APÉNDICE C

C-1 Predicción recursiva del nivel $\hat{y}_i(k+l|k)$ *para el controlador de Hayami de 2º orden con retardo*

La predicción en el intervalo [k,k+λ] puede expresarse del siguiente modo:

$$\hat{y}_i(k+l|k) = \sum_{j=1}^{4} \hat{\alpha}_{ij}\hat{y}_i(k+l-j|k) + \frac{T}{2A_i}\cdot\left[\sum_{j=0}^{5}\hat{\beta}_{ij}\hat{q}_i(k-1-r_i+l-j|k) - \sum_{j=0}^{4}\hat{\gamma}_{ij}\hat{m}_i(k+l-j|k)\right] \qquad l=1,2,\dots,\lambda \tag{C.1}$$

Esta predicción puede redefinirse en cada instante de tiempo k con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_i(k+1-j|k) &= y_i(k+1-j), && para\ j=1,\dots,4\\
\hat{q}_i(k-r-j|k) &= q_i(k-r-j), && para\ j=1,\dots,5\\
\hat{m}_{i+1}(k+1-j|k) &= m_{i+1}(k+1-j), && para\ j=1,\dots,4
\end{aligned} \tag{C.2}$$

La predicción en el instante *k+l* depende de los valores en los instantes anteriores *k+l-1*, *k+l-2*, *k+l-3* y *k+l-4*. Estos valores también deben de predecirse. Para obtener la predicción en el instante *k+l* a partir de los valores en los instantes anteriores a k, se puede utilizar recursivamente la ecuación (C.1) sucesivamente para l = 1,2,...,λ., teniendo en cuenta las condiciones iniciales (C.2):

Nota: Se realiza todo el desarrollo manteniendo el parámetro *r*, pero considerando, que su valor es nulo. Esta suposición permite trabajar de un modo más cómodo.
Posteriormente, como se puede observar en el capítulo 3 de la tesina, en el apartado 3.2.2.2.2, donde se calcula la ley de control, ya se tiene en cuenta la influencia del parámetro *r*.

- Para $l = 1$

Sustituyendo en (C.1):

$$\hat{y}_i(k+1|k) = \sum_{j=1}^{4} \hat{\alpha}_{ij}\hat{y}_i(k+1-j|k) + \frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{5}\hat{\beta}_{ij}\hat{q}_i(k-r_i-j|k) - \sum_{j=0}^{4}\hat{\gamma}_{ij}m_i(k+1-j|k)\right] \tag{C.3}$$

Realizando un cambio de notación:

$$\hat{y}_i(k+1|k)=\sum_{j=1}^{4}g_{ij}^{(1)}\hat{y}_i(k+1-j)+\frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{5}h_{ij}^{(1)}\hat{q}_i(k-r_i-j)\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{4}k_{ij}^{(1)}\hat{m}_i(k+1-j)\right] \tag{C.4}$$

El cambio de notación realizado es el siguiente:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{ij}\,; \quad j=1,...,4 \\ h_{ij}^{(1)} &= \hat{\beta}_{ij}\,; \quad j=0,...,5 \\ k_{ij}^{(1)} &= \hat{\gamma}_{ij}\,; \quad j=0,...,4 \end{aligned} \tag{C.5}$$

- Para $l = 2$

Sustituyendo en (C.1):

$$\hat{y}_i(k+2|k)=\sum_{j=1}^{4}\hat{\alpha}_{ij}\hat{y}_i(k+2-j|k)+\frac{T}{2A_i}\cdot\left[\sum_{j=0}^{5}\hat{\beta}_{ij}\hat{q}_i(k-r_i+1-j|k)\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{4}\hat{\gamma}_{ij}\hat{m}_i(k+2-j|k)\right]=\hat{\alpha}_{i1}\hat{y}_i(k+1|k)+\sum_{j=2}^{4}\hat{\alpha}_{ij}\hat{y}_i(k+2-j|k)$$
$$+\frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{5}\hat{\beta}_{ij}\hat{q}_i(k-r_i+1-j|k)-\sum_{j=0}^{4}\hat{\gamma}_{ij}\hat{m}_i(k+2-j|k)\right] \tag{C.6}$$

Sustituyendo el valor de $\hat{y}_i(k+1|k)$ en la ecuación (C.6) por el dado por la ecuación (C.4):

$$\hat{y}_i(k+2|k)=\hat{\alpha}_{i1}\left(\sum_{j=1}^{4}g_{ij}^{(1)}\hat{y}_i(k+1-j)+\frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{5}h_{ij}^{(1)}\hat{q}_i(k-r_i-j)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{j=0}^{4}k_{ij}^{(1)}\hat{m}_i(k+1-j)\right]\right)+\sum_{j=2}^{4}\hat{\alpha}_{ij}\hat{y}_i(k+2-j|k)$$
$$+\frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=0}^{5}\hat{\beta}_{ij}\hat{q}_i(k-r_i+1-j|k)-\sum_{j=0}^{4}\hat{\gamma}_{ij}\hat{m}_i(k+2-j|k)\right] \tag{C.7}$$

