

4. Generación, reflexión y resonancia de oleaje

4.1. Teorías de comportamiento del oleaje

Para poder analizar el oleaje es preciso utilizar un modelo que lo represente. Este modelo debe predecir con fiabilidad el comportamiento de las olas generadas en el canal, y debe además ser sencillo. Para ello son necesarias ciertas simplificaciones de la realidad. De hecho, el modelo utilizado tanto en la generación del oleaje como en su medición deriva de la teoría lineal del oleaje o teoría de pequeña amplitud. Pero la situación que se reproduce en el canal es de aguas intermedias, con lo que la teoría lineal podría alejarse de la realidad, y ser necesarias otras teorías de transmisión del oleaje.

Para conocer las limitaciones de los modelos (sobre todo el modelo lineal), se expone a continuación el desarrollo de las teorías más importantes de comportamiento del oleaje, haciendo especial énfasis en las simplificaciones consideradas.

4.1.1. Ecuaciones que gobiernan el oleaje y condiciones de contorno.

Suposiciones

La propagación de oleaje en un fluido es un proceso no lineal. Su análisis físico y matemático puede ser simplificado mediante las siguientes consideraciones:

- La propagación del oleaje es un problema tridimensional pero puede ser simplificado en uno de dos dimensiones donde u y w expresan las componentes verticales y horizontales de la velocidad de las partículas de agua.
- El agua puede ser considerada como un fluido incompresible y sin viscosidad.
- El comportamiento del fluido es prácticamente irrotacional, con lo que podemos definir el potencial de la velocidad como

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \nabla \phi \quad \text{con } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ y } w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.1)$$

- El fondo es fijo e impermeable.
- La única fuerza exterior que tiene efecto sobre el fluido es la gravedad terrestre.
- La ola es periódica y regular.
- El efecto de coriolis es despreciable.

- La tensión superficial es despreciable.
- Los efectos de pérdida de energía debido a rotura del oleaje son despreciables.

Ecuaciones

- Ecuación de Laplace. Considera además de las suposiciones anteriores que no hay variación ni de masa ni de volumen en el tiempo.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2)$$

- 1ª condición de contorno en la superficie libre. Considera que las partículas de agua en la superficie libre $\eta(x,t)$ permanecen en esta.

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.3)$$

donde $\eta(x,t)$ es el desplazamiento de la superpie libre con referencia al nivel merido del agua ($z=0$)

- 2ª condición de contorno en la superficie libre (ecuación de Bernuilli). La presión en la superficie libre es igual a la atmosférica.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{p_a}{\rho} + g\eta = 0 \quad (4.4)$$

- Condición de contorno por fondo. La componente vertical de la velocidad ha de ser nula en las partículas del fondo. La función que delimita el fondo es $z = -h(x)$

$$w = -u \frac{dh}{dx} = 0 \quad (4.5)$$

- Condición de contorno lateral. Debido a la suposición de oleaje regular y periódico esta condición de contorno debe expresar la periodicidad en una longitud de onda L y periodo T.

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \phi(x+L,t) \\ \phi(x,t) &= \phi(x,t+T) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Todas estas ecuaciones forman un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales. Varias teorías han sido desarrolladas motivadas por la intención de simplificar la estructura física y matemática de este fenómeno, para obtener aproximaciones de la solución.

4.1.2. Teoría lineal del oleaje

Simplificaciones

Un método para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto en el apartado anterior es linealizar las ecuaciones asumiendo las siguientes simplificaciones.

- El potencial de la velocidad puede ser expresado como el producto de términos independientes

$$\phi(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot R(t) \quad (4.7)$$

- Podemos simplificar la primera ecuación de contorno en superficie libre (4.3) considerando que la amplitud es pequeña en comparación con la longitud de la ola, y tomando por lo tanto únicamente el primer término de su descomposición en series de Taylor.

Si tenemos en cuenta además que los valores de h , Φ , u y w son pequeños, podemos considerar que sus productos son despreciables y podemos linealizar la ecuación de la siguiente manera:

$$w = \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (4.8)$$

- También podemos simplificar y linealizar la segunda condición de contorno en la superficie libre (4.4). Considerando de nuevo que la amplitud es pequeña en comparación con la longitud de la ola, podemos simplificar la ecuación de Bernoulli tomando otra vez únicamente el primer término de su descomposición en series de Taylor.

Si tenemos en cuenta de nuevo que los valores de h , Φ , u y w son pequeños, podemos considerar que sus productos son despreciables y podemos expresar la ecuación de la siguiente manera:

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta \right) = 0 \quad \text{en } z=0 \quad (4.9)$$

- El fondo se considera horizontal, con lo que la condición de contorno de fondo (4.5) se describe ahora como:

$$w = -u = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (4.10)$$

Resolución del sistema de ecuaciones

El potencial de velocidad $\phi(x, z, t)$ debe ser periódico en x , y debe ser solución de la ecuación de Laplace. Una posibilidad que cumple este criterio es escribir $R(t)$ del modo siguiente:

$$R(t) = \sin(\sigma t), \quad \text{donde } \sigma = 2\pi/T \text{ es la frecuencia angular} \quad (4.11)$$

De este modo, podemos expresar la ecuación $\phi(x, z, t)$ como $\phi(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot \sin(\sigma t)$, con lo que la ecuación de Laplace (4.2) se describiría como:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (4.12)$$

La única posible solución para esta ecuación en derivadas parciales mediante el método de separación de variables que cumple la condición de periodicidad es:

$$\phi(x, z, t) = (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \cdot (C e^{kz} + D e^{-kz}) \cdot \sin(\sigma t), \quad \text{donde } k = 2\pi/L \quad (4.13)$$

Para determinar las constantes solo hemos de imponer las condiciones de contorno por fondo (4.10). Con todo esto obtenemos el valor del potencial de la velocidad:

$$\phi = \frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \sin(kx - \sigma t) \quad (4.14)$$

Mediante la segunda condición de contorno en superficie libre (4.9) podemos obtener el desplazamiento del nivel del agua:

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) \quad (4.15)$$

Mediante la primera condición de contorno en superficie libre (4.8) podemos obtener para cualquier potencial de velocidad Φ y su superficie libre h una

expresión que relaciona la frecuencia angular con el número de onda. Ésta nos permite encontrar la longitud de onda en función del periodo y el calado.

$$\sigma^2 = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \tag{4.16}$$

4.1.3. Aplicaciones de la teoría lineal del oleaje

La teoría lineal tiene un determinado rango de aplicación que depende la amplitud, del periodo y del calado. Fuera de este rango las simplificaciones producen bastante error y son necesarias teorías no lineales.

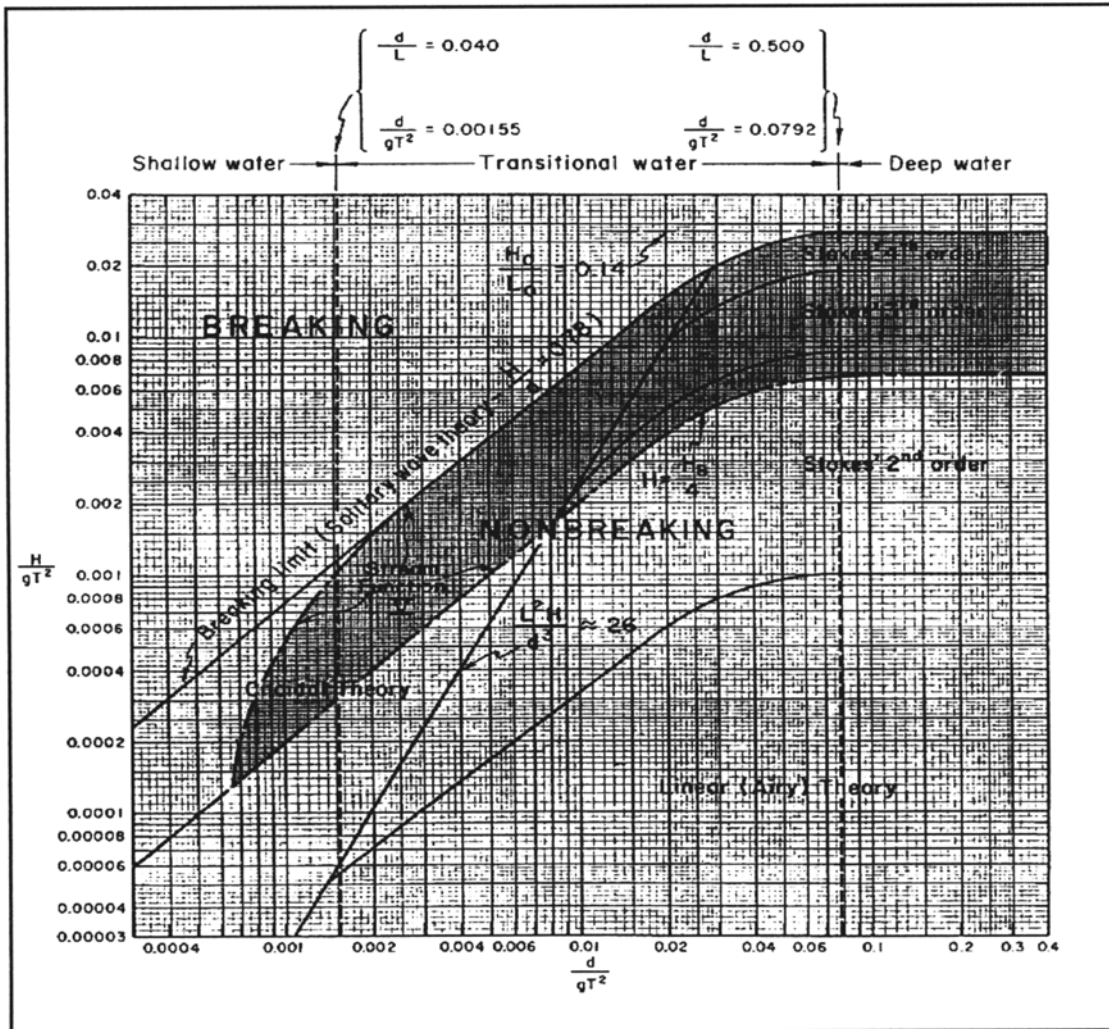


Figura 4.1. Rango de aplicación de la teoría lineal del oleaje (shore protection manual, 1984)

4.1.4. Introducción a las teorías no lineales

Esta sección da una pequeña introducción a las aproximaciones no lineales que describen la propagación del oleaje en aguas profundas, intermedias y someras. Además se introduce algunas soluciones numéricas, que se pueden completar a partir de la bibliografía consultada. Todas estas aproximaciones pertenecen a la categoría de oleaje de amplitud finita.

