

3-MODELO MATEMÁTICO

3.1-SISTEMA GLOBAL

El sistema objeto de control es un canal de riego de N tramos, con N compuertas y N derivaciones laterales. El agua circula desde un depósito ubicado en la cabecera del primer tramo (aguas arriba de la primera compuerta), donde el nivel de agua se mantiene constante, circulando por los N tramos hasta llegar al final del último tramo donde se encuentra con un vertedero. El esquema del *Figura 12* ilustra cómo es el sistema a controlar.

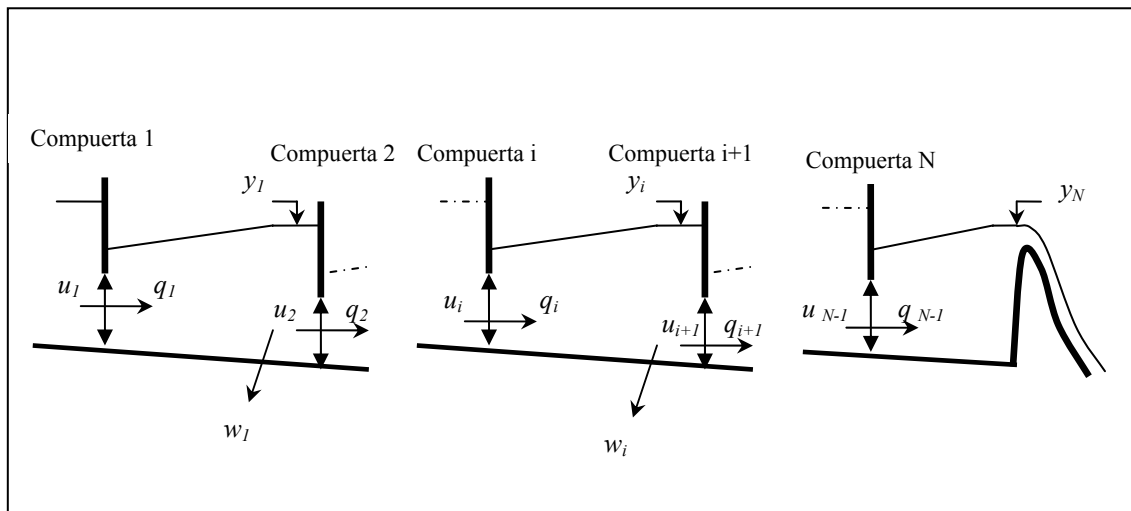


Figura 12 – Esquema general del sistema a controlar

Los dos sistemas de control desarrollados en la presente tesina presentan un esquema idéntico, basando en la utilización de N controladores, uno por compuerta, que a su vez están compuestos por un controlador predictivo y un controlador local. La diferencia entre los dos sistemas se encuentra en el tipo de modelo utilizado en la zona de transporte.

El controlador predictivo es el encargado de calcular en cada instante k , el caudal bajo compuerta deseado para el próximo tiempo de muestreo $k+1$, de modo que el nivel en la zona de almacenamiento del tramo agua abajo de la compuerta alcance la consigna. Posteriormente, el controlador local utiliza el valor de caudal calculado por el predictivo para determinar cuáles son los movimientos de compuerta a realizar durante los instantes k y $k+1$ para que el caudal bajo compuerta en el instante $k+1$ sea el calculado por el controlador predictivo.

En el proceso de cálculo, cada controlador predictivo requiere información del caudal que está saliendo por la compuerta de aguas abajo, de modo que el cálculo se realiza controlador por controlador desde aguas abajo hacia aguas arriba. En cambio el procedimiento de cálculo de cada controlador local es independiente del resto, no necesita información del resto de controladores locales. Concretamente, los controladores locales son del tipo PID (proporcional, integral, diferencial) en tiempo continuo, que toman la abertura u_i como variable de control y el caudal bajo compuerta q_i como variable de salida.

Podemos clasificar ambos sistemas de control como sistemas jerárquicos, donde el “*master controller*” es el controlador predictivo y el “*slave controller*” el controlador local. A su vez, el “*master controller*” presenta una configuración semilocal, ya que utiliza información de los controladores próximos, y el “*slave controller*” responde a una configuración local.

En los siguientes apartados del presente capítulo se explica detalladamente el proceso de desarrollo de ambos modelos.

3.2-CONTROLADOR PREDICTIVO

Para reproducir el movimiento en lámina libre del canal se estudia cada tramo de canal de un modo individual. El *Figura 13* muestra el esquema matemático utilizado para modelizar un tramo de canal genérico.

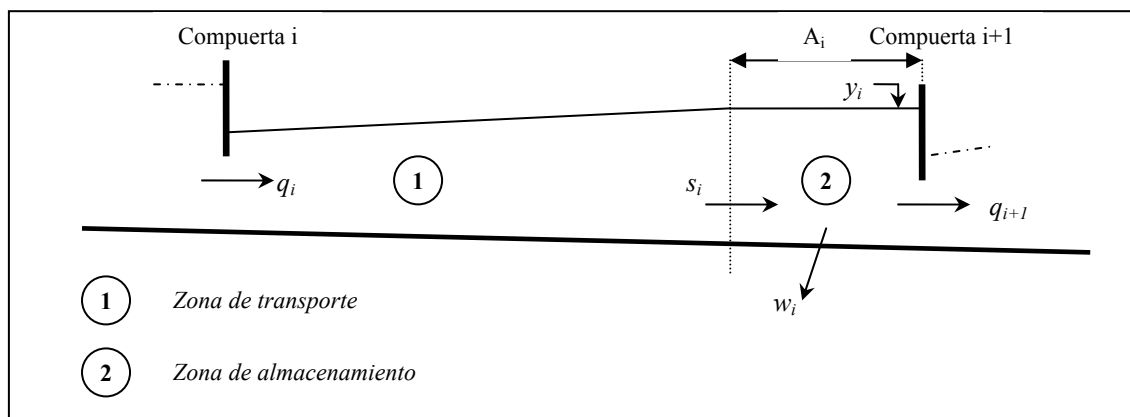


Figura 13 – Esquema matemático de un tramo genérico

Un tramo genérico del canal, tramo i , está delimitado por dos compuertas, una aguas arriba (compuerta i) y otra aguas abajo (compuerta $i+1$). El caudal q_i entra por la compuerta aguas arriba, que presenta una abertura u_i dicho caudal se propaga por la zona del tramo denominada *zona de transporte* donde se producen variaciones de caudal y calado, hasta llegar a la denominada *zona de almacenamiento*, zona próxima a la compuerta $i+1$, donde se considera que la velocidad es nula y el nivel y_i no varía en cada sección. En esta zona entra un caudal s_i , y en ella se ubica el vertedero lateral, el cual vierte un caudal w_i .

La diferencia entre los dos sistemas de control desarrollados en esta tesina radica en el método utilizado para modelizar la *zona de transporte*. En un caso se ha utilizado un modelo hidrológico, modelo de Muskingum, y en otro un modelo hidráulico, modelo de Hayami.

Los modelos utilizados en la *zona de transporte* relacionan el caudal aguas arriba de un tramo con el caudal aguas abajo. Como las variables controladas son los niveles aguas abajo de cada tramo, la presencia de una *zona de almacenamiento* es obligada para obtener una relación entre calados y caudales.

La ecuación que rige la *zona de almacenamiento* es la ecuación de conservación de la masa.

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = s_i - q_{i+1} - w_i \quad (3.1)$$

donde $V_i(t)$ es el volumen almacenado en la *zona de almacenamiento*. Esta *zona de almacenamiento* tiene una superficie constante, de modo que $V_i(t) = A_i \cdot y_i(t)$. Así pues, la ecuación (3.1) puede expresarse del siguiente modo.

$$A_i \frac{dy_i(t)}{dt} = s_i - q_{i+1} - w_i \quad (3.2)$$

El modelo que rige la *zona de transporte* en el primer sistema de control desarrollado es el modelo de Muskingum. Dicho modelo en forma continua se compone de dos ecuaciones: la ecuación de conservación de la masa y la ecuación de Muskingum.

