CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE ESTADO LÍMITE Y TRABAJO PREVIO.

La teoría de estado límite trata de modelar el colapso de un sólido sometido a una carga uniforme y estática, bajo la hipótesis que dicho material es rígido y perfectamente plástico. La suposición de material rígido comportará que el material no se deforme elásticamente cuando las cargas aplicadas generen pequeñas tensiones internas en el material. Por otra parte, la suposición de material perfectamente plástico, hará que dicho material se deforme de manera indefinida al llegar a su límite plástico. De esta manera estaremos tratando con un tipo de material falto de una ecuación constitutiva que gobierne las tensiones del material, y por lo tanto dichas tensiones no estarán unívocamente determinadas por una ecuación de equilibrio. Por lo tanto nos encontramos con un problema que no tiene solución única, introduciendo la primera singularidad del problema de estado límite respecto al problema de elasticidad.

Siguiendo con lo anterior, el material sólo incurrirá en deformaciones cuando dichas tensiones internas no puedan neutralizar las fuerzas externas aplicadas. Las tensiones internas máximas admitidas por el material vienen determinadas por la condición de fluencia del material tratado. Cuando sobrepasamos las tensiones internas máximas admitidas por el material este comienza a deformarse de forma indefinida (deformación plástica). Es en este instante, cuando decimos que el material está "fluyendo", haciéndolo de forma indefinida mientras sigan aplicadas las cargas y obviemos los grandes cambios en la geometría del problema. Por lo tanto, cuando trabajamos en estado límite expresamos las deformaciones del problema en forma de campo de flujo y no de desplazamientos como lo haríamos en elasticidad.

Es muy importante dejar claro que el modelo de estado límite sólo nos ofrece como resultado una instantánea del momento de colapso o rotura del material. Nos ofrece una fotografía del momento de colapso donde podemos observar los vectores de flujo del material en forma de campo de flujo y los estados tensionales de todos los puntos en ese instante. Por lo tanto se trata de un modelo que no nos ofrece información sobre la que pasaría justamente después con la configuración deformada si mantuviéramos la carga aplicada.

En resumen, el problema de estado límite se resumiría así:

Tenemos un medio continuo sometido a una distribución fija de fuerzas, separadas en fuerzas de volumen (en el interior del cuerpo) y fuerzas de superficie (aplicadas en el contorno). El objetivo final sería encontrar el múltiplo más pequeño de la distribución de carga sobre el contorno que nos provocara el colapso del medio continuo. Dicho de otra manera, buscamos el mínimo múltiplo de carga aplicada que nos provoque un flujo plástico en el medio continuo. Este mínimo múltiplo que buscamos se denomina comúnmente multiplicador de colapso. Por lo tanto si imponemos la carga aplicada como la unidad, obtendremos un multiplicador de colapso de dicha carga que sería directamente la carga de colapso del medio continuo. El problema también permitiría obtener otros resultados secundarios como, por ejemplo, los campos de tensiones y de flujo, o la zona de plastificación (reconociendo todos aquellos puntos que se sitúan sobre la superficie de fluencia, donde se produce el flujo plástico).

El cálculo de determinados casos mediante elasticidad lineal nos da resultados poco realistas físicamente. Es de aquí, de donde surge la necesidad de complementar los cálculos en elasticidad lineal con cálculos más realistas, como por ejemplo el cálculo en estado límite. La resolución del problema en estado límite es mucho más compleja de lo que sería resolver el mismo problema en elasticidad lineal, en contra de lo que podríamos pensar en un principio. Existen problemas actuales en ingeniería que necesitan modelos de cálculo mucho más realistas, para complementar los resultados que se obtendrían con los métodos clásicos de cálculo. Por tanto, el interés en resolver el problema que nos ocupa, se debe a intentar satisfacer las necesidades actuales en ingeniería.

El objetivo principal de esta tesina es hacer aplicable el cálculo en estado límite a problemas de ingeniería en el campo de los geomateriales, tratando materiales como el hormigón que puedan ser modelados a partir de parámetros como la cohesión y ángulo de rozamiento interno, mediante el modelo de rotura de Drucker-Prager. Esta tesina pretende dar un paso adelante, a partir de [1], donde se expone el cálculo de problemas en estado límite para materiales con límite de plasticidad constante para todos los puntos, como podrían ser los metales con la condición de rotura clásica de Von Mises.