Cada solución no lineal utiliza una aproximación de las ecuaciones planteadas en el apartado 4.1.2. Las más conocidas son la introducida por Stokes en 1847, y la *cnoidal wave theory* estudiada por Korteweg y Vries en 1895.

La validez de una teoría u otra dependerá del periodo y amplitud del oleaje por un lado, y del calado por el otro. A partir de la figura 4.1 podemos caracterizar el oleaje producido en el canal y conocer qué teoría describe mejor su comportamiento.

Teoría de oleaje de Stokes

La teoría del oleaje de Stokes (1847) tiene su rango de utilización en aguas profundas o relativamente profundas, y deriva de la solución de segundo orden de las ecuaciones de contorno de superficie (4.3) y (4.4). La solución de primer orden corresponde con la teoría lineal o de pequeña amplitud. La formulación utilizada en esta tesina es sin embargo la de quinto orden planteada por Isobe, Nishimura, y Horikawa (1978):

$$\eta = \frac{1}{k} \left[\sum_{n=1}^5 A_n \cos n(kx - \sigma t) \right] \quad (4.17)$$

Donde

- A_i son parámetros que dependen de H , k , h y g :

$$A_1 = \varepsilon + \varepsilon^3 \cdot \frac{3(-9ct^6 + 3ct^4 - 3ct^2 + 1)}{64} + \varepsilon^5 \frac{188325ct^{16} + 203310ct^{14} - 764406ct^{12} - 340410ct^{10} + 53932ct^8 - 6070ct^6 + 14622ct^4 + 2370ct^2 - 225}{12288(5ct^2 + 1)(5ct^2 + 3)}$$

$$A_2 = \varepsilon^2 \cdot \frac{ct(3ct^2 - 1)}{4} + \varepsilon^4 \frac{ct(-324ct^8 + 792ct^4 - 352ct^2 + 12)}{384}$$

$$A_3 = \varepsilon^3 \cdot \frac{3(9ct^6 - 3ct^4 + 3ct^2 - 1)}{64} + \varepsilon^5 \frac{-14580ct^{14} - 7776ct^{12} + 46980ct^{10} + 5328ct^8 + 900ct^6 - 1080ct^4 - 180ct^2}{4096(5ct^2 + 1)}$$

$$A_4 = \varepsilon^4 \frac{ct(405ct^{10} + 81ct^8 + 522ct^6 - 262ct^4 + ct^2 + 21)}{384(5ct^2 + 1)}$$

$$A_3 = \varepsilon^5 \frac{5(60750ct^{16} + 8910ct^{14} + 25876ct^{12} - 498ct^{10} - 3896ct^8 + 2618ct^6 - 570ct^4 - 150ct^2 + 45)}{12288(5ct^2 + 1)(5ct^2 + 3)}$$

y donde,

$$\varepsilon = kH/2$$

$$ct = \coth kh$$

- k se resuelve a partir de una ecuación implícita:

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{9ct^4 - 10ct^2 + 9}{16} + \frac{ct}{2kh} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{-405ct^{10} - 117ct^8 + 2454ct^6 - 21944ct^4 + 351ct^2 + 39}{1024} - \frac{ct(-9ct^6 - 3ct^4 - 7ct^2 + 3)}{64} \right) \right]^2$$

Teoría del oleaje cnoidal

Korteweg y Vries (1895) resolvieron el sistema de ecuaciones no lineal teniendo en cuenta los efectos de dispersión (profundidad finita) y de no linealidad (amplitud finita), por lo que son aplicables en propagación en aguas intermedias. Korteweg y Vries utilizaron aproximaciones de primer orden. Una solución de tercer orden fue calculada por Isobe, Nishimura y Horikawa (1978).

4.2. Generación del oleaje

Asumiendo la teoría de oleaje de pequeña amplitud, en un fluido incompresible e irrotacional, existe un potencial de velocidad que satisface la ecuación de Laplace en el dominio de estudio, con sus correspondientes condiciones de contorno. Aplicando estas condiciones de contorno (una de ellas debido al movimiento de la pala), se puede obtener una solución de primer orden que nos proporciona una ecuación que relaciona el movimiento de la pala con el oleaje que ésta genera:

4.2.1. Función de transferencia

Ecuaciones a plantear

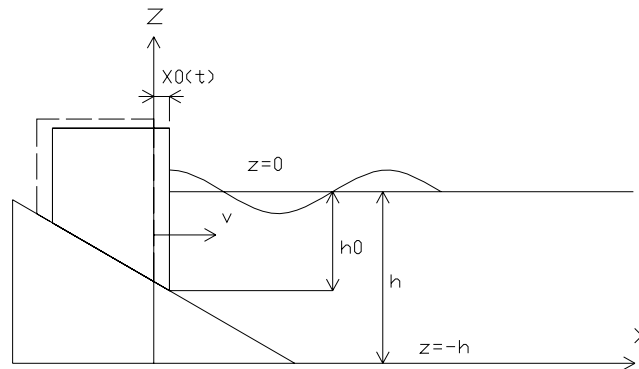


Figura 4.2. Esquema general del dominio de estudio

En coordenadas cartesianas (x, z) se expresa la ecuación de Laplace en función del potencial de velocidad Φ de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.18)$$

siendo $u(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ y $v(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ las velocidades horizontal y vertical.

Las condiciones de contorno son:

- Condición cinemática de fondo (el fondo es impermeable)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (4.19)$$

- Condición cinemática de superficie libre (todas las partículas de la superficie libre permanecen en la superficie libre)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = h \quad (4.20)$$

- Condición dinámica de superficie libre (la superficie libre está sometida a presión constante)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad \text{en } z = h \quad (4.21)$$

- Condición de contorno producida por la pala, que se supone plana, sólida e impermeable (la velocidad del fluido en contacto con la pala es igual a la velocidad de la pala)

En nuestro caso, por tratarse de una pala de cuña o tipo *wedge*, la velocidad que se le proporciona al fluido es la misma que la de la pala:

$$u = \frac{\partial X(z,t)}{\partial t} \quad (4.22)$$

Siendo:

$$X(z,t) = f(z) \cdot X_0(t), \text{ donde } f(z) = \begin{cases} 1 & 0 > z > -(h-h_0) \\ 0 & z < -(h-h_0) \end{cases}$$

$$X_0(t) = \frac{S_0}{2} \sin \omega t, \text{ donde } S_0 \text{ es la carrera máxima horizontal}$$

Solución de primer orden

La resolución directa del problema (planteado por las ecuaciones 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22) no es posible debido a que las condiciones de superficie libre 4.20 y 4.21 (no lineales al contener productos de h y ϕ), deben ser evaluadas en la superficie libre h que es parte de la solución.

Para facilitar la resolución del problema, las ecuaciones pueden expresarse desarrollando la velocidad potencial ϕ , la superficie libre h y la posición horizontal X_0 de la pala según series de potencias en función de un parámetro ε (parámetro de perturbación) proporcional al peralte de la ola (H/L).

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + O(\varepsilon^4) \\ \eta &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + O(\varepsilon^4) \\ X_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n X_{0n} = \varepsilon X_{01} + \varepsilon^2 X_{02} + \varepsilon^3 X_{03} + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sustituyendo (4.23) despreciando los términos de orden igual o superior a $O(\varepsilon^2)$ en las ecuaciones (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) y (4.23) se obtiene la aproximación de primer orden para estas ecuaciones:

- Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (4.24)$$

- Condición de fondo:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (4.25)$$

- Condición cinemática de superficie libre:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = h \quad (4.26)$$

- Condición dinámica de superficie libre:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\eta_1 = 0 \quad \text{en } z = h \quad (4.27)$$

- Condición de contorno en la pala:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = f(z) \cdot \frac{dX_{01}}{dt} \quad (4.28)$$

La solución del sistema de ecuaciones planteada se halla por el método de separación de variables

$$\phi_1(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

obteniéndose la solución final siguiente:

$$\phi_1(x, z, t) = A \cosh[k(h+z)] \sin(kx - \omega t) + \cos(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \cos[k_n(z+h)] \quad (4.29)$$

El primer término corresponde a una onda progresiva que se propaga a lo largo del eje x. El segundo término es una serie de olas estacionarias que decaen exponencialmente al alejarse de la pala (a una distancia 2h de la pala, la amplitud de la primera de estas olas, la mayor, se ha reducido en un 96%).

Siendo:

$$A = \frac{wS_0}{2k} \cdot \frac{\int_{-h}^0 f(z) \cosh[k(h+z)] dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2[k(h+z)] dz} \quad (4.30)$$

$$C_n = \frac{wS_0}{2k_n} \cdot \frac{\int_{-h}^0 f(z) \cos[k_n(h+z)] dz}{\int_{-h}^0 \cos^2[k_n(h+z)] dz}$$

k y k_n son tales que cumplen:

$$w^2 = gk \tanh(kh) = -gk_n \tan(k_n h)$$

La expresión de primer orden de la superficie libre se encuentra sustituyendo el potencial de velocidad (4.29) en la condición dinámica de primer orden de la superficie libre evaluada en $z = 0$ (4.27)

$$\eta(x, t) = \frac{\omega A}{g} \cosh(kh) \cos(kx - \omega t) + \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega C_n}{g} e^{-k_n x} \cos(k_n h) \quad (4.31)$$

La solución de primer orden obtenida está compuesta por dos sumandos. El primer término es lo que se llama la solución de campo lejano, y el segundo término (sumatorio) es lo que se llama solución de campo cercano.

