

#### **6.1. CONSIDERACIONES PREVIAS**

El análisis del error se ha planteado del siguiente modo: por un lado, se han analizado las distintas bases cartográficas disponibles para ejecutar el programa (en busca del error inherente) y, por otro, se ha tratado de expresar el error de truncamiento que se deriva de la modelización que el programa realiza del trazado, en función de la información cartográfica.

El error inherente es muy difícil de determinar con exactitud, si bien suele ser un error pequeño; por este motivo, el error de truncamiento se ha calculado independientemente de los posibles errores de la base cartográfica utilizada.

#### **6.2. ERRORES EN LA BASE CARTOGRÁFICA**

Como ya vimos, la herramienta desarrollada extrae la información acerca de la geometría del trazado a analizar de un soporte cartográfico implementado en el SIG *Geomedia Professional*. Los soportes cartográficos que se han considerado adecuados para la aplicación de la herramienta son los siguientes:

- Base topográfica 1:5.000 del ICC.
- Base topográfica 1:50.000 del ICC.
- Reconocimiento de la red de carreteras catalanas con tecnología *GPS*.

Se han descartado el resto de escalas disponibles en el archivo cartográfico del ICC, por tratarse de generalizaciones (derivaciones) de las cartografías 1:5.000 ó 1:50.000, según el caso, lo que significa que el trazado a menudo se simplifica (se eliminan curvas, etc.), pudiéndose perder por tanto información imprescindible para la correcta ejecución del programa.

A continuación se analizarán las tres fuentes de información cartográfica aptas para la ejecución del programa, tratando de acotar el error inherente en cada una de ellas.

##### **6.2.2. Base topográfica 1:5.000**

La principal fuente de información de la base topográfica 1:5.000 del ICC, para la altimetría y la planimetría, es la restitución fotogramétrica, a partir de fotografías aéreas de diversas escalas, si bien en algunas zonas también se ha utilizado cartografía reciente de

escalas mayores. Otras fuentes de información son *GeoFons* (fondo de recursos geodésicos) para los vértices geodésicos y la Base de datos de topónimos del ICC para la toponimia.

Pese a que la mínima unidad en que se almacenan los datos (resolución) en la fase de compilación es el centímetro, esto no significa que la precisión o exactitud de la información sea de centímetros.

Las especificaciones técnicas de esta base topográfica nos dicen (textualmente) que *el 90% de los puntos bien definidos recogidos por fotogrametría, tienen una precisión de 1 m en X,Y y 1,5 m en Z.*

No obstante, el *Institut Cartogràfic de Catalunya*\* nos asegura que el error inherente en las coordenadas de los puntos sobre los ejes viarios está “muy por debajo de 1 m”, si bien no conseguimos una acotación más precisa del error.

### 6.2.3. Base topográfica 1:50.000

La principal fuente de información de la base topográfica 1:50.000 del ICC es la restitución monoscópica, a partir de *ortofotos 1:25.000*. Otras fuentes de información son fotografías aéreas recientes; información sobre proyectos de infraestructuras, principalmente viarias y ferroviarias; la base de datos altimétricos del ICC, la base de datos de topónimos del ICC y las recopilaciones de datos anuales publicadas por los distintos departamentos de la *Generalitat*.

Las especificaciones técnicas de esta base topográfica nos dicen (textualmente) que *el 90% de los puntos bien definidos recogidos por restitución monoscópica, tienen una precisión de 10 m en X,Y. Esto se ha verificado sobre una muestra de la red de carreteras, de la red hidrográfica y de la línea de costa.*

La altitud de las cotas altimétricas extraídas del modelo de elevaciones del ICC tienen un error cuadrático medio de 5 m.

La cartografía 1:50.000 tiene, por tanto, una precisión notablemente inferior a la de la cartografía 1:5.000. En este caso, además, la cota de error que prescriben las especificaciones técnicas respecto a los puntos bien definidos (10 m) sí es aplicable a los ejes viarios (recordemos que en cartografía 1:5.000 este error es “muy inferior” a 1 m). Esto es debido, en parte, a que la restitución monoscópica implica una mayor interpretación (fotointerpretación de las ortofotos), mientras que en la cartografía 1:5.000 se realiza una restitución en 3D de la fotografía aérea, mucho más fiel al trazado real.

En resumen, que ambas bases topográficas se obtienen básicamente a partir de ortofotos, pero el método usado la base a 1:50.000 es menos preciso que el utilizado en la 1:5.000.

La única ventaja de esta base topográfica es que incorpora información sobre tramos en proyecto (incluso modificaciones de última hora), mientras que la base 1:5.000 es mucho más rígida en este sentido.

\*Comunicación personal con María Pla, Jefe de la Unidad de Cartografía 1:5.000 del ICC

#### 6.2.4. Reconocimiento de la red de carreteras catalanas con tecnología GPS

Este proyecto nace con la intención de obtener una base digital georeferenciada de los ejes de vía y puntos kilométricos (*pk's*) de la red de carreteras de Catalunya. Se realiza un reconocimiento *in situ* con tecnología GPS de los ejes de la vía, con información de características físicas asociada, y de los puntos kilométricos existentes, para todas las carreteras del Catálogo de carreteras de Catalunya.

En el caso de los ejes de vía, la captura de los datos se ha realizado con el vehículo en movimiento, mientras que en el caso de los *pk's* la toma de datos se realiza siempre con el vehículo parado, colocando el receptor GPS sobre el elemento para realizar la toma de datos.

La captura de las coordenadas del eje se ha realizado de forma constante, con una frecuencia de una coordenada por segundo; simultáneamente, se han registrado la distancia recorrida (medida por un odómetro) y la dirección (medida por un giroscopio).

Los ejes generados a partir del tratamiento de estos datos recogidos con el GPS constituyen, probablemente, la mejor de entre las bases cartográficas disponibles para la ejecución de la herramienta desarrollada (en el caso de aplicación en carreteras).

El *graf* generado a partir de estos datos del recorrido GPS combina la información disponible en la base topográfica 1:5.000 (*BT-5M*) con la información de campo, de modo que:

- En las zonas donde estaba disponible la base topográfica 1:5.000 y no había discordancias debidas a la desactualización con los datos recogidos con el GPS, los ejes son los de esta base 5.000 (tienen, por tanto la precisión del 5.000).
- En los casos de desactualizaciones y en el territorio no cubierto por la *BT-5M*, los ejes se han generado a partir de los datos tomados con el GPS (precisión estimada inferior a 2 metros).

Es decir, que el soporte cartográfico generado a raíz de este proyecto (disponible en los SIG del *Departament*) combina una precisión muy cercana a la de la *BT-5M*, con un nivel de actualización mucho mayor y una cobertura total de la red de carreteras presentes en el Catálogo de carreteras de Catalunya.

### 6.3. ERRORES AL MODELIZAR EL TRAZADO

Según lo descrito en el *Capítulo 3. Caracterización de la Base Cartográfica*, el trazado de las obras lineales se compone de una sucesión de alineaciones rectas, curvas circulares y clotoides. Vimos, también, que el programa caracteriza el trazado a través de un *modelo gráfico de reconocimiento de radios*, transformando el recorrido de puntos que obtiene la aplicación del SIG en una modelización del trazado formada únicamente por curvas circulares y rectas.

El *modelo gráfico de reconocimiento de radios* caracteriza de forma exacta tanto curvas circulares como alineaciones rectas, si obviamos el error inherente de la base cartográfica. El reconocimiento de radios se realiza utilizando principios geométricos básicos, con lo que siempre que dispongamos de 3 puntos de una curva circular, ésta será correctamente caracterizada. La determinación de alineaciones rectas se produce cuando encontramos un punto perfectamente alineado con los puntos anterior y posterior al mismo, con una precisión de 1 cm.

Lo que trataremos de determinar es, por tanto, el error cometido al caracterizar una clotoide mediante el *modelo gráfico de reconocimiento de radios*.

Para ello, calcularemos una *clotoide tipo* y analizaremos cómo se comporta el modelo propuesto al aplicar el programa sobre ella.

Las sucesiones de alineaciones admitidas por la norma actual de trazado de carreteras [1], en las que intervengan clotoides, son las siguientes:

- (1) *Alineación circular acordada mediante clotoides entre rectas.*
- (2) *Curvas circulares de sentido inverso acordadas mediante clotoides (curva en S).*
- (3) *Curvas circulares del mismo sentido acordadas mediante clotoide (curva en C).*

Estos tres tipos de alineaciones fueron descritas con más detalle en el *Capítulo 3*, concretamente en la sección 3.3. *La clotoide como elemento de trazado*.

### 6.3.1. Descripción del análisis

Para analizar el error cometido al aplicar el *modelo* a lo largo de una clotoide, nos interesará tomar el mayor rango de radios posible. Es por ello que nos decantamos por analizar un caso en el que se produzca una transición entre radio infinito y un cierto radio  $R$  (condición que se cumple en las alineaciones de los tipos (1) y (2)).

Para el presente análisis de errores, se ha escogido una alineación del tipo (1) simétrica; de este modo, la clotoide de entrada y la de salida son idénticas, con lo que es suficiente analizar una de ellas. Concretamente, la clotoide objeto de análisis es la clotoide de entrada a la curva circular (Figura 6.1). Señalar que la clotoide analizada se podría corresponder también con la clotoide de salida de una alineación del tipo (2), es decir, que ambos casos están igualmente representados.

Nuevamente, cabe destacar que el presente análisis de errores lo hacemos obviando el error inherente en las coordenadas, es decir, suponiendo que conocemos las coordenadas exactas de los puntos, y que el trazado describe exactamente una clotoide.

El análisis del error lo efectuaremos calculando el recorrido real de la clotoide propuesta y comparando los parámetros reales (teóricos) con lo que calcularía el programa. Para ello, necesitamos primero fijar unos ejes de coordenadas; así que, por simplicidad, hacemos coincidir la alineación recta de entrada con el eje de abscisas OX y fijamos el origen de

coordenadas en el punto de tangencia entre recta y clotoide (punto de inflexión de la clotoide).

