APÉNDICE B

B-1 Discretización del modelo matemático del controlador de Hayami de 2º orden con retardo

El modelo para la *zona de transporte* queda definido con las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{F_1^*(z) = z^{-r-1}\frac{c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}} \tag{B.1}$$

$$\boxed{s_i(z) = F_1^*(z)q_i(z)} \tag{B.2}$$

La ecuación (B.1) es la ecuación de la función de transferencia del modelo de 2º orden. La ecuación (B.2) permite, a través de la función de transferencia y del caudal aguas arriba del tramo, obtener el caudal aguas abajo (caudal entrante en la *zona de almacenamiento*).

El modelo para la *zona de almacenamiento* queda definido mediante la ecuación de conservación de la masa:

$$\boxed{A_i\frac{dy_i(t)}{dt} = s_i - q_{i+1} - w_i} \tag{B.3}$$

Utilizando la nueva variable $m_i = q_{i+1} + w_i$, la ecuación (B.3) se expresa del siguiente modo:

$$\boxed{A_i\frac{dy_i(t)}{dt} = s_i - m_i} \tag{B.4}$$

Si se discretiza la ecuación de la *zona de almacenamiento*, (B.4), integrándola entre *k-1* y *k*+1, mediante la regla del trapecio, se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int (A_i\frac{dy_i(t)}{dt})\,dt = \int (s_i - m_i)\,dt \\
&y_i(t) = \frac{1}{A_i}\int (s_i - m_i)\,dt = \frac{1}{A_i}\int (\eta_i)\,dt \\
&y_i(k+1) - y_i(k-1) = \frac{1}{A_i}\frac{T}{2}\big(\eta_i(k+1) + 2\eta_i(k) + \eta_i(k-1)\big)
\end{aligned}} \tag{B.5}$$

Aplicando la transformada Z:

$$
\begin{aligned}
(z - z^{-1}) y_i(z) &= \frac{T}{2A_i}\left(z + 2 + z^{-1}\right)\eta_i(z) \\
(z - z^{-1}) y_i(z) &= \frac{T}{2A_i}\left(z + 2 + z^{-1}\right)\left(s_i(z) - m_i(z)\right)
\end{aligned}
\qquad (B.6)
$$

Combinando las ecuaciones (B.1) y (B.2) se obtiene la siguiente expresión:

$$
s_i(z) = z^{-r-1}\frac{c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}} q_i(z) \qquad (B.7)
$$

Sustituyendo (B.7) en la ecuación (B.6):

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(z - z^{-1}) y_i(z) = \frac{T}{2A_i}\left(z + 2 + z^{-1}\right)\left(z^{-r-1}\frac{c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}} q_i(z) - m_i(z)\right) \\[2ex]
&(z - z^{-1})(1 - az^{-1} + bz^{-2}) y_i(z) = \\
&= \frac{T}{2A_i}\left(z + 2 + z^{-1}\right)\left(z^{-r-1}(c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}) q_i(z) - (1 - az^{-1} + bz^{-2}) m_i(z)\right) \\[2ex]
&(1)\cdot y_i(z) = \frac{T}{2A_i}\cdot(2)\cdot\left((3)\cdot q_i(z) - (4)\cdot m_i(z)\right) \\[2ex]
&(1) = z - a + bz^{-1} - z^{-1} + az^{-2} - bz^{-3} = z - a + (b-1)z^{-1} + az^{-2} - bz^{-3} \\[2ex]
&(2)\cdot(3) = z^{-r-1}\left(cz + d + ez^{-1} + fz^{-2} + 2c + 2dz^{-1} + 2ez^{-2} + 2fz^{-3} + cz^{-1} + dz^{-2} + ez^{-3}\right. \\
&\left. + fz^{-4}\right) = z^{-r-1}\left(cz + (d + 2c) + (e + 2d + c)z^{-1} + (f + 2e + d)z^{-2} + (2f + e)z^{-3} + fz^{-4}\right) = \\
&= cz^{-r} + (d + 2c)z^{-r-1} + (e + 2d + c)z^{-r-2} + (f + 2e + d)z^{-r-3} + (2f + e)z^{-r-4} + fz^{-r-5} \\[2ex]
&(2)\cdot(4) = z - a + bz^{-1} + 2 - 2az^{-1} + 2bz^{-2} + z^{-1} - az^{-2} + bz^{-3} = \\
&= z + (2 - a) + (b - 2a + 1)z^{-1} + (2b - a)z^{-2} + bz^{-3}
\end{aligned}
}
$$

(B.8)

