que en la figura 6.3 es el área rayada, y se calcula como

$$Area_2 = \frac{2*l*e}{2} = l*e.$$

Si esto se cumpliera, ya se tendría la solución del problema, pero se ha comprobado que esto es FALSO, porque esta condición se cumple al poco tiempo de comenzado el ensayo y por lo tanto no es la condición correcta para encontrar la estabilidad del ensayo.

En un estudio reciente de la Universidad de Minneapolis, llevado a cabo por el profesor Allen Bateman, se demostró que hay un fenómeno que no se ha tenido en cuenta a la hora de imponer la condición, y es la distribución no hidrostática de presiones alrededor de la pila. Es decir, en la zona próxima a la pila existen unas subpresiones importantes que permiten al flujo mover las partículas con tensiones menores que la crítica, y por lo tanto la erosión continúa avanzando una vez sobrepasado el límite de la condición (6.14).

A continuación se hará un cálculo aproximado de estas subpresiones, al lado de la pila, en la sección transversal. Según Bateman se tiene que:

$$\tau^* \cdot \tan^2 \phi \left[\frac{W_s}{A} \cos(\theta) - F_{sp} \right]^2 = \left[\frac{W_s}{A} \right]^2 \sin^2 \theta + \tau_b^2 \quad (6.17)$$

ecuación que proviene de un equilibrio de fuerzas y donde:

τ^* es el parámetro de Shields que actúa en la ecuación como el rozamiento.

$\frac{W_s}{A}$ es el peso por unidad de área.

θ es el ángulo del thalweg (línea longitudinal formada por los puntos más profundos de cada sección transversal).

τ_b es la fuerza del agua sobre las partículas.

F_{sp} es la fuerza de presión.

Si se considera que la erosión ha llegado al equilibrio se puede hacer la hipótesis que no existen fuerzas de supresión. La ecuación resultante es:

$$\tau^* \cdot \tan(\phi) \cdot \frac{W_s}{A} = \tau_b \quad (6.18)$$

Pero en ese momento que existe equilibrio τ_b es igual a la tensión de corte en el fondo,

τ_0 . De esta manera se podrá conocer $\frac{W_s}{A}$.

$$\tau^* * tg(\phi) * \frac{W_s}{A} = \tau_b = \tau_0 = \bar{\tau} * (\gamma_s - \gamma) * d \quad (6.19)$$

En la ecuación (6.19) se ha supuesto que $\bar{\tau}$ es constante, es decir que es el que se obtiene del ábaco de Shields que es para $\gamma_s = 2650 kg / m^3$

Si ahora se aplica la misma ecuación (6.17) cuando el ensayo no está en equilibrio se tiene que:

$$\tau^* * tg(\phi) * \left[\frac{W_s}{A} - F_{sp} \right] = \tau_b ; \quad \longrightarrow \quad F_{sp} = \frac{W_s}{A} - \frac{\tau_b}{\tau^* * tg(\phi)}$$

$$\tau_b = \gamma * Rh * Sf = \gamma * Rh * \left(\frac{Q * n}{A * Rh^{2/3}} \right)^2 = \gamma * \left(\frac{Q^2 * n^2}{A^2 * Rh^{1/3}} \right) N / m^2 \quad (6.20)$$

se puede hallar F_{sp} en función de la erosión.

Pila	Erosión máxima (m)	τ_b (N/m²)	F_{sp}(N/m²)
0.04	0.075	0.805	5.347
0.05	0.103	0.5775	15.078
0.06	0.124	0.512	17.880
0.09	0.189	0.38	23.526

Tabla 6.1. Valor de la subpresión para cada pila en el momento de equilibrio.

Como se puede ver en la tabla 6.1, el valor de la subpresión calculado, que sería la existente justo en la esquina de aguas arriba de la pila, aumenta con el tamaño de la pila. La razón principal es que a más ancho de la pila, más grande es el área del foso activo

(A), que es la zona que está subpresionada, y por lo tanto el punto de estudio tiene una subpresión de mayor magnitud.

Para poder tener en cuenta el fenómeno de subpresiones en el modelo se ha introducido un coeficiente de minoración de la velocidad media del flujo v . Por lo tanto finalmente la condición será del estilo:

“Existe erosión hasta que $v * \psi \geq vel$ ”,

donde ψ es un factor menor que 1 .

Este ψ es un factor al que se llamará factor de detención se ha visto que en los ensayos realizados siguen una correlación del siguiente estilo:

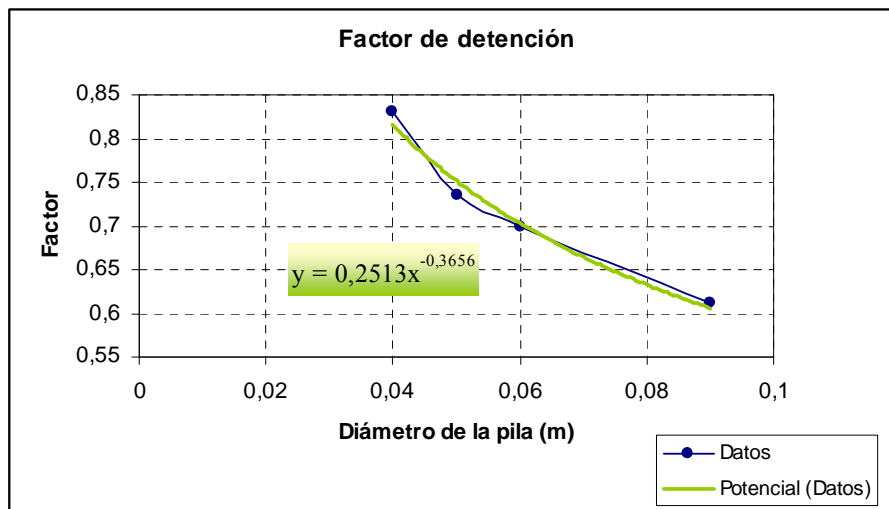


Figura 6.4. Representación de los factores de detención obtenidos por cada pila y aproximación potencial a los datos