

Capítol 3: Models numèrics

3.1 Introducció

En aquest capítol es pretén exposar la base numèrica dels models utilitzats en aquest treball per a analitzar el Qutb. Aquests models estan basats en els elements finits.

3.2. Mètode dels elements finits

3.2.1 Introducció

El model constitutiu utilitzat per a l'estudi del Qutb està concebut per a l'anàlisi d'estructures, en els quals es precisa d'una discretització volumètrica apropiada. En particular, en el cas d'anàlisi sísmic d'aquestes estructures, en les quals es requereix un esquema refinat del pas del temps.

El comportament davant les accions que produeix un sisme necessita de la implementació d'un model constitutiu no lineal per al comportament del material, així com una implementació numèrica que permeti l'estudi en el temps mitjançant un esforç computacional raonable.

Per l'elaboració dels següents apartats s'ha consultat bibliografia concreta (TNO Diana BV, 2005).

3.2.2 Anàlisi lineal. Conceptes generals

Per problemes lineals elàstics el sistema d'equacions a resoldre és (3.1). On K és la matriu de rigidesa del sistema, u és el vector de desplaçaments i rotacions, i f és el vector de forces nodals corresponents amb els graus de llibertat de u .

$$Ku = f \quad (3.1)$$

Formulació global

Quan es considera un cos general tridimensional, denotat amb V , el problema es basa amb uns desplaçaments desconeguts u i unes forces conegudes per unitat de volum, g . Les forces externes en forma de forces concentrades i traccions donades t són aplicades en la part del contorn, S_t . Aquestes s'anomenen condicions de contorn naturals. Els desplaçaments u són especificats com valors coneguts \bar{u} en la part S_u del contorn i s'anomenen condicions de contorn essencials. En el mètode

d'elements finits, el cos V serà aproximat per un ensamblatge d'elements finits, que estan connectats per punts nodals en el contorn de l'element.

Desplaçaments

Per resoldre els desplaçaments u , s'ha de satisfer una continuïtat i diferenciabilitat fins a un cert grau. En el contorn S_u , els desplaçaments han de satisfer la condició de contorn essencial (3.2).

$$u = \bar{u} \text{ en } S_u \quad (3.2)$$

Els desplaçaments d'un punt particular (x,y,z) són reflectits per funcions contínues expressades en termes de variables discretitzades en els punts nodals i són aproximades per l'expressió (3.3). On N és la matriu d'interpolació de desplaçaments i u és un vector de variables de punts nodals, com les components dels desplaçaments i rotacions. La matriu d'interpolació N comprèn les funcions de la interpolació o de la forma descrita en termes de variables independents, tals com coordenades, i localment es defineixen pels elements individuals.

$$u_c(x, y, z) \approx \tilde{u}(x, y, z) = N(x, y, z)u \quad (3.3)$$

Tensions

Les tensions en qualsevol punt de l'estructura poden ser determinats per l'expressió (3.4). On L és un operador diferencial definint un camp de tensions compatible. Ara el camp de tensions pot ser escrit com la derivada del vector u com (3.5). On la matriu B defineix la relació tensió-deformació per un punt particular i s'anomena la matriu diferencial. Assumint comportament lineal elàstic, la relació entre les tensions i esforços per un punt particular pot ser escrit de la forma (3.6). On la matriu D és la relació tensions-esforços i és una funció de les propietats materials com el mòdul de Young i el coeficient de Poisson. El vector ε_0 denota els canvis inicials dels esforços, i el vector σ_0 conté les tensions inicials residuals.

$$\varepsilon = Lu \quad (3.4)$$

$$\varepsilon = \tilde{L}u = LNu = Bu \quad (3.5)$$

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (3.6)$$

Equilibri

En un problema estructural les equacions d'equilibri poden ser escrites com (3.7). On g és el vector de forces conegudes per unitat de volum, amb V com el volum total o el domini del model. El vector t representa les traccions conegudes en el contorn S_t com la superfície, costats i punt de càrrega.