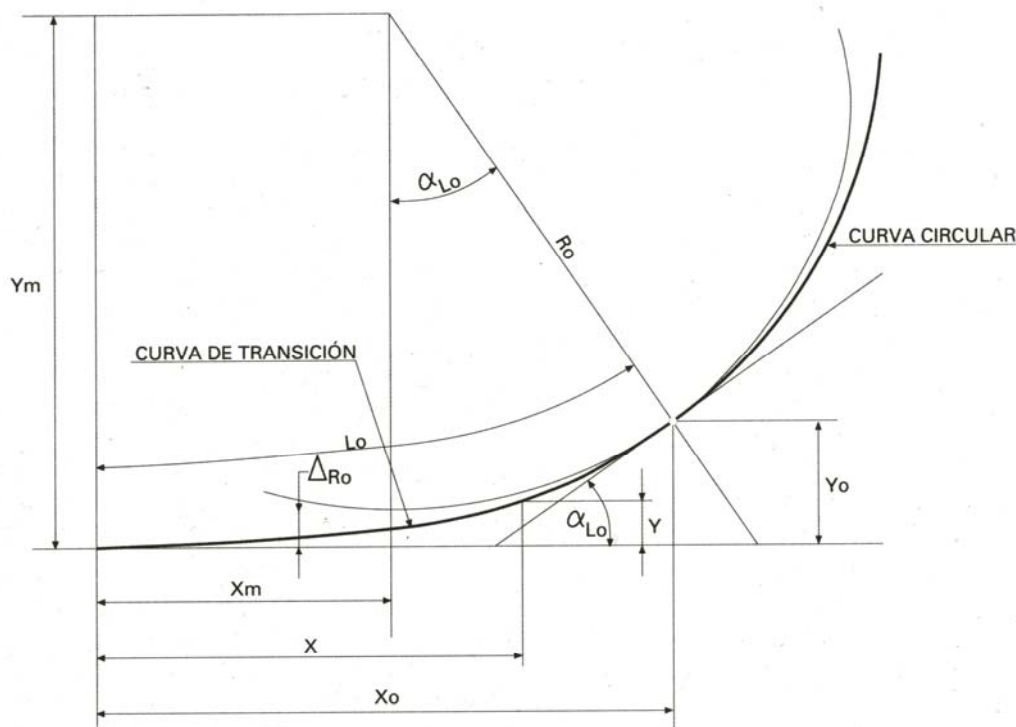


Figura 6.1 – Clotoide objeto de estudio. Fuente: [1]

Una vez fijados los ejes de coordenadas, el procedimiento seguido es el siguiente:

1. Parametrizamos la clotoide a analizar. Una vez parametrizada, podremos calcular las coordenadas de cualquier punto sobre la misma, así como los valores que toman la curvatura y el radio.
2. Discretizamos la clotoide, seleccionando 3, 5, 7 y 9 puntos de la misma (simulando los puntos que obtenemos de cartografía) y calculamos sus coordenadas de forma analítica.
3. Aplicamos el *modelo* a los puntos obtenidos.
4. Comparamos los resultados obtenidos con los valores reales, que conocemos al tener totalmente caracterizada la clotoide.

Para el presente análisis de errores se han elaborado una serie de macros (aplicaciones en *Visual Basic*) sobre *Microsoft Office Excel 2003*, tratando de recrear las tres partes del programa: reconocimiento de radios, cálculo de velocidades específicas y cálculo de la velocidad de recorrido libre.

En la propia hoja de cálculo de *Excel* generada se calculan, de forma analítica, las coordenadas reales de los puntos seleccionados, así como el radio y la curvatura reales en cada punto .

La primera de las *macros* programadas consiste en una adaptación del *modelo de reconocimiento de radios*, es decir, simula el tratamiento que el programa daría a los puntos escogidos, una vez que hemos calculado sus coordenadas.

La segunda aplicación programada calcula la velocidad específica resultante, tanto para el radio real como para el radio calculado mediante la primera *macro*.

Se ha construido también una *macro* que simula el cálculo de tiempos de recorrido que realiza el programa, que nos servirá para analizar el error cometido en el tiempo final de recorrido, en la última fase del presente análisis.

### 6.3.2. Parametrización de la clotoide analizada

Lo primero que debemos hacer es parametrizar la clotoide. Para ello definimos el radio de la curva circular ( $R_0$ ) y a partir de él se calcula el parámetro mínimo de la clotoide según la Normativa de Trazado [1].

Señalar se han realizado diferentes análisis en función del radio de la curva circular de salida de la clotoide y que éste ha resultado no ser determinante en los errores máximos obtenidos. Si lo es, no obstante, el parámetro de la clotoide ( $A$ ), como veremos más adelante

Tomamos pues, un radio de  $250\text{ m}$  para la curva circular, al ser éste lo suficientemente pequeño como para tener un desarrollo considerable de clotoide, y a la vez lo suficientemente grande como para que sea representativo de los diferentes tipos de vías con los que trabaja el programa. Aplicando las distintas limitaciones que impone la Norma de Trazado de la Instrucción de Carreteras [1] obtenemos que la longitud mínima para una clotoide de estas características es de  $66,18\text{ m}$ . No obstante, tomamos para el presente análisis una longitud de la clotoide de  $100\text{ m}$ , por simplicidad, y una vez comprobado que se cumple la normativa.

Así pues, siendo  $R_0 = 250\text{ m}$  y  $L_0 = 100\text{ m}$ , la clotoide objeto de estudio queda parametrizada según el parámetro:  $A = \sqrt{R_0 \cdot L_0} = 158,11$  ( $A^2 = 25\ 000$ ).

### 6.3.3. Formulación básica utilizada

La relación  $R \cdot L = A^2$ , ecuación intrínseca de la clotoide, se mantiene constante a lo largo de la misma y puede ser formulada de nuevo del siguiente modo:

$$R(s) \cdot s = A^2 \quad (6.1)$$

De este modo, diferenciamos claramente entre  $L$  (como longitud total de la clotoide) y  $s$  (longitud entre el punto de inflexión y un punto cualquiera de la misma) y vemos claramente como  $R$  se puede calcular en función de  $s$  de un modo simple:

$$R(s) = \frac{A^2}{s} \quad (6.2)$$

La curvatura en cada punto se define como la inversa del radio y, como se ha comentado anteriormente, varía linealmente con la longitud. Se define en función de  $s$  del siguiente modo:

$$k(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{s}{A^2} \quad (6.3)$$

Definimos asimismo  $\alpha$  como el ángulo de desviación que forma la alineación recta del trazado con la tangente en un punto cualquiera de la clotoide. Este ángulo es la generalización del ángulo  $\alpha_{L_0}$  que aparece en la Figura 6.1, siendo  $\alpha_{L_0}$  el ángulo  $\alpha$  en el punto de tangencia entre clotoide y curva circular. El ángulo  $\alpha$  se puede definir también en función de  $s$  del siguiente modo:

$$\alpha(s) = \frac{s^2}{2 \cdot A^2} \quad (6.4)$$

Por último, definimos las coordenadas  $X$ ,  $Y$  de un punto cualquiera de la clotoide en función de  $s$  y  $\alpha(s)$ :

$$X(s) = s \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha(s)^2}{10} + \frac{\alpha(s)^4}{216} \right] \quad (6.5)$$

$$Y(s) = s \cdot \left[ \frac{\alpha(s)}{3} - \frac{\alpha(s)^3}{42} + \frac{\alpha(s)^5}{1320} \right] \quad (6.6)$$

*Observación: las coordenadas  $X$  e  $Y$  se obtienen de un desarrollo en serie que ha sido simplificado obviando términos que se han considerado despreciables. Concretamente, el 4º término de la serie en  $X$  supone menos del 0,1% de lo que supone el 3º, que a su vez es prácticamente despreciable, ya que supone menos del  $7,5 \cdot 10^{-4}\%$  del valor total de  $X$  en todos los casos analizados.*

#### 6.3.4. Discretización de la clotoide: puntos base

La discretización de la clotoide consiste en seleccionar una serie de puntos, a los que denominaremos *puntos base*, simulando los puntos que el *modelo* extrae del soporte cartográfico. Podremos conocer las coordenadas de estos *puntos base*, así como el valor real de la curvatura y del radio, aplicando las fórmulas 6.2 a 6.6.

Analizaremos cuatro situaciones distintas para ver como varía el error en función del número de *puntos base* (o lo que es lo mismo, en función de la distancia entre *puntos base* consecutivos). Los cuatro casos analizados consisten en tomar 3, 5, 7 y 9 puntos a lo largo de la clotoide, tomando siempre como primer y último punto los puntos inicial y final de la clotoide respectivamente. Es decir, que tomamos como primer punto el punto de tangencia con la recta de entrada a la clotoide y como último punto el punto de tangencia con la curva de salida.

En las Tablas 6.1 a 6.4 -que se muestran a continuación- comprobaremos el error cometido al caracterizar los *puntos base* de la clotoide para los cuatro casos considerados. Estos puntos base, que simulan los puntos obtenidos de cartografía, son caracterizados con gran precisión por el modelo, como veremos a continuación.

Tal como se ha comentado, los valores de  $\alpha$ ,  $X$  e  $Y$ , así como de la curvatura y el radio reales ( $k_{real}$ ,  $R_{real}$ ) han sido obtenidos analíticamente, mientras que los valores de  $R_{modelo}$  y  $k_{modelo}$  se han obtenido aplicando el *modelo* a las coordenadas  $X$  e  $Y$  (mediante la primera de las macros programadas sobre Excel).

Para el cálculo de velocidades específicas ejecutamos la macro diseñada a tal efecto. El valor de  $ve_{real}$  se corresponde con el radio  $R_{real}$ , mientras que  $ve_{modelo}$  es la velocidad específica correspondiente al radio  $R_{modelo}$ .

En cada uno de cuatro casos analizados, los puntos inicial y final de la clotoide se han dejado sin caracterizar, ya que el *modelo*, para caracterizar un punto, necesita de los puntos anterior y posterior al mismo.