Aplicando la transformada Z inversa:

$$y_i(k+1) - ay_i(k) + (b-1)y_i(k-1) + ay_i(k-2) - by_i(k-3) = \frac{T}{2A_i}\left[(5)-(6)\right]$$

$$(5) = cq_i(k-r) + (d+2c)q_i(k-r-1) + (e+2d+c)q_i(k-r-2) + (f+2e+d)q_i(k-r-3) + (2f+e)q_i(k-r-4) + fq_i(k-r-5)$$

$$(6) = m_i(k+1) + (2-a)m_i(k) + (b-2+1)m_i(k-1) + (2b-a)m_i(k-2) + bm_i(k-3)$$

(B.9)

Agrupando términos:

$$y_i(k+1) = \sum_{j=0}^{3} \hat{\alpha}_{ij} y_i(k-j) + \frac{T}{2A_i} \cdot \left[\sum_{j=0}^{5} \hat{\beta}_{ij} q_i(k-r_i-j) - \sum_{j=0}^{4} \hat{\gamma}_{ij} m_i(k+1-j) \right] \quad \text{(B.10)}$$

Los coeficientes $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}\ y\ \hat{\gamma}_{ij}$ son los siguientes:

$$\begin{array}{lll}
\hat{\alpha}_{i0} = a_i & \hat{\beta}_{i0} = c_i & \hat{\gamma}_{i0} = 1 \\
\hat{\alpha}_{i1} = 1 - b_i & \hat{\beta}_{i1} = d_i + 2c_i & \hat{\gamma}_{i1} = 2 - a_i \\
\hat{\alpha}_{i2} = -a_i & \hat{\beta}_{i2} = c_i + 2d_i + e_i & \hat{\gamma}_{i2} = b_i - 2a_i + 1 \\
\hat{\alpha}_{i3} = b_i & \hat{\beta}_{i3} = d_i + 2e_i + f_i & \hat{\gamma}_{i3} = 2b_i - a_i \\
 & \hat{\beta}_{i4} = e_i + 2f_i & \hat{\gamma}_{i4} = b_i \\
 & \hat{\beta}_{i5} = f_i &
\end{array} \quad \text{(B.11)}$$

A partir de la ecuación (B.10) se puede obtener una expresión de $y_i(k)$:

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^{4} \hat{\alpha}_{ij} y_i(k-j) + \frac{T}{2A_i} \cdot \left[\sum_{j=0}^{5} \hat{\beta}_{ij} q_i(k-1-r_i-j) - \sum_{j=0}^{4} \hat{\gamma}_{ij} m_i(k-j) \right] \quad \text{(B.12)}$$

Donde los nuevos coeficientes $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}\ y\ \hat{\gamma}_{ij}$ son:

$$\begin{array}{lll}
\hat{\alpha}_{i1} = a_i & \hat{\beta}_{i0} = c_i & \hat{\gamma}_{i0} = 1 \\
\hat{\alpha}_{i2} = 1 - b_i & \hat{\beta}_{i1} = d_i + 2 \cdot c_i & \hat{\gamma}_{i1} = 2 - a_i \\
\hat{\alpha}_{i3} = -a_i & \hat{\beta}_{i2} = c_i + 2 \cdot d_i + e_i & \hat{\gamma}_{i2} = b_i - 2 \cdot a_i + 1 \\
\hat{\alpha}_{i4} = b_i & \hat{\beta}_{i3} = d_i + 2 \cdot e_i + f_i & \hat{\gamma}_{i3} = 2 \cdot b_i - a_i \\
 & \hat{\beta}_{i4} = e_i + 2 \cdot f_i & \hat{\gamma}_{i4} = b_i \\
 & \hat{\beta}_{i5} = f_i &
\end{array} \quad \text{(B.13)}$$

B-2 Discretización del modelo matemático del controlador de Hayami de 2º orden sin retardo

El modelo de 2º orden sin retardo se diferencia del de 2º orden con retardo en la función de transferencia (y en los parámetros que la definen). La función de transferencia del modelo de 2º orden sin retardo es la siguiente:

$$\boxed{F_1^*(z) = z^{-1}\,\frac{c + dz^{-1} + ez^{-2} + fz^{-3}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}} \qquad \text{(B.14)}$$

Si se compara con la del modelo de 2º orden con retardo, a parte de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*, se diferencian en el primer término, z^{-1} vs. z^{-1-r}. Es decir, con retardo r puede ser distinto a cero, y sin retardo r siempre es nulo.

A partir de estos datos, se puede afirmar que el desarrollo del modelo de 2º orden sin retardo es idéntico al del modelo de 2º orden con retardo, salvo que al final del desarrollo se tomará un valor de r = 0. Es necesario recordar que los parámetros del modelo se calcularan de distinta forma.