La ecuación de conservación de la masa indica que la variación de volumen V_i en la *zona de transporte* es producida por el balance entre el caudal de entrada $q_i(t)$ y el caudal de salida $s_i(t)$:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = q_i(t) - s_i(t) \quad (3.3)$$

La ecuación de Muskingum relaciona el volumen almacenado V_i y los caudales de entrada $q_i(t)$ y de salida $s_i(t)$ en cualquier instante de tiempo t , mediante los parámetros κ_i y χ_i :

$$V_i(t) = [\kappa_i \chi_i] q_i(t) + [\kappa_i (1 - \chi_i)] s_i(t) \quad (3.4)$$

Combinando las ecuaciones (3.3) y (3.4) el resultado es una EDO de 1^{er} orden:

$$\kappa_i (1 - \chi_i) \frac{ds_i(t)}{dt} + s_i(t) = -\kappa_i \chi_i \frac{dq_i(t)}{dt} + q_i(t) \quad (3.5)$$

con las siguientes condiciones iniciales
$$\begin{cases} q_i(0) = q_i^0 \\ s_i(0) = s_i^0 \end{cases} \quad (3.6)$$

El modelo que rige la *zona de transporte* en el segundo sistema de control desarrollado es el modelo de Hayami. Este modelo es una linealización de primer orden de la ecuación de la onda difusiva. Ésta, a su vez, es una simplificación de las ecuaciones de Saint-Venant. La ecuación de Hayami en forma continua presenta la siguiente expresión:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + C_0 \frac{\partial q}{\partial x} - D_0 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7)$$

donde q representa la variación de caudal respecto un caudal de referencia Q_0 y C_0 y D_0 son parámetros.

Discretizando y combinando las ecuaciones que rigen las *zonas de almacenamiento y de transporte*, se obtienen los dos modelos en diferencias del canal para cada tramo i utilizados por los controladores predictivos.

En los siguientes apartados del presente capítulo se comentan con mayor extensión el desarrollo de los dos modelos.

3.2.1-MODELO DE MUSKINGUM

El modelo de Muskingum parte de dos ecuaciones, la de conservación de la masa en el tramo de transporte (3.3) y la ecuación de Muskingum (3.4). Combinando ambas ecuaciones se obtiene una EDO de 1^{er} orden (3.5), con unas condiciones iniciales (3.6). Estas ecuaciones presentan como parámetros característicos del canal los coeficientes χ_i y κ_i .

El parámetro χ_i (factor de peso) es adimensional e indica el peso que tienen el caudal de entrada q_i y el caudal de salida s_i en el volumen de agua V_i almacenado en la *zona de transporte*. Su rango de valores posibles es $0 < \chi_i < 0,5$. Un valor de 0 indica que el almacenamiento es únicamente función del caudal aguas abajo s_i . En el otro extremo, un valor de 0,5 implica que el almacenamiento es función de ambos caudales, y en la misma proporción (presentan pesos idénticos). Habitualmente, este parámetro presenta unos valores comprendidos dentro del siguiente rango: $0,2 < \chi_i < 0,3$.

El parámetro κ_i (constante del tiempo de almacenamiento) tiene dimensiones de tiempo, y representa el tiempo que tarda una onda de caudal en viajar de aguas arriba hasta aguas abajo del tramo. Su valor se puede estimar mediante el cálculo del tiempo que tarda la onda de perturbación viajando a una velocidad c_i en recorrer el tramo de canal de longitud L_i , es decir

$$\kappa_i = \frac{L_i}{c_i} \quad (3.8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.5) con las condiciones iniciales (3.6), se obtiene una función de transferencia continua, $G(s)$, que relaciona el caudal de entrada $q_i(s)$, con el caudal de salida $s_i(s)$ en la forma

$$s_i(s) = G(s) \cdot q_i(s) \text{ , siendo } G(s) = \frac{1 - \kappa\chi s}{\kappa(1 - \chi)s + 1} \quad (3.9)$$

Aplicando la transformación bilineal de Tustin, se obtiene una función de transferencia discreta $H(z)$.

$$H(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\mu_{i0} + \mu_{i1}z^{-1}}{1 - \nu_{i1}z^{-1}} \quad (3.10)$$

donde los coeficientes ν_{i1} , μ_{i0} y μ_{i1} se definen son

$$\nu_{i1} = \frac{2\kappa_i(1 - \chi_i) - T}{T + 2\kappa_i(1 - \chi_i)} ; \mu_{i0} = \frac{T - 2\kappa_i\chi_i}{T + 2\kappa_i(1 - \chi_i)} ; \mu_{i1} = \frac{T + 2\kappa_i\chi_i}{T + 2\kappa_i(1 - \chi_i)} \quad (3.11)$$

Esta transformación equivale a discretizar la ecuación (3.5) con la regla del trapecio.

De este modo el caudal de salida $s_i(z)$ se obtiene a partir del caudal de entrada $q_i(z)$ mediante la siguiente expresión:

$$s_i(z) = \frac{\mu_{i0} + \mu_{i1}z^{-1}}{1 - \nu_{i1}z^{-1}} q_i(z) \quad (3.12)$$

Aplicando la transformada z inversa (Z^{-1}), se obtiene una expresión discreta del caudal de salida s_i en un instante k como función del mismo en un instante anterior, $k-1$, y del caudal de entrada q_i en los instantes k y $k-1$ en la forma

$$s_i(k) = \nu_{i1}s_i(k-1) + \mu_{i0}q_i(k) + \mu_{i1}q_i(k-1) \quad (3.13)$$

En las expresiones anteriores T es el periodo de muestreo utilizado en la discretización, el cual debe cumplir la siguiente condición:

$$\kappa_i > T > \kappa_i \chi_i \quad (3.14)$$

Según las expresiones (3.11), los coeficientes ν_{i1} , μ_{i0} y μ_{i1} verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \nu_{i1} + \mu_{i0} + \mu_{i1} &= 1 \\ 0 < \nu_{i1}, \mu_{i0}, \mu_{i1} &< 1 \\ 0 < \mu_{i0} < \mu_{i1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Discretizando la ecuación que rige la *zona de almacenamiento* (3.2) mediante la regla del trapecio y aplicando la transformada Z se obtiene:

$$(z - z^{-1})y_i(z) = \frac{T}{2A_i} (z + 2 + z^{-1})(s_i(z) - q_{i+1}(z) - w_i(z)) \quad (3.16)$$

Combinando la ecuación (3.16) con la ecuación discretizada de la zona de transporte (3.11), evaluando esta última en incrementos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Delta y_i(k) &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot \Delta y_i(k-j) + \sum_{j=0}^3 b_{ij} \cdot \Delta q_i(k-j) \\ &+ \sum_{j=0}^3 c_{ij} \cdot \Delta q_{i+1}(k-j) + \sum_{j=0}^3 d_{ij} \cdot \Delta w_i(k-j) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Los coeficientes a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} y d_{ij} son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 a_{i0} &= 0 & c_{i0} &= -\frac{1}{2} \frac{T_i}{A_i} \\
 a_{i1} &= v_{i1} & c_{i1} &= \frac{T_i}{A_i} \left[\frac{v_{i1}}{2} - 1 \right] \\
 a_{i2} &= 1 & c_{i2} &= \frac{T_i}{A_i} \left[v_{i1} - \frac{1}{2} \right] \\
 a_{i3} &= -v_{i1} & c_{i3} &= \frac{T_i}{A_i} \frac{v_{i1}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 b_{i0} &= \frac{T_i}{A_i} \frac{\mu_{i0}}{2} & d_{i0} &= c_{i0} \\
 b_{i1} &= \frac{T_i}{A_i} \left[\frac{\mu_{i1}}{2} + \mu_{i0} \right] & d_{i1} &= c_{i1} \\
 b_{i2} &= \frac{T_i}{A_i} \left[\frac{\mu_{i0}}{2} + \mu_{i1} \right] & d_{i2} &= c_{i2} \\
 b_{i3} &= \frac{T_i}{A_i} \frac{\mu_{i1}}{2} & d_{i3} &= c_{i3}
 \end{aligned}$$

siendo Δ el operador incremental para una variable genérica:

$$\Delta y_i(k) = y_i(k) - y_i(k-1) \tag{3.19}$$

3.2.1.1-Predicción en el intervalo [k, k+λ]

Definiendo un horizonte de predicción λ , mediante la expresión (3.17), la predicción en el intervalo $[k, k+\lambda]$ puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{y}_i(k+l|k) &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot \Delta \hat{y}_i(k+l-j|k) + \sum_{j=0}^3 b_{ij} \cdot \Delta \hat{q}_i(k+l-j|k) \\
 &+ \sum_{j=0}^3 c_{ij} \cdot \Delta \hat{q}_{i+1}(k+l-j|k) + \sum_{j=0}^3 d_{ij} \cdot \Delta \hat{w}_i(k+l-j|k)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

para $l = 1, 2, \dots, \lambda$

Esta predicción puede redefinirse en cada instante de tiempo k con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{y}_i(k+1-j|k) &= \Delta y_i(k+1-j), & \text{para } j=1,2,3 \\
 \Delta \hat{q}_i(k+1-j|k) &= \Delta q_i(k+1-j), & \text{para } j=1,2,3 \\
 \Delta \hat{q}_{i+1}(k+1-j|k) &= \Delta q_{i+1}(k+1-j), & \text{para } j=1,2,3 \\
 \Delta \hat{w}_i(k+1-j|k) &= \Delta w_i(k+1-j), & \text{para } j=1,2,3
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Las condiciones iniciales (3.21) indican que en cada instante k y anteriores, las variables y_i , q_i , q_{i+1} y w_i son conocidas. Utilizando el modelo predictivo (3.20) recursivamente a partir de las condiciones iniciales (3.21), se obtiene la siguiente expresión que permite plantear la predicción del calado en la zona de almacenamiento en el intervalo $[k, k+\lambda]$, en función de los niveles y caudales (bajo compuertas y extracción) pasados, y de la predicción de los niveles y caudales futuros :

