

4 - MODELO HIDRÁULICO E IMPLEMENTACIÓN EN EL ENTORNO MATLAB-SIMULINK

4.1 – MODELO HIDRÁULICO

El objetivo principal de la presente tesina es realizar un estudio comparativo de los dos controladores desarrollados. La finalidad última por la que ambos modelos han sido desarrollados es la aplicación a un canal real, sin embargo, para comprobar cuál es su comportamiento, y acabar de definir los parámetros que controlan su estabilidad y robustez, es necesario recurrir a la simulación numérica. Por ello, es necesario recurrir a una modelización numérica de un canal que permita reproducir la dinámica del sistema.

A continuación, se describe cuál es el modelo utilizado y sus características principales.

4.1.1 – Sistema Global

Del mismo modo que en el modelo matemático, se estudia cada uno de los N tramos del canal por separado, y estos, a su vez, también se dividen en dos zonas, *zona de transporte* y *zona de almacenamiento* (observar *Figura 16*), ya que el comportamiento hidráulico de cada zona es distinto. En la *zona de transporte* se desarrolla un flujo gradualmente variable en régimen lento. En la *zona de almacenamiento*, donde se producen las extracciones laterales, el cálculo de las velocidades y caudales requiere solucionar un sistema de ecuaciones no lineales.

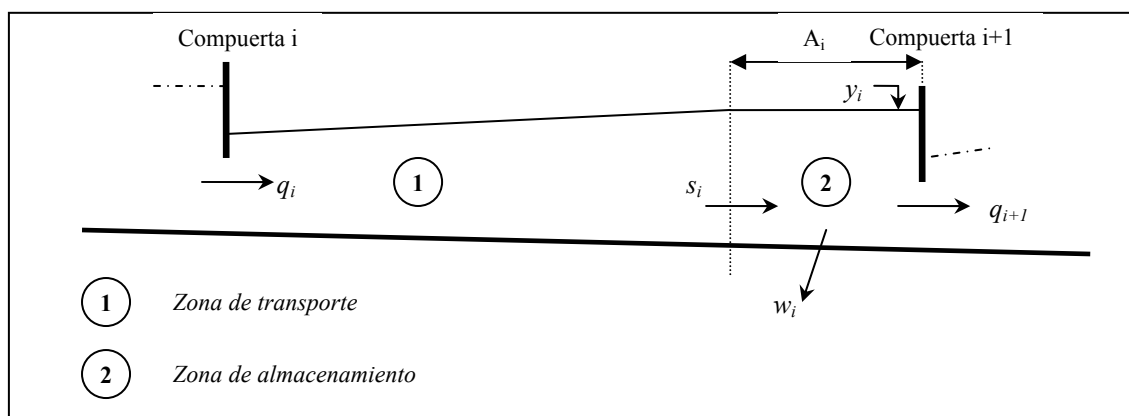


Figura 16 – Zonas en que se divide un tramo genérico de canal

4.1.2 – Zona de Transporte

El modelo hidráulico, capaz de representar un flujo gradualmente variable, utilizado para esta zona son las ecuaciones de Saint Venant. La aplicación de las ecuaciones de Saint Venant a un tramo de canal, requiere que el flujo que se produce en dicho canal cumpla una serie de condiciones:

- Fluido incompresible y densidad constante.
- Flujo unidimensional.
- Distribución uniforme de velocidades en una sección transversal.
- Pendiente del canal pequeña, de modo que el calado se puede determinar como la altura vertical en lugar de la distancia perpendicular a la base del canal.
- El eje en planta del canal no tiene cambios de curvatura importantes.
- La curvatura de la superficie del agua es reducida (régimen gradualmente variable), de modo que las líneas de corriente son casi paralelas, y por tanto se puede suponer una distribución hidrostática de presiones.
- Los cálculos de pérdidas de carga estarán basados en la formulación utilizada para régimen permanente.

