# 1. INTRODUCCIÓ

El desconeixement de processos físics i l'existència de condicions de contorn complexes fan que la majoria de problemes de mecànica de fluïds no puguin ser abordats directament amb mètodes numèrics i tècniques analítiques. La majoria de problemes de mecànica de fluïds han de ser solucionats per mitjà d'una combinació de tècniques numèriques i analítiques, mesures de camp i modelat físic. *Pnueli i Gutfinger* [2] analitzen aquesta qüestió àmpliament en el seu llibre de Mecànica de Fluïds.

Els models que es puguin emprar hauran de ser correctament ajustats per tal de poder reproduir resultats que ja coneixem en el prototipus. Aleshores podrem predir altres resultats desconeguts en el prototipus a partir de l'extrapolació dels resultats obtinguts en el model.

L'aspecte més important a tenir en compte en el disseny d'un model és el fenomen físic que cal investigar, principalment el ***criteri de semblança*** que cal aplicar a aquest fenomen físic. Per la mecànica de fluïds emprada en enginyeria civil els tipus de semblança requerits per garantir que un sistema és completament semblant a un altre són geomètrica, cinemàtica i dinàmica (representant les dimensions fonamentals de longitud, temps i massa respectivament). Les semblances tèrmica i química, per exemple, poden ser requerides a l'hora de modelar altres aspectes de l'enginyeria.

Semblança geomètrica: Existeix semblança geomètrica quan el quocient entre totes les longituds corresponents en el model i en el prototipus és sempre el mateix. Això es pot aconseguir garantint que qualsevol distància en el prototipus està multiplicada per un factor d'escala constant $\lambda_L$.

La semblança geomètrica implica necessàriament que el model i el prototipus tinguin exactament la mateixa forma (distàncies proporcionals i angles iguals).

Semblança cinemàtica: Es pot dir que un prototipus i un model són cinemàticament semblants quan tots els vectors velocitat del fluïd en el prototipus són proporcionals al seu vector velocitat corresponent en el model, sempre amb la mateixa raó de proporcionalitat.

La semblança cinemàtica implica semblança geomètrica, o dit d'una altra manera, la semblança geomètrica és condició necessària perquè es doni la semblança cinemàtica. Malgrat tot, calen més requisits per tal que existeixi semblança cinemàtica a part de garantir la semblança geomètrica, és a dir, la semblança geomètrica no és una condició suficient per tal que es doni semblança cinemàtica.

Siguin $T_p$ i $T_m$ els temps que triguen dos elements de fluïd geomètricament semblants ($E_p$ i $E_m$) en recórrer dues trajectòries semblants de longituds $L_p$ i $L_m$ en el prototipus i en el model respectivament. Si el quocient $\lambda_T = T_p/T_m$ és sempre constant, els dos sistemes són per definició cinemàticament semblants amb una escala de temps $\lambda_T$. Així doncs, les condicions que s'han de complir per tal que tingui lloc la semblança cinemàtica són:

$$\lambda_L = L_p/L_m \quad i \quad \lambda_T = T_p/T_m \tag{3.1.1}$$

Alguns dels factors d'escala més freqüents derivats de la semblança cinemàtica són:

$$\begin{array}{ll} \text{Acceleració} & (a_p/a_m) = (L_pT_p^{-2})/(L_mT_m^{-2}) = \lambda_L\lambda_T^{-2} \\ \text{Velocitat} & (v_p/v_m) = (L_pT_p^{-1})/(L_mT_m^{-1}) = \lambda_L\lambda_T^{-1} \\ \text{Cabal} & (Q_p/Q_m) = (L_p^3T_p^{-1})/(L_m^3T_m^{-1}) = \lambda_L^3\lambda_T^{-1} \end{array} \tag{3.1.2}$$

<u>Semblança dinàmica:</u> Existeix semblança dinàmica quan el polígon de forces que actuen sobre una partícula de fluïd en el model és geomètricament semblant al polígon de forces de la partícula equivalent en el prototipus.

Això significa que el quocient de qualsevol parell de forces actuant en el model ha de ser igual al corresponent quocient de forces en el prototipus.

L'existència de semblança dinàmica requereix de semblança cinemàtica, i aquesta, com s'ha comentat anteriorment requereix de semblança geomètrica. Per tant les condicions que s'han de complir per garantir semblança dinàmica són:

$$\lambda_L = L_p/L_m \quad , \quad \lambda_T = T_p/T_m \quad i \quad \lambda_M = M_p/M_m \tag{3.1.3}$$

A més del fenomen a estudiar cal tenir en compte altres aspectes que influeixen en el disseny del model. Aquests aspectes poden ser la poca disponibilitat d'espai, el pressupost de què es disposa o els materials que es poden utilitzar, entre d'altres.