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{y}_i(k+l|k) &= \sum_{j=1}^3 e_{ij}^{(l)} \Delta y_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{(l)} \Delta q_i(k+1-j) \\
 &+ \sum_{j=1}^3 f_{ij}^{(l)} \Delta q_{i+1}(k+1-j) + \sum_{j=1}^3 h_{ij}^{(l)} \Delta w_i(k+1-j) \\
 &+ \sum_{j=1}^l g_{i0}^{(l+1-j)} \Delta \hat{q}_i(k+j|k) + \sum_{j=1}^l f_{i0}^{(l+1-j)} \Delta \hat{q}_{i+1}(k+j|k) \\
 &+ \sum_{j=1}^l h_{i0}^{(l+1-j)} \Delta \hat{w}_i(k+j|k) \\
 &\text{para } l=1,2,\dots,\lambda
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

con los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}
 e_{ij}^{(l)} &= e_{i1}^{(l-1)} a_{ij} + e_{i,j+1}^{(l-1)} ; & j=1,2,3 ; & l=2,\dots,\lambda \\
 g_{ij}^{(l)} &= e_{i1}^{(l-1)} b_{ij} + g_{i,j+1}^{(l-1)} ; & j=0,\dots,3 ; & l=2,\dots,\lambda \\
 f_{ij}^{(l)} &= e_{i1}^{(l-1)} c_{ij} + f_{i,j+1}^{(l-1)} ; & j=0,\dots,3 ; & l=2,\dots,\lambda \\
 h_{ij}^{(l)} &= e_{i1}^{(l-1)} d_{ij} + h_{i,j+1}^{(l-1)} ; & j=0,\dots,3 ; & l=2,\dots,\lambda
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 e_{ij}^{(1)} &= a_{ij} ; & j=1,\dots,3 & & g_{ij}^{(1)} &= b_{ij} ; & j=0,\dots,3 \\
 f_{ij}^{(1)} &= c_{ij} ; & j=0,\dots,3 & & h_{ij}^{(1)} &= d_{ij} ; & j=0,\dots,3
 \end{aligned}$$

$$e_{i,4}^{(l-1)} = g_{i,4}^{(l-1)} = f_{i,4}^{(l-1)} = h_{i,4}^{(l-1)} = 0 ; \quad l=2,\dots,\lambda$$

3.2.1.2-Ley de control

Con el objetivo de obtener una ley de control, que permita calcular el caudal necesario bajo la compuerta situada aguas arriba del tramo en el instante $k+1$, para que

en el instante $k+\lambda$ el nivel en la *zona de almacenamiento* sea el nivel de consigna, se imponen las siguientes condiciones:

$$\hat{y}_i(k + \lambda|k) = y_i^{ref}(k + \lambda|k) \quad (3.24)$$

$$\Delta q_i(k + l|k) = 0 \quad \text{para } l = 2, 3, \dots, \lambda \quad (3.25)$$

La primera condición impone que el nivel en la *zona de almacenamiento* evolucionará siguiendo una trayectoria de referencia. La segunda condición impone que el caudal desaguado bajo la compuerta ubicada aguas arriba del tramo i será constante en el intervalo $[k+1, k+\lambda]$.

Sumando las λ ecuaciones (3.22), usando las condiciones iniciales (3.21) e imponiendo la condición (3.25), el nivel de agua en la *zona de almacenamiento* predicho para el instante $k+\lambda$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k + \lambda|k) &= y_i(k) + \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^{(\lambda)} \Delta y_i(k + 1 - j) + \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}^{(\lambda)} \Delta q_i(k + 1 - j) \\ &+ \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}^{(\lambda)} \Delta q_{i+1}(k + 1 - j) + \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}^{(\lambda)} \Delta w_i(k + 1 - j) \\ &+ \beta_{i0}^{(\lambda)} \Delta \hat{q}_i(k + 1|k) + \sum_{j=1}^{\lambda} \gamma_{i0}^{(\lambda+1-j)} \Delta \hat{q}_{i+1}(k + j|k) \\ &+ \sum_{j=1}^{\lambda} \delta_{i0}^{(\lambda+1-j)} \Delta \hat{w}_i(k + j|k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Con

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(r)} &= \sum_{L=1}^r e_{ij}^{(L)} & \beta_{ij}^{(r)} &= \sum_{L=1}^r g_{ij}^{(L)} \\ \gamma_{ij}^{(r)} &= \sum_{L=1}^r f_{ij}^{(L)} & \delta_{ij}^{(r)} &= \sum_{L=1}^r h_{ij}^{(L)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Despejando $\Delta \hat{q}_i(k + 1|k)$ de la ecuación (3.26) e imponiendo la condición (3.24), se obtiene una expresión del incremento de caudal en el instante $k+1$:

$$\Delta \hat{q}_i(k + 1|k) = \frac{y_i^{ref}(k + \lambda|k) - y_i(k) - \hat{c}_i(k + 1|k)}{\beta_{i0}^{(\lambda)}} \quad (3.28)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{c}_i(k + 1|k) &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^{(\lambda)} \Delta y_i(k + 1 - j) + \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}^{(\lambda)} \Delta q_i(k + 1 - j) \\ &+ \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}^{(\lambda)} \Delta q_{i+1}(k + 1 - j) + \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}^{(\lambda)} \Delta w_i(k + 1 - j) \\ &+ \sum_{j=1}^{\lambda} \gamma_{i0}^{(\lambda+1-j)} \Delta \hat{q}_{i+1}(k + j|k) + \sum_{j=1}^{\lambda} \delta_{i0}^{(\lambda+1-j)} \Delta \hat{w}_i(k + j|k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Finalmente, la ley de control se expresa del siguiente modo:

$$\hat{q}_i(k+1|k) = \Delta\hat{q}_i(k+1|k) - q_i(k) \quad (3.30)$$

De este modo, las variables requeridas para calcular el caudal necesario en el instante $k+1$, para que en el instante $k+\lambda$ se cumpla la condición de nivel impuesta en la zona de almacenamiento son las siguientes:

- $y_i, q_i, q_{i+1}, y w_i$ en el instante k y anteriores. Estas variables pueden medirse.
- $\Delta\hat{q}_{i+1}(k+j|k)$ y $\Delta\hat{w}_i(k+j|k)$ en instantes futuros, por lo que se tendrán que estimar.

3.2.1.3-Estimación de valores futuros

Para estimar los valores futuros de las variables $\Delta\hat{q}_{i+1}(k+j|k)$ y $\Delta\hat{w}_i(k+j|k)$, y la trayectoria de referencia $y_i^{ref}(k+\lambda|k)$, se utilizan las tres hipótesis siguientes:

- Se supone que al final del horizonte de predicción, en el instante $k+\lambda$, cada uno de los controladores han alcanzado la consigna y_i^{sp} , de modo que el valor final de la trayectoria de referencia $y_i^{ref}(k+\lambda|k)$ es el valor de consigna.
- Se conoce la relación hidráulica que caracteriza la toma lateral al final de cada tramo: f_i .
- Se impone la condición estacionaria a partir del tramo final N hasta el tramo i .

Tramo final

En el tramo final, la presencia de un vertedero aguas abajo permite estimar el valor del caudal aguas abajo del tramo en el instante $k+\lambda$, dado que $\hat{q}_{N+1}(k+\lambda|k) = f_N(y_N^{sp})$. El valor de dicho caudal en el instante k es conocido, de modo que suponiendo una variación lineal entre los instantes k y $k+\lambda$, es posible conocer $\Delta\hat{q}_{N+1}(k+j|k)$.

$$\Delta\hat{q}_{N+1}(k+j|k) = \frac{\hat{q}_{N+1}(k+\lambda|k) - q_{N+1}(k)}{\lambda}; \quad j = 1, 2, \dots, \lambda \quad (3.31)$$

Dado que en el tramo final no existe toma lateral, el valor $\Delta\hat{w}_N(k+j|k)$ es nulo para cualquier $j=1, 2, \dots, \lambda$.

Tramo genérico intermedio

Para calcular el valor de $\Delta\hat{w}_i(k+j|k)$ en un tramo genérico intermedio, se supone que existe una variación lineal entre los valores de w_i entre los instantes k y $k+\lambda$.