Las ecuaciones de Saint Venant se obtienen exigiendo la conservación de la masa en un volumen de control infinitesimal y obligando a que se conserve la cantidad de momento de ese volumen de control. De las dos condiciones exigidas se obtienen dos ecuaciones, la ecuación de conservación de la masa (4.1) y la ecuación de conservación del momento (4.2):

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A}{b} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(I_0 - I_f) = 0 \quad (4.2)$$

donde y es el calado, v la velocidad media, A el área de la sección mojada, b la anchura de la superficie libre, g la aceleración de la gravedad, I_0 la pendiente longitudinal de la solera, I_f la pendiente motriz, x la coordenada espacial (sección) y t la coordenada temporal.

Estas ecuaciones son válidas para un canal de sección constante (tipo prismático), y forman parte de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico que no tienen solución analítica. Por lo tanto, para hallar una solución de estas ecuaciones es necesario recurrir a métodos numéricos. El método utilizado en este caso es el método de las características, considerando la aproximación de líneas características rectas de carácter explícito. Mediante este método, se consigue transformar las dos ecuaciones en derivadas parciales en dos ecuaciones en derivadas totales.

Existen dos curvas características, la curva característica positiva C^+ , definida por la siguiente trayectoria:

$$\frac{dx}{dt} = v + c \quad (4.3)$$

y la curva característica negativa C^- , definida por la trayectoria

$$\frac{dx}{dt} = v - c \quad (4.4)$$

A lo largo de la curva característica C^+ se cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{g}{c} \frac{Dy}{Dt} - g(I_0 - I_f) = 0 \quad (4.5)$$

A lo largo de la curva característica C^- se cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{Dv}{Dt} - \frac{g}{c} \frac{Dy}{Dt} - g(I_0 - I_f) = 0 \quad (4.6)$$

donde el valor de la celeridad c es:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{b}} \quad (4.7)$$

Para solucionar las ecuaciones (4.5) y (4.6) se discretiza el dominio de trabajo x, t mediante un intervalo espacial Δx constante, y un intervalo temporal Δt variable. La *Figura 17* muestra el esquema de discretización utilizado.

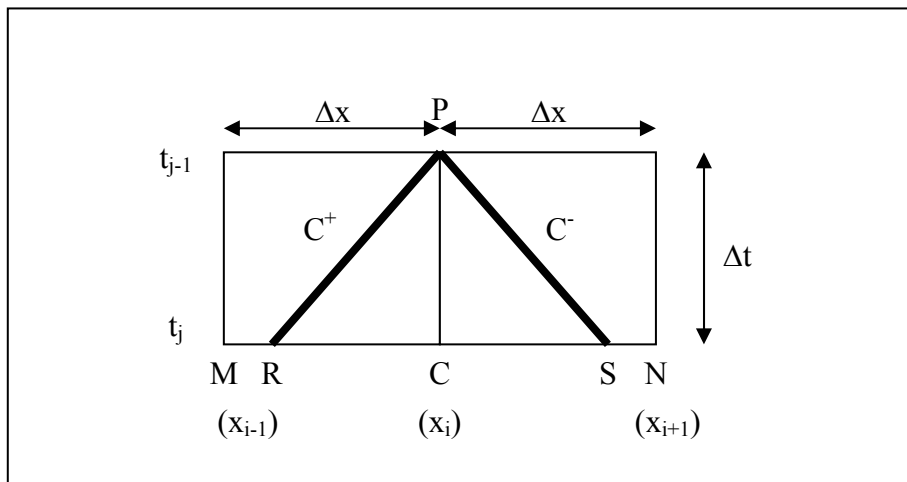


Figura 17 – Esquema de discretización del método de las características

Las curvas características se aproximan mediante la tangente en la base (puntos R y S). La semejanza con la realidad de aproximación será mayor cuando menor sea el valor de Δt utilizado en el cálculo.

