APÉNDICE D

Discretización del modelo matemático del controlador de Hayami de 1er orden

El modelo para la *zona de transporte* queda definido con las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{P^*(z) = z^{-1}\,\frac{b}{1 - az^{-1}}} \qquad \text{(D.1)}$$

$$\boxed{s_i(z) = P^*(z)q_i(z)} \qquad \text{(D.2)}$$

La ecuación (D.1) es la ecuación de la función de transferencia del modelo de 2º orden. La ecuación (D.2) permite, a través de la función de transferencia y del caudal aguas arriba del tramo, obtener el caudal aguas abajo (caudal entrante en la *zona de almacenamiento*).

El modelo para la *zona de almacenamiento* queda definido mediante la ecuación de conservación de la masa:

$$\boxed{A_i\,\frac{dy_i(t)}{dt} = s_i - q_{i+1} - w_i} \qquad \text{(D.3)}$$

Utilizando la nueva variable $m_i = q_{i+1} + w_i$, la ecuación (D.3) se expresa del siguiente modo:

$$\boxed{A_i\,\frac{dy_i(t)}{dt} = s_i - m_i} \qquad \text{(D.4)}$$

Si se discretiza la ecuación de la *zona de almacenamiento*, (D.4), integrándola entre *k-1* y *k*+1, mediante la regla del trapecio, se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int (A_i\,\frac{dy_i(t)}{dt})\,dt = \int (s_i - m_i)\,dt \\
&y_i(t) = \frac{1}{A_i}\int (s_i - m_i)\,dt = \frac{1}{A_i}\int (\eta_i)\,dt \\
&y_i(k+1) - y_i(k-1) = \frac{1}{A_i}\,\frac{T}{2}\big(\eta_i(k+1) + 2\eta_i(k) + \eta_i(k-1)\big)
\end{aligned}} \qquad \text{(D.5)}$$

Aplicando la transformada Z:

$$\boxed{\begin{aligned}
&(z - z^{-1})y_i(z) = \frac{T}{2A_i}\big(z + 2 + z^{-1}\big)\eta_i(z) \\
&(z - z^{-1})y_i(z) = \frac{T}{2A_i}\big(z + 2 + z^{-1}\big)\big(s_i(z) - m_i(z)\big)
\end{aligned}} \qquad \text{(D.6)}$$

Combinando las ecuaciones (D.1) y (D.2) se obtiene la siguiente expresión:

$$\boxed{s_i(z) = z^{-1} \frac{b}{1-az^{-1}} q_i(z)} \tag{D.7}$$

Sustituyendo (D.7) en la ecuación (D.6):

$$\begin{aligned}
&(z - z^{-1}) y_i(z) = \frac{T}{2A_i} \left(z + 2 + z^{-1}\right)\left(z^{-1} \frac{b}{1-az^{-1}} q_i(z) - m_i(z)\right) \\
&(z - z^{-1})(1 - az^{-1}) y_i(z) = \frac{T}{2A_i} \left(z + 2 + z^{-1}\right)\left(z^{-r-1} b q_i(z) - (1-az^{-1}) m_i(z)\right) \\
&(1) \cdot y_i(z) = \frac{T}{2A_i} \cdot (2) \cdot \left((3) \cdot q_i(z) - (4) \cdot m_i(z)\right) \\
&(1) = z - a + z^{-1} + az^{-2} \\
&(2) \cdot (3) = b\left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right) \\
&(2) \cdot (4) = z + 2 + z^{-1} - a - 2az^{-1} - az^{-2} = z + (2-a) + (1-2a)z^{-1} + -az^{-2}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Aplicando la transformada Z inversa:

$$\begin{aligned}
&y_i(k+1) - ay_i(k) - 1y_i(k-1) + ay_i(k-2) = \frac{T}{2A_i}\left[(5) - (6)\right] \\
&(5) = b\left(q_i(k) + 2q_i(k-1) + q_i(k-2)\right) \\
&(6) = m_i(k+1) + (2-a)m_i(k) + (1-2a)m_i(k-1) - am_i(k-2)
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Agrupando términos:

$$\boxed{y_i(k+1) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij} y_i(k-j) + \frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{2} \beta_{ij} q_i(k-j) - \sum_{j=0}^{3} \gamma_{ij} m_i(k+1-j)\right]} \tag{D.10}$$

Los coeficientes $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}$ y $\hat{\gamma}_{ij}$ son los siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha_{i0} = a_i & \beta_{i0} = b_i & \gamma_{i0} = 1 \\ \alpha_{i1} = 1 & \beta_{i1} = 2b_i & \gamma_{i1} = 2 - a_i \\ \alpha_{i2} = -a_i & \beta_{i2} = b_i & \gamma_{i2} = 1 - 2a_i \\ & & \gamma_{i3} = -a_i \end{array}} \tag{D.11}$$

A partir de la ecuación (D.10) se puede obtener una expresión de $y_i\,(k)$:

$$\boxed{y_i(k) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} y_i(k-j) + \frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{2} \beta_{ij} q_i(k-1-j) - \sum_{j=0}^{3} \gamma_{ij} m_i(k-j)\right]} \tag{D.12}$$

Donde los nuevos coeficientes $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}$ y $\hat{\gamma}_{ij}$ son:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha_{i1} = a_i & \beta_{i0} = b_i & \gamma_{i0} = 1 \\ \alpha_{i2} = 1 & \beta_{i1} = 2b_i & \gamma_{i1} = 2 - a_i \\ \alpha_{i3} = -a_i & \beta_{i2} = b_i & \gamma_{i2} = 1 - 2a_i \\ & & \gamma_{i3} = -a_i \end{array}} \tag{D.13}$$