El valor en el instante k es conocido, y en el instante $k+\lambda$ puede estimarse mediante la relación hidráulica que caracteriza la toma lateral. De este modo, $\Delta\hat{w}_i(k+j|k)$ se determina con la siguiente expresión:

$$\Delta\hat{w}_i(k+j|k) = \frac{\hat{w}_i(k+\lambda|k) - w_i(k)}{\lambda}; \quad j = 1, 2, \dots, \lambda \quad (3.32)$$

Para calcular el caudal bajo la compuerta $i+1$ en el instante $k+\lambda$ es necesario aplicar un balance de masa en la zona de canal delimitada aguas arriba por la compuerta $i+1$ y aguas abajo por el vertedero de cola. La expresión que permite evaluar dicho caudal es la siguiente:

$$\hat{q}_{i+1}(k+\lambda|k) = \sum_{j=i+1}^N \hat{w}_j(k+\lambda|k) + \hat{q}_{N+1}(k+\lambda|k) \quad (3.33)$$

Una vez estimado $\hat{q}_{i+1}(k+\lambda|k)$, se supone que el caudal bajo la compuerta $i+1$ varía linealmente desde el valor conocido en el instante k hasta el valor estimado en el instante $k+\lambda$. La expresión que permite estimar los incrementos de caudal en el intervalo $[k, k+\lambda]$ es la siguiente:

$$\Delta\hat{q}_{i+1}(k+j|k) = \frac{\hat{q}_{i+1}(k+\lambda|k) - q_{i+1}(k)}{\lambda}; \quad j = 1, 2, \dots, \lambda \quad (3.34)$$

La ecuación (3.33) indica que el controlador es un controlador de tipo semi-local, ya que utiliza información de todos los tramos situados aguas abajo.

3.2.2-MODELO DE HAYAMI

El modelo de Hayami es un modelo hidráulico, derivado de las ecuaciones de Saint Venant, mientras que el modelo de Muskingum es un modelo hidrológico.

Las ecuaciones de Saint Venant (Georges y Litrico, 1999) permiten reproducir el comportamiento hidráulico de canales. Se trata de dos ecuaciones, la ecuación de conservación de la masa y la ecuación de conservación del momento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_1 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} + A \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -A \cdot g \cdot S_f + k \cdot q_1 \cdot V \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde

$Q(x, t)$ es el caudal en m^3 / s en la sección A

$q_1(x, t)$ es el caudal lateral en m^3 / s ($q_1 > 0$: aportación; $q_1 < 0$: extracción)

$A(x, z)$ es el area mojada en m^2

$z(x, t)$ es la cota de la superficie del agua en m

$S_f(Q, z, x)$ es la pendiente motriz

$V(x, t)$ es la velocidad media en m / s en la sección A

g es la aceleración de la gravedad en m / s^2

$k = 0$ si $q_1 > 0$ (considerando la aportación perpendicular al flujo)

$k = 1$ si $q_1 < 0$ (considerando la extracción paralela al flujo)

Bajo las siguientes hipótesis:

- $q_1 = 0$

- los términos inerciales $\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2 / A)}{\partial x}$ son despreciable frente al término difusivo $A \cdot g \frac{\partial z}{\partial x}$

las ecuaciones de Saint Venant (3.35) se convierten en la ecuación de onda difusiva:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C(Q, z, x) \frac{\partial Q}{\partial x} - D(Q, z, x) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (3.36)$$

donde $C(Q, z, x)$ es la celeridad en m/s y $D(Q, z, x)$ es la difusión en m^2/s que se expresan en la forma

$$C(Q, z, x) = \frac{1}{B^2 \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)} \left[\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial(B S_f)}{\partial z} \right] \quad (3.37)$$

$$D(Q, z, x) = \frac{1}{B \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)}$$

B es el ancho superficial de la lámina de agua.

La linealización de primer orden de la ecuación de la onda difusiva (3.36) alrededor de un caudal de referencia Q_0 lleva a la llamada ecuación de Hayami:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + C_0 \frac{\partial q}{\partial x} - D_0 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (3.38)$$

siendo q el incremento de caudal respecto el caudal de referencia Q_0 .

Se definen los coeficientes C_0 y D_0 como:

$$\begin{aligned} C_0 &= C(Q_0, z, x) \\ D_0 &= D(Q_0, z, x) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Estos coeficientes pueden estimarse aproximadamente para un tramo de canal genérico, con una sección trapezoidal, como la de la *Figura 13*, mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{5 \cdot Q_0}{3 \cdot A} - \frac{2 \cdot Q_0 \cdot m}{B^2} \\ D_0 &= \frac{Q_0}{2 \cdot B \cdot S_f} \end{aligned} \quad (3.40)$$

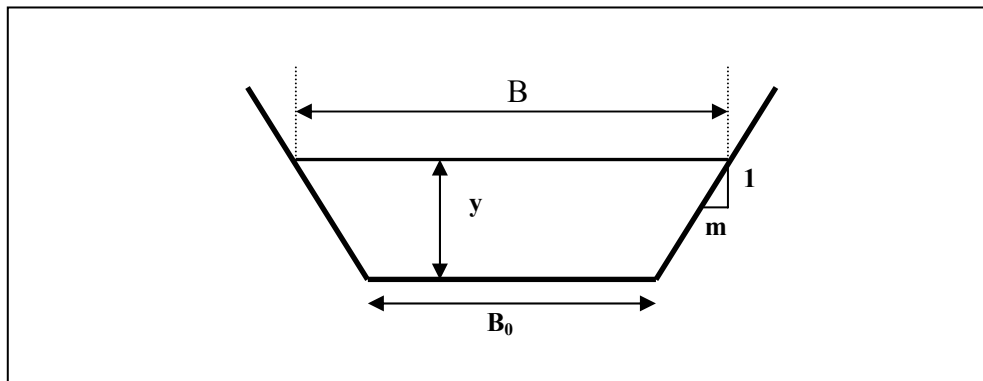


Figura 14 – Sección de un canal genérico

donde:

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{n^2 \frac{Q^2}{A^2}}{R_h^{4/3}} \quad n : \text{coeficiente de Manning} \\ R_h &= \frac{A}{P_m} \\ A &= B_0 y + 2ym \\ P_m &= B_0 + 2y\sqrt{1+m^2} \\ B &= B_0 y + my^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dado que en el proceso de estudio no se calculará los coeficientes C_0 y D_0 en cada sección del canal, sino que se asimilará un único valor para cada tramo, el valor de y se calculará como el valor medio de los calados a lo largo del canal (valores que se calculan mediante un Runge Kutta de orden 4, el cual calcula a partir de las condiciones iniciales en el canal, las curvas de remanso que se producen).

3.2.2.1-Función de transferencia

Mediante la transformada de Laplace, e integrando la ecuación de Hayami (3.38) bajo la hipótesis de un canal semi-infinito, es posible obtener una función de transferencia que relaciona los incremento de caudal respecto al caudal de referencia Q_0 que existen aguas arriba y aguas abajo de un tramo de longitud X .

$$F_{Hayami}(s) = \exp\left(\frac{C_0 - \sqrt{C_0^2 + 4 \cdot D_0 \cdot s}}{2 \cdot D_0} \cdot X\right) \quad (3.41)$$

Esta función es una función analítica en s , pero no es una función racional. No obstante, es posible, mediante el método de los momentos, identificar esta función de transferencia con una serie de funciones de transferencia genéricas. En el artículo de Litrico y Georges (1999) se muestran diversas identificaciones de esta función de transferencia, las cuáles son utilizadas en el desarrollo de esta tesina.

Dado un tramo de canal, cuya *zona de transporte* tiene una longitud X , es posible calcular un coeficiente adimensional C_L , que caracteriza la *zona de transporte*, y por lo tanto el tramo de canal.

El coeficiente C_L puede determinarse mediante la expresión siguiente:

$$C_L = \frac{C_0 X}{2 D_0} \quad (3.42)$$

Cuando el coeficiente C_L es mayor que $9/4$, es posible aproximar la función de transferencia de Hayami con una función de transferencia de segundo orden con retardo. Si C_L es menor o igual a $9/4$, y mayor que 1 , sólo es posible la aproximación con una función de transferencia de segundo orden o una de primer orden con retardo. Finalmente, si C_L es menor o igual a 1 , únicamente cabe la posibilidad de aproximarla con una función de primer orden. La siguiente tabla (*Tabla 2*) resume las posibles situaciones.