Partiendo de unas condiciones iniciales y unas condiciones de contorno, este método calcula la velocidad v y el calado y en un punto P, a partir de las mismas variables en el instante anterior en los puntos R y S. Estas variables en los puntos P y S se calculan mediante una interpolación lineal de los valores de estas variables entre los puntos M-C y C-N.

Realizando una aproximación en diferencias finitas de las ecuaciones (4.3), (4.5), (4.4) y (4.6) entre los puntos P y R, y P y S, se obtiene las siguientes expresiones:

$$v_P - v_R + \frac{g}{C_R}(y_P - y_R) - g\Delta t(I_0 - I_{fR}) = 0 \quad (4.8)$$

$$x_P - x_R = (v_R + c_R)\Delta t \quad (4.9)$$

$$v_P - v_S - \frac{g}{C_S}(y_P - y_S) - g\Delta t(I_0 - I_{fS}) = 0 \quad (4.10)$$

$$x_P - x_S = (v_S - c_S)\Delta t \quad (4.11)$$

Combinando las ecuaciones (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11) se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, v_P e y_P :

$$y_P = \frac{1}{c_R + c_S} \left[y_R c_S + y_S c_R + c_S c_R \left[\frac{v_R - v_S}{g} - \Delta t(I_{fR} - I_{fS}) \right] \right] = 0 \quad (4.12)$$

$$v_P = v_R - \frac{g}{c_R}(y_P - y_R) + g\Delta t(I_0 - I_{fR})$$

Determinando las variables de calado, velocidad y celeridad en los puntos R y S, mediante interpolación lineal entre los puntos M-C y C-N:

$$v_R = \frac{v_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_M c_C - v_C c_M)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_C - v_M + c_C - c_M)} \quad v_S = \frac{v_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_N c_C - v_C c_N)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_C - v_N + c_C - c_N)}$$

$$c_R = \frac{c_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_R c_M - v_M c_C)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_C - v_M + c_C - c_M)} \quad c_S = \frac{c_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_R c_N - v_N c_C)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_C - v_N + c_C - c_N)} \quad (4.13)$$

$$y_R = y_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_R + c_R)(y_C - y_M) \quad y_S = y_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_S - c_S)(y_C - y_N)$$

Las pendientes motrices se calculan mediante la fórmula de Manning, de modo que las pendientes motrices en los puntos R y S son:

$$I_{fR} = \frac{v_R^2 n^2}{\left(\frac{A_R}{P_m}\right)^{4/3}} \quad I_{fS} = \frac{v_S^2 n^2}{\left(\frac{A_S}{P_m}\right)^{4/3}} \quad (4.14)$$

Debido a que el esquema utilizado es un esquema explícito, el procedimiento de cálculo no es siempre estable. Para asegurar su estabilidad debe cumplirse la condición de estabilidad de Courant:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v + c} \quad (4.15)$$

En este caso, que el método sea estable significa que el punto R siempre está entre M y P, y que S lo está entre P y N. De este modo se asegura que para determinar las variables de R y S se está interpolando entre dos valores conocidos, y no extrapolando a partir de ellos.

Para que se cumpla esta condición de estabilidad, en cada instante se debe recalculer cuál es el siguiente paso de tiempo a utilizar. Para ello, se determina en el instante actual cuál es el punto del canal que presenta unos valores de velocidad y celeridad mayores, y a partir de estos valores se calcula el paso de tiempo de la siguiente forma:

$$\Delta t = 0,95 \left(\frac{\Delta x}{v_{\max} + c_{\max}} \right) \quad (4.16)$$

4.1.3 – Zona de Almacenamiento

En la *zona de almacenamiento* se supone que la velocidad es nula, y en toda la zona la lámina de agua no varía, presentando el mismo calado $y=H$ a lo largo de la zona.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del agua en esta zona son las siguientes:

- Conservación de la masa (4.17)
- Conservación de la energía en la compuerta (4.18)
- Conservación de la energía en el vertedero lateral (4.19)

$$s_i - q_{i+1} - w_i = Q_1 - Q_2 - Q_{lat} = A_i \frac{dH}{dt} \quad (4.17)$$

$$Q_2 = C_d a_c u \sqrt{2g(H - y_2)} \quad (4.18)$$

con

C_d : coeficiente de desagüe de la compuerta
 a_c : ancho de la compuerta
 u : abertura de la compuerta
 H : calado en la sección aguas arriba de la compuerta
 y_2 : calado en la sección aguas abajo de la compuerta

$$Q_{lat} = C'_d l_{vlat} (H - h_{vlat})^{1.5} \quad (4.19)$$

con

C'_d : coeficiente de desagüe del vertedero lateral
 l_{vlat} : longitud del vertedero lateral
 h_{vlat} : altura del vertedero lateral
 H : calado en la sección aguas arriba de la compuerta

Además, en las secciones de entrada y salida de la *zona de almacenamiento* se cumple la siguiente relación calado-velocidad-caudal:

$$\begin{aligned} s_i = Q_1 &= v_1 \cdot A(y_1) \\ q_{i+1} = Q_2 &= v_2 \cdot A(y_2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Se supone conservación de la energía entre el nivel y y el nivel inmediatamente aguas arriba, separado una distancia Δx . De este modo:

$$y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = H \quad (4.21)$$

Además de estas ecuaciones, en la sección de entrada de la *zona de almacenamiento* se cumplen las ecuaciones de la curva característica positiva, y en la sección de salida (ubicada inmediatamente aguas abajo de la compuerta), las de la curva característica negativa. De este modo se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} v_1 &= v_R - \frac{g}{c_R} \cdot (y_1 - y_R) + g \cdot \Delta t \cdot (I_0 - I_{fR}) \\ v_2 &= v_S - \frac{g}{c_S} \cdot (y_2 - y_S) + g \cdot \Delta t \cdot (I_0 - I_{fS}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Siendo H_0 el nivel de la *zona de almacenamiento* en el instante anterior, la ecuación (4.17) queda de la siguiente forma:

$$v_1 A(y_1) - v_2 A(y_2) - Q_{lat} - A_0 \frac{H - H_0}{\Delta t} \quad (4.23)$$

Las ecuaciones (4.18), (4.19), (4.21), (4.22), (4.23) y la 2ª parte de (4.20), forman un sistema de siete ecuaciones no lineales con siete incógnitas: Q_2 , Q_{lat} , H , y_1 , v_1 , y_2 y v_2 . Para solucionar este sistema es necesario recurrir al uso de métodos específicos para resolver sistemas no lineales.

4.1.4 – Condiciones Iniciales

El estado inicial del canal es un estado permanente. El régimen permanente es aquel en que no existen variaciones temporales de velocidades y calados, aunque sí que permite variaciones espaciales. Es decir, pueden haber distintos valores de las variables en las distintas secciones del canal, pero estos son constantes a lo largo del tiempo. En esta situación, la lámina de agua es constante en el tiempo y recibe el nombre de curva de remanso.

En régimen permanente, las ecuaciones de Saint Venant quedan con la siguiente expresión:

$$Q(x, t) = Q = cte \quad (4.24)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2} \quad (4.25)$$

donde F_r^2 es el número de Froude:
$$F_r^2 = \frac{v}{\sqrt{gA/b}} \quad (4.26)$$

Para poder integrar la ecuación diferencial que rige las curvas de remanso (4.25) es necesaria una condición de contorno aguas abajo del canal (régimen lento). La condición que se utiliza es el nivel en el extremo aguas abajo del canal.

Esta integración de la ecuación diferencial de las curvas de remanso se puede realizar mediante una integración numérica, mediante el método Runge-Kutta de 4º orden. Es necesario definir un paso de integración Δx , el cual debe de ser menor que el paso utilizado para integrar las ecuaciones de Saint Venant. Partiendo de la condición de contorno, y conociendo las extracciones laterales, se integra la ecuación hacia aguas arriba, obteniendo el calado en cada sección. Posteriormente, mediante la relación calado-velocidad-caudal, se determina la velocidad en cada sección.

