Capítol 2 : Estat del coneixement

2.1 Estat límit últim de tallant en bigues de formigó armat

2.1.1 Teoria bàsica

Els mecanismes de resistència d'una biga són els moments i els tallants interns. Al dissenyar un element de formigó armat, el primer que es té en compte és la flexió. Es disposa l'armadura longitudinal necessària per a resistir aquesta flexió. Aquesta quantia es limita per assegurar que en cas de produir-se el trencament, aquest serà dúctil, avisant de manera gradual. A continuació cal dimensionar la biga per tal que resisteixi l'esforç tallant. El trencament a tallant es produeix sovint de manera fràgil, per això es dimensionen els elements de formigó de manera que la resistència a tallant sigui igual o major que la resistència a flexió.

La forma en la que es produeix el trencament a tallant d'una biga depèn de les dimensions, geometria, càrrega i d'altres propietats de l'element analitzat. Avui en dia no existeix encara una formulació única per al disseny a tallant dels elements de formigó armat.

Biga elàstica sense fissurar

L'esforç tallant existeix en aquelles parts de la biga on el moment varia de secció a secció. L'actuació d'un esforç tallant sobre la secció implica l'existència d'una distribució de tensions tangencials sobre el pla de la secció. Per calcular les tensions tangencials causades per aquest tallant, podem fer-ho per mitjà de la teoria tradicional per a sòlids homogenis i elàstics, amb l'equació coneguda com a fórmula de Collignon, que s'obté a partir de l'equilibri de moments sobre la secció de la biga. El valor que proporciona és el valor mig de la tensió tangencial rasant:

$$\upsilon = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

on

V: esforç tallant a la secció transversal

I: moment d'inèrcia a la secció transversal

Q: primer moment d'inèrcia al voltant de l'eix neutre de la part de la secció transversal que queda més allunyada de l'eix neutre que el punt on s'estan calculant les tensions tangencials

b: ample de l'element al punt on s'estan calculant les tensions.

Per a una peça de secció transversal rectangular la distribució de tensions tangencials és parabòlica, amb una tensió màxima a l'alçada del centre de gravetat i una tensió tangencial nul·la als contorns inferior i superior, tal i com es pot veure a la figura 2.1, on es representa l'estat tensional d'una biga de formigó armat abans de la fissuració.