Lejos de la pala ($\approx 2h$), el segundo término se va amortizando hasta desaparecer, quedando sólo como solución (aproximación de primer orden) el campo lejano.

$$\eta_1(x, t) = \frac{\omega A}{g} \cosh(k_1 h) \cos(k_1 x - \omega t) \quad (4.32)$$

es decir, lejos de la pala la superficie libre vendrá representada por una onda progresiva del tipo:

$$\eta_1(x,t) = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \omega t) \quad (4.33)$$

Siendo H la altura de ola generada (a una distancia superior al campo cercano, es decir, a una distancia superior a 2h)

Igualando (4.32) y (4.33) se llega a la relación

$$H = \frac{\omega A}{g} \cosh(k_1 h) \quad (4.34)$$

Función de transferencia

Dado que A (ver 4.30) es función de S_0 (máxima carrera horizontal) y de $f(z)$, se obtiene una expresión distinta de A, que sustituida en la relación 4.34 permite obtener el ratio H/S_0 , llamada función de transferencia.

$$A = \frac{2\omega S_0}{k(\sinh(2kh) + 2kh)} [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)] \quad (4.35)$$

$$C_n = -\frac{2\omega S_0}{k_n(\sinh(2k_n h) + 2k_n h)} [\sinh(k_n h) - \sinh(kh_0)] \quad (4.36)$$

De este modo se puede llegar a la siguiente expresión de la función de transferencia teórica de primer orden de la pala.

$$\frac{H}{S_0} = \frac{4 \sinh(kh)}{\sinh(2kh) + 2kh} [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)] \quad (4.37)$$

A partir de esta función de transferencia (H/X_0) ya se puede determinar que altura de ola puede producirse a partir de la carrera horizontal X_0 que desarrolla la pala, y por lo tanto, la función de desplazamiento de la pala para generar esa altura de ola H.

$$\left. \begin{aligned}
 f(z) &= \begin{cases} 1 & 0 > z > -(h-h_0) \\ 0 & z < -(h-h_0) \end{cases} \\
 X(t) &= \begin{cases} \frac{S_0}{2} \cdot \sin(\omega t) & 0 > z > -(h-h_0) \\ 0 & z < -(h-h_0) \end{cases} \\
 S_0 &= \frac{H}{\frac{4 \sinh(kh)}{\sinh(2kh) + 2kh} [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)]}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{cases} \frac{H \cdot [\sinh(2kh) + 2kh] \sin(\omega t)}{8 \sinh(kh) [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)]} & 0 > z > -(h-h_0) \\ 0 & z < -(h-h_0) \end{cases}$$

(4.38)

4.2.2. Potencia

Fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre la pala

Para que la pala tenga el desplazamiento calculado, se le ha de ejercer una fuerza determinada. El objetivo de este apartado es identificar las fuerzas que intervienen en la interacción fluido-pala, para determinar la potencia que requiere el sistema para ser capaz de generar el oleaje deseado.

La distribución de presiones ejercida por el agua sobre la pala tiene una componente estática, que generalmente será la componente de mayor importancia, y una componente dinámica. Esta última es el resultado de dos contribuciones:

- Una debida al desplazamiento de la superficie libre (en fase con la velocidad de la pala)
- Otra debida a la aceleración vertical (en fase con la aceleración y por tanto desfasada 180° con respecto al desplazamiento de la superficie libre) que recibe el nombre de "inercia" y que decrece al alejarse de la pala.

La expresión correspondiente a esta distribución de presiones actuando sobre la superficie de la pala puede definirse a partir de la ecuación de Bernuilli linealizada (es decir, de primer orden) sustituyendo el potencial de velocidades Φ_1 .

$$p(x, z, t) = -\rho \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) - \rho g z \quad (4.39)$$

Evaluándola en $x = 0$ resulta:

$$p(z, t) = \{\rho\omega A \cosh[k(h+z)]\} \cos \omega t + \{\rho\omega \sum C_n \cos[k_n(h+z)]\} \sin \omega t - \rho g z \quad (4.40)$$

donde A y C_n están definidos en (4.35) y (4.36).

Para convertir estas distribuciones de presión en fuerzas instantáneas actuando por unidad de ancho sobre la pala se ha de integrar a lo largo de toda la profundidad:

$$F_p(t) = \int_{-h}^0 p(z, t) dz = \left[\frac{\rho\omega A \sinh kh}{k} \cos \omega t + \left(\rho\omega \sum \frac{C_n}{2} \sin k_n h \right) \sin \omega t \right] + \left(\frac{\rho g h^2}{2} \right) \quad (4.41)$$

Sustituyendo los valores de A y C_n y reagrupando en nuevos términos nos queda finalmente la fuerza que debe ejercer la pala:

$$F_p(t) = F_R \cos \omega t + F_I \sin \omega t + \frac{\rho g h^2}{2} = \sqrt{(F_R^2 + F_I^2)} \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) + \frac{\rho g h^2}{2}$$

$$F_R = \frac{2\rho\omega^2 S_0 \sinh(kh) [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)]}{k^2 (\sinh(2kh) + 2kh)} \quad (4.42)$$

$$F_I = \rho\omega \sum \frac{\omega S_0 \sinh(k_n h) [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)]}{k^2 (\sinh(2kh) + 2kh)}$$

El primer término se refiere a las fuerzas resistivas hidrodinámicas, el segundo término a las fuerzas inerciales hidrodinámicas y el tercer término es la contribución hidrostática del agua.

Fuerza inercial de la pala

Hasta ahora sólo se ha hablado de las fuerzas que hace el agua sobre la pala, pero la masa de la pala y la flotación producen una fuerza adicional que también estará en fase con la aceleración de la pala y que también tendrá que ser contrarrestada por la fuerza que tendrá que ejercer el generador (en realidad, ésta última tendrá que ser mayor que la suma de las dos anteriores).

Siendo $X(t) = \frac{S_0}{2} \cdot f(z) \cdot \sin \omega t$ el movimiento de la pala, la velocidad y la aceleración de la misma serán:

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \frac{\omega S_0}{2} \cdot f(z) \cdot \cos \omega t$$

$$\ddot{X}(t) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -\frac{\omega^2 S_0}{2} \cdot f(z) \cdot \sin \omega t$$

Por lo tanto, la fuerza inercial de la pala \hat{F}_I será:

$$\hat{F}_I(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega^2 \cdot S_0 & 0 > z > -(h - h_0) \\ 0 & z < -(h - h_0) \end{cases} \quad (4.43)$$

Fuerza de empuje

El empuje existente de la pala, al ser un objeto semisumergido en un fluido, tendrá incidencia en la potencia final requerida. Esto es debido a que el actuador no trabaja perpendicularmente con respecto al empuje vertical que sufre la pala.

$$E(t) = V_{sumergido}(t) \cdot \rho_{agua} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_0^2}{\tan \alpha} + \frac{1}{2} \cdot X(t)^2 \tan \alpha + l_0 X(t) \quad (4.44)$$

Siendo $X(t)$ esta vez $X(t) = \frac{S_0}{2} \cdot \sin \omega t$

Potencia

Si se define potencia como el trabajo realizado por unidad de tiempo, y el trabajo como la fuerza realizada por el desplazamiento producido, de este modo se tiene que la potencia se obtiene multiplicando la fuerza por la velocidad.

$$Potencia = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{x}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Los distintos tipos de fuerzas que actúan sobre la pala se han obtenido en el apartado anterior, y la velocidad correspondiente a la pala se obtiene a continuación a partir del desplazamiento:

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \frac{\omega \cdot S_0}{2} \cdot \cos \omega t & 0 > z > -(h - h_0) \\ 0 & z < -(h - h_0) \end{cases} \quad (4.45)$$

Así se obtienen las siguientes potencias para cada tipo de fuerza:

- Potencia hidrodinámica:

$$P_p(t) = \begin{cases} \left[F_R \cos \omega t + F_I \sin \omega t + \frac{\rho g h^2}{2} \right] \cdot \frac{\omega S_0}{2} \cdot \cos \omega t & 0 > z > -(h - h_0) \\ 0 & z < -(h - h_0) \end{cases}$$

$$F_R = \frac{2\rho\omega^2 S_0 \sinh(kh) [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)]}{k^2 (\sinh(2kh) + 2kh)} \quad (4.46)$$

$$F_I = \rho\omega \sum \frac{\omega S_0 \sinh(k_n h) [\sinh(kh) - \sinh(kh_0)]}{k^2 (\sinh(2kh) + 2kh)}$$

- Potencia inercial de la pala:

$$P_I(t) = \begin{cases} -\frac{\omega^3 \cdot S_0^3 \cdot M}{4} \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t & 0 > z > -(h - h_0) \\ 0 & z < -(h - h_0) \end{cases} \quad (4.47)$$

- Potencia de empuje:

$$P_E(t) = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l_0^2}{\tan \alpha} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S_0}{2} \sin \omega t \right)^2 \tan \alpha + l_0 \left(\frac{S_0}{2} \sin \omega t \right) \right] \cdot \frac{\omega S_0}{2} \cos \omega t \quad (4.48)$$

4.2.3. Curvas de capacidad

Las curvas de capacidad permiten determinar la altura de ola alcanzable por cada tipo de pala, en función del periodo y calado de agua existente. Para ello, a parte de la función de transferencia que limita las alturas generadas por la pala, el oleaje generado también está limitado por la rotura por peralte ($H/L > 0,142$) y por la rotura de fondo ($H/h > 0,78$).