El problema a resolver es un problema continuo de punto de silla en un dominio infinito, de una forma bilineal (representando la disipación de energía interna) tanto en tensiones como en velocidades (flujo plástico). Se trata de maximizar la disipación de energía interna (forma bilineal) dentro de un campo de tensiones admisibles determinado por la condición de rotura o superficie de fluencia y a la vez minimizarla en un espacio lineal de flujo plástico que sea cinemáticamente admisible para el que la disipación de energía provocada por las fuerzas externas aplicadas sea constante.

Es importante dejar claro que la principal dificultad vendrá asociada a la no linealidad que nos introducirá en el problema la condición de rotura o superficie de fluencia. La condición de rotura de Drucker-Prager está expresada a partir de sus tensiones en forma cuadrática, introduciéndonos en el problema la principal diferencia respecto al problema en elasticidad lineal. Además, veremos más adelante, como la estructura del problema a resolver nos ofrece propiedades de dualidad que nos simplificarán en gran medida el trabajo de resolución del mismo. En [2] ó [3] se puede ver como se puede aplicar la dualidad a nuestro problema y como quedan los principios estático y cinemático. En dichos principios están basados los teoremas clásicos de cota superior e inferior de estado límite utilizados tanto para hacer aproximaciones aceptables en cálculo de estructuras como en mecánica de suelos. Como podremos observar en capítulos posteriores, la gran ventaja de aplicar la dualidad al problema que nos ocupa, es que ambos principios son convexos y sólo involucrarán en sus respectivas formulaciones las tensiones (principio estático) o flujo plástico (principio cinemático).

El primer paso será discretizar el medio continuo mediante la introducción de espacios dimensionales adecuados. Una vez que tenemos discretizado el medio continuo, la resolución del problema discreto en elasticidad es simplemente la resolución de un sistema lineal de ecuaciones más o menos grande. Por el contrario el problema en estado límite es un problema bastante grande de optimización no lineal (debido a la condición de rotura), representando la mayor dificultad añadida. La resolución de dicho problema de optimización no lineal mediante el cálculo de cotas estrictas ya fue realizada en [1] para una condición de rotura clásica de Von Mises empleada habitualmente para metales. A lo largo de la tesina se irá exponiendo todo está metodología de resolución del problema.

Los métodos empleados para la resolución del problema de optimización no lineal están basados en procesos iterativos. En cada iteración, dichos algoritmos iterativos manejan matrices muy grandes y pocos elementos no nulos, requiriendo para avanzar en cada iteración, de una solución previa del sistema de ecuaciones. La complejidad del sistema matricial es mucho mayor que la que resulta del problema en elasticidad lineal, teniendo una convergencia de la solución numérica muchísimo más delicada y sensible que en el caso elástico lineal. En el capítulo 3 de la tesina se explicará con más detalle en que consiste este proceso iterativo de cálculo exponiendo los algoritmos básicos de cálculo y todas aquellas técnicas que se utilizan para controlar y asegurar la convergencia de la solución.

A pesar de todas las complicaciones que se han ido mencionando, se han realizado diferentes avances en el campo de la resolución de problemas convexos de optimización no lineal que nos permitirán afrontar la resolución del problema con garantías de éxito. A partir de aquí intentaré hacer una cronología de todos aquellos trabajos previos que han hecho posible llegar al punto actual y que permitirán resolver el problema que actualmente nos preocupa:

● Linealización de la superficie de fluencia convexa mediante la obtención de una aproximación poliédrica en [4].

● Resolución del problema a partir de la superficie de fluencia linealizada mediante el método Simplex de programación clásica lineal en [2,5,6].

● Resolución del mismo problema anterior en dos dimensiones empleando el Método del Punto Interior en [7,8].

● Primeros intentos de resolución del problema para condiciones de fluencia convexas sin linealizar pero limitadas sobre mallas poco densas en [9,10].

● Aplicación de un primer paquete de programación no lineal al principio estático del estado límite en [3].

● Desarrollo de métodos específicos para la resolución de la condición de fluencia convexa para densidades de malla moderadas (siempre por debajo de los 1000 elementos) en [11,12].