Desarrollando los términos de los sumatorios y utilizando las condiciones de contorno (C.2) se llega a la siguiente expresión:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\hat{y}_i(k+2|k) = \hat{\alpha}_{i1} g_{i1}^{(1)} y_i(k) + \hat{\alpha}_{i1}\left(y_i(k) + g_{i2}^{(1)} y_i(k-1)\right) + \hat{\alpha}_{i1}(y_i(k-1) \\
&+ g_{i2}^{(1)} y_i(k-2)) + \hat{\alpha}_{i1}\left(y_i(k-2) + g_{i3}^{(1)} y_i(k-3)\right) + \frac{T}{2A_i}\left[\hat{\beta}_{i0}\hat{q}_i(k-r_i+1|k)\right. \\
&+ \hat{\alpha}_{i1} h_{i0}^{(1)} \hat{q}_i(k-r_i|k) + \hat{\beta}_{i1}\hat{q}_i(k-r_i|k) + \hat{\alpha}_{i1} h_{i1}^{(1)} q_i(k-r_i-1) + \hat{\beta}_{i2} q_i(k-r_i-1) \\
&+ \hat{\alpha}_{i1} h_{i2}^{(1)} q_i(k-r_i-2) + \hat{\beta}_{i3} q_i(k-r_i-2) + \hat{\alpha}_{i1} h_{i3}^{(1)} q_i(k-r_i-3) + \hat{\beta}_{i4} q_i(k-r_i-3) \\
&+ \hat{\alpha}_{i1} h_{i4}^{(1)} q_i(k-r_i-4) + \hat{\beta}_{i5} q_i(k-r_i-4) + \hat{\alpha}_{i1} h_{i5}^{(1)} q_i(k-r_i-5) - \hat{\gamma}_{i0}\hat{m}_i(k+2|k) \\
&- \hat{\alpha}_{i1} k_{i0}^{(1)} \hat{m}_i(k+1|k) - \hat{\gamma}_{i1}\hat{m}_i(k+1|k) - \hat{\alpha}_{i1} k_{i1}^{(1)} \hat{m}_i(k|k) - \hat{\gamma}_{i2}\hat{m}_i(k|k) - \hat{\alpha}_{i1} k_{i2}^{(1)} m_i(k-1) \\
&\left.- \hat{\gamma}_{i3} m_i(k-1) - \hat{\alpha}_{i1} k_{i3}^{(1)} m_i(k-2) - \hat{\gamma}_{i4} m_i(k-2) - \hat{\alpha}_{i1} k_{i4}^{(1)} m_i(k-3)\right] = \\
&= (\hat{\alpha}_{i1} g_{i1}^{(1)} + \hat{\alpha}_{i2}) y_i(k) + (\hat{\alpha}_{i1} g_{i2}^{(1)} + \hat{\alpha}_{i3}) y_i(k-1) + (\hat{\alpha}_{i1} g_{i3}^{(1)} + \hat{\alpha}_{i4}) y_i(k-2) \\
&+ (\hat{\alpha}_{i1} g_{i4}^{(1)}) y_i(k-3) + \left[\hat{\beta}_{i0}\hat{q}_i(k-r_i+1|k) + (\hat{\alpha}_{i1} h_{i0}^{(1)} + \hat{\beta}_{i1})\hat{q}_i(k-r_i|k) + (\hat{\alpha}_{i1} h_{i1}^{(1)} + \hat{\beta}_{i2})\right. \\
&\cdot q_i(k-r_i-1) + (\hat{\alpha}_{i1} h_{i2}^{(1)} + \hat{\beta}_{i3}) q_i(k-r_i-2) + (\hat{\alpha}_{i1} h_{i3}^{(1)} + \hat{\beta}_{i4}) q_i(k-r_i-3) \\
&+ (\hat{\alpha}_{i1} h_{i4}^{(1)} + \hat{\beta}_{i5}) q_i(k-r_i-4) + \hat{\alpha}_{i1} h_{i5}^{(1)} q_i(k-r_i-5) - \hat{\gamma}_{i0}\hat{m}_i(k+2|k) \\
&- (\hat{\alpha}_{i1} k_{i0}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i1})\hat{m}_i(k+1|k) - (\hat{\alpha}_{i1} k_{i1}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i2})\hat{m}_i(k|k) - (\hat{\alpha}_{i1} k_{i2}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i3}) m_i(k-1) \\
&\left.- (\hat{\alpha}_{i1} k_{i3}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i4}) m_i(k-2) - \hat{\alpha}_{i1} k_{i4}^{(1)} m_i(k-3)\right]\frac{T}{2A_i}
\end{aligned}}$$