En la figura siguiente se observa, como ejemplo, la superficie sombreada correspondiente a las posibles alturas de ola generables por un determinado tipo de pala al que corresponden las curvas de capacidad que encierran la superficie.

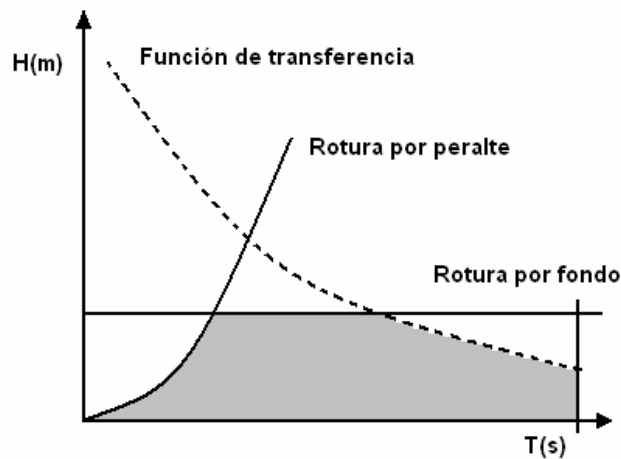


Figura 4.3. Ejemplo de curvas de capacidad, para un calado dado

A continuación se expone la curva de capacidad correspondiente a la pala generadora tipo *wedge* utilizada en el canal CIEM.

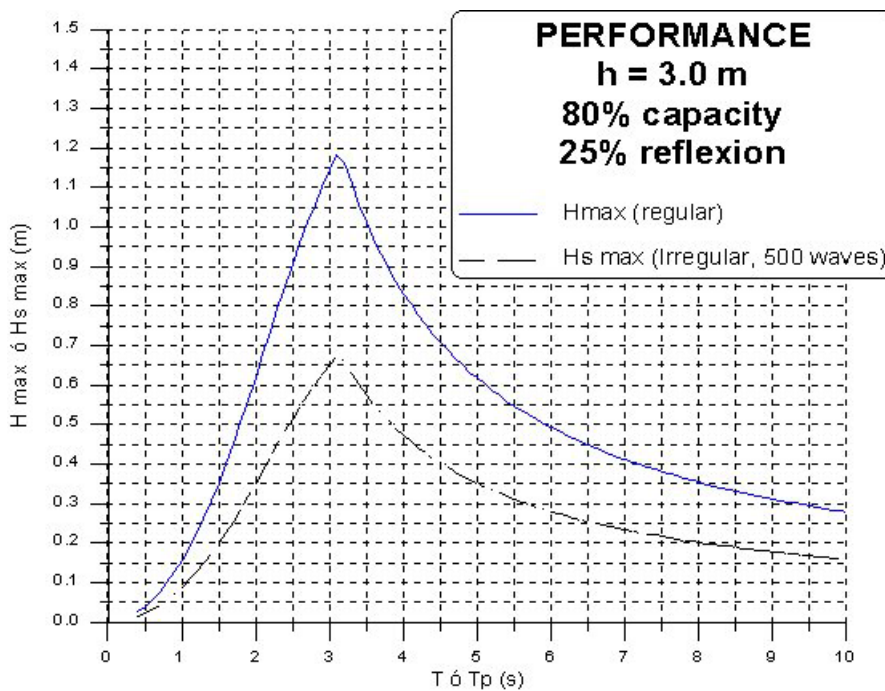


Figura 4.3. Curva de capacidad con 3 m de agua frente a la pala.

La generación de oleaje por parte de la pala está condicionada al periodo y al calado. En el entorno al período de 3 segundos es donde se puede generar las mayores alturas de ola.

4.2.3. Software utilizado

Este desplazamiento de la pala se controla con un programa para PC (WAVEGEN) que corre bajo sistema operativo MS-DOS. La formulación utilizada por el programa para generar el oleaje está es la expuesta en los apartados 4.2.1 y 4.2.2.

Permite simular tanto oleaje regular como irregular. El sistema es capaz de reproducir olas regulares de hasta 1.5 m con el máximo calado de trabajo frente a la pala (4 metros). Para generar oleaje irregular se basa en tres metodologías: filtrado digital de ruido blanco, series de Fourier y secuencias definidas por el usuario. La ventaja del primer método (filtro digital de ruido blanco) es que garantiza la generación de series largas de olas irregulares sin repetición de secuencias. Este tipo de series largas son de gran importancia cuando se analizan modelos que tienen una respuesta no lineal.

Las olas irregulares generadas siguen una forma espectral predefinida a través del mismo programa (JONSWAP, Pierson-Moskowitz, etc.) o el espectro puede ser totalmente definido por el usuario a través de un fichero.

4.3. El fenómeno de la reflexión.

La reflexión es el proceso por el cual parte de la energía no disipada de un determinado tren de olas genera otro tren en sentido contrario al incidir sobre un obstáculo. Cualquier estructura marítima provoca que el oleaje incidente padezca un proceso de reflexión la intensidad del cual depende en gran medida del poder disipador de la obra. Una estructura porosa en talud, gracias a su configuración, presenta una reflexión menor que una de paramento vertical. Esto es debido por un lado a la disminución progresiva del calado que hace que la ola rompa, y por el otro debido a que los huecos generados por los elementos que conforman la capa exterior acentúan la disipación.

La reflexión se define mediante el coeficiente complejo:

$$R = |R| \cdot e^{-i\varepsilon} \quad (4.49)$$

Siendo:

- $|R| = \sqrt{R_r^2 + R_i^2}$ el módulo del coeficiente. Habitualmente se denomina coeficiente de reflexión (K_r), y relaciona las alturas de ola incidente i y reflejada de la forma $R = H_r / H_i$.

En el caso de oleaje irregular, el coeficiente de reflexión se calcula a partir de los flujos de energía, que a la vez están relacionados con los espectros de oleaje de la forma:

$$|R| = \sqrt{\frac{E_R}{E_I}} = \sqrt{\frac{\int S_R(f) df}{\int S_I(f) df}} \quad (4.50)$$

- $\varepsilon = \arctg(R_i / R_r)$ el argumento del coeficiente complejo. Proporciona información sobre el desfase ficticio entre la ola incidente i y la reflejada. El adjetivo ficticio hace referencia al hecho de que no hay un único punto concreto donde se produce la reflexión, sino que esta se desarrolla a lo largo de un tramo del talud.

Para la medición de la reflexión existen varios métodos que separan el oleaje en incidente y el reflejado. Son los llamados métodos de separación. Aunque estos métodos se crearon para trenes de olas regulares, se puede analizar oleaje irregular superponiendo trenes regulares de diferente amplitud. Varios laboratorios del convenio han utilizado el método de Mansard i Funke (1980). Sin embargo en el canal CIEM se ha utilizado además el método de Goda y Suzuki (1976) y el de

Hughes (1993) además de otros sistemas propuestos a partir de la observación de registro del oleaje.

4.2.1. Método de Goda

En 1976 Goda y Suzuki introdujeron un análisis técnico basado en el desplazamiento de la superficie libre obtenido a partir de dos sensores separados a una distancia determinada. Este método ofrece tanto el coeficiente de reflexión como el desfase en cualquier oleaje regular o irregular llevado a cabo en condiciones de laboratorio para un oleaje unidireccional.

Este método nos permite separar un tren de olas con cualquier frecuencia f_n en una amplitud incidente a_{In} y otra de amplitud reflejada a_{Rn} . Representando la densidad de energía del oleaje con frecuencia f_n y amplitud a_{In} y a_{Rn} , obtenemos el espectro de energía para el oleaje incidente y el reflejado respectivamente. Aplicando la formula 4.50 se obtiene el coeficiente de reflexión.

Obtención del espectro de energía a partir de los datos proporcionados por los sensores.

Cada uno de los sensores de superficie capta la posición de la superficie de la lámina de agua para diferentes pequeños intervalos de tiempo. Aunque se contemple el registro de la superficie libre mediante un programa como una función continua, la realidad es que este registro es discreto, debido a la adquisición digital de los datos. Lo que se pretende es atribuir una función a estos datos.

Para ello es necesario aplicarles un análisis de Fourier discreto, utilizando las siguientes formulaciones:

Dada una función cualquiera $f(t_i)$ (que en nuestro caso es la obtenida de forma discreta por los sensores WG0, WG1, WG2, WG5, WG6 o WG7), puede ser expresada en series de Fourier de la forma

$$f(t_i) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) \right] \quad (4.51)$$

En este caso, la función debe tener un periodo constante T . Una función no periódica $f(t)$ todavía puede ser representada por series de Fourier definidas con la formula anterior, pero con validez limitada al rango donde la función no periódica es definida.

Los coeficientes de Fourier A_0 , A_n y B_n pueden calcularse a partir de los datos registrados por los sensores de la forma siguiente:

$$A_0 = \frac{1}{T} \sum_{-T/2}^{T/2} f(t_i) \Delta t \quad (4.52a)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \sum_{-T/2}^{T/2} f(t_i) \cos\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) \Delta t, \quad n = 1, 2, 3... \quad (4.52b)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \sum_{-T/2}^{T/2} f(t_i) \text{sen}\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) \Delta t, \quad n = 1, 2, 3... \quad (4.52c)$$

Se puede afirmar que A_0 debe ser nulo debido a que el oleaje $f(t)$ generado utiliza como paso por cero el nivel medio del agua del canal. Por tanto las áreas positivas y negativas de la función $f(t)$ deben compensarse (integral de $f(t)$ en todo su dominio nula). Así podemos atribuir al registro la función siguiente, con la que podemos obtener el espectro de energía del oleaje.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (4.53)$$

donde A_n y B_n se calculan a partir de (4.52a) y (4.52b).

