

ANEJO 2

CÁLCULO DE DEPÓSITOS CILÍNDRICOS CIRCULARES SEGÚN LA TEORÍA DE LÁMINAS

A2.1.- INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 se ha desarrollado una formulación para el dimensionamiento y comprobación de depósitos basada en el cálculo de esfuerzos en un depósito según la teoría de láminas que se recoge en la obra de Florencio Del Pozo *Depósitos cilíndricos circulares* [18].

Este procedimiento de cálculo resulta de asimilar la pared del depósito a una lámina de espesor constante con simetría de revolución y sollicitación también simétrica (presión hidrostática) respecto al eje de revolución. Aceptando las simplificaciones usuales en el cálculo de láminas, se trata de uno de los pocos casos en que la teoría conduce a una solución explícita muy sencilla.

A2.2.- DESARROLLO DEL CÁLCULO

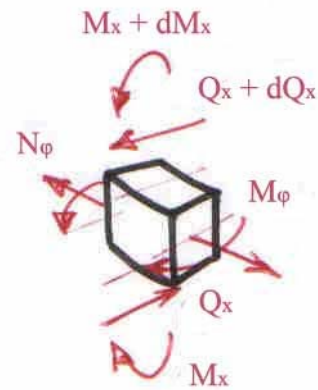
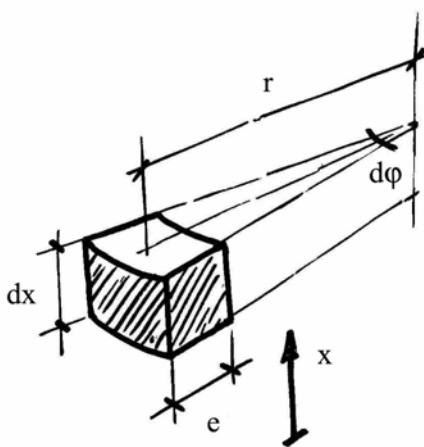
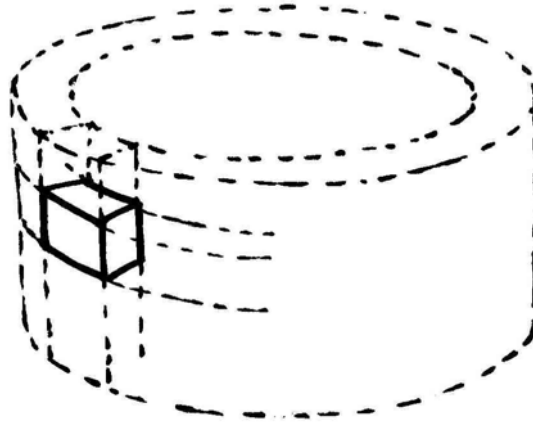
Los depósitos cuya superficie media es un cilindro de directriz circular con generatrices verticales, constituyen un caso particular de las láminas de revolución, en el que las cargas exteriores tienen simetría de revolución, y por lo tanto les serán aplicables los desarrollos y simplificaciones de la teoría elástica para este tipo de estructuras.

En lo que sigue se desarrollará el cálculo de una manera formal, aceptando todas las hipótesis que se admiten en la teoría elástica de las láminas.

Los esfuerzos que actuarán en un elemento diferencial serán los que se indican a continuación (ver pág. siguiente); es decir, un esfuerzo circunferencial normal N_φ , los momentos flectores M_x y M_φ y el esfuerzo cortante Q_x . De estos esfuerzos, al considerar cargas con simetría de revolución, N_φ y M_φ serán independientes de la coordenada angular φ .

Se prescinde de las cargas verticales sobre la pared del depósito, ya que si tienen simetría de revolución, producirán unos esfuerzos N_x cuyos efectos sobre el elemento corresponden a los de una sollicitación axial pura y pueden analizarse muy simplemente.

Con la condición de simetría impuesta a las cargas, solamente se considerará una presión normal p en dirección radial, variable con la coordenada x , pero independiente de φ .



Dado un elemento diferencial como el definido en la figura, planteando equilibrio de fuerzas y momentos, y admitiendo que los esfuerzos sólo varían según el eje x (simetría radial tanto de esfuerzos como de geometría) obtenemos:

$$\sum F_r = 0, \quad \frac{dQ_x}{dx} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx - N_\varphi \cdot dx \cdot d\varphi + p \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$

(donde $2N_\varphi \cdot dx \frac{d\varphi}{2} = N_\varphi \cdot dx \cdot d\varphi$)

$$\boxed{\frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_\varphi}{r} + p = 0} \quad (\text{A2.1})$$

$$\sum M_{\text{paralelo}} = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} dx \cdot r \cdot d\varphi + Q_x \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{dx} + Q_x = 0} \quad (\text{A2.2})$$

A partir de las ecuaciones A2.1 i A2.2 llegamos a

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{N_\varphi}{r} - p = 0$$

siendo $N_\varphi = \frac{E \cdot e}{r} w$

$$M_x = \frac{E \cdot e^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$M_\varphi = \nu \cdot M_x$$

resulta

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{E \cdot e^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + \frac{E \cdot e}{r^2} w - p = 0} \quad (\text{A2.3})$$

Esta ecuación diferencial de cuarto grado resuelve el problema para el caso general de espesor variable $e(x)$.