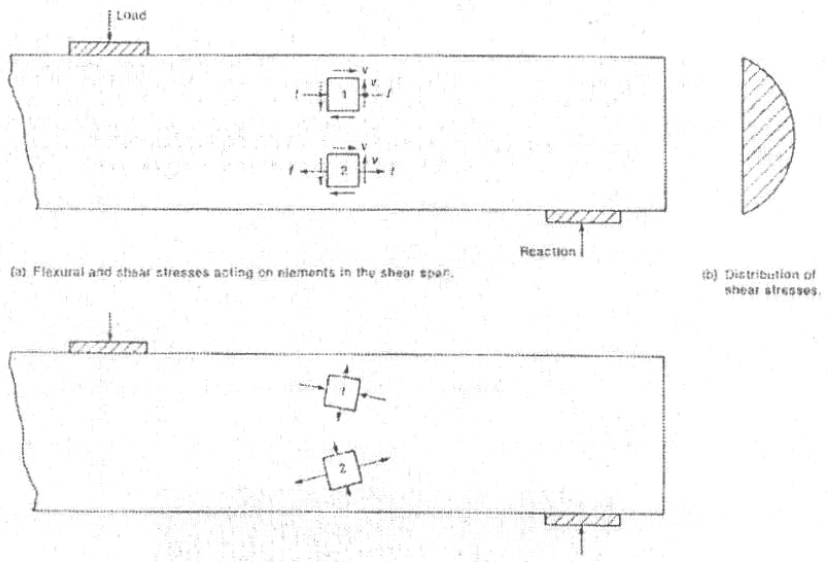


Fig. 2.1 Tensions a una biga de formigó armat sense fissurar

A la part superior de la figura 2.2 es poden veure les direccions en les que actuen les tensions principals a una biga sense fissurar. Aquestes trajectòries son verticals prop de la part inferior i horitzontals a les proximitats de la part superior de la biga. Quan la tensió principal de tracció supera la resistència màxima a tracció del formigó, la biga fissura seguint un esquema semblant al exposat a la part inferior de la figura 2.2. Les fissures verticals són les que primer es produeixen, i les causen les tensions de flexió. Comencen a les vores de la biga, on les tensions degudes a flexió son majors. Les fissures inclinades es produeixen després de les de flexió, i són les provocades per l'esforç tallant. Aquestes fissures s'han de produir abans que la biga falli per tallant. La correspondència entre els esquemes de tensions i deformacions de la biga no és perfecta, ja que quan es produeix la fissuració per flexió, per a mantenir l'equilibri es produeix una redistribució de tensions. Per aquest motiu és difícil predir l'inici de la fissuració diagonal o de tallant a partir de les tensions principals. Només és podria aconseguir si la biga fissures primer diagonalment i després degut a la flexió. Aquest cas es dona poc en bigues de formigó armat,

però pot donar-se en bigues de formigó pretensat.

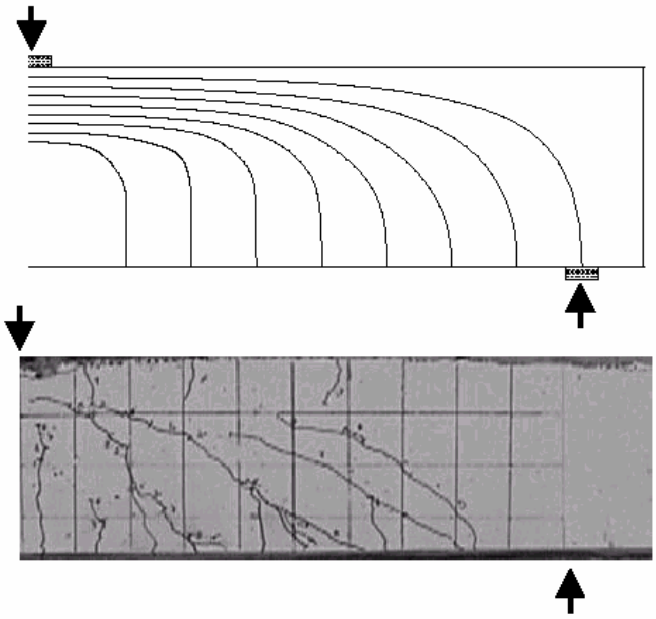


Fig. 2.2: Tensions principats d'una biga i malla de fissuració

Zones de discontinuïtat y de Bernouilli.

Existeixen diferències entre les regions que es comporten segons la teoria general de flexió, anomenades regions B, i aquelles regions on no són vàlides les hipòtesis de Navier-Bernouilli i per tant no existeix un comportament lineal de les deformacions, anomenades zones D o de discontinuïtat. A les regions tipus B el comportament esperat és el de biga: les seccions planes resten planes i, com a resposta de les càrregues del tallant es produeix un camp de deformacions lineal.

Les regions D s'extenen una distància al voltant d'un cantell útil a cada costat de càrregues concentrades, reaccions o canvis bruscos de secció o de direcció, tal i com es reflecteix a la figura 2.3. Entre aquestes regions podem dir que la biga es troba en una regió tipus B.
A les regions tipus B el braç mecànic és constant, tal i com s'assumeix a la teoria elàstica, i l'esforç de tracció a l'armadura longitudinal varia per a proporcionar el moment intern de la biga.
Si el flux de tallant no pot transmetre's a través de qualsevol pla horitzontal entre el reforç longitudinal i el cap de compressió, degut a que l'acer no està suficientment ancorat o si una fissura inclinada des del punt de càrrega fins a les reaccions impedeix la transferència del flux de tallant, llavors l'esforç de tracció a l'armadura longitudinal és constant i és el braç mecànic el que varia per a proporcionar el moment intern donant lloc a l'efecte arc.