Formulación para la descomposición en oleaje incidente y reflejado

La ecuación de un oleaje irregular puede expresarse como el sumatorio de un seguido de olas regulares de la forma

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_n) \quad (4.54)$$

Por tanto, podemos expresar la superposición de un oleaje irregular con su reflejada del modo siguiente

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{In} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{In}) + a_{Rn} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{Rn}) \quad (4.55)$$

Para encontrar a_{In} y a_{Rn} solo tenemos que igualar la ecuación $f(t)$ que representa el registro medido (4.53) con la ecuación teórica $\eta(x, t)$ (4.55).

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_{In} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{In}) + a_{Rn} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{Rn})] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t)] = f(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para que esta igualdad se cumpla, el requisito es que:

$$\begin{aligned} A_n &= a_{I,n} \cos(k_n x + \varepsilon_{I,n}) + a_{R,n} \cos(k_n x + \varepsilon_{R,n}) \\ B_n &= a_{I,n} \sin(k_n x + \varepsilon_{I,n}) + a_{R,n} \sin(k_n x + \varepsilon_{R,n}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Como puede observarse, en las dos ecuaciones anteriores (4.57) se tiene como incógnitas a encontrar la altura de ola incidente a_{In} con su desfase ε_{In} y la altura de ola reflejada a_{Rn} con su desfase ε_{Rn} . Por otra parte se tiene como datos los valores A_n y B_n que nos proporciona cada registro al descomponerlo en series de Fourier. Por tanto con dos registros proporcionados por dos sensores se obtiene un sistema de 4 ecuaciones (2 por sensor) y 4 incógnitas que permite encontrar las características del oleaje incidente y reflejado. A continuación se expresa la formulación seguida.

Con los datos del primer sensor puede plantear se la ecuación siguiente

$$\eta_1(x_1, t) = (\eta_{I_n} + \eta_{R_n})_{x=x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \cos(\omega_n t) + B_{1n} \sin(\omega_n t) \quad (4.58)$$

Con los datos del segundo sensor se obtiene que

$$\eta_2(x_2, t) = (\eta_{I_n} + \eta_{R_n})_{x=x_2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \cos(\omega_n t) + B_{2n} \sin(\omega_n t) \quad (4.59)$$

Despejando A_{1n} , B_{1n} , A_{2n} , B_{2n} se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_{1n} &= a_{I_n} \cos \phi_{I_n} + a_{R_n} \cos \phi_{R_n} \\ B_{1n} &= a_{I_n} \sin \phi_{I_n} - a_{R_n} \sin \phi_{R_n} \\ A_{2n} &= a_{I_n} \cos(k_n \Delta x + \phi_{I_n}) + a_{R_n} \cos(k_n \Delta x + \phi_{R_n}) \\ B_{2n} &= a_{I_n} \sin(k_n \Delta x + \phi_{I_n}) - a_{R_n} \sin(k_n \Delta x + \phi_{R_n}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Siendo:

- A_{1n} , B_{1n} , A_{2n} , B_{2n} coeficientes de Fourier, calculados a partir de los registros de los sensores mediante las expresiones (4.52b) y (4.52c).
- Δx la distancia entre los dos sensores
- $\phi_{I_n} = (k_n x + \varepsilon_{I_n})$ y $\phi_{R_n} = (k_n x + \varepsilon_{R_n})$ la expresión de la fase en el primer sensor, y x su posición.

Estas 4 ecuaciones forman un sistema lineal con las siguientes soluciones para los parámetros desconocidos a_{I_n} , a_{R_n} , ϕ_{I_n} y ϕ_{R_n} .

$$\begin{aligned}
a_{I_n} &= \frac{\sqrt{\left[A_{2_n} - A_{1_n} \cos(k_n \Delta x) - B_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]^2 + \left[B_{2_n} + B_{1_n} \cos(k_n \Delta x) - A_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]^2}}{2 |\sin(k_n \Delta x)|} \\
a_{R_n} &= \frac{\sqrt{\left[A_{2_n} - A_{1_n} \cos(k_n \Delta x) + B_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]^2 + \left[B_{2_n} - B_{1_n} \cos(k_n \Delta x) - A_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]^2}}{2 |\sin(k_n \Delta x)|} \\
\phi_{I_n} &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\left[A_{2_n} - A_{1_n} \cos(k_n \Delta x) + B_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]}{\left[B_{2_n} - B_{1_n} \cos(k_n \Delta x) + A_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]} \right\} \\
\phi_{R_n} &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\left[A_{2_n} - A_{1_n} \cos(k_n \Delta x) + B_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]}{\left[B_{2_n} - B_{1_n} \cos(k_n \Delta x) - A_{1_n} \sin(k_n \Delta x) \right]} \right\}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Con esta metodología se ha aplicado el programa *GodaRef* para deducir el coeficiente de reflexión $|R|$ i el desfase ε , a partir de los espectros de energía del oleaje incidente y reflejado aplicando la fórmula (4.50).

Limitaciones del método

El método de Goda presenta algunas limitaciones. La aplicación del método de Goda y Suzuki presupone la teoría lineal del oleaje, lo que provoca que fenómenos no lineales generen errores. Por otra parte el fondo ha de ser horizontal y la aparición de oleaje transversal y otras perturbaciones (como la propia interferencia que genera el sensor de superficie) que añaden “ruido” a la señal.

El buen funcionamiento del método está condicionado, como en el caso de Goda, a la posición de los sensores. El hecho de utilizar más de un sensor para la obtención de la reflexión, hace que el método sea susceptible a errores producidos por oleajes parcialmente estacionarios.

Para que el método funcione correctamente es necesario que la distancia entre sensores cumpla unas condiciones determinadas. En concreto, el método de Goda pierde precisión cuando la separación entre sensores Δx es tal que $2 \cdot \Delta x / L = n$, siendo $n=0, 1, 2, \dots$ ya que entonces $\sin(K_n \Delta x) = 0$ (ver 4.61).

4.3.2. Método de Mansard y Funke

En 1980 Mansard y Funke presentaron un método basado en mínimos cuadrados utilizando 3 sensores de superficie. En 1992 Zelt y Skjelbreia extendió este método introduciendo un algoritmo aplicable a un número arbitrario de sensores. A continuación se presenta el método extendido por Zelt y Skjelbreia, que utilizando

solamente tres sensores resulta un algoritmo igual al presentado por Mansard y Funke en 1980.

Éste método presupone la medición simultánea en M puntos conocidos durante un tiempo T , tal que $0 \leq t \leq T$. En nuestro caso hemos trabajado con tres sensores, con lo que M será igual a 3.

La novedad de este método está en la introducción de una variable error. Entonces, se obtiene valor de la reflexión que minimiza el error, mediante la aplicación de la teoría de mínimos cuadrados.

Obtención del espectro de energía a partir de los datos proporcionados por los sensores

La idea inicial es la misma que la utilizada en el método de Goda. Atribuir a una función determinada los datos discretos proporcionados por un sensor.

Para que los datos sean atribuibles a una función es necesario aplicar un análisis de Fourier discreto. Por propiedades de la descomposición de Fourier, cualquier función puede ser expresada de la forma siguiente:

$$f(t_i) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) \right] \quad (4.51)$$

Encontrando A_0 , A_n y B_n a partir de las formulas (4.52a), (4.52b) y (4.52c).

La diferencia entre el método de Goda y el de Mansard empieza en una reformulación de la serie de Fourier de la expresión (4.51). Esta fórmula puede ser expresada de forma más compacta mediante una amplitud y una fase de la forma siguiente:

$$f(t_i) = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{2\pi n t_i}{T} - \alpha_n\right) \quad (4.62)$$

Donde:

$$E_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2} \quad (4.63a)$$

$$\alpha_n = \tan^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right) \quad (4.63b)$$

Igual que en el caso de A_0 , E_0 debe ser nulo debido a que el oleaje $f(t)$ generado utiliza como paso por cero el nivel medio del agua del canal. Por tanto las áreas

positivas y negativas de la función $f(t)$ deben compensarse (integral de $f(t)$ nula). Por tanto Podemos expresar el registro mediante la función continua siguiente:

$$f(t_i) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{2\pi n t_i}{T} - \alpha_n\right) \quad (4.64)$$

de la que puede calcularse E_n y α_n a partir de las ecuaciones (4.63a) y (4.63b) que a la vez obtienen los datos de (4.52b) y (4.52c).

Debe recordarse que en este caso se tiene obviamente la misma limitación que en el caso de Goda. La función debe tener un periodo constante T . Una función no periódica $f(t)$ todavía puede ser representada por series de Fourier definidas con la formula anterior, pero con validez limitada al rango donde la función no periódica es definida.

Formación para la descomposición en oleaje incidente y reflejado

La ecuación de un oleaje irregular (registrada por un sensor p) puede expresarse como el sumatorio de un seguido de olas regulares de la forma que sigue:

$$\eta_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(-\frac{2\pi n t}{T} + \frac{2\pi x}{L_n} + \varepsilon_{p,n}\right) \quad (4.65)$$

Por tanto, considerando un sensor p situado en la posición $x = X1$, se puede expresar el registro debido a la superposición de un oleaje irregular con su reflejado del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta_{p=1}(x = X1, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_{In} \sin\left(-\frac{2\pi n t}{T} + \frac{2\pi(X1)}{L_n} + \varepsilon_{1,n}\right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} a_{Rn} \sin\left(-\frac{2\pi n t}{T} + \frac{2\pi(X1 + 2XR1)}{L_n} + \varepsilon_{1,n} + \gamma_{1,n}\right) + \Omega_1(t) \end{aligned} \quad (4.66)$$

donde $\Omega_1(t)$ representa las interferencias, posibles errores de la formula; y $XR1$ la distancia del sensor al "punto" en que refleja el oleaje.