Valores de C_L	Tipo de modelo identificado
$C_L > 9/4$	Segundo orden con retardo
$1 < C_L \leq 9/4$	Primer orden con retardo o Segundo orden
$C_L \leq 1$	Primer orden

Tabla 2 – Tipo de modelo identificado vs Valores del coeficiente C_L

Debido a esta múltiple identificación que presenta el modelo de Hayami, es necesario desarrollar tres modelos, uno para cada uno de los tres rangos en los que el coeficiente C_L toma valores. Los tres modelos desarrollados toman como punto de partida las tres funciones de transferencia genéricas siguientes: segundo orden con retardo, segundo orden y primer orden.

Las siguientes tablas (*Tablas 3 y 4*) muestran, para un canal con una pendiente longitudinal de $5e-4$, un coeficiente de Manning de $0'014$, y dos secciones con las características ilustradas en la *Figura 15*, con qué tipo de función de transferencia se identifica, para diversas longitudes de tramo y para diversos caudales circulantes.

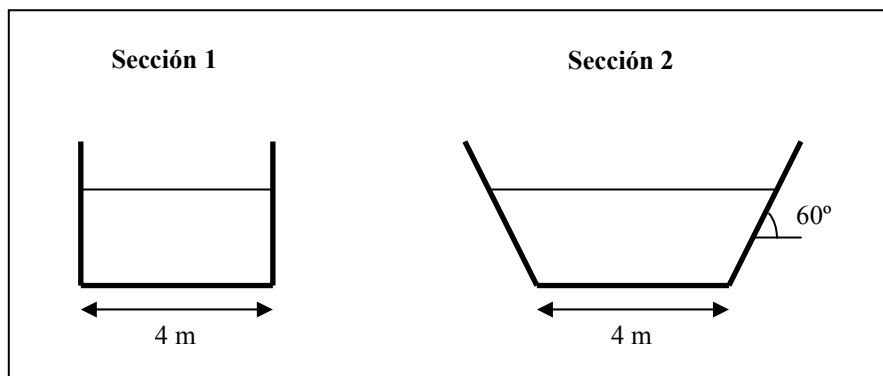


Figura 15 – Secciones de canal utilizadas

- Sección 1 -

Calado (m)	Caudal (m ³ /s)	Longitud del tramo (m)																							
		500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500	12000
0.5	1.7342	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.6	2.2893	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.7	2.8864	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.8	3.5195	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.9	4.1838	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.0	4.8755	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.1	5.5914	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.2	6.3286	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.3	7.0849	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.4	7.8583	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.5	8.6472	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.6	9.4501	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.7	10.2656	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.8	11.0927	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
1.9	11.9303	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
2.0	12.7775	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
2.1	13.6337	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
2.2	14.4980	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2.3	15.3699	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
2.4	16.2488	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
2.5	17.1341	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3

Tabla 3 – Identificación de un canal según el caudal y la longitud de tramo (I)

- Sección 2 -

Calado (m)	Caudal (m ³ /s)	Longitud del tramo (m)																							
		500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500	12000
0.5	1.9086	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.6	2.5684	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.7	3.3010	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.8	4.1026	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.9	4.9705	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.0	5.9028	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.1	6.8977	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.2	7.9543	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.3	9.0715	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.4	10.2487	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1.5	11.4854	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
1.6	12.7814	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
1.7	14.1363	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
1.8	15.5501	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
1.9	17.0228	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
2.0	18.5544	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2.1	20.1451	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2.2	21.7950	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2.3	23.5043	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2.4	25.2733	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2.5	27.1022	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla 4 – Identificación de un canal según el caudal y la longitud de tramo (II)

En estas tablas, un valor de 1 equivale a un modelo de primer orden, un valor de 2 equivale a un modelo de segundo orden, y un valor de 3 equivale a un modelo de segundo orden con retardo.

Debido a esta múltiple identificación, un paso previo a realizar en todo estudio es el de determinar con que tipo de modelo se identifica cada tramo del canal de estudio.

Los canales utilizados en los experimentos realizados en la presente tesina, los cuales se encuentran explicados detalladamente en el capítulo 5, presentan una combinación de longitudes y de caudales circulantes tales que permiten abordar el uso de los tres modelos desarrollados.

3.2.2.2-Controlador de 2º orden con retardo

La identificación de la función de transferencia de Hayami con un modelo de segundo orden con retardo conduce a la siguiente expresión (Georges y Litrico, 1999):

$$F(s) = \frac{\exp(-s\tau)}{1 + Ss + Ps^2} \tag{3.43}$$

donde los parámetros S , P y τ se determinan mediante el método de los momentos.

Mediante un *hold* de primer orden se discretiza la función de transferencia, quedando la siguiente expresión (Georges y Litrico, 1999):

$$F_1^*(z) = z^{-r-1} \frac{c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}} \quad (3.44)$$

con

$$\begin{aligned} a &= z_1 + z_2 & b &= z_1 z_2 & c &= \frac{p_1 \alpha_2 - p_2 \alpha_1}{p_1 - p_2} \\ d &= \frac{p_2 \alpha_1 z_2 - p_1 \alpha_2 z_1 + p_1 \beta_2 - p_2 \beta_1}{p_1 - p_2} \\ e &= \frac{p_2 \beta_1 z_2 - p_1 \beta_2 z_1 + p_1 \gamma_2 - p_2 \gamma_1}{p_1 - p_2} \\ f &= \frac{p_2 \gamma_1 z_2 - p_1 \gamma_2 z_1}{p_1 - p_2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde para $i=1,2$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= G \left(\left(1 - \exp\left(\frac{L-T}{K_i}\right) \right) \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) + 1 - \frac{L}{T} \right) \\ \beta_i &= G \left(\left(2 \exp\left(\frac{L-T}{K_i}\right) - 1 \right) \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) + \left(\frac{K_i + L}{T} - 2 \right) z_i + \frac{L}{T} \right) \\ \gamma_i &= G \left(z_i \left(1 - \frac{K_i + L}{T} \right) - \exp\left(\frac{L-T}{K_i}\right) \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

con

$$\begin{aligned} G &= 1; \quad \tau = \frac{X}{C_0} - S = rT + L \\ K_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(S \pm j \sqrt{4P - S^2} \right) \\ S &= \left(-b + \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} + \left(-b - \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} \\ P &= \left(\frac{2XD_0}{C_0^3} \right) \left(1 - \frac{3D_0}{SC_0^2} \right) \\ \Delta &= \left(\frac{4X^2 D_0^3}{C_0^9} \right) \left(\frac{9D_0}{C_0} - 2X \right) \\ b &= \frac{6XD_0^2}{C_0^5} \end{aligned} \quad (3.47)$$

La ecuación que rige la *zona de almacenamiento* (3.2), está referida a valores totales de caudales. La ecuación de Hayami trabaja con incremento de caudales respecto a un caudal de referencia Q_0 . Este caudal de referencia Q_0 se produce en un estado en el que el canal se encuentra en régimen permanente, de modo que antes de discretizar la ecuación que rige la *zona de almacenamiento* (3.2), es necesario expresar ésta en incrementos referidos al régimen permanente. En régimen permanente, no hay variación de calado en la *zona de almacenamiento* de modo que en ese instante se cumple la siguiente relación:

$$A_i \frac{dy_i(t)}{dt} = 0 = \hat{s}_i - \hat{q}_{i+1} - \hat{w}_i \quad (3.48)$$

Entonces, expresando los términos de la ecuación (3.2) como suma de los valores en régimen permanente más las variaciones respecto a este estado se obtiene la siguiente ecuación:

$$A_i \frac{dy_i(t)}{dt} = \hat{s}_i + \Delta s_i - \hat{q}_{i+1} - \Delta q_{i+1} - \hat{w}_i - \Delta w_i \quad (3.49)$$

Utilizando la condición (3.48) en la ecuación (3.49), y aplicando un cambio de notación, la ecuación que rige la *zona de almacenamiento*, expresada en incrementos respecto al régimen permanente, presenta la siguiente expresión:

$$A_i \frac{dy_i(t)}{dt} = s_i - q_{i+1} - w_i \quad (3.50)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (3.2), salvo que los valores de los caudales en la ecuación (3.2) son valores totales, y en la ecuación (3.50) representan el incremento de caudal respecto al caudal existente en un estado estacionario.