$$\begin{aligned} L^T \sigma + g &= 0 \text{ en } V \\ L_n^T \sigma &= t \text{ en } S_t \end{aligned} \quad (3.7)$$

Principi dels treballs virtuals

Una forma simple d'introduir les relacions d'equilibri (3.8) és utilitzant el principi dels treballs virtuals.

$$\begin{aligned} L^T \sigma + g &= 0 \text{ en } V \\ L_n^T \sigma &= t \text{ en } S_t \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aquest principi diu que una estructura elàstica està en equilibri sota unes càrregues donades si, per qualsevol desplaçament virtual d'un estat compatible de deformació, el treball virtual és igual a l'energia de tensió virtual. L'equació de treball virtual pot ser escrita com (3.9). On $\delta \varepsilon$ són les tensions virtuals que corresponen amb els desplaçaments virtuals δu . Combinant les equacions anteriors tenim (3.10). On r és un vector de les forces internes corresponents al vector nodal de graus de llibertat u .

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T g dV + \int_{S_t} \delta u^T t dS_t \quad (3.9)$$

$$\delta u^T \int_V B^T \sigma dV = \delta u^T \left(\int_V N^T g dV + \int_{S_t} N^T t dS_t \right) = \delta u^T r \quad (3.10)$$

El principi dels treballs virtuals diu que s'ha de satisfer, per qualsevol u , l'expressió (3.11).

$$\int_V B^T \sigma dV = r \quad (3.11)$$

Aquestes equacions no asseguren que l'equilibri existeixi en qualsevol moment, sinó que garanteixen només que les tensions satisfan l'equilibri. Combinant les equacions tenim (3.12).

$$\int_V B^T \sigma dV = \left(\int_V B^T D B dV \right) u - \int_V B^T D \varepsilon_0 dV + \int_V B^T \sigma_0 dV = r \quad (3.12)$$

Combinant expressions obtenim (3.13).

$$Ku = f \quad (3.13)$$

On $K = \int_V B^T DB dV$ és la matriu de rigidesa, i f és el vector definit per (3.14)

$$f = f_g + f_t + f_{\varepsilon_0} - f_{\sigma_0} + f_c \quad (3.14)$$

amb

$$f_g = \int_V N^T g dV, \text{ la contribució de les forces de volum}$$

$$f_t = \int_{S_t} N^T t dS_t, \text{ la contribució de les traccions de superfície}$$

$$f_{\varepsilon_0} = \int_V B^T D \varepsilon_0 dV, \text{ l'efecte dels esforços inicials}$$

$$f_{\sigma_0} = \int_V B^T \sigma_0 dV, \text{ l'efecte de les tensions inicials}$$

f_c , la contribució de les forces nodals concentrades

Això proveeix un conjunt d'equacions que poden ser resoltes de forma directa o indirecta per (3.15).

$$u = K^{-1} f \quad (3.15)$$

Discretització

En els elements finits el domini de la solució V es divideix en un nombre finit d'elements V_e , que estan connectats pels punts nodals en els límits de l'interelement. D'aquesta manera el domini de la solució està discretitzada i representada. Els desplaçaments desconeguts en cadascun dels elements està aproximat per les funcions contínues expressades en termes de variables nodals. Les funcions sobre cada element s'anomenen les funcions de la interpolació o de la forma.

3.2.3 Anàlisi no lineal. Conceptes generals

En l'anàlisi no lineal amb elements finits, la relació entre una força vector i el desplaçament vector no és lineal. Com en el cas de l'anàlisi lineal, volem calcular un desplaçament vector que equilibra les forces internes i les externes. En el cas lineal, la solució vector pot ser calculat directament però en el cas no lineal no es pot. Per determinar l'estat d'equilibri no només fem el problema discretitzant-lo en l'espai, amb elements finits, sinó també en el temps, amb increments. Per assolir l'equilibri al final de l'increment, necessitem utilitzar un algoritme iteratiu. La combinació dels dos s'anomena una solució amb procediment incremental-iteratiu.