Teniendo en cuenta otros sensores p en la posición $x = X1 + X1P$, el oleaje que tendrá que observar este nuevo sensor viene dado por

$$\begin{aligned} \eta_p(x = X1 + X1P, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_{In} \sin\left(-\frac{2\pi n t}{T} + \frac{2\pi(X1 + X1P)}{L_n} + \varepsilon_{1,n}\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{Rn} \sin\left(-\frac{2\pi n t}{T} + \frac{2\pi(X1 + 2XR1 - X1P)}{L_n} + \varepsilon_{p,n}\right) + \Omega_p(t) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Es obvio que la superficie libre obtenida por los sensores y expresada por la ecuación (4.65) tendría que coincidir con la formulación teórica (superposición de un oleaje incidente con un reflejado) expresada mediante la ecuación (4.66) o (4.67). Por tanto se procede a igualar las formulaciones.

Para un primer sensor:

$$\begin{aligned} & a_{1n} \sin\left(-\frac{2\pi mt}{T} + \frac{2\pi(X1)}{L_n} + \varepsilon_{1,n}\right) + a_{1n} \sin\left(-\frac{2\pi mt}{T} + \frac{2\pi(X1+2XR1)}{L_n} + \varepsilon_{1,n}\right) + \Omega_1(t) = \\ & = A_n \sin\left(\frac{2\pi mt}{T} + \alpha_n\right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Para otro sensor p :

$$\begin{aligned} & a_{1n} \sin\left(-\frac{2\pi mt}{T} + \frac{2\pi(X1+X1P)}{L_n} + \varepsilon_{1,n}\right) + a_{1n} \sin\left(-\frac{2\pi mt}{T} + \frac{2\pi(X1+2XR1-X1P)}{L_n} + \varepsilon_{p,n}\right) + \\ & + \Omega_p(t) = A_n \sin\left(\frac{2\pi mt}{T} + \alpha_n\right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Si se expresa en forma polar y se eliminan los términos iguales en ambas igualdades nos queda:

$$B_{1,n} = \underbrace{a_{1,n} e^{i\left(\frac{2\pi(X1)}{L_n} + i\varepsilon_{1,n}\right)}}_{Z_{1,n}} + \underbrace{a_{R,n} e^{i\left(\frac{2\pi(X1+2XR1)}{L_n} + i(\varepsilon_{1,n} + \gamma_{1,n})\right)}}_{Z_{1,n}} + \underbrace{Y_{1,n} e^{i\rho_{1,n}}}_{Z_{error,1,n}} \quad (4.70)$$

$$B_{p,n} = \underbrace{a_{1,n} e^{i\left(\frac{2\pi(X1+X1P)}{L_n} + i\varepsilon_{p,n}\right)}}_{Z_{1,n}} + \underbrace{a_{R,n} e^{i\left(\frac{2\pi(X1+2XR1-X1P)}{L_n} + i(\varepsilon_{p,n} + \gamma_{p,n})\right)}}_{Z_{1,n}} + \underbrace{Y_{p,n} e^{i\rho_{1,n}}}_{Z_{error,1,n}} \quad (4.71)$$

Siendo $B_n = -A_n \cdot e^{\alpha_n}$

Agrupando los términos, se llega a la expresión siguiente:

$$B_{1,n} = Z_{1,n} + Z_{R,n} + Z_{error,1,n} \quad (4.72a)$$

$$B_{p,n} = Z_{1,n} \cdot e^{\frac{i2\pi(X1P)}{L_n}} + Z_{R,n} \cdot e^{\frac{i2\pi(X1P)}{L_n}} + Z_{error,1,n} \quad (4.72b)$$

De la que se conoce B_n a partir de los datos de los sensores, siguiendo el proceso descrito.

Las dos últimas ecuaciones (4.72a) y (4.72b) pueden describirse de nuevo mediante la simplificación siguiente:

$$\psi_{p,n} = \frac{2\pi(X1P)}{L_n} = k_n(X1P)$$

Con lo cual queda:

$$Z_{I,n} \cdot e^{i\psi_{1,n}} + Z_{R,n} \cdot e^{i\psi_{1,n}} - B_{1,n} = -Z_{error,1,n} \quad , \text{ para el primer sensor.} \quad (4.73a)$$

$$Z_{I,n} \cdot e^{i\psi_{p,n}} + Z_{R,n} \cdot e^{i\psi_{p,n}} - B_{p,n} = -Z_{error,p,n} \quad , \text{ para cualquier otro sensor } p. \quad (4.73b)$$

Ahora se aplicará mínimos cuadrados para encontrar los valores de $Z_{I,n}$ y $Z_{R,n}$ cuya suma del cuadrado de $Z_{error,p,n}$ sea mínimo.

$$\sum_{p=1}^m (-Z_{error,p,n}) = \text{mínimo}$$

Para encontrar el valor de $Z_{I,n}$ y $Z_{R,n}$ por mínimos cuadrados se tiene que resolver el sistema de ecuaciones expresado de forma matricial como $Z_n = Y_n \cdot D_n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{p=1}^M B_{p,n} \cdot e^{-i\psi_{p,n}} \\ \sum_{p=1}^M B_{p,n} \cdot e^{i\psi_{p,n}} \end{pmatrix}}_{Y_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} M & \sum_{p=1}^M e^{-2i\psi_{p,n}} \\ \sum_{p=1}^M e^{2i\psi_{p,n}} & M \end{pmatrix}}_{D_n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{I,n} \\ Z_{R,n} \end{pmatrix}}_{Z_n} \quad (4.74)$$

Cuya solución es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Z_{I,n} \\ Z_{R,n} \end{pmatrix}}_{Z_n} = \frac{1}{\underbrace{\left[M^2 - \sum_{p=1}^M e^{2i\psi_{p,n}} \cdot \sum_{p=1}^M e^{-2i\psi_{p,n}} \right]}_{D_n^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} M & -\sum_{p=1}^M e^{-2i\psi_{p,n}} \\ -\sum_{p=1}^M e^{2i\psi_{p,n}} & M \end{pmatrix}}_{D_n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{p=1}^M B_{p,n} \cdot e^{-i\psi_{p,n}} \\ \sum_{p=1}^M B_{p,n} \cdot e^{i\psi_{p,n}} \end{pmatrix}}_{Y_n} \quad (4.75)$$

$Z_{I,n}$ y $Z_{R,n}$ representa el movimiento de la superficie del agua del oleaje incidente $\eta_I(x = X1, t)$ y reflejado $\eta_R(x = X1, t)$ para cualquier f_n , y permite calcular el espectro de oleaje incidente y reflejado.

Durante este trabajo se ha aplicado el programa *FunManRef*, que mediante la formulación del método de Mansard y Funke, deduce el coeficiente de reflexión

$|R|$ i el desfase ε , a partir de los espectros de energía del oleaje incidente y reflejado.

Limitaciones del método

Las limitaciones del método vienen por una parte por el uso de la teoría lineal del oleaje. Por otra parte Zelt y Skjelbreia (1992) ya demostraron que al aumentar el número de sensores mejoraban la exactitud del método, lo que denota que hay un error que se ve disminuido. Además, el fondo debería ser horizontal, y la aparición de oleaje transversal y otras perturbaciones en el canal, como las producidas por los propios sensores de superficie, pueden falsificar los datos.

El buen funcionamiento del método está condicionado, como en el caso de Goda, a la posición de los sensores. El hecho de utilizar más de un sensor para la obtención de la reflexión, hace que el método sea susceptible a errores producidos por oleajes parcialmente estacionarios.

Por otra parte, el cálculo utilizado para minimizar un número complejo no es estrictamente correcto. De todos modos es aceptado debido a que a pesar de su inexactitud se acerca suficientemente al valor adecuado.

Para que el método funcione correctamente es necesario que la distancia entre sensores cumpla unas condiciones determinadas. En concreto, el método de Mansard y Funke pierde precisión cuando la separación entre sensores Δx es tal que $2 \cdot \Delta x / L = n$, siendo $n=0, 1, 2, \dots$ ya que entonces $M^2 - \left[\sum_{p=1}^M e^{2i\psi_{p,n}} \cdot \sum_{p=1}^M e^{-2i\psi_{p,n}} \right]$ (ver 4.75).

4.3.3. Método de Hughes

Hughes introdujo un nuevo método en 1993, que permitía obtener el oleaje incidente y el reflejado de un tren de olas irregulares analizando los siguientes parámetros:

- La velocidad horizontal y la elevación de la superficie del nivel del agua, o
- Las velocidades horizontales y verticales

La aplicación de este método asume el registro de ambas series temporales en un único punto. Por esta razón, una de las ventajas que presenta este método en relación con el de Goda o el de Mansard y Funke es que no es necesario fondo horizontal, como asumen los anteriores. Otra ventaja es que el sensor puede colocarse cerca de la estructura. De este modo se reduce el error que puedan

generar olas parcialmente estacionarias, en contraposición con los métodos que utilizan sensores separados.

Obtención del espectro de energía a partir de los datos proporcionados por los sensores

Este método utiliza la información proporcionada por un sensor de superficie y un correntímetro, o directamente por un solo correntímetro.

Para atribuir los datos discretos medidos por los sensores a una función, se aplica un análisis de Fourier, igual que en el caso de Goda o Mansard y Funke.

Dada una función cualquiera $f(t_i)$ esta puede ser expresada en series de Fourier de la forma

$$f(t_i) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t_i}{T}\right) \right] \quad (4.51)$$

Donde los coeficientes de Fourier A_0 , A_n y B_n pueden calcularse a partir de los datos registrados por los sensores mediante las formulas ya vistas (4.52a), (4.52b) y (4.52c).

Como A_0 debe ser nulo debido a que el oleaje $f(t)$ generado utiliza como paso por cero el nivel medio del agua del canal, podemos atribuir a un registro la función siguiente:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t) \quad (4.53)$$

Donde A_n y B_n se calculan a partir de (4.52b) y (4.52c) respectivamente.