3 puntos	1	2	3
S	0	50	100
Alpha	0	0,05	0,2
X	0	49,99	99,60
Y	0	0,83	6,65
k_real	0	0,002	0,004
R_real	$\infty$	500	250
$R_{modelo}$		499,958	
$k_{modelo}$		0,002	
ve_real		100,257	
ve_modelo		100,253	
<b>Error en k</b>		0,008 %	
<b>Error en R</b>		0,008 %	
<b>Error en ve</b>		0,004 %	

Tabla 6.1 – Clotoide caracterizada por 3 puntos



5 puntos	1	2	3	4	5
s	0	25	50	75	100
alpha	0	0,0125	0,05	0,1125	0,2
X	0	25,00	49,99	74,91	99,60
Y	0	0,10	0,83	2,81	6,65
k_real	0	0,001	0,002	0,003	0,004
R_real	$\infty$	1000	500	333,333	250
R_modelo		999,995	499,997	333,332	
k_modelo		0,001	0,002	0,003	
ve_real		141,785	100,257	81,859	
ve_modelo		141,784	100,257	81,859	
Error en k (%)		5,21E-04	5,21E-04	5,15E-04	
Error en R (%)		5,21E-04	5,21E-04	5,15E-04	
Error en ve(%)		2,60E-04	2,60E-04	2,57E-04	

Tabla 6.2 - Clotoide caracterizada por 5 puntos

7 puntos	1	2	3	4	5	6	7
S	0	16,67	33,33	50,00	66,67	83,33	100,00
Alpha	0	0,0056	0,0222	0,0500	0,0889	0,1389	0,2000
X	0	16,67	33,33	49,99	66,61	83,17	99,60
Y	0	0,03	0,25	0,83	1,97	3,85	6,65
k_real	0	0,0007	0,0013	0,0020	0,0027	0,0033	0,0040
R_real	$\infty$	1500	750	500	375	300	250
R_modelo		1499,998	749,999	499,999	375,000	300,000	
k_modelo		0,0007	0,0013	0,0020	0,0027	0,0033	
ve_real		160,000	122,789	100,257	86,825	77,659	
ve_modelo		160,000	122,789	100,257	86,825	77,659	
Error en k (%)		1,03E-04	1,03E-04	1,03E-04	1,02E-04	9,19E-05	
Error en R (%)		1,03E-04	1,03E-04	1,03E-04	1,02E-04	9,19E-05	
Error en ve (%)		0,00E+00	5,14E-05	5,14E-05	5,10E-05	4,60E-05	

Tabla 6.3 - Clotoide caracterizada por 7 puntos

9 puntos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s	0	12,50	25,00	37,50	50,00	62,50	75,00	87,50	100,00
alpha	0	0,0031	0,0125	0,0281	0,05	0,0781	0,1125	0,1531	0,2
X	0	12,50	25,00	37,50	49,99	62,46	74,91	87,30	99,60
Y	0	0,01	0,10	0,35	0,83	1,63	2,81	4,46	6,65
k_real	0	0,0005	0,001	0,0015	0,002	0,0025	0,003	0,0035	0,004
R_real	∞	2000	1000	666,667	500	400	333,333	285,714	250
R_modelo		1999,999	1000,000	666,666	500,000	400,000	333,333	285,714	
k_modelo		0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	
ve_real		160,000	141,785	115,767	100,257	89,673	81,859	75,787	
ve_modelo		160,000	141,785	115,767	100,257	89,672	81,859	75,787	
Error en k (%)		3,26E-05	3,26E-05	3,26E-05	3,25E-05	3,22E-05	2,98E-05	1,67E-05	
Error en R (%)		3,26E-05	3,26E-05	3,26E-05	3,25E-05	3,22E-05	2,98E-05	1,67E-05	
Error en ve(%)		0,00E+00	1,63E-05	1,63E-05	1,63E-05	1,61E-05	1,49E-05	8,33E-06	

Tabla 6.4 - Clotoide caracterizada por 9 puntos

A tenor de los resultados obtenidos, se concluye que el *modelo* caracteriza los *puntos base* de la clotoide con una precisión más que aceptable. Concretamente, el error máximo se ha obtenido en el caso de tomar solamente 3 puntos (equiespaciados 50 m), con un error del 0,008% en el cálculo del radio (que coincide con el de la curvatura) y del 0,004% en el cálculo de la velocidad específica (Tabla 6.1).

Cabe señalar no obstante que, de los casos estudiados, el que más se aproxima a la realidad de la cartografía disponible es el último (9 puntos), ya que a pesar de no disponer en realidad de puntos equiespaciados, la distancia media entre los *puntos base* disponibles es cercana a los 10 m. En el caso en el que tomamos 9 *puntos base* (equidistancia = 12,5 m) el error máximo que se ha obtenido para el cálculo del radio (y la curvatura) es de un  $3,26 \cdot 10^{-5} \%$ , por un error del  $1,63 \cdot 10^{-5} \%$  en el cálculo de la velocidad específica.

A continuación comprobaremos que este mínimo error en los *puntos base* es, efectivamente, despreciable, ya que donde realmente podemos encontrar errores dignos de mención es en los puntos intermedios. La cota del error cometido en estos puntos de la clotoide que no conocemos (puntos situados entre *puntos base* consecutivos) será el objeto del análisis realizado en los apartados sucesivos.

De los resultados publicados en tablas 6.1 a 6.4, podemos extraer también dos conclusiones interesantes, que serán verificadas más adelante mediante teoría de propagación de errores:

- Que los errores relativos en el radio y la curvatura coinciden.
- Que el error relativo en la velocidad específica es la mitad del error relativo en el radio.

### 6.3.5. Análisis del error en el cálculo de curvaturas a lo largo de una clotoide

Al no disponer de todos los puntos del trazado, el *modelo* realiza una discretización del mismo, consistente en asociar el radio (y la curvatura) calculados en los *puntos base* (puntos que sí conocemos del trazado) a los puntos intermedios más cercanos.

En la Figura 6.2 se aprecia el efecto de esta discretización sobre el cálculo de la curvatura ( $k$ ); el recorrido real de curvaturas es lineal con la longitud a lo largo de la clotoide (pendiente =  $1/A^2$ ), mientras que lo que hace el *modelo* es una simulación escalonada de curvaturas. En los *puntos base*, ambas curvaturas prácticamente coinciden, ya que el máximo error relativo se alcanza en el valor  $k = 0,005$  y es de un  $3,2 \cdot 10^{-5} \%$  (de ahora en adelante, obviaremos este error).

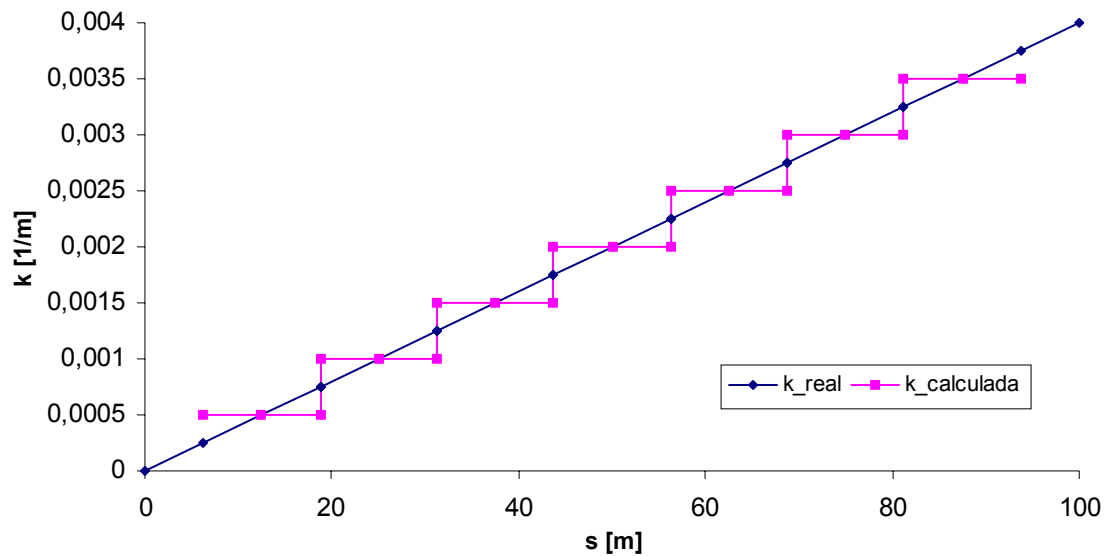


Figura 6.2 - Análisis del error en el cálculo de curvaturas a lo largo de una clotoide

Siendo  $h$  la distancia entre *puntos base* consecutivos, el error máximo (absoluto) cometido en la curvatura tiene lugar en los puntos intermedios (a una distancia  $h / 2$  de los *puntos base* anterior y posterior) y su valor puede deducirse de forma trivial:

$$E_{\text{máx}} (k) = \frac{h}{2A^2} = \frac{h}{2 \cdot R_0 \cdot L_0} \quad (6.7)$$

De la expresión 6.7, se desprende que la cota del error cometido en el cálculo de curvaturas a lo largo de una clotoide:

- Es directamente proporcional a la distancia entre *puntos base* consecutivos ( $h$ ).
- Es inversamente proporcional al cuadrado del parámetro de la clotoide ( $A^2$ ).

La cota del error relativo, lógicamente, cumple también con lo anterior y se puede expresar del modo siguiente:

$$r_{\text{máx}}(k) = \frac{h}{2A^2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{h}{2A^2} \cdot R \quad (6.8)$$

Concretamente, para la clotoide analizada ( $A^2 = 25.000$ ;  $h = 12,5$  m), la cota del error absoluto vale:

$$E_{\text{máx}}(k) = \frac{h}{2A^2} = \frac{12,5}{2 \cdot 25000} = 0,00025 \text{ m}^{-1} \quad (6.9)$$

Y la cota del error relativo a la curvatura de salida de la clotoide ( $k = 0,004 \text{ m}^{-1}$ ):

$$r_{\text{salida}}(k) = \frac{0,00025}{0,004} = 0,0625 \quad (6,25\%) \quad (6.10)$$

### 6.3.6. Análisis del error en el cálculo de radios a lo largo de una clotoide

Aplicando teoría de propagación de errores, se deduce que la cota del error para el cálculo del radio vale:

$$E_{\text{máx}}(R) \cong \frac{E_{\text{máx}}(k)}{k^2} = E_{\text{máx}}(k) \cdot R^2 = \frac{h}{2A^2} \cdot R^2 \quad (6.11)$$

Es decir, que la cota del error para el cálculo del radio depende inversamente del cuadrado de la curvatura, o lo que es lo mismo, depende directamente del cuadrado del radio. Esto significa que, así como para el cálculo de curvaturas la cota del error absoluto tan solo depende del parámetro  $A$  de la clotoide y la distancia entre puntos  $d$ , en el cálculo de radios la cota del error absoluto depende también del propio radio  $R$  (es proporcional a  $R^2$ ).