● Consecución de los primeros resultados satisfactorios para densidades de malla bastante elevadas con condición de fluencia convexa, cuadrática y limitada de Von Mises en [13], gracias a la explotación de las propiedades de dualidad del problema y aplicando las ideas del Método del Punto Interior. En este punto cabe comentar que había grandes problemas para resolver el problema introduciendo condiciones de fluencia no limitadas, ya que la restricción de incompresibilidad del flujo requerida necesitaba de un espacio de elementos finitos demasiado voluminoso.

● Consecución de resultados satisfactorios para una condición de fluencia convexa, cuadrática y no limitada de Von Mises en [14], usando [15] para la resolución del problema de optimización no lineal.

● Introducción del refinamiento automático de malla en [16], mejorando el anterior método de resolución.

● Cálculo de las cotas superior e inferior del multiplicador de colapso para problemas de mecánica de suelos usando elementos finitos lineales y un algoritmo de optimización cuasi-Newton en dos etapas en [17,18]. El principal avance en este punto es la posibilidad de resolver el problema de optimización no lineal para cualquier superficie de fluencia convexa. La única restricción en cuanto a aplicación de este método de resolución es que necesita que las superficies de fluencia tengan una cierta suavidad ya que necesitamos su primera y segunda derivada en los diferentes puntos de dicha superficie para el cálculo. Por lo tanto, nos encontraremos con problemas de resolución si no suavizamos primero la superficie de fluencia cónica de Mohr-Coulomb. Con una previa suavización de la superficie se obtienen resultados suficientemente satisfactorios sobre mallas uniformes. El gran inconveniente de este nuevo método de resolución es que no aprovecha las propiedades de dualidad del problema al utilizar diferentes versiones del método cuasi-Newton para obtener las cotas superior e inferior. Esto provocará que el método pierda en eficiencia y robustez.

● Resolución del problema mediante un nuevo método aplicando los principios del Métodos del Punto Interior, explotando las propiedades de convexidad y dualidad del problema de estado límite en [19].

Es muy importante observar en este punto que todas las técnicas mencionadas hasta el momento tienen en común que sólo nos ofrecen como resultado aproximaciones al multiplicador de colapso, no ofreciendo en ningún caso la cota estricta del problema. Así, todas estas técnicas pueden ofrecer resultados más o menos aproximados, pero tienen el gran inconveniente de ofrecer resultados en los que seguiremos teniendo un cierto grado de incertidumbre en el error cometido. Por lo tanto tendremos siempre una falta de certeza en la fiabilidad de nuestras simulaciones, lo que nos podría llevar a resolver problemas de ingeniería con mucho mayor coste computacional del estrictamente necesario.

Nos encontramos con unos resultados que ofrecerán serías dudas en casos de discrepancia. El cálculo de cotas exactas sería un avance importantísimo, ya que permitiría dar un valor del multiplicador de colapso asociado a un error cometido. Esto nos permitiría dar resultados numéricos certificados, asegurando que la cota estricta se encuentra en un rango de valores asociado a un error.

● En [1] se consigue dar este gran paso pasando a calcular cotas estrictas en problemas de estado límite para la superficie de fluencia de Von Mises, convexa y no limitada mediante programación cónica de segundo orden (SOCP).

A partir de [1] este trabajo pretende dar un paso más adelante y calcular cotas estrictas en problemas de estado límite para geomateriales imponiendo la condición de rotura de Drucker-Prager, mediante programación cónica de segundo orden (SOCP).

1.2 OBJETIVOS DE LA TESINA.

Los objetivos principales son los siguientes:

● Ofrecer un método eficiente y robusto para calcular cotas estrictas en estado límite para geomateriales, empleando la superficie de fluencia exacta y convexa más adecuada en dicho campo (Drucker-Prager).

● Explotar la naturaleza convexa del problema de estado límite a través de la dualidad del mismo. Se empleará preferentemente el Método del Punto Interior.

● Discretizar el problema, obteniendo un sistema matricial con la forma canónica fijada para que puedan ser aplicados los algoritmos de Programación Cónica estándares [20,21,22].

● Aprovechar en los procedimientos de adaptividad de malla utilizados en [1] para optimizar el cálculo de aquellos problemas que tengan mecanismos de colapso localizados en zonas reducidas del medio continuo. Las técnicas de adaptividad empleadas en [1] son bastante novedosas y están basadas en medidas de error local aprovechando los cálculos ya realizados de las cotas superior e inferior.