Formulación para la descomposición en oleaje incidente y reflejado

Dean y Dalrymple (1984) definieron el potencial de la velocidad para la superposición de un oleaje irregular con su reflejado en dos dimensiones sobre un fondo horizontal mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_{I,n} \frac{g}{\omega_n} \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\cosh(k_n h)} \sin(k_n x - \omega_n t) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{R,n} \frac{g}{\omega_n} \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\cosh(k_n h)} \sin(k_n x - \omega_n t) \end{aligned} \quad (4.76)$$

A partir del potencial de la velocidad se puede calcular las velocidades $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ y $w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$, con lo que se obtiene la formulación siguiente:

$$u(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{I,n} Z_n \cos(\Phi_{I,n} - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{R,n} Z_n \sin(\Phi_{I,n} - \omega_n t) \quad (4.77a)$$

$$w(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{I,n} Y_n \cos(\Phi_{I,n} - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{R,n} Y_n \sin(\Phi_{I,n} - \omega_n t) \quad (4.77b)$$

Donde

$$\Phi_{I,n} = (k_n x + \varepsilon_{I,n})$$

$$\Phi_{R,n} = (k_n x + \varepsilon_{R,n})$$

$$Z_n = \frac{g k_n \cosh(k_n (h + z))}{\omega_n \cosh(k_n h)}$$

$$Y_n = \frac{g k_n \sinh(k_n (h + z))}{\omega_n \cosh(k_n h)}$$

Por otra parte, la superficie generada por la superposición de un oleaje irregular con su reflejado ha de seguir la siguiente expresión:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{I,n} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{I,n}) + a_{R,n} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{R,n})] \quad (4.78)$$

Solución utilizando un sensor de superficie y un correntímetro que mide la velocidad horizontal del oleaje

Igualando las expresiones teóricas (4.77a) o (4.77b) y (4.78) a la expresión en series de Fourier de los datos registrados por los sensores (4.53) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_{I,n} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{I,n}) + a_{R,n} \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_{R,n})] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{I,n} Z_n \cos(\Phi_{I,n} - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{R,n} Z_n \sin(\Phi_{I,n} - \omega_n t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

Cuyos coeficientes de Fourier A_n , B_n , C_n , D_n , pueden calcularse a partir de los registros del sensor de superficie y el correntímetro, tal como se expresa en las formulas (4.52b) y (4.52c).

Si se aísla A_n , B_n , C_n , D_n , de las igualdades anteriores llegamos a:

$$\begin{aligned} A_n &= a_{I,n} \cos(\Phi_{I,n}) + a_{R,n} \cos(\Phi_{R,n}) \\ B_n &= a_{I,n} \sin(\Phi_{I,n}) + a_{R,n} \sin(\Phi_{R,n}) \\ \frac{C_n}{Z_n} &= a_{I,n} \cos(\Phi_{I,n}) + a_{R,n} \cos(\Phi_{R,n}) \\ \frac{D_n}{Z_n} &= a_{I,n} \sin(\Phi_{I,n}) + a_{R,n} \sin(\Phi_{R,n}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Con lo que queda un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, cuya solución es:

$$\begin{aligned} a_{I,n} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(A_n + \frac{C_n}{Z_n}\right)^2 + \left(B_n + \frac{D_n}{Z_n}\right)^2} \\ a_{R,n} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(A_n - \frac{C_n}{Z_n}\right)^2 + \left(B_n - \frac{D_n}{Z_n}\right)^2} \\ \Phi_{I,n} &= \tan^{-1}\left(\frac{B_n + D_n/Z_n}{A_n + C_n/Z_n}\right) \\ \Phi_{R,n} &= \tan^{-1}\left(-\frac{B_n - D_n/Z_n}{A_n - C_n/Z_n}\right) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Solución utilizando un solo correntímetro que mide la velocidad horizontal y la vertical del oleaje

Igualando las expresiones teóricas (4.77a) y (4.77b) a la función (4.53) registrada por la expresión en series de Fourier de los datos registrados por sensores se tiene:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{I,n} Z_n \cos(\Phi_{I,n} - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{R,n} Z_n \sin(\Phi_{I,n} - \omega_n t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} w(x, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{I,n} Y_n \cos(\Phi_{I,n} - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{R,n} Y_n \sin(\Phi_{I,n} - \omega_n t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\omega_n t) + F_n \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

Cuyos coeficientes de Fourier C_n , D_n , E_n , F_n , pueden calcularse a partir de los registros del correntómetro, tal como se expresa en las formulas (4.52b) y (4.52c).

Si se aísla C_n , D_n , E_n , F_n , de las igualdades anteriores se llega a:

$$\begin{aligned}\frac{C_n}{Z_n} &= a_{I,n} \cos(\Phi_{I,n}) + a_{R,n} \cos(\Phi_{R,n}) \\ \frac{D_n}{Z_n} &= a_{I,n} \sin(\Phi_{I,n}) + a_{R,n} \sin(\Phi_{R,n}) \\ \frac{E_n}{Y_n} &= a_{I,n} \sin(\Phi_{I,n}) - a_{R,n} \sin(\Phi_{R,n}) \\ \frac{F_n}{Y_n} &= -a_{I,n} \sin(\Phi_{I,n}) - a_{R,n} \sin(\Phi_{R,n})\end{aligned}\tag{4.83}$$

Con lo que queda un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, cuya solución es

$$\begin{aligned}a_{I,n} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{D_n}{Z_n} + \frac{E_n}{Y_n}\right)^2 + \left(\frac{C_n}{Z_n} + \frac{F_n}{Y_n}\right)^2} \\ a_{R,n} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{D_n}{Z_n} - \frac{E_n}{Y_n}\right)^2 + \left(\frac{C_n}{Z_n} - \frac{F_n}{Y_n}\right)^2} \\ \Phi_{I,n} &= \tan^{-1}\left(\frac{D_n/Z_n + E_n/Y_n}{C_n/Z_n - F_n/Y_n}\right) \\ \Phi_{R,n} &= \tan^{-1}\left(-\frac{D_n/Z_n - E_n/Y_n}{C_n/Z_n + F_n/Y_n}\right)\end{aligned}\tag{4.84}$$

En el análisis de reflexión en el canal CIEM se ha utilizado el primer caso: un correntómetro con un sensor de superficie.

Con esta metodología se ha aplicado el programa *HughesRef* para deducir el coeficiente de reflexión $|R|$ i el desfase ε , a partir de los espectros de energía del oleaje incidente y reflejado aplicando la fórmula (4.50).

Limitaciones del método

Algunas limitaciones del método son las mismas que en el caso de Goda. Por una parte, la aplicación de este método presupone el uso de la teoría lineal del oleaje. Además, la aparición de oleaje transversal y otras perturbaciones en el canal falsifican los datos. Por otra parte, asume la hipótesis de que la velocidad y la superficie libre están relacionadas linealmente.

4.3.4. Método de la envolvente

Un caso sencillo de analizar proviene de la formulación básica del oleaje. Una ola incidente de altura H_i i periodo T , al incidir contra una estructura se produce una nueva ola reflejada en sentido contrario, de diferente altura H_r , con un desfase ε , pero con mismo periodo. La superficie libre que generan los dos oleajes superpuestos no es más que la suma de ambas:

$$\eta_t = \frac{H_i}{2} \cos(kx - \sigma t) + \frac{H_r}{2} \cos(kx + \sigma t + \varepsilon) \quad (4.85)$$

Esta expresión puede describirse utilizando identidades trigonométricas.

$$\eta_t = \frac{H_i}{2} (\cos kx \cos \sigma t + \sin kx \sin \sigma t) + \frac{H_r}{2} (\cos(kx + \varepsilon) \cos \sigma t - \sin(kx + \varepsilon) \sin \sigma t) \quad (4.86)$$

Y luego reagrupando los términos similares:

$$\eta_t = \underbrace{\left[\frac{H_i}{2} \cos kx + \frac{H_r}{2} \cos(kx + \varepsilon) \right]}_{I(x)} \cos \sigma t + \underbrace{\left[\frac{H_i}{2} \sin kx - \frac{H_r}{2} \sin(kx + \varepsilon) \right]}_{F(x)} \sin \sigma t \quad (4.87)$$

Para facilitar el manejo de la formula, a partir de ahora se expresará del siguiente modo:

$$\eta_t = I(x) \cos \sigma t + F(x) \sin \sigma t \quad (4.88)$$

Ésta es la superficie libre que genera un oleaje estacionario al reflejar sobre una superficie. Para encontrar los valores máximos de η_t para cualquier x (la envolvente de las alturas, expresada en la figura 4.4), es necesario derivar η_t respecto al tiempo e igualar a cero.

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial t} = I(x) \sigma \sin \sigma t + F(x) \sigma \cos \sigma t = 0 \quad (4.89)$$

Con lo que queda la expresión

$$\tan(\sigma t)_m = \frac{F(x)}{I(x)} \quad (4.90)$$

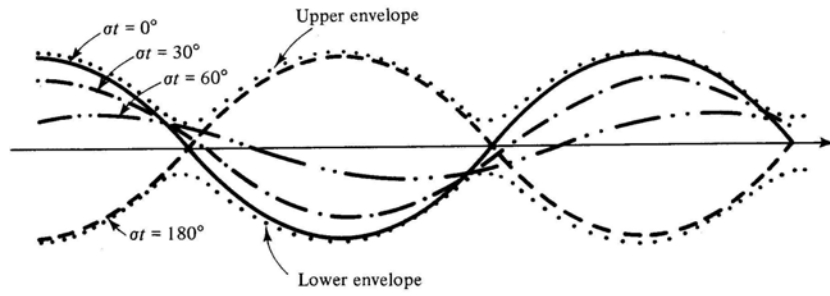


Figura 4.4. Dibujo de la envolvente del oleaje

La expresión $I(x)$ y $F(x)$ se relacionan entre si del modo que se expresa en la figura 4.5.

$$\cos(\sigma t)_m = \frac{I(x)}{\sqrt{I^2(x) + F^2(x)}}$$

$$\sin(\sigma t)_m = \frac{F(x)}{\sqrt{I^2(x) + F^2(x)}}$$

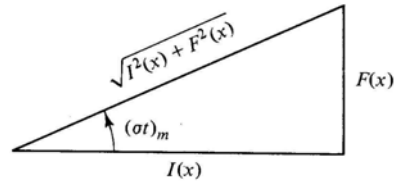


Figura 4.5.