En cuanto a la cota del error relativo, es trivial deducir que su expresión es:

$$r_{\text{máx}}(R) = \frac{E_{\text{máx}}(R)}{R} = \frac{h}{2A^2} \cdot R \quad (6.12)$$

Efectivamente, tal y como intuíamos en el capítulo 6.3.4, este error relativo en el radio coincide con el de la curvatura (ver fórmula 6.8). No tan sólo las cotas del error coinciden, sino que todo error relativo en curvatura implica un error idéntico en el radio y viceversa.

$$r(k) = r(R); \quad \forall k, R \quad (6.13)$$

En la Figura 6.3 podemos apreciar como influye este error en el cálculo del radio; en los puntos más cercanos al punto de tangencia con la curva circular ( $s = 100$ ;  $R = 250$  m) apenas hay error en el cálculo del radio, mientras que en las cercanías a la tangencia con la recta ( $s = 0$ ;  $R = \infty$ ) el error tiende a infinito a la vez que lo hace  $R$ .

Como veremos más adelante, estos errores que cometemos para radios muy elevados no tienen apenas influencia en el cálculo de velocidades y tiempos de recorrido, ya que a partir de un cierto valor del radio, lo que limita la velocidad ya no es el radio sino las prestaciones del vehículo, los condicionantes de seguridad y las normas de tráfico.

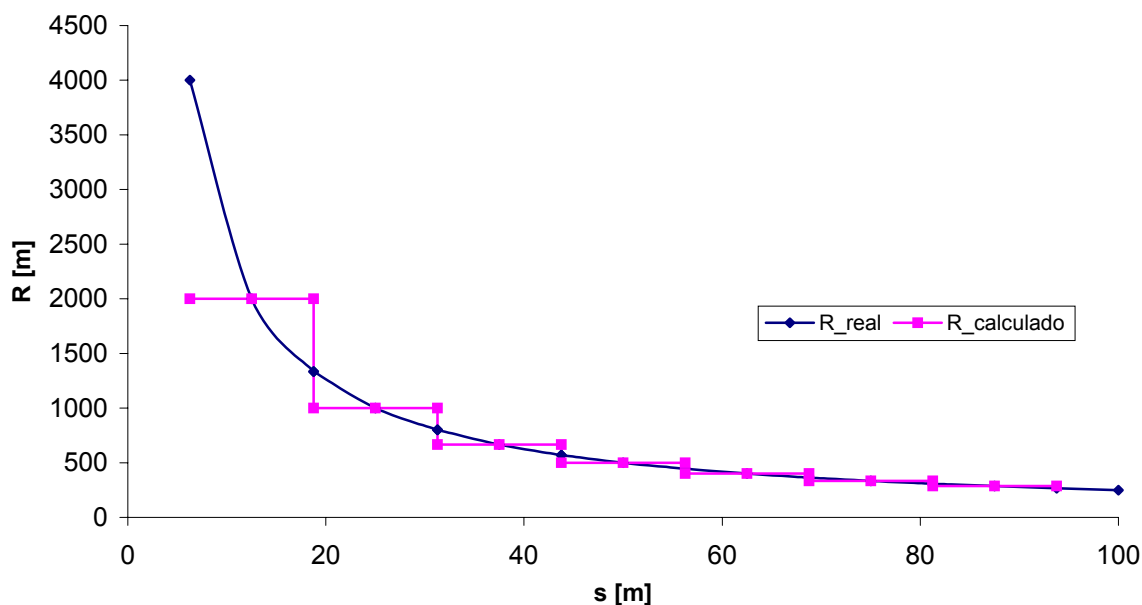


Figura 6.3 - Análisis del error en el cálculo de radios a lo largo de una clotoide

### 6.3.7. Análisis del error en el cálculo de velocidades a lo largo de una clotoide

La velocidad específica en función del radio se ha calculado de maneras algo distintas según el tipo de vía. No obstante, podemos generalizar el cálculo de la velocidad específica como el resultado de multiplicar un cierto valor por la raíz cuadrada del radio. Este valor, que engloba conceptos como el peralte y la aceleración transversal no compensada, podemos suponerlo constante a efectos del cálculo de errores. Es decir, una expresión general podría ser:

$$v_e = C \cdot \sqrt{R}; \quad \forall R < R_{lim} \quad (6.14.a)$$

$$v_e = v_{m\acute{a}x}; \quad \forall R \geq R_{lim} \quad (6.14.b)$$

Siendo:

$v_e$  = velocidad específica.

$C$  = “constante” que engloba, entre otros, el peralte y la aceleración transversal no compensada.

$R$  = radio.

$v_{m\acute{a}x}$  = velocidad máxima.

$R_{lim}$  = radio límite, a partir del cuál  $v_e = v_{m\acute{a}x}$ .

Concretamente, la fórmula 6.14.a con  $C = 4,5$  nos da exactamente la expresión de la velocidad específica para trazados ferroviarios, considerando un peralte de  $160 \text{ mm}$  y una aceleración sin compensar de  $0,65 \text{ m/s}^2$ .

Aplicamos de nuevo la teoría de propagación de errores para obtener una expresión de la cota del error absoluto en el cálculo de la velocidad específica:

$$E_{\text{máx}}(v_e) \cong v_e'(R) \cdot E_{\text{máx}}(R) = \left( \frac{C}{2 \cdot \sqrt{R}} \right) \cdot E_{\text{máx}}(R) = \frac{C \cdot h}{4 \cdot A^2} \cdot R^{3/2} \quad (6.15)$$

Como puede verse, la cota del error absoluto en el cálculo de velocidades específicas crece también con  $R$ , pero su crecimiento es sensiblemente más lento que para el error en el radio, obteniéndose errores, tanto absolutos como relativos, menores.

En concreto, la cota del error relativo en el cálculo de la velocidad específica vale:

$$r_{\text{máx}}(v_e) = \frac{E_{\text{máx}}(v_e)}{v_e} = \frac{E_{\text{máx}}(v_e)}{C \cdot \sqrt{R}} = \frac{h}{4 \cdot A^2} \cdot R \quad (6.16)$$

Es decir, que la cota del error relativo para el cálculo de la velocidad específica es exactamente la mitad que la cota del error en el radio (ver fórmula 6.12). Nuevamente, este resultado viene a confirmar lo que ya intuíamos en el capítulo 6.3.4: que el error cometido en el cálculo del radio se propaga, al calcular la velocidad específica, reduciéndose a la mitad (en términos relativos).

$$r(v_e) = \frac{1}{2} \cdot r(R) \quad (6.17)$$

Cabe destacar que este error relativo en la velocidad específica (6.17) se da tan sólo para velocidades inferiores a la velocidad máxima de la vía (ver expresión 6.14). A partir de un cierto valor del radio, se alcanza la velocidad máxima  $v_{\text{max}}$  y el error en el cálculo de la velocidad específica se hace nulo. Así, pues, la expresión del error relativo en la velocidad específica se puede expresar del siguiente modo:

$$r(v_e) = \frac{1}{2} \cdot r(R) ; \quad \forall v_e < v_{\text{max}} \quad (6.18a)$$

$$r(v_e) = 0 ; \quad \forall v_e \geq v_{\text{max}} \quad (6.18b)$$

Esta  $v_{\text{max}}$  es, en carreteras, la velocidad máxima a la que vamos a permitir circular a los vehículos y, en ferrocarriles, la velocidad máxima que permiten el material móvil y las condiciones de seguridad y señalización.

La Tabla 6.5 muestra la evolución del error en el cálculo de las velocidades específicas. Se ha cogido una vez más la clotoide de referencia ( $A^2 = 25 \ 000$ ) discretizada en 9 puntos

base. En la Tabla aparecen representados 7 de los 9 *puntos base* (todos excepto el primero y el último, al no estar éstos caracterizados por el *modelo*), así como los puntos intermedios entre *puntos base* consecutivos, que aparecen “doblados”, al ser puntos de salto o escalón (frontera entre dos tramos). En estos puntos intermedios, como hemos visto anteriormente, es donde se producen los mayores errores.

En la Tabla 6.5 vemos claramente cómo los errores máximos obtenidos en el radio no tienen ninguna repercusión en el cálculo de las velocidades específicas, mientras que los errores obtenidos para radios menores, se reducen a la mitad si hablamos del ferrocarril, y tienen una reducción aún mayor en el caso de carreteras. Cabe señalar, también, que cuanto menor es la velocidad máxima de la vía, menores son los errores cometidos al calcular las velocidades.