4.1.5 – Condiciones de Contorno

4.1.5.1 - Condiciones de contorno aguas arriba

Aguas arriba del canal, en la cabecera del primer tramo, se encuentra situado un depósito que garantiza el suministro de agua, y que presenta un nivel constante. Debido a esta condición, en la sección ubicada inmediatamente aguas arriba de la primera compuerta, que forma parte del depósito de cabecera, se presentan las siguientes condiciones:

$$y(t) = H = cte \quad (4.27)$$

$$v(t) = 0 \quad (4.28)$$

Por la sección inmediatamente aguas abajo de la primera compuerta pasa la curva característica negativa C^- propia del primer tramo de canal.

El caudal Q_c que pasa por una compuerta se determina mediante la expresión:

$$Q_c = C_d a_c u \sqrt{2g(H - y_2)} \quad (4.29)$$

con

C_d : coeficiente de desagüe de la compuerta
 a_c : ancho de la compuerta
 u : abertura de la compuerta
 H : calado en la sección aguas arriba de la compuerta
 y_2 : calado en la sección aguas abajo de la compuerta

Conocido el valor de la altura H del embalse y la abertura u de la compuerta, se puede calcular el calado y_2 y la velocidad v_2 de la sección inmediatamente aguas abajo de la primera compuerta, que es el primer punto de la discretización. El cálculo de estos valores se realiza a través de la ecuación (4.29) y las dos ecuaciones siguientes:

$$Q_c = A(y_2)v_2 \quad (4.30)$$

$$v_2 = v_s + \frac{g}{c_s}(y_2 - y_s) + g\Delta t(I_0 - I_{fs}) \quad (4.31)$$

Observando el sistema que forman las ecuaciones (4.29), (4.30) y (4.31), es fácil ver que se trata de un sistema no lineal, de modo que para solucionarlo se tendrá que recurrir a métodos numéricos avanzados.

4.1.5.2 – Condiciones de contorno aguas abajo

Aguas abajo del último tramo del canal existe un vertedero de labio fino. El caudal que es vertido se calcula a través de la expresión:

$$Q_v = C_d' l_v (y_1 - h_v)^{3/2} \quad (4.32)$$

con

C_d' : coeficiente de desagüe del vertedero
 l_v : longitud del vertedero
 h_v : altura del vertedero
 y_1 : calado en la sección aguas arriba del vertedero

Por la sección aguas arriba del vertedero pasa la curva característica positiva C^+ propia del último tramo del canal.

Para determinar la velocidad v_1 y el calado y_1 en el último punto de la discretización, punto ubicado inmediatamente aguas arriba del vertedero, se utiliza el sistema no lineal formado por la ecuación (4.32) y las dos ecuaciones siguientes:

$$Q_v = v_1 A(y_1) \quad (4.33)$$

$$v_1 = v_R - \frac{g}{c_R} (y_1 - y_R) + g\Delta t (I_0 - I_{fR}) \quad (4.34)$$

4.2 - IMPLEMENTACIÓN EN EL ENTORNO MATLAB-SIMULINK

El programa utilizado para implementar el esquema global de simulación es el programa Matlab. Éste es un programa que utiliza un lenguaje de programación de cuarto nivel, que permite que las variables de trabajo sean multivariantes, de modo que es posible trabajar tanto con escalares, como con vectores y matrices. Además, las variables pueden ser introducidas directamente en el denominado *workspace*, de modo que no es necesario realizar los típicos pasos de redacción del listado del programa, compilación, linkado y ejecución. Este programa permite una programación interactiva y más dinámica.