## 2. FORCES ACTUANT EN UNA PARTÍCULA DE FLUÏD I REQUERIMENTS PER ESTABLIR SEMBLANÇA DINÀMICA

El moviment d'un fluïd està originat per una o més forces que actuen en les partícules del fluïd. Tot seguit s'establirà una classificació d'aquestes forces.

- ### Forces d'inèrcia

Les forces d'inèrcia apareixen en qualsevol situació enginyeril. Aquesta força és igual en magnitud però oposada en direcció al vector resultant de sumar la resta de forces que actuen en la partícula. Les forces d'inèrica són les forces de referència amb les quals es compararan la resta de forces a l'hora de determinar quins criteris s'utilitzaran per garantir la semblança dinàmica.

- **Forces de gravetat**

Les forces de gravetat estan presents en la majoria de sistemes de fluïds estudiats emprant models físics. Els fluxes a través i per sobre de moltes estructures hidràuliques estan afectats per la gravetat. Els fluxes en rius i canals són fenòmens gravitacionals.

Per modelar fenòmens dominats per forces gravitatòries, si es pretén assolir semblança dinàmica caldrà que tant en el model com en el prototipus el quocient entre forces d'inèrcia i gravitacionals sigui el mateix. Aquest quocient es pot expressar de la següent forma:

$$F_i / F_g \;\alpha\; (\rho L^2 v^2)/(\rho L^3 g) = \text{constant} \qquad (3.2.1)$$

$$Fr^2 = v^2/Lg = \text{constant} \qquad (3.2.2)$$

On v és la velocitat del fluxe, g és l'acceleració per la gravetat i L és la longitud de la dimensió del fluïd involucrat.

L'arrel quadrada del quocient (3.2.2) es coneix com Nombre de Froude (Fr).

Per tal d'assolir semblança dinàmica quan les forces gravitacionals intervenen en el problema, és necessari que el model i el prototipus tinguin el mateix Nombre de Froude.

- **Forces viscoses**

Aquestes forces són importants per fluxes que no són plenament turbulents, o per fluxes amb cossos submergits.

Per tal d'assolir semblança dinàmica quan apareixen forces viscoses, és necessari que el model i el prototipus tinguin el mateix Nombre de Reynolds (Re).

$$F_i / F_\mu \;\alpha\; (\rho L^2 v^2)/(\mu L v) = \text{constant} \qquad (3.2.3)$$

$$Re = Lv/\nu = \text{constant} \qquad (3.2.4)$$

On $\mu$ és la viscositat dinàmica i $\nu$ és la viscositat cinemàtica del fluïd ($\nu = \mu/\rho$).

- **Combinació de forces gravitacionals i viscoses**

Moltes vegades les forces viscoses i les gravitacionals tenen lloc simultàniament en els fluïds. En aquest cas, per tal d'assolir semblança dinàmica cal que Fr i Re tinguin els mateixos valors en el model i en el prototipus.

Un estudi matemàtic sencill demostra que assolir aquesta semblança dinàmica a partir d'igualar els valors de Fr i Re en el model i en el prototipus és pràcticament impossible. De fet caldria una escala geomètrica $\lambda_L = 1$, la qual cosa no té sentit si volem construir un model reduït. Per això caldrà sacrificar mínimament el rigor matemàtic i emprar l'experiència, la lògica i la intuïció per saber quin del dos paràmetres adimensionals haurà de ser igualat. És a dir, no es podrà obtenir un polígon de forces perfectament semblant, però es procurarà que sí ho siguin les forces més importants.

En processos on la interacció fluïd-sòlid és vital com en l'estabilitat d'un avió o d'un submarí caldrà igualar els valors de Re, mentre que en problemes on existeixi làmina d'aigua lliure caldrà igualar els valors de Fr. Cal tenir en compte que en models excessivament reduïts es podrien obtenir calats massa petits dificultant així el fluxe del fluïd sobre l'estructura hidràulica, notant-se excessivament la fricció amb el fons, de tal forma que en el model es donessin fluxes laminars (valors de Re petits) que han de representar fluxes turbulents en el prototipus (valors de Re grans), la qual cosa representaria un error conceptual greu.

- **Forces de tensió superficial**

Generalment les forces de tensió superficial són poc significatives en la mecànica de fluïds. Només esdevenen importants quan el radi de corbatura de la superfície del líquid és molt petita. Aleshores, podem concloure que els efectes de la tensió superficial són negligibles pel prototipus però no necessàriament pel model.