*Observación: las velocidades máximas se han fijado en 160 km/h en el caso del ferrocarril, 120 km/h en carreteras del tipo 1 y 90 km/h en carreteras del tipo 2.*

9 puntos				FERRO CARRIL			CARRET. TIPO 1			CARRET. TIPO 2		
S	R_real	R_mod	Error (%)	Ve_real	Ve_mod	Error (%)	Ve_real	Ve_mod	Error (%)	Ve_real	Ve_mod	Error (%)
6,25	4000,0	2000,0	50,00	160,00	160,00	0,00	120,00	120,00	0,00	90,00	90,00	0,00
12,5	2000,0	2000,0	0,00	160,00	160,00	0,00	120,00	120,00	0,00	90,00	90,00	0,00
18,75	1333,3	2000,0	50,00	160,00	160,00	0,00	120,00	120,00	0,00	90,00	90,00	0,00
18,75	1333,3	1000,0	25,00	160,00	141,78	11,38	120,00	120,00	0,00	90,00	90,00	0,00
25	1000,0	1000,0	0,00	141,78	141,78	0,00	120,00	120,00	0,00	90,00	90,00	0,00
31,25	800,0	1000,0	25,00	126,82	141,78	11,80	120,00	120,00	0,00	90,00	90,00	0,00
31,25	800,0	666,7	16,67	126,82	115,77	8,71	120,00	119,09	0,75	90,00	90,00	0,00
37,5	666,7	666,7	0,00	115,77	115,77	0,00	119,09	119,09	0,00	90,00	90,00	0,00
43,75	571,4	666,7	16,67	107,18	115,77	8,01	112,24	119,09	6,11	90,00	90,00	0,00
43,75	571,4	500,0	12,50	107,18	100,26	6,46	112,24	106,51	5,10	90,00	90,00	0,00
50	500,0	500,0	0,00	100,26	100,26	0,00	106,51	106,51	0,00	90,00	90,00	0,00
56,25	444,4	500,0	12,50	94,52	100,26	6,07	101,63	106,51	4,81	90,00	90,00	0,00
56,25	444,4	400,0	10,00	94,52	89,67	5,13	101,63	97,40	4,16	90,00	90,00	0,00
62,5	400,0	400,0	0,00	89,67	89,67	0,00	97,40	97,40	0,00	90,00	90,00	0,00
68,75	363,6	400,0	10,00	85,50	89,67	4,88	93,68	97,40	3,97	90,00	90,00	0,00
68,75	363,6	333,3	8,33	85,50	81,86	4,26	93,68	90,38	3,52	90,00	88,42	1,75
75	333,3	333,3	0,00	81,86	81,86	0,00	90,38	90,38	0,00	88,42	88,42	0,00
81,25	307,7	333,3	8,33	78,65	81,86	4,08	87,42	90,38	3,38	85,54	88,42	3,37
81,25	307,7	285,7	7,14	78,65	75,79	3,64	87,42	84,75	3,06	85,54	82,93	3,05
87,5	285,7	285,7	0,00	75,79	75,79	0,00	84,75	84,75	0,00	82,93	82,93	0,00
93,75	266,7	285,7	7,14	73,22	75,79	3,51	82,32	84,75	2,95	80,56	82,93	2,94

Tabla 6.5 – Análisis del error en el cálculo de velocidades específicas a lo largo de una clotoide ( $A^2 = 25000$ ; 9 puntos base)

De los errores obtenidos en la Tabla 6.5, se han destacado los siguientes:

- En **rojo**, el máximo error en R (50%), que no implica error alguno en el cálculo de las velocidades específicas.

- En **naranja**, el error máximo en la velocidad específica en ff.cc. (11,80%), provocado por un error en el radio del 25% que, por contra, no genera errores en los otros casos (carreteras de tipo 1 y 2).
- En **violeta**, el error máximo en la velocidad específica en carreteras de tipo 1 (6,11%), a raíz de un error en el radio del 16,67% que aún no tiene influencia en la carretera de tipo 2 ( $v_{max} = 90 \text{ km/h}$ )
- En **azul**, el error máximo en la velocidad específica en carreteras del tipo 2 (3,37%), con un error en el radio del 8,33 %.

Las conclusiones que se pueden sacar de los resultados obtenidos son claramente optimistas, ya que se confirma lo que ya anunciábamos:

- ✓ Los errores realmente importantes obtenidos al calcular el radio no tienen influencia alguna al calcular la velocidad específica.
- ✓ Para aquellos radios que sí influyen en la velocidad específica, el error en el cálculo del radio se reduce (al menos a la mitad) al calcular la velocidad específica.

La Figura 6.4 ilustra perfectamente lo que ocurre cuando el *modelo* calcula las velocidades específicas a lo largo de la clotoide analizada, concretamente para una carretera de tipo 1 ( $v_{max} = 120 \text{ km/h}$ ). Los errores que cometíamos en el radio al caracterizar la clotoide mediante el *modelo*, se ven notablemente reducidos al hacer el cálculo de las velocidades específicas y, como veremos más adelante, se reducen aún más al calcular velocidades y tiempos de recorrido, ya que los errores en cierto modo se compensan, al ser, de modo alterno, errores por exceso y por defecto.

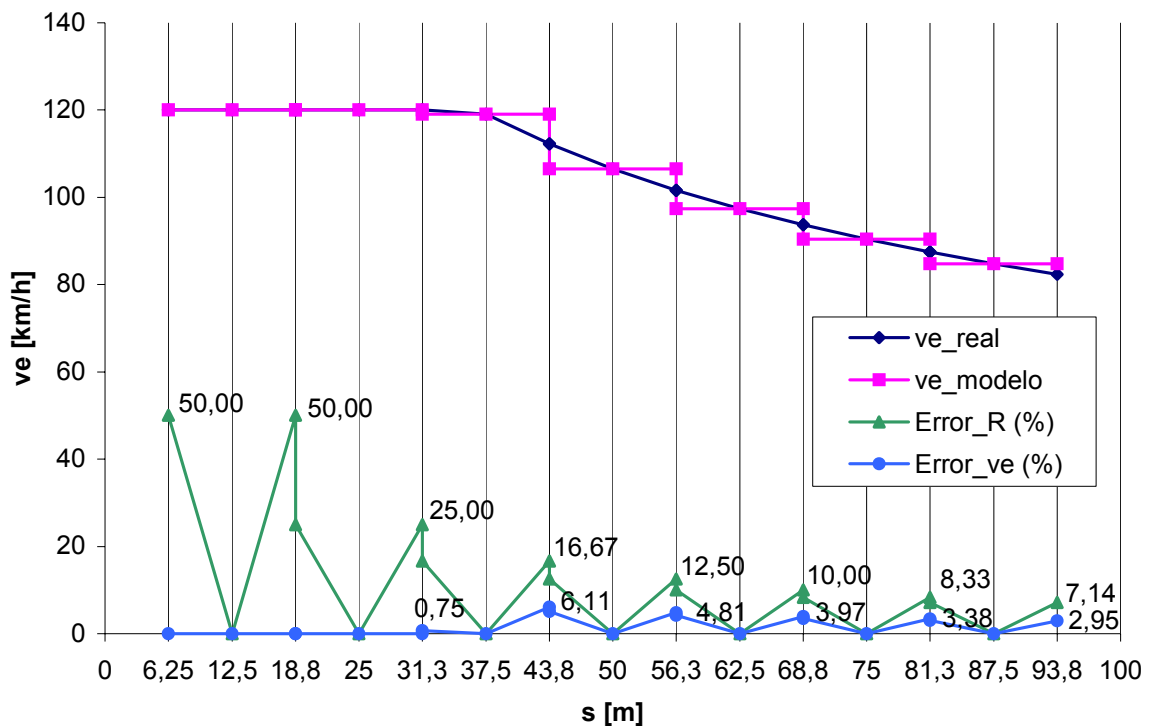


Figura 6.4 - Análisis del error en el cálculo de velocidades específicas a lo largo de una clotoide (carretera tipo 1)



## 6.4. ANÁLISIS DEL ERROR EN EL CÁLCULO DEL TIEMPO DE RECORRIDO

Para concluir el presente análisis, evaluaremos el error cometido al calcular el *tiempo de recorrido libre* a lo largo de una clotoide. Para ello, calculamos en primer lugar el recorrido teórico de un vehículo a *velocidad de recorrido libre* y, a continuación, aplicamos el programa completo a una serie de puntos del trazado (*puntos base*).

El recorrido teórico que usaremos para comparar se ha calculado considerando que conocemos las coordenadas exactas de puntos del trazado (sobre la clotoide propuesta) cada metro. Es decir, considerando una distancia entre *puntos base* ( $h$ ) de 1 m. De este modo, podemos usar el algoritmo programado para calcular el recorrido de referencia y evitamos tener que generar un algoritmo nuevo. Además, el cálculo del tiempo de recorrido con  $h = 1 \text{ m}$  se puede considerar una aproximación suficientemente verosímil al tiempo real de recorrido libre.

El análisis se ha realizado considerando que el trazado pertenece a una carretera del tipo 2 ( $v_{max} = 90 \text{ km/h}$ ), aunque se haría de forma análoga tanto para trazados ferroviarios como para carreteras del tipo 1.

Iniciamos el presente análisis con dos objetivos claros:

1. Obtener una aproximación fiable del error que implica la utilización del *modelo de reconocimiento de radios* en el cálculo del *tiempo de recorrido libre*.
2. Encontrar una relación entre el error en el *tiempo de recorrido libre* y la distancia entre *puntos base* consecutivos.

Tomamos nuevamente la clotoide de referencia (ver apartados 6.3.1, 6.3.2), con radio de salida  $R_0 = 250 \text{ m}$  y longitud  $L_0 = 100 \text{ m}$  ( $A^2 = 25\ 000$ ).

Analizaremos cuatro situaciones distintas para ver como varía el error en función del número de *puntos base* (o lo que es lo mismo, en función de la distancia entre *puntos base* consecutivos). Los cuatro casos analizados consisten en tomar 3, 5, 7 y 9 puntos a lo largo de la clotoide, tomando siempre como primer y último punto los puntos inicial y final de la clotoide. Estos cuatro casos se corresponden, respectivamente, con distancias entre *puntos base* ( $h$ ) de 50 m, 25 m, 16.67 m y 12.50 m.

### 6.4.1. Caso 1º: Velocidad de entrada máxima y deceleración “cómoda”

La velocidad de entrada a la clotoide se fija en 90 km/h (velocidad máxima de la vía) y no se fija velocidad de salida, sino que ésta viene fijada por la curva circular posterior a la clotoide. Para conseguir este efecto, se considera un tramo de curva circular posterior a la clotoide de longitud igual a la distancia entre *puntos base* considerada en cada caso. Esto es, suponemos un *punto base* adicional, que ya no pertenece a la clotoide sino a la curva circular de salida, manteniéndose la distancia entre *puntos base*.