Discretizando la ecuación que rige la *zona de almacenamiento* (3.50) mediante la regla del trapecio (Tustin) y aplicando la transformada Z se obtiene:

$$(z - z^{-1})y_i(z) = \frac{T}{2A_i} (z + 2 + z^{-1})(s_i(z) - q_{i+1}(z) - w_i(z)) \quad (3.51)$$

Utilizando la ecuación (3.44), es posible obtener una expresión de $s_i(z)$ en función de $q_i(z)$:

$$s_i(z) = F_1^*(z)q_i(z) \quad (3.52)$$

Se define la variable m_i

$$m_i = q_{i+1} + w_i \quad (3.53)$$

Combinando las ecuaciones (3.51) y (3.52), y utilizando la nueva variable (3.53), se obtiene la siguiente expresión:

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^4 \hat{\alpha}_{ij} y_i(k-j) + \frac{T}{2A_i} \left[\sum_{j=0}^5 \hat{\beta}_{ij} q_i(k-1-r_i-j) - \sum_{j=0}^4 \hat{\gamma}_{ij} m_i(k-j) \right] \quad (3.54)$$

Los coeficientes $\hat{\alpha}_{ij}$, $\hat{\beta}_{ij}$ y $\hat{\gamma}_{ij}$ son los siguientes:

$$\begin{array}{lll} \hat{\alpha}_{i1} = a_i & \hat{\beta}_{i0} = c_i & \hat{\gamma}_{i0} = 1 \\ \hat{\alpha}_{i2} = 1 - b_i & \hat{\beta}_{i1} = d_i + 2c_i & \hat{\gamma}_{i1} = 2 - a_i \\ \hat{\alpha}_{i3} = -a_i & \hat{\beta}_{i2} = c_i + 2d_i + e_i & \hat{\gamma}_{i2} = b_i - 2a_i + 1 \\ \hat{\alpha}_{i4} = b_i & \hat{\beta}_{i3} = d_i + 2e_i + f_i & \hat{\gamma}_{i3} = 2b_i - a_i \\ & \hat{\beta}_{i4} = e_i + 2f_i & \hat{\gamma}_{i4} = b_i \\ & \hat{\beta}_{i5} = f_i & \end{array} \quad (3.55)$$

3.2.2.2.1-Predicción en el intervalo [k, k+λ]

Definiendo un horizonte de predicción λ , mediante la expresión (3.54), la predicción en el intervalo $[k, k+\lambda]$ puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+l|k) = & \sum_{j=1}^4 \hat{\alpha}_{ij} \hat{y}_i(k+l-j|k) + \frac{T}{2A_i} \left[\sum_{j=0}^5 \hat{\beta}_{ij} \hat{q}_i(k-1-r_i+l-j|k) \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^4 \hat{\gamma}_{ij} \hat{m}_i(k+l-j|k) \right] \quad l = 1, 2, \dots, \lambda \end{aligned} \quad (3.56)$$

Esta predicción puede redefinirse en cada instante de tiempo k con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+1-j|k) &= y_i(k+1-j), & \text{para } j = 1, \dots, 4 \\ \hat{q}_i(k+1-j|k) &= q_i(k+1-j), & \text{para } j = 1, \dots, 5 \\ \hat{m}_{i+1}(k+1-j|k) &= m_{i+1}(k+1-j), & \text{para } j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Las condiciones iniciales (3.57) indican que en cada instante k y anteriores, las variables y_i , q_i y m_i son conocidas. Utilizando el modelo predictivo (3.56) recursivamente a partir de las condiciones iniciales (3.57), se obtiene la siguiente expresión que permite plantear la predicción del calado en la *zona de almacenamiento* en el intervalo $[k, k+\lambda]$, en función de los niveles y caudales (bajo compuertas y extracción) pasados, y de la predicción de los niveles y caudales futuros :

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_i(k+l|k) &= \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{(l)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=1}^5 h_{ij}^{(l)} q_i(k-r_i-j) \right. \\
 &- \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(l)} m_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^l h_{i0}^{(l+1-j)} \hat{q}_i(k-1-r_i+j|k) \\
 &\left. - \sum_{j=1}^l k_{i0}^{(l+1-j)} \hat{m}_i(k+j|k) \right] \frac{T}{2A_i} \\
 &\text{para } l=1,2,\dots,\lambda
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Con los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \hat{\alpha}_{ij} + g_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j=1,\dots,4; \quad l=2,\dots,\lambda \\
 h_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \hat{\beta}_{ij} + h_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j=0,\dots,5; \quad l=2,\dots,\lambda \\
 k_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \hat{\gamma}_{ij} + k_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j=0,\dots,4; \quad l=2,\dots,\lambda \\
 \\
 g_{ij}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{ij}; \quad j=1,\dots,4 \\
 h_{ij}^{(1)} &= \hat{\beta}_{ij}; \quad j=0,\dots,5 \\
 k_{ij}^{(1)} &= \hat{\gamma}_{ij}; \quad j=0,\dots,4 \\
 \\
 g_{i,5}^{(l-1)} &= h_{i,6}^{(l-1)} = k_{i,5}^{(l-1)} = 0; \quad l=2,\dots,\lambda
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

3.2.2.2-Ley de control

Con el objetivo de obtener una ley de control, que permita calcular el caudal necesario bajo la compuerta situada aguas arriba del tramo i en el instante $k+1$, para que en el instante $k+\lambda$ el nivel en la *zona de almacenamiento* sea el nivel de consigna, se imponen las siguientes condiciones:

$$\hat{y}_i(k+\lambda|k) = y_i^{ref}(k+\lambda|k) \tag{3.60}$$

$$\Delta q_i(k+l|k) = 0 \quad \text{para } l=2,3,\dots,\lambda \tag{3.61}$$

La primera condición impone que el nivel en la *zona de almacenamiento* evolucionará siguiendo una trayectoria de referencia. La segunda condición impone que el caudal desaguado bajo la compuerta ubicada aguas arriba del tramo i será constante en el intervalo $[k+1, k+\lambda]$.

Dando un valor de $l=\lambda$ a la ecuación (3.58), el nivel de agua en la *zona de almacenamiento* predicho para el instante $k+\lambda$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_i(k + \lambda|k) &= \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k + 1 - j) + \left[\sum_{j=1}^5 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k - r_i - j) \right. \\
 &\quad - \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k + 1 - j) + \sum_{j=1}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k - 1 - r_i + j|k) \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i + j|k) \right] \frac{T}{2A_i}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Debido al retardo r_i , existen valores en el cuarto sumatorio de la ecuación (3.62) que son conocidos, de modo que este sumatorio se puede descomponer en dos sumatorios. El retardo también impone una condición sobre el valor de λ ($\lambda \geq r_i + 2$), para que la ecuación (3.62) incluya como mínimo la predicción $\hat{q}_i(k + 1|k)$. A partir de esto e imponiendo las condiciones (3.60) y (3.61), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 y_i^{ref}(k + \lambda|k) &= \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k + 1 - j) + \left[\sum_{j=1}^5 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k - r_i - j) \right. \\
 &\quad - \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k + 1 - j) + \sum_{j=1}^{r_i+1} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k - 1 - r_i + j|k) \\
 &\quad \left. + q_i(k + 1|k) \sum_{j=r_i+2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} - \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i + j|k) \right] \frac{T}{2A_i}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Despejando $\hat{q}_i(k + 1|k)$ de la ecuación (3.26) se obtiene una expresión del caudal en el instante $k+1$:

$$\begin{aligned}
 \hat{q}_i(k + 1|k) &= \frac{1}{\sum_{j=r_i+2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)}} \left[\frac{2A_i}{T} \left[y_i^{ref}(k + \lambda|k) - \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k + 1 - j) \right] \right. \\
 &\quad - \sum_{j=1}^5 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k - r_i - j) + \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k + 1 - j) - \sum_{j=1}^{r_i+1} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k - 1 - r_i + j|k) \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i + j|k) \right]
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

De este modo, las variables requeridas para calcular el caudal necesario en el instante $k+1$, para que en el instante $k+\lambda$ se cumpla la condición de nivel impuesta en la zona de almacenamiento son las siguientes:

- y_i , q_i , q_{i+1} , y w_i en el instante k y anteriores. Estas variables pueden medirse.
- $\Delta \hat{m}_{i+1}(k + j|k)$ en instantes futuros, por lo que se tendrán que estimar.

3.2.2.2.3-Estimación de valores futuros

Para estimar los valores futuros de la variable $\hat{m}_i(k+j|k) = \hat{q}_{i+1}(k+j|k) + \hat{w}_i(k+j|k)$, y la trayectoria de referencia $y_i^{ref}(k+\lambda|k)$, se utilizan las tres hipótesis siguientes:

- Se supone que al final del horizonte de predicción, en el instante $k+\lambda$, cada uno de los controladores han alcanzado la consigna, de modo que el valor final de la trayectoria de referencia $y_i^{ref}(k+\lambda|k)$ es el valor de consigna.
- Se conoce la relación hidráulica que caracteriza la toma lateral al final de cada tramo: f_i .
- Se impone la condición estacionaria a partir del tramo final N hasta el tramo i .