Substituyendo $\cos(\sigma t)_m$ y $\sin(\sigma t)_m$ en la ecuación inicial, se puede ver que los valores extremos de η_t para cualquier localización x es:

$$[\eta_t(x)]_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{Hr}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx + \varepsilon)} \quad (4.91)$$

Lo que se propone en este apartado es utilizar las mediciones de tres sensores (WG5, WG6 y WG7, por su posición cercana al dique). De este modo, se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, y se puede calcular H_i , H_r y el desfase ε .

$$[\eta_t(x_{WG5})]_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{Hr}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx_{WG5} + \varepsilon)}$$

$$[\eta_t(x_{WG6})]_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{Hr}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx_{WG6} + \varepsilon)} \quad (4.92)$$

$$[\eta_t(x_{WG7})]_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{Hr}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx_{WG7} + \varepsilon)}$$

Para la resolución del sistema de ecuaciones no lineal se ha optado por el método iterativo de Newton-Rapson. Para poder aplicarlo, se debe expresar el sistema de ecuaciones de la forma $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{H_r}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx_{WG5} + \varepsilon) - [\eta_t(x_{WG5})]_{\max}^2 = 0 \\ f_2 &= \left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{H_r}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx_{WG6} + \varepsilon) - [\eta_t(x_{WG6})]_{\max}^2 = 0 \\ f_3 &= \left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{H_r}{2}\right)^2 + \frac{H_i H_r}{2} \cos(2kx_{WG7} + \varepsilon) - [\eta_t(x_{WG7})]_{\max}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

Siendo:

- $[\eta_t(x)]_{\max}$ medición de $\frac{1}{2}$ altura de ola, y x la posición del sensor que la mide.
- $\vec{x} = (H_i \quad H_r \quad \varepsilon)$ las incógnitas a encontrar.
- H_i altura de ola incidente
- H_r altura de ola reflejada
- ε desfase
- k número de onda, que depende del periodo (T), del calado (h) y de la aceleración gravitatoria (g) y que se calcula mediante la resolución de la ecuación implícita: $gk \tanh(kh) = (2\pi/T)^2$

Teniendo en cuenta que $\tilde{J}(\vec{x})$ es la jacobiana de $\vec{f}(\vec{x})$, el sistema iterativo a seguir según el método de Newton-Rapson es el siguiente:

$$\tilde{J}(\vec{x}) \cdot \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \vec{f}(\vec{x}) \quad (4.94)$$

4.3.5. Método de la envolvente aplicada a una fracción del registro

Los métodos utilizados hasta ahora, obtienen un oleaje incidente y un reflejado a partir de un registro. Su limitación consiste en que los datos proporcionados por el registro no son únicamente un oleaje incidente superpuesto con su reflejado en el dique, sino la superposición de oleajes reflejados que van rebotando en la pala y en el dique hasta que se ven amortiguados.

Para evitar este problema se ha propuesto utilizar las olas medidas por los sensores que estén formadas exclusivamente por un oleaje incidente más su reflejado en el dique. Luego, mediante el método de la envolvente, se calculará la reflexión utilizando exclusivamente las olas adecuadas del registro.

División entre la zona de oleaje incidente y reflejado en el registro

Al principio de la generación, las olas incidentes provenientes de la pala son registradas por los sensores WG5, WG6 y WG7, que miden en ese instante únicamente el oleaje incidente. Éstas avanzan hasta el dique, estructura en la que “rebotan” y vuelven en dirección a la pala. Al pasar esta ola reflejada por los sensores WG5, WG6 y WG7, las mediciones tomadas son únicamente la superposición de la ola incidente y la reflejada. Más tarde, la ola reflejada “rebota” de nuevo sobre la pala y vuelve a pasar por los sensores. En este momento los sensores ya no miden la superficie generada por el tren de olas incidentes más el reflejado por el dique, sino que también queda superpuesta una segunda reflexión en la pala:

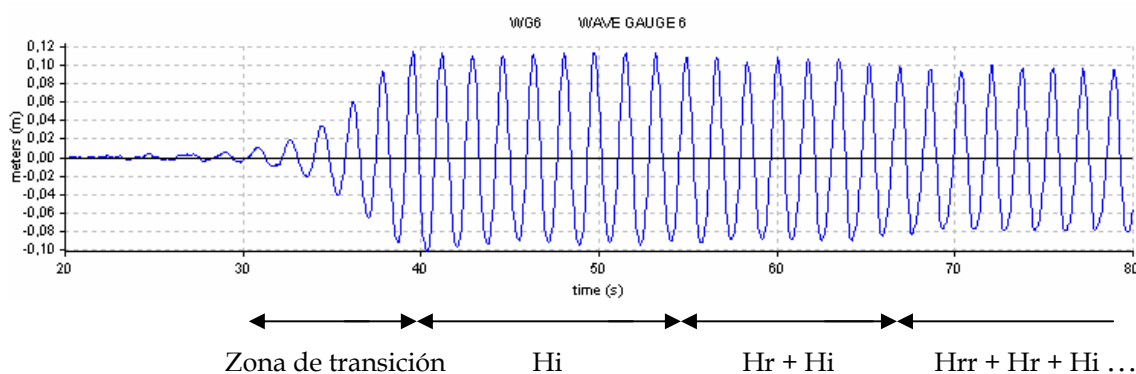


Figura 4.6. Parte inicial de un registro con dique

Para medir únicamente el primer tren de olas reflejado, y obtener así el coeficiente de reflexión, solamente se considerará esa pequeña zona del registro en la que ha aparecido una superposición del oleaje incidente más el reflejado. Es primordial medir la longitud de la ola generada, para saber entre qué dos picos de ola el registro muestra únicamente la superposición de un tren de olas incidente con su reflejada en el dique.

La limitación de este sistema es producida por la zona de transición, en la que la pala genera 5 olas iniciales para poder alcanzar la altura de ola pedida. Esto provoca que en caso de periodos algo elevados este método no sea aplicable, debido a que las olas se propagan a mayor velocidad y se confunde la zona de transición (5 olas) con la incidente pura.

4.4. El fenómeno de la resonancia.

Ligada a fenómenos de reflexión, la resonancia es el proceso por el cual la amplitud de una onda estacionaria o casi-estacionaria se ve aumentada. Desde un punto de vista general, tiene lugar en el momento que la oscilación generada por una fuerza externa tiene un periodo igual o similar al periodo de oscilación natural de la configuración geométrica de la infraestructura, y es problemática sobretodo en el régimen de ondas largas, que será el aquí considerado.

Las dos ecuaciones que gobiernan el fenómeno son las ecuaciones del *momentum* y la ecuación de continuidad, que resultan en un sistema no lineal de ecuaciones.

Asumiendo que las tensiones tangenciales son nulas en el fluido, se simplifican las ecuaciones del *momentum* a las ecuaciones de Euler siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Asumiendo que u, v son constantes a lo largo de la profundidad (ondas largas) y aplicando las condiciones de contorno en la superficie libre y el fondo del dominio se llega a la ecuación de continuidad simplificada siguiente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(\eta + h)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(\eta + h)] = 0 \quad (4.96)$$

Por otro lado, la presión en condiciones de aguas poco profundas (ondas largas) es $p = \rho g(\eta - z)$, con lo que derivando la expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= g \end{aligned} \quad (4.97)$$

Para linealizar las ecuaciones (4.95) y (4.96) y facilitar la obtención de soluciones analíticas, puede asumirse que u, v, w y h son pequeñas, despreciándose sus

productos. Sustituyendo además (4.97) en (4.95) las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{4.98}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[uh] + \frac{\partial}{\partial y}[vh] = 0\tag{4.99}$$

Asumiendo un contorno cerrado rectangular de fondo horizontal $h = d$ constante, de lados $x=0-l_x$ e $y=0-l_y$, partiendo de la ecuación (9.99) y de las dos primeras ecuaciones de (8.4) derivadas, pueden eliminarse u y v , obteniéndose la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \left(\frac{w}{k}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\tag{4.100}$$

donde w está relacionada con k a través de la relación de dispersión $w^2 = ghk^2$.

La solución de (4.100) para una onda estacionaria se encuentra mediante el método de separación de variables, y es del tipo

$$\eta(x, y, t) = A_{n,m} \cos(w_{n,m} t) \cos(k_x x) \cos(k_y y)\tag{4.101}$$

donde n y m (valores enteros 0,1,2,3...) definen los distintos modos de oscilación. Equivalen también al número de nodos a lo largo de los ejes x e y .

$$k_x = \frac{n\pi}{l_x}, k_y = \frac{m\pi}{l_y}, k = k_{n,m} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Se cumple la relación de dispersión $w_{n,m}^2 = ghk_{n,m}^2$

Los periodos naturales de esta oscilación son $T_{n,m} = 2\pi/w_{n,m}$

Por lo tanto, los periodos asociados a esta oscilación, en una piscina de profundidad constante d , de lados l_x y l_y y con paredes totalmente reflejantes, pueden expresarse a través de la siguiente ecuación

$$T_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{gd}} \left[\left(\frac{n}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{m}{l_y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.102)$$

En el caso simplificado de un canal de oleaje, donde se considera únicamente resonancia longitudinal, la ecuación (4.102) se reduce a ($m=0$, $n=1,2,3,\dots$):

$$T_n = \frac{2l_x}{n\sqrt{gd}} \quad (4.103)$$

Si se considera únicamente resonancia transversal ($n=0$, $m=1,2,3,\dots$) se tiene obtiene:

$$T_n = \frac{2l_y}{m\sqrt{gd}} \quad (4.104)$$