Puesto que se trata de una clotoide con transición decreciente de radios y, por consiguiente, de velocidades específicas, es importante fijar la deceleración. *En la conducción normal, los conductores suelen utilizar deceleraciones entre 1 y 2 m/s<sup>2</sup> y sólo ocasionalmente mayores de 3 m/s<sup>2</sup> [4]; en este caso se ha fijado una deceleración de 1,5 m/s<sup>2</sup>, ya que presuponemos condiciones de comodidad en la conducción.*

La Figura 6.5 sirve para explicar lo que ocurre en este caso: en condiciones de deceleración “cómoda” (entre 1 y 2 m/s<sup>2</sup>), lo único que marca el recorrido de velocidades ha resultado ser el punto a partir del cuál el *modelo* reconoce que ha llegado a la curva circular. Esto es debido a que la recta que describe la velocidad de recorrido en función del tiempo, al frenar el vehículo, es lo suficientemente tendida como para no “notar” el descenso (escalonado) de velocidades específicas a lo largo de la clotoide. Recordemos que el proceso de frenado se calcula hacia atrás.

Concretamente, la Figura 6.5 muestra lo ocurrido en el caso  $h = 12,5 m$ , pero en los otros casos la casuística es la misma.

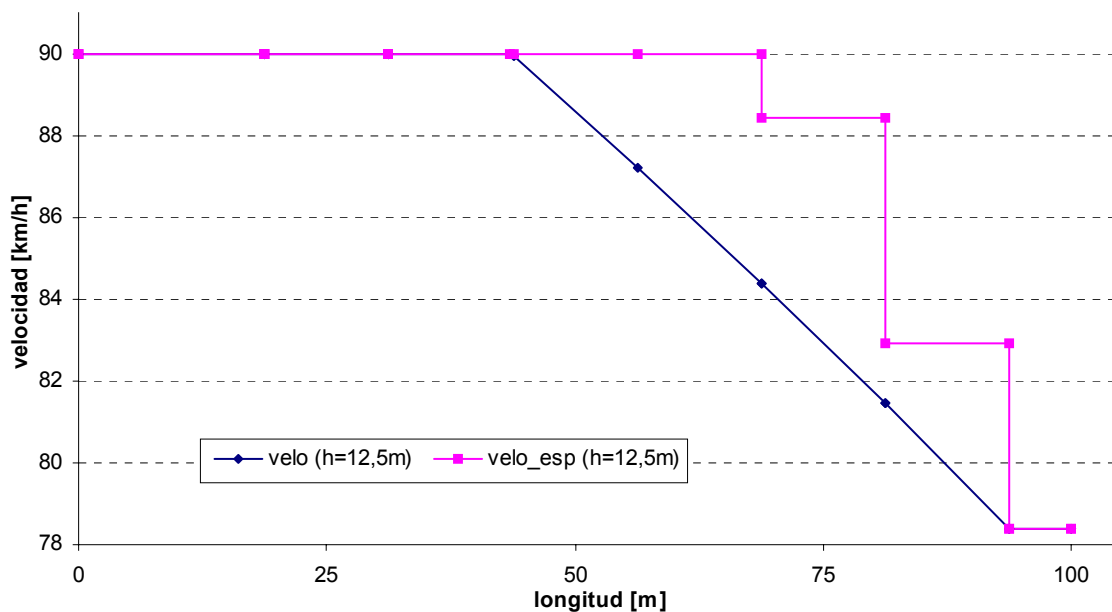
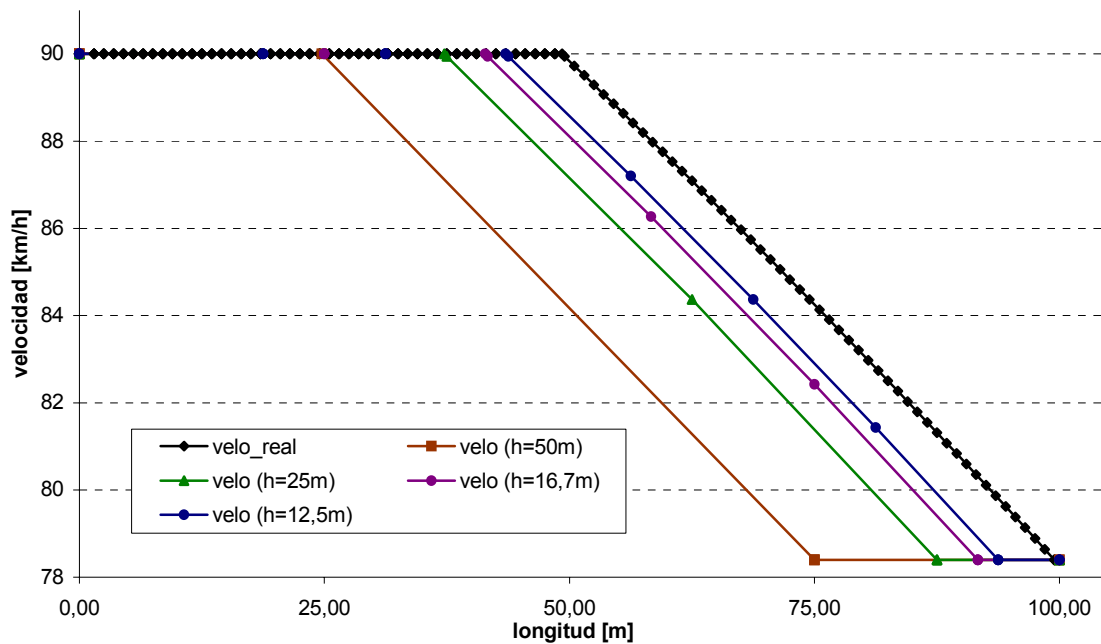


Figura 6.5 – Velocidad específica y de recorrido libre a lo largo de una clotoide (h=12,5m)

La Figura 6.6 muestra el recorrido de velocidades a lo largo de la clotoide para distintos valores de  $h$ . Este recorrido de velocidades, como se ha comentado, tan sólo depende del punto a partir del cuál el *modelo* reconoce el radio de la curva circular.

En el primer caso (3 puntos base a lo largo de la clotoide,  $h = 50 m$ ), el programa ya considera el radio de la curva circular 25 m antes de llegar a la misma, es decir, que la reducción de velocidad se adelanta  $h/2$ . Análogamente, los otros casos estudiados adelantan también  $h/2$  el proceso de deceleración (ver Figura 6.6).



**Figura 6.6 – Evolución de la velocidad de recorrido libre a lo largo de una clotoide en función de la distancia entre puntos base (caso 1º)**

Estas divergencias en el recorrido de velocidades respecto al recorrido teórico, como es lógico, provocan un cierto error en el cálculo del *tiempo de recorrido libre*. Los errores obtenidos para los cuatro casos considerados se muestran a continuación en la Tabla 6.6.

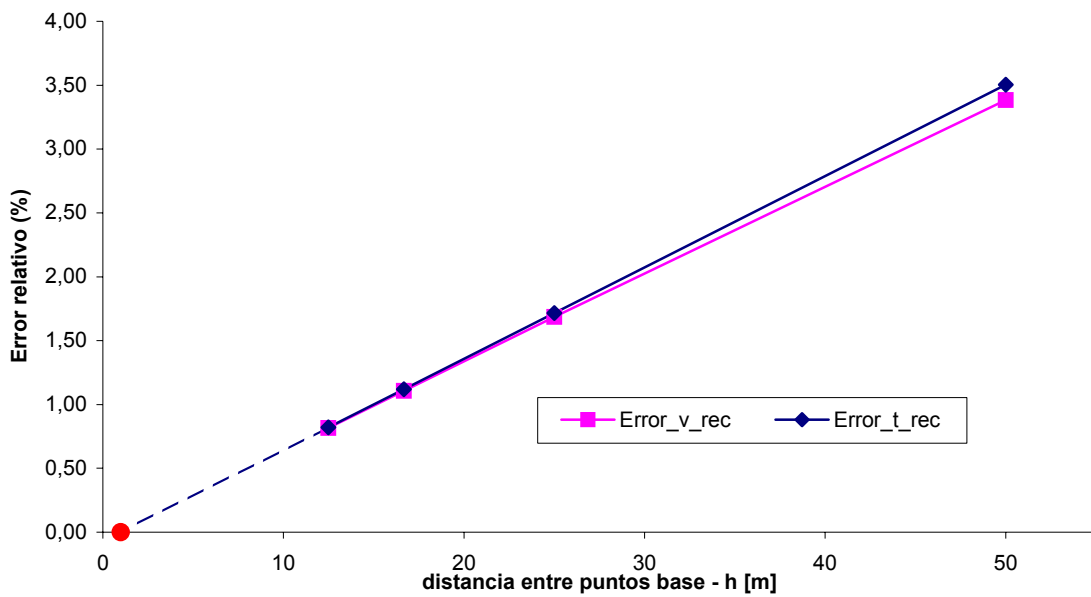
Cabe señalar que los resultados han sido notablemente satisfactorios, incluso en el caso extremo de considerar una distancia *h* entre *puntos base* de 50 metros.

h	Error_t_rec (%)	Error_v_rec (%)
50	3,5032	3,3846
25	1,7158	1,6869
16,67	1,1201	1,1077
12,50	0,8222	0,8155

**Tabla 6.6 – Evolución del error en el cálculo de tiempos y velocidades de recorrido en función de la distancia entre puntos base (caso 1º)**

Estos resultados nos dan una primera aproximación del error, que ha resultado ser de alrededor del 1% para valores de *h* cercanos a los que utiliza el programa, tanto para el *tiempo de recorrido libre* como para la *velocidad media de recorrido*.