Per assolir semblança dinàmica quan les forces de tensió superficial apareixen en el procés, és necessari que el model i el prototipus tinguin el mateix nombre de Weber (W) (quocient de forces d'inèrcia i de tensió superficial).

$$F_i/F_\sigma \ \alpha \ (\rho L^2 v^2)/(\sigma L) = \text{constant}, \qquad (3.2.5)$$

$$W = \rho L v^2/\sigma = \text{constant}, \qquad (3.2.6)$$

On $\sigma$ és la tensió superficial del fluïd.

- **Forces elàstiques**

Les forces elàstiques han de ser considerades quan es modelen fluxes de fluïds compressibles. Aquesta és l'única diferència a l'hora de modelar fluxes compressibles i incompressibles.

Per tal d'assolir semblança dinàmica quan apareixen forces elàstiques, és necessari que el model i el prototipus tinguin el mateix Nombre de Cauchy (C) (quocient de forces d'inèrcia i forces elàstiques).

$$F_i / F_E \ \alpha \ (\rho L^2 v^2)/(E L^2) = \text{constant}, \qquad (3.2.7)$$

$$C = \rho v^2/E = \text{constant}, \qquad (3.2.8)$$

On E és el modul d'elasticitat del fluïd.

En el cas de gasos compressibles que es comporten adiabàticament (a una mateixa temperatura), el Nombre de Mach (M) (també és el quocient entre forces d'inèrcia i elàstiques) s'utilitza enlloc del Nombre de Cauchy, on $C = M^2$. Cal remarcar que quan la velocitat del so en el gas és $c = (E/\rho)^{1/2}$, l'equació (3.2.8) es pot reescriure de la següent manera:

$$M = v/((E/\rho)^{1/2}) = v/c = \text{constant}, \quad (3.2.9)$$

Per aconseguir semblança dinàmica en un fluxe de fluïds compressibles, cal que els valors del Nombre de Cauchy (o del Nombre de Mach) i també del Nombre de Reynolds siguin iguals tant en el model com en el prototipus.

## 3. SELECCIÓ DEL NOMBRE ADIMENSIONAL PER MODELAR UN FENOMEN FÍSIC

La taula 3.3.1 dóna els resultats obtinguts de dividir les forces d'inèrcia per cadascuna de les forces que acabem de comentar. Els nombres utilitzats en la pràctica també apareixen en l'esmentada taula.

Les forces que governen un problema de mecànica de fluïds concret poden ser valorades gràcies a la naturalesa física del fenomen. Pel modelat físic del problema, els nombres adimensionals que han de ser iguals tant en el model com en el prototipus poden ser seleccionats basant-se en les forces predominants en el sistema.

| Quocient de Forces | Equacions | Resultat | Pràctica habitual | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Forma | Símbol | Nom |
| Inèrcia / Viscoses | $\frac{\rho L^2 v^2}{\mu L v}$ | $\frac{\rho L v}{\mu}$ | $\frac{\rho L v}{\mu}$ | Re | Reynolds |
| Inèrcia / Gravetat | $\frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g}$ | $\frac{v^2}{Lg}$ | $\frac{v}{\sqrt{Lg}}$ | Fr | Froude |
| Inèrcia / Pressió | $\frac{\rho L^2 v^2}{pL^2}$ | $\frac{\rho v^2}{p}$ | $\frac{\rho v^2}{p}$ | E | Euler |
| | | | $\frac{2\Delta p}{\rho v^2}$ | $C_p$ | Coeficient de Pressió |
| Inèrcia / Centrífugues | $\frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^4 \varpi^2}$ | $\frac{v^2}{L^2 \varpi^2}$ | $\frac{v}{DN}$ | V | Quocient de Velocitat |
| Inèrcia / Elàstiques | $\frac{\rho L^2 v^2}{EL^2}$ | $\frac{\rho v^2}{E}$ | $\frac{\rho v^2}{E}$ | C | Cauchy |
| | | | $\frac{v}{\sqrt{E/\rho}}$ | M | Mach |
| Inèrica / T. Superf. | $\frac{\rho L^2 v^2}{\sigma L}$ | $\frac{\rho L v^2}{\sigma}$ | $\frac{\rho L v^2}{\sigma}$ | W | Weber |
| Inèrcia / Vibració | $\frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^4 f^2}$ | $\frac{v^2}{L^2 f^2}$ | $\frac{Lf}{v}$ | St | Strouhal |