Matlab incluye una serie de funciones ya definidas que permiten al usuario realizar cálculos, como resolver un sistema lineal, mediante una simple instrucción. Además, también permite al usuario la definición de sus propias aplicaciones, aprovechando todos los medios de que dispone el programa, y la posibilidad de trabajar con elementos multivariantes. Debido a estas características, Matlab es un programa extensamente utilizado en el campo científico e ingenieril.

Simulink es una extensión que presenta Matlab, que permite simular sistemas dinámicos. Simulink dispone de un método gráfico (visual) para definir el sistema, se trata del denominado *block diagram*. La *Figura 18* muestra cual es el *block diagram* correspondiente al sistema estudiado.

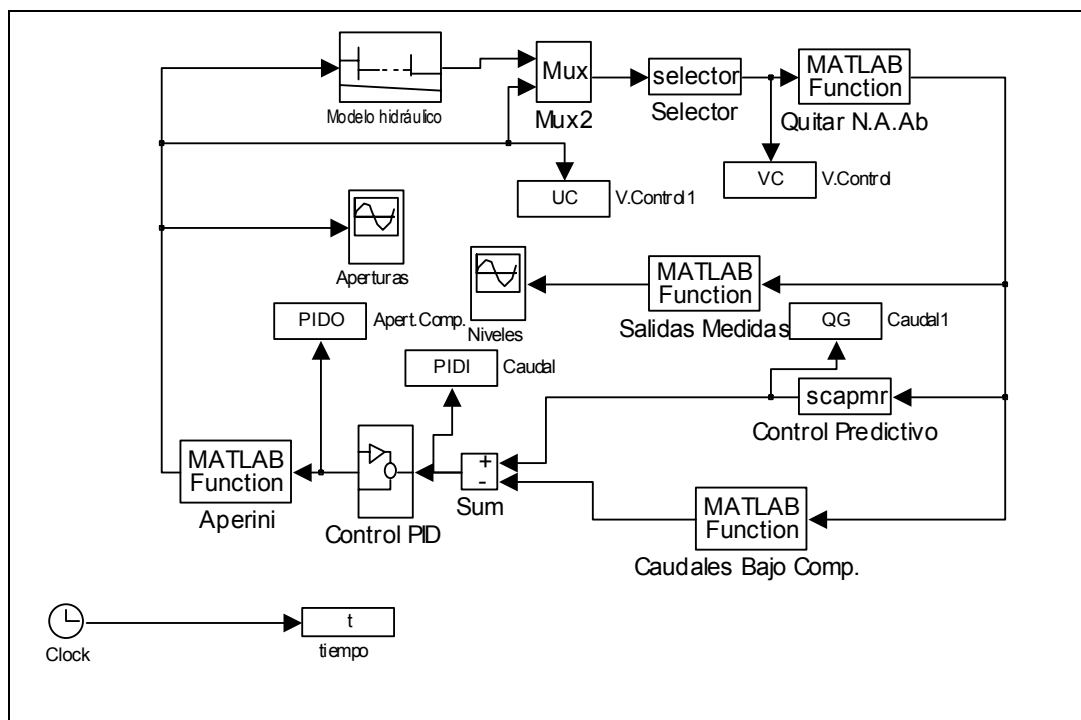


Figura 18 – Block diagram

El *block diagram* consiste en una serie de bloques o cajas conectados entre sí mediante unas flechas a través de las cuales se pasa la información requerida de un bloque a otro. Cada bloque realiza unos determinados cálculos, mediante una función predefinida propia del programa o mediante una función definida por el usuario. En este último caso, la función es una *S-function*, se trata de una función que es capaz de reproducir sistemas dinámicos en forma continua o en forma discreta. Esta a su vez puede llamar en determinados instantes a las denominadas *M-functions*, típicas de la programación en Matlab.

Simulink dispone de diversos métodos de integración, y usar uno u otro es decisión del usuario, como también lo es el paso mínimo de integración, la tolerancia y el tiempo de simulación.