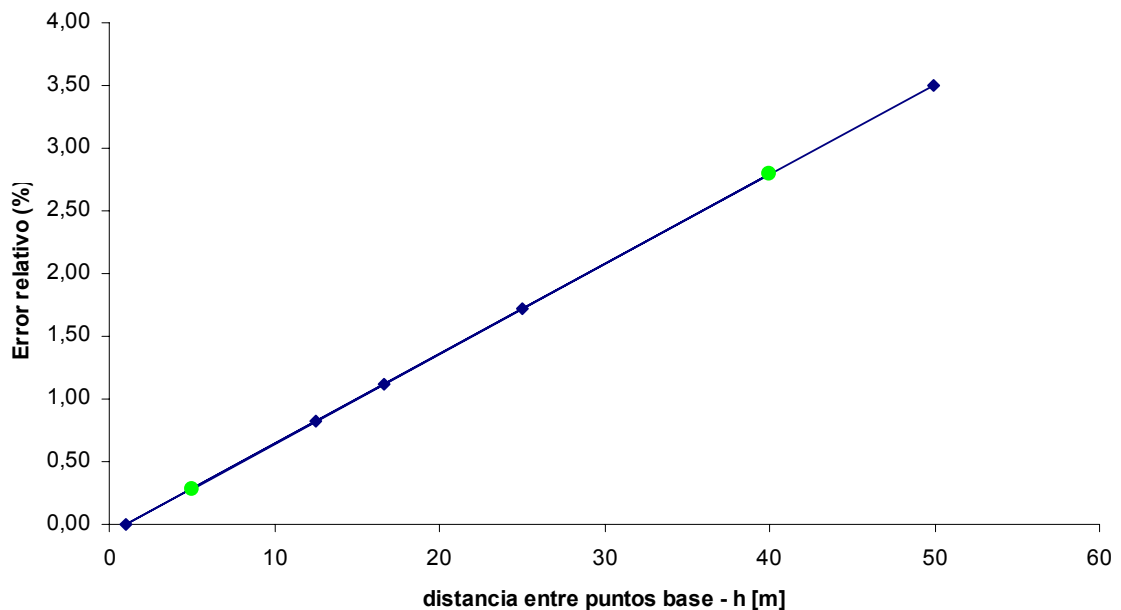
Otra conclusión interesante que podemos extraer de los resultados obtenidos es que la evolución del error en función de la distancia entre *puntos base* consecutivos (*h*) tiene un aspecto claramente lineal. Si graficamos los resultados obtenidos para el error relativo, el resultado es el que se observa en la Figura 6.7.



**Figura 6.7 – Evolución del error en el cálculo de tiempos y velocidades de recorrido en función de la distancia entre puntos base (caso 1º)**

Cabe señalar que una relación lineal entre el error y  $h$  no era exactamente lo que se podía prever; por este motivo, se han realizado 2 nuevas discretizaciones de la clotoide, tomando, respectivamente,  $h = 5$  m y  $h = 40$  m.

Se ha repetido todo el proceso, y los errores obtenidos en el tiempo de recorrido han sido un 0,286 % para  $h = 5$  m y un 2,788 % para  $h = 40$  m. Si incorporamos estos 2 nuevos resultados a la gráfica del error en función de  $h$ , éstos aparecen efectivamente alineados con los anteriores, tal como muestra la Figura 6.8.



**Figura 6.8 – Evolución del error en el tiempo de recorrido en función de  $h$**

Se podría decir, por tanto, que hemos alcanzado los dos objetivos marcados al inicio del estudio:

- ✓ Tenemos una primera aproximación del error cometido.
- ✓ Hemos encontrado una relación (lineal) entre dicho error y  $h$ .

Los errores relativos en la velocidad y el tiempo de recorrido no coinciden exactamente debido a un pequeño error de redondeo al calcular la velocidad media en función del tiempo de recorrido. Este error de redondeo, paradójicamente, reduce el error relativo en la velocidad para los valores de  $h$  calculados ( $h \geq 12,5 \text{ m}$ ), pero su progresión lineal nos indica que para valores de  $h$  menores la situación es inversa.

Si nos centramos en el error cometido en el *tiempo de recorrido libre*, vemos que los puntos se encuentran perfectamente alineados según la siguiente expresión:

$$Error\_t\_rec = 0,07149 \cdot h - 0,07149 \quad (6.19)$$

Prolongando la recta, obtenemos el *punto de error nulo* (representado por un círculo rojo en la Figura 6.7), que se corresponde exactamente con el valor de  $h = 1 \text{ m}$ . Esto es debido a que el recorrido teórico de velocidades (el que tomamos como referencia) lo hemos calculado precisamente tomando  $h = 1 \text{ m}$ .

Repetimos el proceso dos veces más, pero esta vez calculamos el recorrido teórico de velocidades tomado respectivamente  $h = 0,5 \text{ m}$  y  $h = 2 \text{ m}$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.7, incluyendo el pendiente ( $m$ ) y el término independiente ( $k$ ) que definen la recta del error relativo en función de  $h$  (referido este error al recorrido teórico definido por  $h = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0,5 \text{ m}$  ó  $h = 2 \text{ m}$ , según el caso).

La expresión general del error relativo en el *tiempo de recorrido libre* en función de la distancia entre *puntos base* ( $h$ ) es, por tanto, la siguiente:

$$Error\_t\_rec = m \cdot h + k \quad (6.20)$$

Error_con $h = 1 \text{ m}$		Error_con $h = 0,5 \text{ m}$		Error_con $h = 2 \text{ m}$	
$h$	Error_t_rec	$h$	Error_t_rec	$h$	Error_t_rec
50,00	3,5032 %	50,00	3,5402 %	50,00	3,4292 %
25,00	1,7158 %	25,00	1,7522 %	25,00	1,6432 %
16,67	1,1201 %	16,67	1,1562 %	16,67	1,0478 %
12,50	0,8222 %	12,50	0,8582 %	12,50	0,7501 %
1,00	0,0000 %	0,50	0,0000 %	2,00	0,0000 %
$m=$	0,07149	$m=$	0,07152	$m=$	0,07144
$k=$	-0,0715	$k=$	-0,0358	$k=$	-0,1429
$h(0)=$	1,00	$h(0)=$	0,50	$h(0)=$	2,00

**Tabla 6.7 – Variación del error en el tiempo de recorrido en función del recorrido de velocidades que tomamos como referencia**

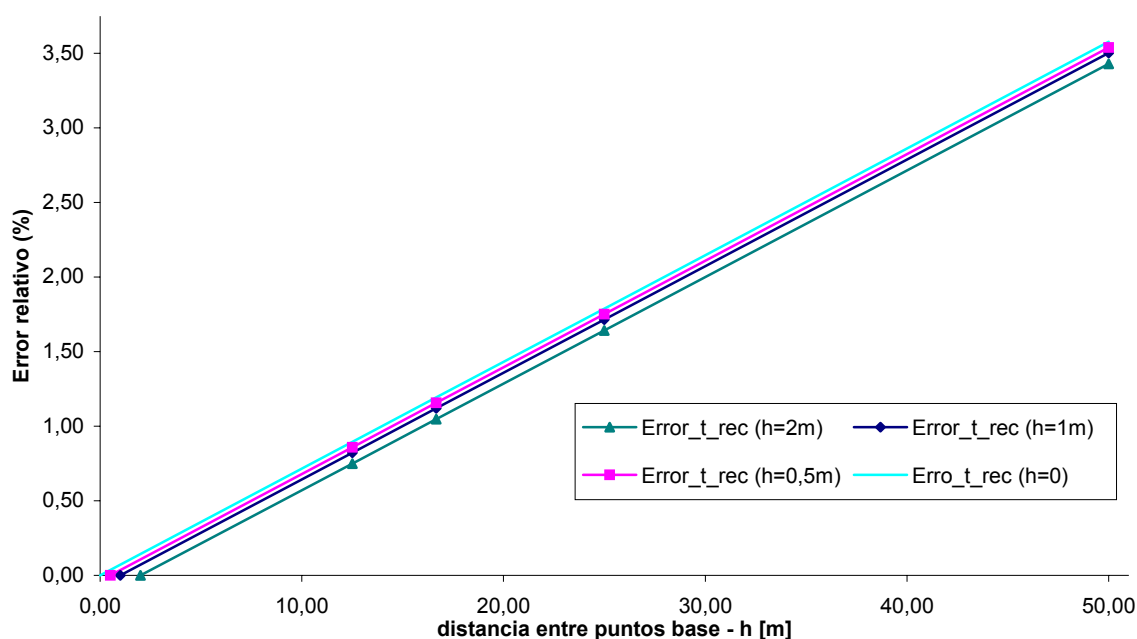
De la observación de los resultados que se muestran en la Tabla 6.7, obtenidos para diferentes *recorridos de referencia*, se deduce que el error relativo en el *tiempo de recorrido libre* sigue siempre una recta con la distancia  $h$ .

Si bien es cierto que el pendiente de esta recta crece ligeramente al tomar recorridos de referencia más precisos ( $h$  menor), esta variación del pendiente es mínima, por lo que, de ahora en adelante, la aproximación del recorrido teórico con  $h = 1\text{ m}$  será aceptada como válida, dado que lo que buscamos es tan solo una aproximación del error. A lo sumo, para obtener una aproximación mejor, se puede desplazar paralelamente la recta del error  $1\text{ m}$  a la izquierda, puesto que lógicamente el error nulo se dará en realidad para  $h = 0\text{ m}$ .

En este caso, dado que la variación del pendiente parece seguir una progresión lineal con  $h$ , se asume como aproximación más probable al error relativo real la siguiente expresión:

$$Error\_t\_rec (real) = 0,07154 \cdot h \tag{6.21}$$

La Figura 6.9 muestra la evolución del error calculado en el tiempo de recorrido, para los distintos valores que hemos tomado como referencia ( $h = 0,5\text{ m}$ ;  $h = 1,0\text{ m}$ ;  $h = 2,0\text{ m}$ ). Se ha incluido también la recta definida en la expresión 6.21, que se ha asumido como aproximación más probable al error relativo real. Visualmente, las 4 rectas asemejan ser totalmente paralelas.



**Figura 6.9 – Evolución del error en el tiempo de recorrido en función del recorrido de velocidades que tomamos como referencia**

La Tabla 6.8 muestra los valores de esta nueva aproximación al error real en el tiempo de recorrido libre. Estos errores apenas divergen de los obtenidos en la Tabla 6.6 (en la que, recordemos, la referencia era el tiempo calculado con  $h = 1\text{ m}$ ).