***Taula 3.3.1.*** Nombres adimensionals i expressions habituals en mecànica de fluïds.

## 4. ESCALES PER FENÒMENS DOMINATS PER LA GRAVETAT

Per tal d'assolir semblança dinàmica en modelar fenòmens dominats per la gravetat, cal que el Nombre de Froude sigui igual en el model i en el prototipus. Per tant el Nombre de Froude (variable adimensional) proporciona el criteri a considerar a l'hora de modelar aquests fenòmens.

$$\lambda_{Fr} = Fr_p / Fr_m = 1, \text{ on } Fr = v / (Lg)^{1/2} \qquad (3.4.1)$$

$$\lambda_{Fr} = \lambda_v \lambda_g^{-1/2} \lambda_L^{-1/2} = 1 \qquad (3.4.2)$$

Considerant la mateixa acceleració de la gravetat g, tant pel model com pel prototipus, $\lambda_g = 1$. Per tant, l'escala de velocitats tindrà la següent expressió:

$$\lambda_v = \lambda_L^{1/2} \qquad (3.4.3)$$

L'equació (3.4.3) té dues aplicacions diferents: en primer lloc es pot emprar per determinar la velocitat a la que el model hauria de córrer per assegurar que el model simula de forma acurada les velocitats del prototipus. És a dir, caldrà verificar que la velocitat mesurada en el model té el següent valor:

$$v_m = v_p * (L_m / L_p)^{1/2} \qquad (3.4.4)$$

Alternativament l'equació (3.4.3) pot ser utilitzada per predir velocitats del prototipus a partir de velocitats mesurades en el model:

$$v_p = v_m*(L_p / L_m)^{1/2} \quad (3.4.5)$$

D'aquests resultats també se'n poden derivar els valors de l'escala de temps i de cabal:

$$\text{Temps, } \lambda_T = \lambda_L^{1/2} \quad (3.4.6)$$

$$T_p / T_m = (L_p/L_m)^{1/2} \quad (3.4.7)$$

$$\text{Cabal, } \lambda_Q = \lambda_L^3 \lambda_T^{-1} = \lambda_L^{5/2} \quad (3.4.8)$$

$$Q_p / Q_m = (L_p/L_m)^{5/2} \quad (3.4.9)$$

## 5. ESCALES PER FENÒMENS DOMINATS PER FORCES VISCOSES

Com ja s'ha vingut comentant aquest tipus de fenomen té com a condició necessària que el Nombre de Reynolds ha de ser igual tant en el model com en el prototipus.

$$\lambda_{Re} = Re_p / Re_m = 1, \text{ on } Re = L*v/\nu \quad (3.5.1)$$

$$\lambda_{Re} = \lambda_L \lambda_v \lambda_\nu^{-1} = 1 \quad (3.5.2)$$

Així doncs, l'equació (3.2.4) defineix l'escala de velocitats entre el model i el prototipus com

$$\lambda_v = \lambda_\nu \lambda_L^{-1} \quad (3.5.3)$$

$$v_p / v_m = (\nu_p / \nu_m)*(L_m/L_p) \quad (3.5.4)$$

Novament d'aquí es poden derivar les corresponents escales de temps i cabal:

$$\text{Temps, } \lambda_T = \lambda_\nu^{-1} \lambda_L^2 \quad (3.5.5)$$

$$T_p / T_m = (\nu_m/\nu_p)*(L_p/L_m)^2 \quad (3.5.6)$$

$$\text{Cabal, } \lambda_Q = \lambda_\nu \lambda_L \quad (3.5.7)$$

$$Q_p / Q_m = (\nu_p/\nu_m)*(L_p/L_m) \quad (3.5.8)$$

## 6. ERRORS PER EFECTES D'ESCALA

Tal i com s'ha explicat anteriorment, els errors d'escala provenen de l'elecció de les forces predominants a l'hora d'establir semblança dinàmica. Si l'elecció d'aquestes forces predominants és correcta aquests errors per efectes d'escala es minimitzaran.

En un model de Froude on les forces viscoses i les forces degudes a la tensió superficial estan fora d'escala, els errors que aquestes poden introduir poden ser prou significatius si s'utilitza un model excessivament reduït. Això es deu a que l'efecte de les forces viscoses i de tensió superficial esdevenen més importants com més petit és el tamany del model. Per tant els models de Froude excessivament petits haurien d'evitar-se per garantir que aquestes forces no adquireixen una importància considerable. Per exemple, seria inconcebible que un model reproduís de forma no turbulenta un fluxe turbulent en el prototipus.

L'experiència demostra que si es vol construir un model no distorsionat (amb una única raó de semblança geomètrica) la profunditat mínima haurà de ser de 3 centímetres. En cas contrari caldrà distorsionar la direcció vertical per tal d'evitar l'efecte desmesurat de les forces viscoses i les degudes a la tensió superficial.