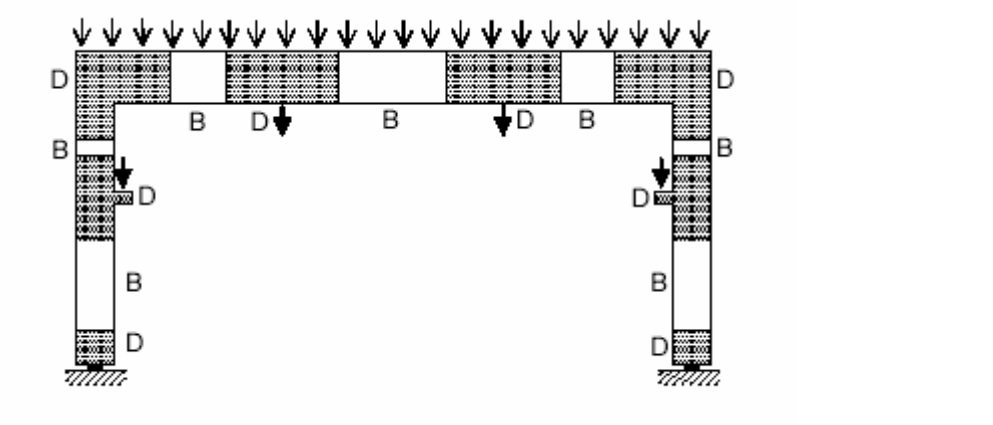


Fig. 2.3: Distribució de les regions D i B en un pòrtic (Schlaich et al, 1987)

L'efecte arc generalment incrementa la capacitat d'una secció, de manera que les regions B són més dèbils que les de tipus D. La majoria de bigues de formigó armat són de tipus B degut a la seva esveltesa. A la següent figura es pot veure l'efecte arc que té lloc a l'extrem d'una biga amb relació a/d petita.

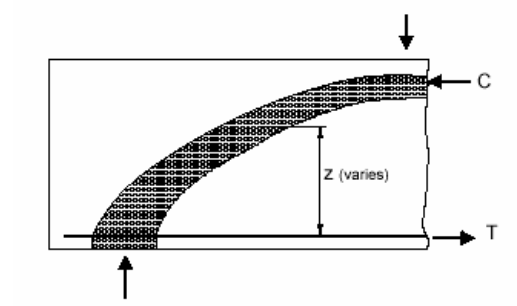


Fig. 2.4: Esquema de forces en una biga que desenvolupa l'efecte arc (Schlaich et al, 1987)

Un paràmetre molt important per entendre el comportament de les bigues sormeses a tallant és el rati a/d, relació entre la llum de tallant (distància entre el punt d'aplicació de la càrrega i el recolçament) i el cantell útil.
Les bigues curtes, amb a/d comprés entre 1 i 2.5, desenvolupen fissures inclinades i després d'una redistribució de forces internes també presenten el fenomen de l'efecte arc. Aquest tipus de bigues pot fallar degut a una manca d'adherència o 'splitting failure' (l'efecte passador fa que aparegui una fissura al llarg de l'armadura longitudinal, provocada per la pressió que l'armadura exerceix sobre el formigó), o per aixafament de la zona a compressió sobre la fissura. A les bigues esveltes, amb a/d major que 2.5,primer es formen fissures verticals de flexió que s'aniran inclinant a mida que augmenti la cárrega fins que trenquin l'equilibri produïnt la fallida per tallant. Quan la relació a/d és molt gran, la biga fallarà per flexió abans no tingui lloc la fissuració per tallant.

A la següent figura es poden observar alguns dels diferents tipus de trencament anteriorment esmentats. Es pot veure com trenquen les bigues per aixafament del formigó a la zona comprimida, així com trencaments produïts per el splitting

del formigó a la zona de recolzaments i sobre l'armadura longitudinal

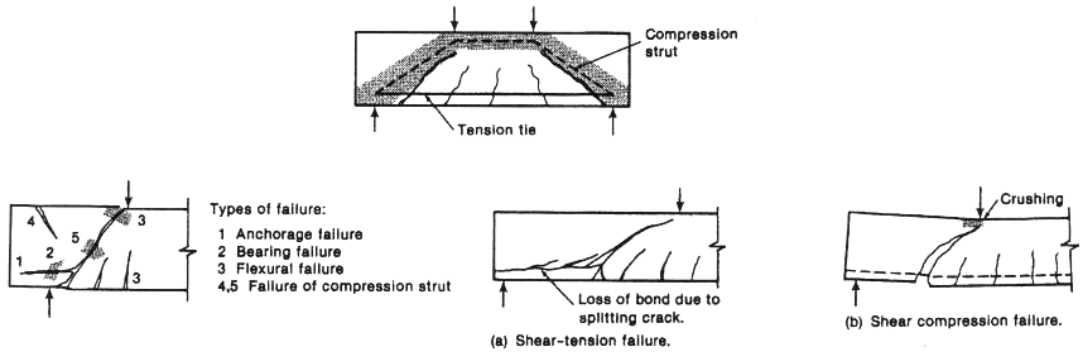


Fig. 2.5. Diferents formes de trencament per tallant per a diferents relacions a/d. (MacGregor, 1988)