En la *Figura 18* se puede observar cuáles son los bloques de que consta el sistema. A continuación se comentará cuál es el funcionamiento de dicho sistema:

- Modelo hidráulico. Este bloque es el que se encarga de simular el canal. Está programado en tiempo discreto, y empieza a funcionar en el instante inicial a partir de las condiciones iniciales calculadas. Se ha utilizado un paso de integración de 20 metros. En otros estudios realizados, el paso era mayor, de 50 metros. Al principio de la fase de experimentación de esta tesina, se simuló la evolución del canal frente a un control nulo, sin ningún tipo de perturbación, ni cambio de consigna, utilizando este paso de 50 metros. El resultado obtenido fue que se producía una inestabilidad en el canal, después de una fase transitoria, el canal se estabilizaba con unos valores de caudal y calado distintos a los iniciales, de modo que el estado simulado no era permanente, como se suponía. Realizando el mismo ensayo mediante un paso de 20 metros, este problema desaparecía. Por ello, se utiliza un paso de 20 metros, a pesar de que esto implique un aumento significativo del tiempo de ejecución de la simulación.
- Selector + Quitar N.A.Ab. Este bloque es el encargado de simular los sensores que permiten medir los calados y caudales en el canal. Su función es tomar el vector de salida del modelo hidráulico, y transformarlo en el vector de control (niveles en *zona de almacenamiento* y caudales), eliminando las aberturas de compuerta y los niveles aguas debajo de cada compuerta.
- Control predictivo. En este bloque residen los N controladores predictivos. En cada instante de muestreo kT son llamados para determinar cuál es el caudal bajo compuertas deseado en el siguiente instante de muestreo.
- Caudales bajo compuertas. Este bloque se encarga de extraer del vector de control los caudales que están pasando bajo las compuertas, para que los utilice el controlador local.
- Sum. Este bloque calcula el error entre el caudal circulante y el caudal deseado, para entregárselo al controlador local de modo que este pueda funcionar.
- Control PID. En este bloque se encuentran los N controladores locales. Su función es calcular cuáles son los incrementos de abertura de compuertas necesaria para el intervalo $[kT, (k+1)T]$. La *Figura 19* muestra la configuración de este bloque.

- Aperini. Este bloque es el encargado de simular los mecanismos que controlan la abertura de compuertas. Su función es aplicar los incrementos calculados por el Control PID a los valores de las aberturas, para conseguir las curvas de abertura necesarias en el intervalo $[kT, (k+1)T]$. Estas aberturas de compuertas son introducidas en el modelo hidráulico.

En la *Figura 19* se pueden observar los distintos elementos que configuran los controladores locales

- In_1. Por este bloque entra la señal producida por el bloque Sum, es decir el error entre el caudal circulante y el deseado.
- Gain, Gain1 y Gain2. Estos tres bloques contienen los valores de las constantes proporcional, integral y diferencial de cada controlador.
- Integrator. Este bloque calcula la parte integral del error.
- Derivate. Este bloque, calcula la derivada del error.

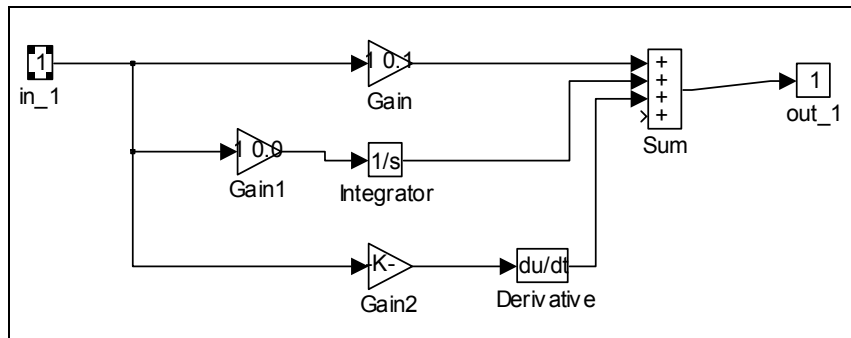


Figura 19 – Control PID