A2.2.1.- Depósitos de espesor de pared constante

Si suponemos espesor de pared e constante, la ecuación anterior queda

$$\frac{E \cdot e^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E \cdot e}{r^2} w = p$$

expresión que suele presentar-se de la forma

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p}{D}} \quad (\text{A2.4})$$

donde
$$D = \frac{E \cdot e^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 \cdot e^2}}$$

La solución de esta ecuación diferencial es la siguiente

$$\boxed{w = w_p + e^{\beta x} [K_1 \cdot \cos \beta x + K_2 \cdot \sin \beta x] + e^{-\beta x} [K_3 \cdot \cos \beta x + K_4 \cdot \sin \beta x]} \quad (\text{A2.5})$$

donde w_p es una solución particular de la ecuación diferencial y K_1, K_2, K_3, K_4 constantes de integración a determinar en cada caso particular en función de las condiciones de contorno del depósito.

A partir del valor de w y teniendo en cuenta que

$$N_\phi = \frac{E \cdot e \cdot w}{r} \quad M_x = \frac{E \cdot e^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad Q_x = -\frac{E \cdot e^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^3 w}{dx^3}$$

se puede determinar el estado tensional de un depósito de espesor constante, sea cual sea el tipo de sustentación en los bordes.

A2.2.2.- Solución del problema para el caso de un depósito empotrado en el fondo

En el caso de un depósito lleno, libre en el borde superior y rígidamente empotrado en el borde inferior tendremos

$$p(x) = \gamma \cdot (H - x)$$

con lo cual, de la ecuación 3 obtenemos directamente una solución particular

$$w_p = \frac{\gamma \cdot r^2}{E \cdot e} (H - x)$$

de esta expresión se deduce también las soluciones particulares para los diversos esfuerzos planteados

$$N_{\varphi p} = \gamma \cdot r \cdot (H - x) \qquad M_{xp} = Q_{xp} = 0$$

Condiciones de contorno

$$\text{borde inferior:} \qquad w|_{x=0} = 0; \qquad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\text{borde superior:} \qquad M_x|_{x=H} = 0; \qquad Q_x|_{x=H} = 0$$

si se supone además que el depósito cumple por sus dimensiones, la condición que la acción en un borde no tiene influencia en el otro se simplifica el problema, de forma que

$$K_1 = K_2 = 0 \qquad K_3 = -\frac{\gamma \cdot r^2 \cdot H}{E \cdot e}$$

$$K_4 = \frac{\gamma \cdot r^2 \cdot H}{E \cdot e} \left(\frac{1}{\beta \cdot H} - 1 \right)$$

con lo cual se llega a las expresiones simplificadas siguientes

$$w = \frac{\gamma \cdot r^2}{E \cdot e} H \left[1 - \frac{x}{H} + e^{-\beta x} \left(-\cos \beta x - \sin \beta x + \frac{1}{\beta \cdot H} \sin \beta x \right) \right]$$

$$N_{\varphi} = \gamma \cdot r \cdot H \left[1 - \frac{x}{H} + e^{-\beta x} \left(-\cos \beta x - \sin \beta x + \frac{1}{\beta \cdot H} \sin \beta x \right) \right]$$

$$M_x = \frac{\gamma \cdot r \cdot e \cdot H}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-\beta x} \left[-\sin \beta x + \cos \beta x - \frac{1}{\beta \cdot H} \cos \beta x \right]$$