(C.8)

Aplicando un cambio de notación:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\hat{y}_i(k+2|k) = g_{i1}^{(2)} y_i(k) + g_{i2}^{(2)} y_i(k-1) + g_{i3}^{(2)} y_i(k-2) + g_{i4}^{(2)} y_i(k-3) \\
&+ \frac{T}{2A_i}\left[h_{i0}^{(1)}\hat{q}_i(k-r_i+1|k) + h_{i0}^{(2)}\hat{q}_i(k-r_i|k) + h_{i1}^{(2)} q_i(k-r_i-1) + h_{i2}^{(2)} q_i(k-r_i-2)\right. \\
&+ h_{i3}^{(2)} q_i(k-r_i-3) + h_{i4}^{(2)} q_i(k-r_i-4) + h_{i5}^{(2)} q_i(k-r_i-5) - k_{i0}^{(1)}\hat{m}_i(k+2|k) \\
&\left.- k_{i0}^{(2)}\hat{m}_i(k+1|k) - k_{i1}^{(2)} m_i(k) - k_{i2}^{(2)} m_i(k-1) - k_{i3}^{(2)} m_i(k-2) - k_{i4}^{(2)} m_i(k-3)\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{4} g_{ij}^{(2)} y_i(k+1-j) + \frac{T}{2A_i}\left[\sum_{j=1}^{5} h_{ij}^{(2)} q_i(k-r_i-j) - \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(2)} m_i(k+1-j)\right. \\
&\left.+ \sum_{j=1}^{2} h_{i0}^{(2+1-j)}\hat{q}_i(k-1-r_i+j|k) - \sum_{j=1}^{2} k_{i0}^{(2+1-j)}\hat{m}_i(k+j|k)\right]
\end{aligned}} \quad (C.9)$$

Las ecuaciones (C.10) y (C.11) muestran el cambio de notación realizado.

$$\boxed{\begin{array}{ll}
g_{i1}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} g_{i1}^{(1)} + \hat{\alpha}_{i2} = \hat{\alpha}_{i1} g_{i1}^{(1)} + g_{i2}^{(1)} & g_{i2}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} g_{i2}^{(1)} + \hat{\alpha}_{i2} = \hat{\alpha}_{i2} g_{i1}^{(1)} + g_{i2}^{(1)} \\
g_{i3}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} g_{i3}^{(1)} + \hat{\alpha}_{i4} = \hat{\alpha}_{i3} g_{i1}^{(1)} + g_{i2}^{(1)} & g_{i4}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} g_{i4}^{(1)}
\end{array}} \quad (C.10)$$

$$
\begin{array}{ll}
h_{i0}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} h_{i0}^{(1)} + \hat{\beta}_{i1} = g_{i1}^{(1)} \hat{\beta}_{i0} + h_{i1}^{(1)} & k_{i0}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} k_{i0}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i1} = g_{i1}^{(1)} \hat{\gamma}_{i0} + k_{i1}^{(1)} \\
h_{i1}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} h_{i1}^{(1)} + \hat{\beta}_{i2} = g_{i1}^{(1)} \hat{\beta}_{i1} + h_{i2}^{(1)} & k_{i1}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} k_{i1}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i2} = g_{i1}^{(1)} \hat{\gamma}_{i1} + k_{i2}^{(1)} \\
h_{i2}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} h_{i2}^{(1)} + \hat{\beta}_{i3} = g_{i1}^{(1)} \hat{\beta}_{i2} + h_{i3}^{(1)} & k_{i2}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} k_{i2}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i3} = g_{i1}^{(1)} \hat{\gamma}_{i2} + k_{i3}^{(1)} \\
h_{i3}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} h_{i3}^{(1)} + \hat{\beta}_{i4} = g_{i1}^{(1)} \hat{\beta}_{i3} + h_{i4}^{(1)} & k_{i3}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} k_{i3}^{(1)} + \hat{\gamma}_{i4} = g_{i1}^{(1)} \hat{\gamma}_{i3} + k_{i4}^{(1)} \\
h_{i4}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} h_{i4}^{(1)} + \hat{\beta}_{i5} = g_{i1}^{(1)} \hat{\beta}_{i4} + h_{i5}^{(1)} & k_{i4}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} k_{i4}^{(1)} = g_{i1}^{(1)} \hat{\gamma}_{i4} \\
h_{i5}^{(2)} = \hat{\alpha}_{i1} h_{i5}^{(1)} = g_{i1}^{(1)} \hat{\beta}_{i5} &
\end{array}
\tag{C.11}
$$