Tramo final

En el tramo final, la presencia de un vertedero aguas abajo permite estimar el valor del caudal aguas abajo del tramo en el instante $k+\lambda$, dado que $\hat{q}_{N+1}(k+\lambda|k) = f_N(y_N^{sp})$. El valor de dicho caudal en el instante k es conocido, de modo que suponiendo una variación lineal entre los instantes k y $k+\lambda$, es posible conocer $\hat{q}_{N+1}(k+j|k)$.

$$\hat{q}_{N+1}(k+j|k) = \hat{q}_{N+1}(k+j-1|k) + \Delta\hat{q}_{N+1}; \quad j = 1, 2, \dots, \lambda \quad (3.65)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta\hat{q}_{N+1} &= \frac{\hat{q}_{N+1}(k+\lambda|k) - q_{N+1}(k)}{\lambda - 1} \\ \hat{q}_{N+1}(k|k) &= q_{N+1}(k) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dado que en el tramo final no existe toma lateral, el valor $\hat{w}_N(k+j|k)$ es nulo para cualquier $j=1, 2, \dots, \lambda$.

Tramo genérico intermedio

Para calcular el valor de $\hat{w}_i(k+j|k)$ en un tramo genérico intermedio, se supone que existe una variación lineal entre los valores de w_i entre los instantes k y $k+\lambda$.

El valor en el instante k es conocido, y en el instante $k+\lambda$ puede estimarse mediante la relación hidráulica que caracteriza la toma lateral. De este modo, $\hat{w}_i(k+j|k)$ se determina con la siguiente expresión:

$$\hat{w}_{N+1}(k+j|k) = \hat{w}_{N+1}(k+j-1|k) + \Delta\hat{w}_{N+1}; \quad j = 1, 2, \dots, \lambda \quad (3.67)$$

con

$$\begin{aligned}\Delta \hat{w}_i &= \frac{\hat{w}_i(k + \lambda|k) - w_i(k)}{\lambda - 1} \\ \hat{w}_i(k|k) &= w_i(k)\end{aligned}\quad (3.68)$$

Para calcular el caudal bajo la compuerta $i+1$ en el instante $k+\lambda$ es necesario aplicar un balance de masa en la zona de canal delimitada aguas arriba por la compuerta $i+1$ y aguas abajo por el vertedero de cola. La expresión que permite evaluar dicho caudal es la siguiente:

$$\hat{q}_{i+1}(k + \lambda|k) = \sum_{j=i+1}^N \hat{w}_j(k + \lambda|k) + \hat{q}_{N+1}(k + \lambda|k) \quad (3.69)$$

Una vez estimado $\hat{q}_{i+1}(k + \lambda|k)$, se supone que el caudal bajo la compuerta $i+1$ varía linealmente desde el valor conocido en el instante k hasta el valor estimado en el instante $k+\lambda$. La expresión que permite estimar los incrementos de caudal en el intervalo $[k, k+\lambda]$ es la siguiente:

$$\Delta \hat{q}_{i+1} = \frac{\hat{q}_{i+1}(k + \lambda|k) - q_{i+1}(k)}{\lambda - 1} \quad (3.70)$$

De modo que el caudal bajo compuerta $\hat{q}_{i+1}(k + j|k)$ se estima del siguiente modo:

$$\hat{q}_{i+1}(k + j|k) = \hat{q}_{i+1}(k + j - 1|k) + \Delta \hat{q}_{i+1}; \quad j = 1, 2, \dots, \lambda \quad (3.71)$$

con

$$\hat{q}_{i+1}(k|k) = q_{i+1}(k) \quad (3.72)$$

3.2.2.3-Controlador de 2° orden

La identificación de la función de transferencia de Hayami con un modelo de segundo orden conduce a la siguiente expresión (Georges y Litrico, 1999):

$$F(s) = \frac{1}{1 + Ss + Ps^2} \quad (3.73)$$

donde los parámetros S y P se determinan mediante el método de los momentos.

Mediante un *hold* de primer orden se discretiza la función de transferencia, quedando la siguiente expresión:

$$F_1^*(z) = z^{-1} \frac{c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}} \quad (3.74)$$

con

$$\begin{aligned}
 a &= z_1 + z_2 & b &= z_1 \cdot z_2 & c &= \frac{p_1\alpha_2 - p_2\alpha_1}{p_1 - p_2} \\
 d &= \frac{p_2\alpha_1z_2 - p_1\alpha_2z_1 + p_1\beta_2 - p_2\beta_1}{p_1 - p_2} \\
 e &= \frac{p_2\beta_1z_2 - p_1\beta_2z_1 + p_1\gamma_2 - p_2\gamma_1}{p_1 - p_2} \\
 f &= \frac{p_2\gamma_1z_2 - p_1\gamma_2z_1}{p_1 - p_2}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

donde para $i=1,2$

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= G \left(\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{K_i}\right) \right) \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) + 1 \right) \\
 \beta_i &= G \left(\left(2 \exp\left(\frac{-T}{K_i}\right) - 1 \right) \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) + \left(\frac{K_i}{T} - 2 \right) z_i \right) \\
 \gamma_i &= G \left(z_i \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) - \exp\left(\frac{-T}{K_i}\right) \left(1 - \frac{K_i}{T} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

con

$$\begin{aligned}
 G &= 1 & K_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(S \pm j\sqrt{4P - S^2} \right) \\
 S &= \frac{X}{C_0} & P &= \frac{1}{2} \left(\frac{X^2}{C_0^2} - \frac{2XD_0}{C_0^3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Comparando las ecuaciones (3.74) y (3.44), se puede observar que únicamente difieren en el valor de r . En el caso de un controlador de segundo orden con retardo, es $r \neq 0$ y en un controlador de segundo orden es $r=0$. Conociendo esta circunstancia, el desarrollo de un controlador de segundo orden es idéntico al de un controlador de segundo orden con retardo, salvo que $r=0$ y que los coeficientes del modelo se calculan a partir de las expresiones (3.75), (3.76) y (3.77). Por lo tanto, la ley de control del controlador de segundo orden presenta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \hat{q}_i(k+1|k) &= \frac{1}{\sum_{j=2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)}} \left[\frac{2A_i}{T} \left[y_i^{ref}(k+\lambda|k) - \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k+1-j) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=0}^5 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k-j) + \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i+j|k) \right]
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

donde los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \hat{\alpha}_{ij} + g_{i,j+1}^{(l-1)}; & j &= 1, \dots, 4; & l &= 2, \dots, \lambda \\
 h_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \hat{\beta}_{ij} + h_{i,j+1}^{(l-1)}; & j &= 0, \dots, 5; & l &= 2, \dots, \lambda \\
 k_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \hat{\gamma}_{ij} + k_{i,j+1}^{(l-1)}; & j &= 0, \dots, 4; & l &= 2, \dots, \lambda \\
 \\
 g_{ij}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{ij}; & j &= 1, \dots, 4 \\
 h_{ij}^{(1)} &= \hat{\beta}_{ij}; & j &= 0, \dots, 5 \\
 k_{ij}^{(1)} &= \hat{\gamma}_{ij}; & j &= 0, \dots, 4 \\
 \\
 g_{i,5}^{(l-1)} &= h_{i,6}^{(l-1)} = k_{i,5}^{(l-1)} = 0; & l &= 2, \dots, \lambda
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

con los coeficientes $\hat{\alpha}_{ij}$, $\hat{\beta}_{ij}$ y $\hat{\gamma}_{ij}$

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_{i0} &= a_i & \hat{\beta}_{i0} &= c_i & \hat{\gamma}_{i0} &= 1 \\
 \hat{\alpha}_{i1} &= 1 - b_i & \hat{\beta}_{i1} &= d_i + 2c_i & \hat{\gamma}_{i1} &= 2 - a_i \\
 \hat{\alpha}_{i2} &= -a_i & \hat{\beta}_{i2} &= c_i + 2d_i + e_i & \hat{\gamma}_{i2} &= b_i - 2a_i + 1 \\
 \hat{\alpha}_{i3} &= b_i & \hat{\beta}_{i3} &= d_i + 2e_i + f_i & \hat{\gamma}_{i3} &= 2b_i - a_i \\
 & & \hat{\beta}_{i4} &= e_i + 2f_i & \hat{\gamma}_{i4} &= b_i \\
 & & \hat{\beta}_{i5} &= f_i & &
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

La estimación de valores futuros también es necesaria. El procedimiento es idéntico al del controlador de segundo orden con retardo (apartado 3.2.2.2.3).