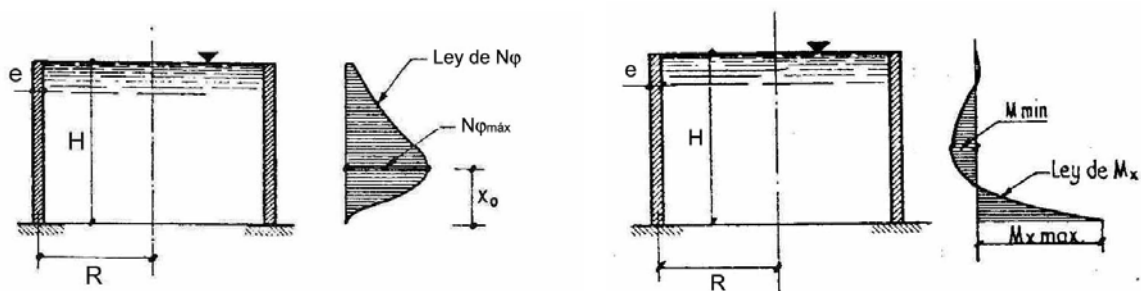
$$Q_x = -\frac{\gamma \cdot H \cdot \sqrt{r \cdot e}}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-\beta x} \left[-2 \cos \beta x + \frac{1}{\beta \cdot H} (\cos \beta x - \sin \beta x) \right]$$

Los valores de M_x y Q_x están tabulados y se pueden obtener a partir de las expresiones (3.18) y (3.22) empleando las tablas 3.4 y 3.5 respectivamente. Asimismo, el valor del axil N_ϕ máximo se obtiene de la expresión (3.2) empleando la tabla 3.1.

Los valores máximos de M_x y Q_x se obtienen directamente para $x=0$, es decir, en el empotramiento i sus valores son

$$(M_x)_{x=0} \approx \frac{\gamma \cdot r \cdot e \cdot H}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[1 - \frac{1}{\beta \cdot H} \right]$$

$$(Q_x)_{x=0} \approx \frac{\gamma \cdot H \cdot \sqrt{r \cdot e}}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[2 - \frac{1}{\beta \cdot H} \right]$$



A2.2.3.- Solución del problema planteado para el caso de un depósito articulado en el fondo

En el caso de un depósito lleno, libre en el borde superior y articulado en el borde inferior tendremos el mismo problema ($p(x)$, w_p, \dots) pero con unas condiciones de contorno distintas.

Condiciones de contorno

En este caso, el giro en el borde inferior no está impedido y por lo tanto el momento en esta fibra es nulo

$$\text{borde inferior:} \quad w|_{x=0} = 0; \quad M_x|_{x=0} = 0$$

$$\text{borde superior:} \quad M_x|_{x=H} = 0; \quad Q_x|_{x=H} = 0$$

si se supone además que el depósito cumple por sus dimensiones la condición que el efecto en un borde no tiene influencia en el otro, se simplifica el problema, de modo que en la expresión general $w(x)$ (ecuación A1.5) queda

$$K_1 = K_2 = K_4 = 0 \qquad K_3 = -\frac{\gamma \cdot r^2 \cdot H}{E \cdot e}$$

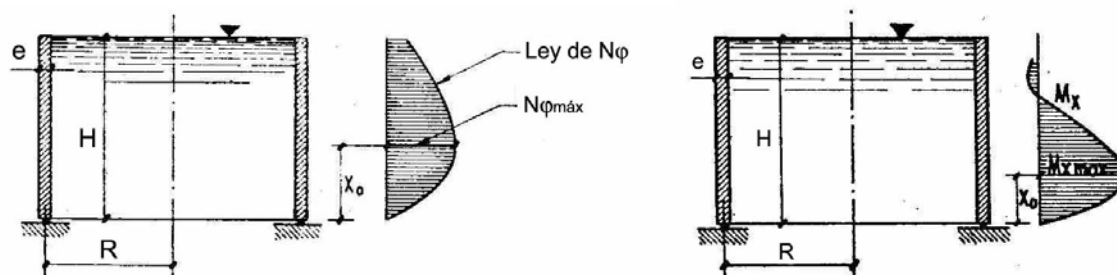
con lo cual se llega a las expresiones simplificadas siguientes

$$w = \frac{\gamma \cdot r^2}{E \cdot e} H \left[1 - \frac{x}{H} - e^{-\beta x} \cos \beta x \right]$$

$$N_\varphi = \gamma \cdot r \cdot H \left[1 - \frac{x}{H} - e^{-\beta x} \cos \beta x \right]$$

$$M_x = -\frac{\gamma \cdot r \cdot e \cdot H}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-\beta x} \sin \beta x$$

$$Q_x = \frac{\gamma \cdot H \cdot \sqrt{r \cdot e}}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$



En esta solución simplificada, y para depósitos de hormigón armado o pretensado con $\nu \approx 0,2$, el valor máximo del momento flector M_x es

$$M_{x_{\max}} \approx -0,095 \cdot \gamma \cdot r \cdot e \cdot H$$

que se obtiene a una altura relativa de $\frac{x_0}{H} \approx 0,6 \sqrt{\frac{r \cdot e}{H^2}} = 0,6 \sqrt{\frac{2,5 \cdot 0,04}{2,4^2}} = 0,08$.

Esto viene a ser a unos 18-20cm del suelo.