2.1.2 Factors que afecten la resistència a tallant

2.1.2.1 Bigues sense armadura de tallant

Les bigues sense armadura de tallant fallen quan es produeixen les fissures de tallant o just després. Per això la capacitat a tallant d'aquests elements es considera que és igual al tallant inicial de fissuració inclinada. Aquest valor està condicionat per cinc paràmetres, que corresponen als diferents mecanismes de transmissió de tallant en una biga sense armadura de tallant. Alguns d'aquests paràmetres es tenen en compte a les equacions de disseny, d'altres no, donat que la influència relativa de cadascun d'aquests factors sobre la resistència a tallant no està gaire clara i a més depèn del tipus de biga que s'analitza.

Mecanismes resistents a tallant de bigues

- Tensions tangencials
Les tensions tangencials en el formigó no fissurat són les que es produeixen a la zona de compressió de la biga (cap de compressió). Aquest mecanisme resistent no és gaire important per a bigues esveltes sobre les quals no actua un esforç axil de compressió, ja que en aquest cas la profunditat de la zona de compressió és relativament petita. No obstant, un cop l'armadura longitudinal ha plastificat a les zones de màxim moment, gran part del tallant és resistit gràcies a aquest mecanisme. L'importància d'aquest mecanisme augmenta amb la presencia d'esforç axil, com pot ser el degut al pretensat, i que provoca un augment de la zona de compressió.

- Tallant - fricció
El tallant transmès a través de la superfície de la fissura és degut a l'engranament entre els àrids que sobresurten de la superfície aportant certa rugositat a la fissura. Els paràmetres bàsics d'aquest mecanisme són la tensió

tangencial a la superfície de la fissura, la tensió normal en aquesta, l'ample de fissura i el lliscament. En formigons d'alta resistència la importància d'aquest mecanisme resistent és menor que per a formigons convencionals, ja que la superfície de trencament és més llisa i per tant resistirà menys esforç tallant.

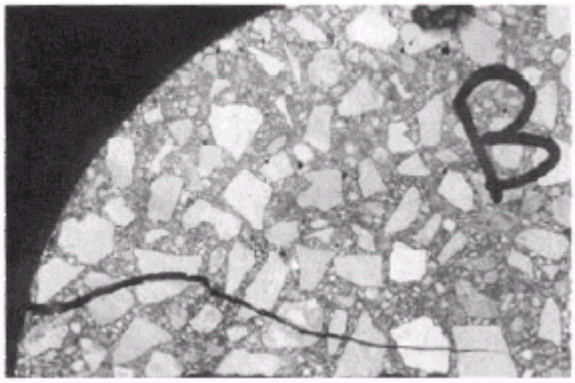


Fig. 2.6. Exemple de fissura en formigó d'alta resistència. Poden apreciar-se com els àrids han estat trencats, formant-se una superfície de trencament llisa, fent que disminueixi la resistència per fricció.

- *Efecte passador*

Aquest efecte no és molt significatiu en bigues sense armadura de tallant ja que el tallant màxim que pot transmetre està limitat per la resistència a tracció del formigó del recubriment de l'armadura longitudinal. Tot i això quan tenim gran quantitat d'armadura longitudinal i distribuïda en diferent capes, aquest efecte pot ésser d'importància significativa.

- *Efecte arc*

La importància de l'efecte arc depèn directament de la relació a/d (distància entre el punt de càrrega i el recolzament en relació al cantell útil).

D'aquesta manera amb valors entre 0 i 1 de a/d es troben les bigues molt curtes. Aquestes, quan reben una càrrega, desenvolupen fissures que uneixen el punt de càrrega amb el suport i que impedeixen la transmissió del flux de tallant. Llavors, resisteixen bàsicament gràcies a l'efecte arc. En aquests casos, l'armadura longitudinal treballa com a tirant traccionat i la forma de trencament més corrent és la fallida de l'ancoratge del tirant en els seus extrems.