- Para $l = 1,2,...,\lambda$

Una vez se han obtenido las predicciones para l = 1 y l = 2, se puede generalizar para $l = \lambda$.

$$
\begin{array}{l}
\hat{y}_i(k+l|k) = \sum_{j=1}^{4} g_{ij}^{(l)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=1}^{5} h_{ij}^{(l)} q_i(k - r_i - j) \right. \\
- \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(l)} m_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^{l} h_{i0}^{(l+1-j)} \hat{q}_i(k-1-r_i+j|k) \\
\left. - \sum_{j=1}^{l} k_{i0}^{(l+1-j)} \hat{m}_i(k+j|k) \right] \dfrac{T}{2A_i} \\
para \quad l = 1,2,...,\lambda
\end{array}
\tag{C.12}
$$

Con los siguientes coeficientes:

$$
\begin{array}{l}
g_{ij}^{(l)} = g_{i1}^{(l-1)} \hat{\alpha}_{ij} + g_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j = 1,...,4; \quad l = 2,...,\lambda \\
h_{ij}^{(l)} = g_{i1}^{(l-1)} \hat{\beta}_{ij} + h_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j = 0,...,5; \quad l = 2,...,\lambda \\
k_{ij}^{(l)} = g_{i1}^{(l-1)} \hat{\gamma}_{ij} + k_{i,j+1}^{(l-1)}; \quad j = 0,...,4; \quad l = 2,...,\lambda \\
\\
g_{ij}^{(1)} = \hat{\alpha}_{ij}; \quad j = 1,...,4 \\
h_{ij}^{(1)} = \hat{\beta}_{ij}; \quad j = 0,...,5 \\
k_{ij}^{(1)} = \hat{\gamma}_{ij}; \quad j = 0,...,4 \\
\\
g_{i,5}^{(l-1)} = h_{i,6}^{(l-1)} = k_{i,5}^{(l-1)} = 0; \quad l = 2,...,\lambda
\end{array}
\tag{C.13}
$$

C-2 Predicción recursiva del nivel $\hat{y}_i(k+l|k)$ para el controlador de Hayami de 2º orden sin retardo

Como ya se ha comentado en el apéndice A, la única diferencia que existe, a efectos prácticos de desarrollo, entre los controladores de 2º orden con y sin retardo es el parámetro *r*. Si no existe retardo *r* = 0, de modo que la predicción $\hat{y}_i(k+l|k)$ para el controlador de 2º orden sin retardo puede expresarse como la del mismo controlador con retardo, imponiendo un valor de *r* igual a cero. De este modo, se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{y}_i(k+l|k) = \sum_{j=1}^{4} g_{ij}^{(l)} y_i(k+1-j) + \left[\sum_{j=1}^{5} h_{ij}^{(l)} q_i(k-j) \right. \\ &- \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(l)} m_i(k+1-j) + \sum_{j=1}^{l} h_{i0}^{(l+1-j)} \hat{q}_i(k-1+j|k) \\ &\left. - \sum_{j=1}^{l} k_{i0}^{(l+1-j)} \hat{m}_i(k+j|k) \right] \frac{T}{2A_i} \\ &para \quad l = 1,2,\ldots,\lambda \end{aligned}} \tag{C.14}$$

Con los siguientes coeficientes:

$$\boxed{\begin{aligned} &g_{ij}^{(l)} = g_{i1}^{(l-1)} \hat{\alpha}_{ij} + g_{i,j+1}^{(l-1)}\,; \quad j = 1,\ldots,4; \quad l = 2,\ldots,\lambda \\ &h_{ij}^{(l)} = g_{i1}^{(l-1)} \hat{\beta}_{ij} + h_{i,j+1}^{(l-1)}\,; \quad j = 0,\ldots,5; \quad l = 2,\ldots,\lambda \\ &k_{ij}^{(l)} = g_{i1}^{(l-1)} \hat{\gamma}_{ij} + k_{i,j+1}^{(l-1)}\,; \quad j = 0,\ldots,4; \quad l = 2,\ldots,\lambda \\ \\ &g_{ij}^{(1)} = \hat{\alpha}_{ij}\,; \quad j = 1,\ldots,4 \\ &h_{ij}^{(1)} = \hat{\beta}_{ij}\,; \quad j = 0,\ldots,5 \\ &k_{ij}^{(1)} = \hat{\gamma}_{ij}\,; \quad j = 0,\ldots,4 \\ \\ &g_{i,5}^{(l-1)} = h_{i,6}^{(l-1)} = k_{i,5}^{(l-1)} = 0; \quad l = 2,\ldots,\lambda \end{aligned}} \tag{C.15}$$