Considerarem un vector d'increment de desplaçaments que produeixi un equilibri entre les forces internes i les externes, i una matriu de rigidesa que relacioni les forces internes amb els increments de desplaçament.

En l'anàlisi no lineal el vector de forces internes usualment depèn no linealment amb els desplaçaments. Això també depèn de la història de desplaçaments. El vector de forces externes també pot dependre dels desplaçaments.

Procediments iteratius

Un mètode purament incremental usualment provoca solucions poc precises en l'anàlisi no lineal, només si no s'utilitzen passos molt petits. En un procés iteratiu els errors poden ser reduïts successivament. Això és, de fet, un procediment implícit. El tamany del pas permisible és més alt que en el cas d'un procés sense iteracions, com podria ser el cas d'un procés explícit. El procediment general és el mateix per tots els procediments iteratius. En tots els procediments, el desplaçament total es adaptat iterativament per uns increments iteratius fins que s'assoleix l'equilibri (figura 3.1).

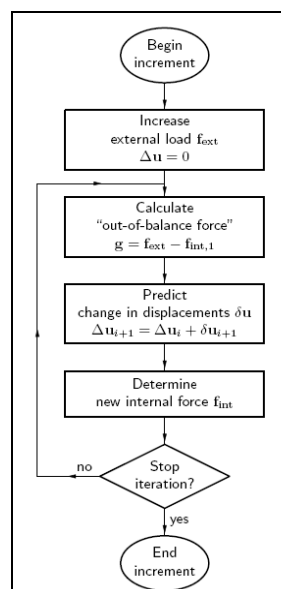


Figura 3.1 (TNO Diana BV, 2005)

Els increments iteratius són calculats mitjançant la matriu de rigidesa, que representa un tipus de linealitat entre la relació entre el vector força i el desplaçament. La matriu de rigidesa pot canviar en cada iteració.

El mètode Quasi-Newton, també anomenat mètode de la secant, essencialment utilitza la informació d'una solució prèvia i dels vectors de força durant l'increment per assolir una millor aproximació (figura 3.2). A diferència del mètode regular Newton-Raphson, el mètode de la secant no utilitza una matriu de rigidesa completament nova en cada iteració. Si el desplaçament incremental s'anomena δu_i i el canvi del vector força $\delta g_i = g_{i+1} - g_i$, la relació del mètode de la secant és $K_{i+1} \delta u_i = \delta g_i$.

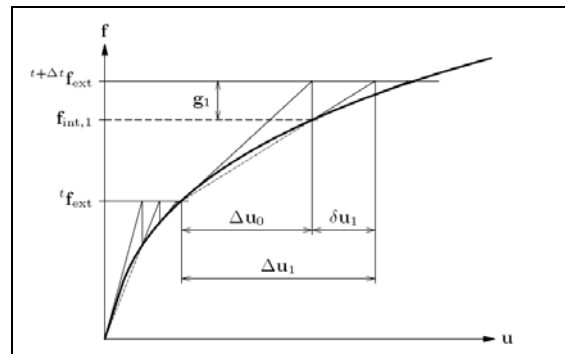


Figura 3.2 Mètode de la secant (TNO Diana BV, 2005)

Amb una matriu K_i que compleix l'expressió anterior, el pròxim increment iteratiu es calcula amb $\delta u_i = K_i^{-1} g_i$. Per un sistema amb més d'un grau de llibertat, la matriu de rigidesa no és única. Els mètodes implementats en el Diana són coneguts com Broyden, el Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) i el mètode Crisfield.