3.2.2.4-Controlador de 1er orden

La identificación de la función de transferencia de Hayami con un modelo de primer orden conduce a la siguiente expresión (Georges y Litrico, 1999):

$$F(s) = \frac{G}{1 + sK} \tag{3.81}$$

Mediante un *hold* de orden cero se discretiza la función de transferencia, quedando la siguiente expresión:

$$P^*(z) = z^{-1} \frac{b}{1 - az^{-1}} \tag{3.82}$$

con

$$a = \exp\left(-\frac{T}{K}\right) \quad ; \quad b = G\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{K}\right)\right) \quad (3.83)$$

donde

$$G = 1 \quad ; \quad K = \frac{X}{C_0} \quad (3.84)$$

A partir de la ecuación (3.82), se obtiene una expresión de $s_i(z)$ en función de $q_i(z)$:

$$s_i(z) = P^*(z)q_i(z) \quad (3.85)$$

Combinando las ecuaciones (3.51) (*zona de almacenamiento* discretizada y con la transformada Z aplicada) y (3.83), y utilizando la variable m_i definida en la ecuación (3.53), se obtiene la siguiente expresión:

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} y_i(k-j) + \frac{T}{2A_i} \left[\sum_{j=0}^2 \beta_{ij} q_i(k-1-j) - \sum_{j=0}^3 \gamma_{ij} m_i(k-j) \right] \quad (3.86)$$

Los coeficientes α_{ij} , β_{ij} y γ_{ij} son los siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_{i1} &= a_i & \beta_{i0} &= b_i & \gamma_{i0} &= 1 \\ \alpha_{i2} &= 1 & \beta_{i1} &= 2b_i & \gamma_{i1} &= 2 - a_i \\ \alpha_{i3} &= -a_i & \beta_{i2} &= b_i & \gamma_{i2} &= 1 - 2a_i \\ & & & & \gamma_{i3} &= -a_i \end{aligned} \quad (3.87)$$

3.2.2.4.1-Predicción en el intervalo [k, k+λ]

Definiendo un horizonte de predicción λ , mediante la expresión (3.86), la predicción en el intervalo $[k, k+\lambda]$ puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+l|k) &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \hat{y}_i(k+l-j|k) + \frac{T}{2A_i} \left[\sum_{j=0}^2 \beta_{ij} \hat{q}_i(k-1+l-j|k) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^3 \gamma_{ij} \hat{m}_i(k+l-j|k) \right] \quad l = 1, 2, \dots, \lambda \end{aligned} \quad (3.88)$$

Esta predicción puede redefinirse en cada instante de tiempo k con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+1-j|k) &= y_i(k+1-j), & \text{para } j &= 1, 2, 3 \\ \hat{q}_i(k+1-j|k) &= q_i(k+1-j), & \text{para } j &= 1, 2 \\ \hat{m}_{i+1}(k+1-j|k) &= m_{i+1}(k+1-j), & \text{para } j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Las condiciones iniciales (3.89) indican que en cada instante k y anteriores, las variables y_i , q_i y m_i son conocidas. Utilizando el modelo predictivo (3.88) recursivamente a partir de las condiciones iniciales (3.89), se obtiene la siguiente expresión que permite plantear la predicción del calado en la *zona de almacenamiento* en el intervalo $[k, k+\lambda]$, en función de los niveles y caudales (bajo compuertas y extracción) pasados, y de la predicción de los niveles y caudales futuros:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+l|k) = & \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{(l)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=1}^2 h_{ij}^{(l)} q_i(k-j) \right. \\ & - \sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(l)} m_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^l h_{i0}^{(l+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k) \\ & \left. - \sum_{j=1}^l k_{i0}^{(l+1-j)} \hat{m}_i(k+j|k) \right] \frac{T}{2A_i} \end{aligned} \quad (3.90)$$

para $l = 1, 2, \dots, \lambda$

con los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \alpha_{ij} + g_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j = 1, 2, 3; \quad l = 2, \dots, \lambda \\ h_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \beta_{ij} + h_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j = 0, 1, 2; \quad l = 2, \dots, \lambda \\ k_{ij}^{(l)} &= g_{i1}^{(l-1)} \gamma_{ij} + k_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad l = 2, \dots, \lambda \\ \\ g_{ij}^{(1)} &= \alpha_{ij}; \quad j = 1, 2, 3 \\ h_{ij}^{(1)} &= \beta_{ij}; \quad j = 0, 1, 2 \\ k_{ij}^{(1)} &= \gamma_{ij}; \quad j = 0, 1, 2, 3 \\ \\ g_{i,4}^{(l-1)} &= h_{i,3}^{(l-1)} = k_{i,4}^{(l-1)} = 0; \quad l = 2, \dots, \lambda \end{aligned} \quad (3.91)$$

3.2.2.4.2-Ley de control

Dando un valor de $l=\lambda$ a la ecuación (3.90), el nivel de agua en la *zona de almacenamiento* predicho para el instante $k+\lambda$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+\lambda|k) = & \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=1}^2 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k-r_i-j) - \sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k+1-j) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k) - \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i+j|k) \right] \frac{T}{2A_i} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Esta ecuación puede describirse teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k) &= h_{i0}^{(\lambda)} \hat{q}_i(k|k) + \sum_{j=2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k) = \\
 &= h_{i0}^{(\lambda)} q_i(k) + \sum_{j=2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k)
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

De modo que la ecuación (3.92) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_i(k+\lambda|k) &= \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=0}^2 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k-r_i-j) - \sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k+1-j) \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k) - \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i+j|k) \right] \frac{T}{2A_i}
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

A partir de esta expresión e imponiendo las condiciones (3.60) y (3.61) (trayectoria de referencia de niveles e incremento de caudales limitado), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 y_i^{ref}(k+\lambda|k) &= \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=0}^2 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k-j) - \sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k+1-j) \right. \\
 &+ \left. q_i(k+1|k) \sum_{j=2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)} - \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i+j|k) \right] \frac{T}{2A_i}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Despejando $\hat{q}_i(k+1|k)$ de la ecuación (3.95) se obtiene una expresión del caudal en el instante k+1:

$$\begin{aligned}
 \hat{q}_i(k+1|k) &= \frac{1}{\sum_{j=2}^{\lambda} h_{i0}^{(\lambda+1-j)}} \left[\frac{2A_i}{T} \left[y_i^{ref}(k+\lambda|k) - \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{(\lambda)} y_i(k+1-j) \right] \right. \\
 &- \left. \sum_{j=0}^2 h_{ij}^{(\lambda)} q_i(k-j) + \sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(\lambda)} m_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^{\lambda} k_{i0}^{(\lambda+1-j)} \hat{m}_i(k_i+j|k) \right]
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

De este modo, las variables requeridas para calcular el caudal necesario en el instante k+1, para que en el instante k+λ se cumpla la condición de nivel impuesta en la zona de almacenamiento son las siguientes:

- y_i, q_i, q_{i+1}, y y w_i en el instante k y anteriores. Estas variables pueden medirse.
- $\Delta \hat{m}_{i+1}(k+j|k)$ en instantes futuros, por lo que se tendrán que estimar.

La estimación de valores futuros también es necesaria. El procedimiento es idéntico al del controlador de segundo orden con retardo (apartado 3.2.2.2.3).

3.3-CONTROLADOR LOCAL

La función de cada uno de los controladores locales de cada tramo es calcular, para cada instante de tiempo k , la trayectoria de abertura de compuerta que debe producirse en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes k y $k+1$.

Existen diversos tipos de controladores locales. En este trabajo se ha optado por un controlador local tipo PI continuo, el cual es un caso especial del controlador tipo PID (Proporcional, Integral, Diferencial), en el que la parte diferencial se considera nula.

Este controlador tiene como entrada el caudal bajo compuerta $q_i(t)$, y como salida la abertura de compuerta $u_i(t)$ en cada instante de tiempo (continuo). La consigna $q_i^{sp}(t)$ para cada controlador se toma como una variación lineal desde el valor medido en el instante de muestreo k $q_i(k)$ hasta el valor deseado $\hat{q}_i(k+1|k)$ que ha sido calculado por el controlador predictivo:

$$q_i^{sp}(t) = q_i(k) + \frac{\hat{q}_i(k+1|k) - q_i(k)}{T} (t - TK) \quad (3.97)$$

El control de la abertura de compuerta $u_i(t)$ es función de la diferencia entre la salida medida $q_i(t)$ y la consigna $q_i^{sp}(t)$. Esta diferencia es el error $e_i(t)$:

$$e_i(t) = q_i(t) - q_i^{sp}(t) \quad (3.98)$$

En el controlador local tipo PI utilizado en esta tesina, la abertura de compuerta es función lineal del error (Proporcional) y de la integral del mismo (Integral) entre dos instantes de muestreo:

$$u_i(t) = K_{pi} e_i(t) + K_{ii} \int_{kT}^t e_i(\tau) d\tau$$

$$t \in [kT, kT + T] \quad (3.99)$$

donde K_{pi} es la constante proporcional y K_{ii} es la constante de ganancia integral. Estas constantes dependen del sistema canal-compuerta, es decir, de la relación caudal-abertura. Deben ajustarse para cada caso. En los canales de estudio utilizados en esta tesina, los coeficientes presentan los siguientes valores:

$$K_{pi} = 0,1 \quad K_{ii} = 0,01 \quad (3.100)$$