Se ha añadido, no obstante, el error estimado para  $h = 10\text{ m}$ , puesto que esta distancia se asemeja bastante a las condiciones reales de cartografía (puntos separados 10 m). El error obtenido para  $h = 10\text{ m}$  es de un 0,715%, lo que supone, en un recorrido de 2 horas, un error inferior al minuto (alrededor de los 50 segundos).

h	Error_t_rec (real)
10,00	0,715 %
12,50	0,894 %
16,67	1,192 %
25,00	1,789 %
50,00	3,577 %

Tabla 6.8 – Nueva aproximación al error en el tiempo de recorrido libre (caso 1º)

#### 6.4.2. Caso 2º: Velocidad de entrada máxima y deceleración “brusca”

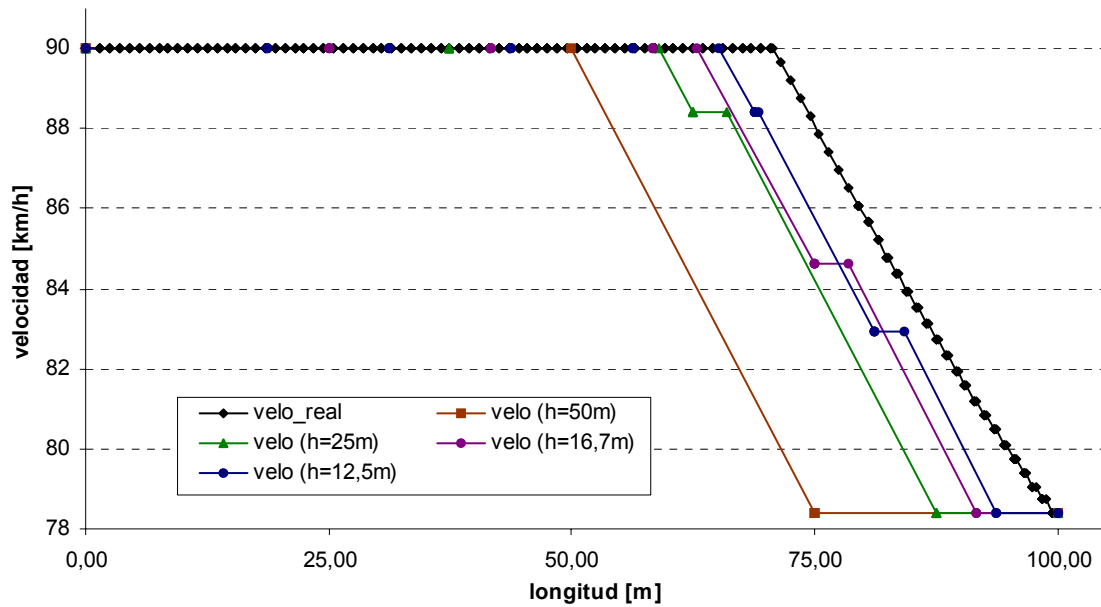
En el apartado anterior hemos visto que, en condiciones de deceleración “cómoda” (entre 1 y 2  $m/s^2$ ), lo único que marca el recorrido de velocidades es el momento a partir de cuál el *modelo* reconoce que ha llegado a la curva circular, puesto que no se alcanza en ningún caso la velocidad específica que se corresponde con el radio de los pequeños tramos intermedios en que ha quedado dividida la clotoide

En este 2º caso, consideraremos una deceleración algo más “brusca”, pero sin llegar a valores de conducción agresiva; concretamente, consideramos una deceleración del vehículo de 3  $m/s^2$ .

De este modo, tendremos caracterizados todos aquellos casos en los que la clotoide sea lo suficientemente suave como para que el *modelo* actúe “a tramos”, ya que en el caso anterior encontrábamos una deceleración constante desde la velocidad máxima hasta la velocidad específica de la curva de salida, sin que el recorrido de velocidades se viese afectado por el descenso (escalonado) de velocidades específicas a lo largo de la clotoide.

Nuevamente, fijamos la velocidad de entrada a la clotoide en 90 km/h y añadimos un tramo de curva circular posterior a la clotoide de longitud igual a la distancia entre *puntos base* considerada en cada caso. De este modo, añadimos un *punto base* más, que no se encuentra sobre la clotoide sino sobre la curva circular de salida, manteniendo la distancia entre *puntos base* ( $h$ ).

La Figura 6.10 muestra lo que ocurre en este caso: la velocidad específica (definida a tramos) nos marca tramos intermedios a velocidad constante, que antes no aparecían debido a que la deceleración era menor y no se alcanzaba la velocidad específica de los tramos intermedios (recordemos que el proceso de frenado se calcula hacia atrás).



**Figura 6.10 – Evolución de la velocidad de recorrido libre a lo largo de una clotoide en función de la distancia entre puntos base (caso 2°)**

La Tabla 6.9 muestra los errores obtenidos en este caso; muestran una evolución similar, aunque son aproximadamente entre un 10-15 % *menores* que los obtenidos en el primer caso. La linealidad entre el error y la distancia  $h$  no es ya tan clara y evidente en este caso, aunque la tendencia lineal es apreciable.

h	Error_t_rec	Error_v_rec
50	3,1494 %	3,0532 %
25	1,3999 %	1,3806 %
16,67	0,9566 %	0,9476 %
12,50	0,6980 %	0,6931 %

**Tabla 6.9 – Evolución del error en el cálculo de tiempos y velocidades de recorrido en función de la distancia entre puntos base (caso 2°)**

Representando gráficamente los resultados obtenidos para el *tiempo de recorrido libre* y ajustando una recta por regresión lineal (ver Figura 6.11), podemos obtener la siguiente expresión para el error en función de  $h$ :

$$Error\_t\_rec = 0,0657 \cdot h - 0,1591 \quad (6.22)$$

El *coeficiente de determinación* (que sirve para determinar la bondad del ajuste) vale:  $R^2=0,9975$ , por lo que podemos dar el ajuste como bueno.

Nuevamente los errores se han calculado tomando como referencia el recorrido de velocidades calculado con  $h = 1m$ . Si desplazamos la recta del error de modo que el error



nulo se dé para  $h = 0$ , obtenemos una mejor aproximación al error real. La nueva expresión del error sería de este tipo:

$$Error\_t\_rec (real) = 0,0657 \cdot h \tag{6.23}$$

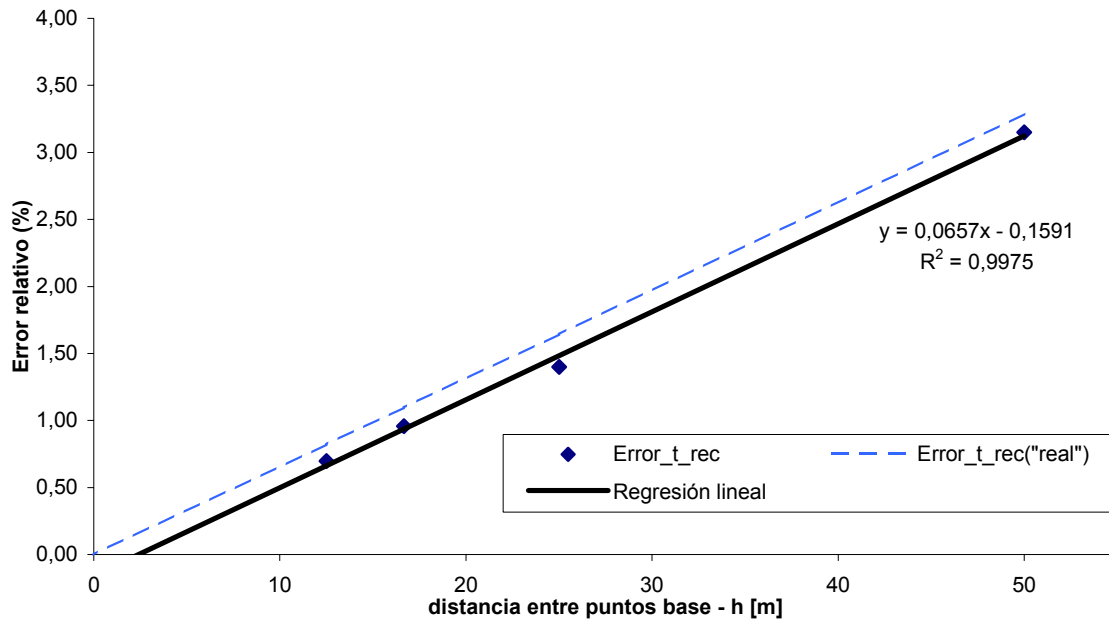


Figura 6.11 – Evolución del error en el cálculo del tiempo de recorrido en función de la distancia entre puntos base (caso 2º)

Igual que en el caso 1º, recalculamos los errores a partir de esta nueva aproximación al error, añadiendo también el caso  $h = 10\text{ m}$ , que en este caso vale un  $0,657\%$ , algo menor que el calculado en el caso 1º, aunque muy similar.

h	Error_t_rec (real)
10,00	<b>0,657 %</b>
12,50	0,821 %
16,67	1,095 %
25,00	1,643 %
50,00	3,285 %

Tabla 6.10 – Nueva aproximación al error en el tiempo de recorrido libre (caso 2º)

## 6.5. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DEL ERROR

- ✓ El error de la base cartográfica no es fácilmente cuantificable, pero todo indica que es muy reducido.
- ✓ El error cometido al modelizar el trazado es prácticamente nulo (del orden de  $1 \cdot 10^{-5}$  %) en los *puntos base*, que son aquellos cuyas coordenadas conocemos a través de la cartografía.
- ✓ En aquellos puntos del trazado no caracterizados por la cartografía (puntos intermedios entre *puntos base*) se producen errores puntuales que pueden ser relevantes. Concretamente, la cota del error relativo en el cálculo la velocidad específica se expresa según 6.24, llegando a errores máximos del 10–12% para valores de la velocidad específica cercanos a la velocidad máxima de la vía.

$$r_{\text{máx}}(v_e) = \frac{h}{4 \cdot A^2} \cdot R \quad \forall v_e < v_{\text{max}} \quad (6.24)$$

siendo:

$h$  = distancia entre puntos base consecutivos, en m.

$A$  = parámetro de la clotoide, en  $\text{m}^2$ .

$R$  = radio de curvatura, en m.

- ✓ Los errores en magnitudes integradas, como el tiempo de recorrido libre, se mantienen en valores muy reducidos, *inferiores al 1%* para distancias entre puntos base ( $h$ ) del orden de 10 – 15 m, que son los valores habituales.