En les següents expressions (3.16 i 3.17) el vector c pot ser elegit lliurement.

$$K_{i+1} = K_i + \frac{(\delta g_i - K_i \delta u_i) c^T}{c^T \delta u_i} \quad (3.16)$$

$$K_{i+1} = K_i + \frac{(\delta g_i - K_i \delta u_i) c^T + c (\delta g_i - K_i \delta u_i)^T}{c^T \delta u_i} - \frac{(\delta g_i - K_i \delta u_i)^T \delta u_i c c^T}{(c^T \delta u_i)^2} \quad (3.17)$$

El mètode de la secant pot ser utilitzat eficientment perquè la inversa de la nova matriu de rigidesa pot ser derivada directament amb l'anterior matriu de rigidesa i els vectors actualitzats utilitzant la fórmula Sherman-Morrison.

Per evitar l'emmagatzematge i l'augment de temps de càlcul dels mètodes Broyden i BFGS, Crisfield, que s'utilitza en la present tesina, suggereix només utilitzar el més recent vector de la correcció.

Tots els tres mètodes secant poden ser utilitzats independentment de la matriu de rigidesa utilitzada per la primera predicció. Aquests mètodes usualment tenen un rati de convergència situat entre el dels mètodes Newton-Raphson i el modificat Newton-Raphson. Per a sistemes grans el temps utilitzat per iteració serà més pròxim al modificat Newton-Raphson que al mètode regular Newton-Raphson. Per el Broyden i el BFGS la memòria i el consum de temps s'incrementarà amb el nombre d'iteracions.

3.3 Programa utilitzat

Per a realitzar l'anàlisi estructural del Qutb s'ha utilitzat el programa TNO Diana que resol problemes pel mètode dels Elements Finitos. És un programa modular que intenta recollir un ampli rang d'aplicacions i és una eina pràctica a l'hora de resoldre problemes d'investigació.

3.4 Elements utilitzats

Per a efectuar el càlcul pel mètode dels Elements finits, s'utilitzen elements tetraèdrics de quatre nodes. La utilització d'aquests elements és pràctica a l'hora de generar malles denses en geometries complexes. El mètode d'integració en cada element s'efectua mitjançant la regla de Gauss. El valor dels diferents resultats en cada node s'obté a partir de la interpolació amb els valors obtinguts en els punts de Gauss de cada element. A continuació es descriu l'element.

L'element TE12L (figura 3.3) és un element sòlid piramidal de quatre nodes i tres costats isoparamètrics. Està basat en la interpolació lineal i la integració numèrica. Els polinomis per les translacions u_{xyz} poden ser expressats com (3.18).

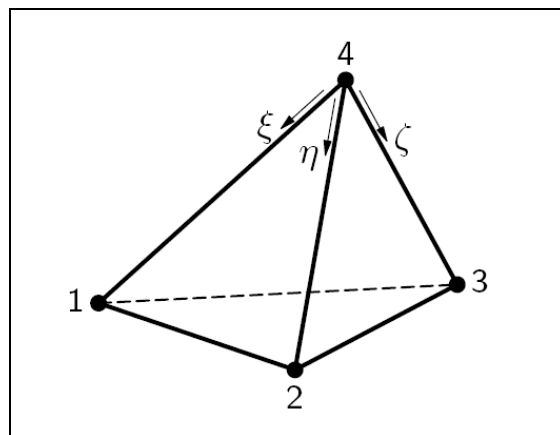


Figura 3.3 Element TE12L (TNO Diana BV, 2005)

$$u_i(\xi, \eta, \zeta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \quad (3.18)$$

Aquest polinomi produeix una tensió constant i la distribueix sobre el volum de l'element. Per defecte Diana aplica un esquema d'un punt d'integració sobre el volum, els esquemes de quatre i cinc punts d'integració són opcions possibles. Esquemes amb més de cinc punts d'integració no estan disponibles.

Els valors de les tensions obtingudes en cada node de cada element estan subjectes a un tipus d'aïllament o "smoothing" que permet representar de forma contínua els diagrames de tensions. Si existeixen materials connectats amb marcades diferències resistents, aquest tipus d'aïllament, que no és més que un tipus de ponderació entre nodes compartits per diversos elements, pot donar lloc a resultats poc realistes.