Les bigues situades entre valors de 1 i 2,5 desenvolupen fissures inclinades i, després d'una redistribució d'esforços, poden resistir més càrrega degut a l'efecte arc. Aquestes bigues poden trencar per adherència, aplastament del formigó a la zona de compressió, o bé per l'efecte passador.

En la zona compresa entre valors de 2,5 a 6 la biga desenvolupa de tal forma fissures inclinades que impedeixen l'equilibri, fins al punt que la biga falla per la càrrega que forma la fissuració inclinada. A partir de valors de 6, les bigues trenquen degut a les fissures de flexió.

A la següent figura es pot observar l'influència de la relació a/d sobre el valor necessari de moment i tallant per que es formin fissures i es produeixí la fallida d'una biga.

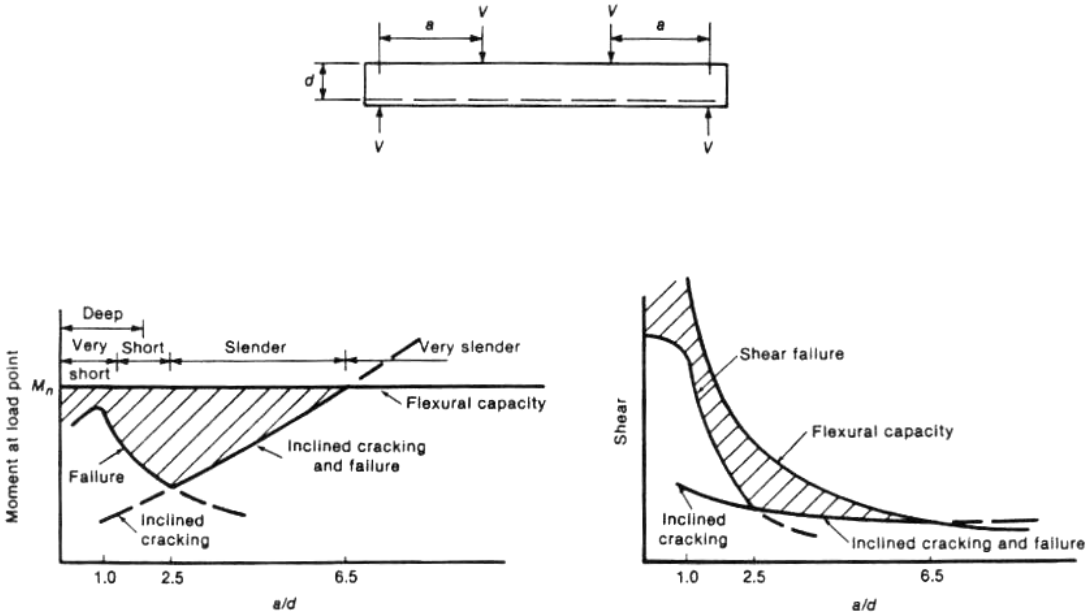


Fig. 2.7.Efecte de la relació a/d (MacGregor, 1988)

- Tensions residuals de tracció

Aquest mecanisme és degut a la presència de petits ponts de formigó formats entre les dues superfícies d'una fissura que continuen transmetent tensions de tracció fins que s'arriba a una certa amplada de fissura. Així doncs estem parlant d'una certa resistència residual que existeix en el formigó un cop fissurat.

A la següent figura es poden veure les forces internes que transfereixen el tallant a través de les fissures inclinades en una biga sense estreps.

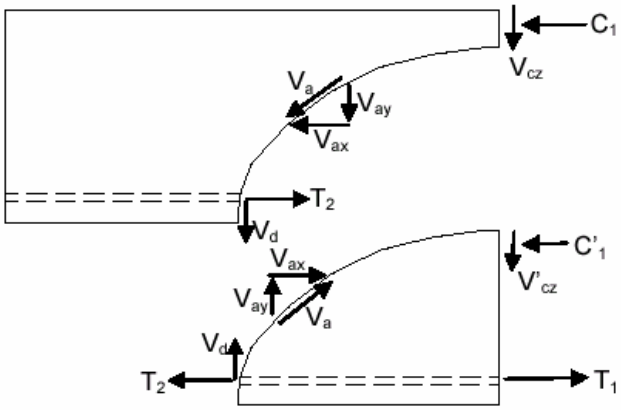


Fig. 2.8 Forces internes que actuen a una biga sense armadura de tallant (MacGregor, 1988)

V_{cz}, correspon al tallant que suporta la zona comprimida sense fissurar, V_{ay} és la component vertical del tallant que es transmet a través de la fissura gràcies al mecanisme de tallant-fricció, i V_d és la part de tallant que és resistida per l'efecte passador que l'armat longitudinal provoca.

Quan comença la fissuració inclinada, V_a i V_d poden suposar d'un 40 a un 60% de la resistència. A mida que la fissura s'obre, la contribució de Va va decreixent. L'efecte passador fa que al cap del temps aparegui una fissura al Llarg de l'armadura longitudinal, provocada per la pressió que l'armadura exerceix sobre el formigó. Aquesta fissura provoca la desaparició de la contribució de l'efecte passador, amb la qual cosa tot el tallant és absorbit pel cap de compressions. Aquesta zona trencarà si no està capacitada per suportar totes aquestes tensions. Aquest és un dels mecanismes de trencament per tallant per a bigues sense armadura de tallant, però existeixen d'altres possibles mecanismes, segons el tipus de biga, com s'ha comentat anteriorment.

Factors que afecten a la resistència per tallant

Les bigues de formigó armat sense reforç a tallant presenten la seva màxima resistència quan l'ànima ha fissurat o immediatament després. Per aquesta raó, generalment es pren la resistència a tallant d'aquest tipus de bigues com a la càrrega inicial de fissuració per tallant. Aquest valor depèn fonamentalment de les següents variables:

- Resistència a tracció del formigó.
La càrrega necessària per a produir les fissures inclinades depèn de la resistència a tracció del formigó. La fissuració per flexió que precedeix a les fissures inclinades canvia el camp elàstic de tensions inicialment exixtent fins al punt en que la fissuració inclinada es produeix per a una tensió principal de tracció, basada en la secció sense fissurar, de aproximadament un terç de la resistència a tracció del formigó.

- Quantia d'armat longitudinal.
Com més quantia d'armat longitudinal hi ha a una biga, més gran és la seva resistència a tallant. Una baixa quantia d'armat longitudinal porta a fissures de flexió més grans (en alçada a l'ànima de la biga i en obertura), a un menor efecte passador i a un menor bloc de compressions.

- Relació a/d.
Com ja hem vist anteriorment aquesta relació influeix de manera molt significativa en el tipus de rotura i el mecanisme per resistir tallant que desenvolupa la biga.
En aquesta tesina s'estudiarà únicament el cas de bigues amb relació a/d major a 2,5.

- Efecte de la forma.
Quan es forma una fissura, queden petites zones de formigó cosint-la, de

manera que el formigó segueix transmetent traccions fins a amples de fissura de aproximadament 0.05 a 0.15 mm. En elements de cantell petit aquest efecte és més important. A mida que augmenta el cantell de la biga, la fissuració inclinada té lloc abans, ja que també augmenta l'ample de fissura als punts per sobre de l'armadura principal, produint-se una disminució de l'engranament dels àrids a la fissura i reduint-ne la capacitat resistent. Aquest efecte és més important als elements sense armadura de tallant, ja que els estreps impedeixen l'obertura de la fissura com més petit és el cantell de la peça, més gran és la resistència a tensions de tallant. Aquest efecte es deu a que els amples de fissura són majors com més gran és el cantell de la biga.

-Força axil.

Les forces axils de tracció tendeixen a disminuir la càrrega crítica de fissuració, mentre que les de compressió tendeixen a augmentar-la.

La variació de la força de petensat pot variar el mode de trencament d'una biga, si s'augmenta l'esforç axil de compressió pot passar-se d'una rotura per tallant-flexió (flexure shear) a una rotura per fissuració inclinada de tallant (web shear), i si es continua incrementant la força de pretensat pot arribar a produir-se una fallada per aplastament de l'anima (web crushing). Per tant, l'efecte de la força axil en una biga pot fer canviar el mecanisme intern que es desenvolupa per resistir l'esforç tallant d'una manera semblant a com ho fa un canvi en la relació a/d.

Un altre efecte que produeix l'augment de la força axil és degut a que quan s'incrementa la tensió principal de compressió en un element de formigó, la resistència a tracció en l'altre direcció principal disminueix, tal i com pot veure's en el següent gràfic:

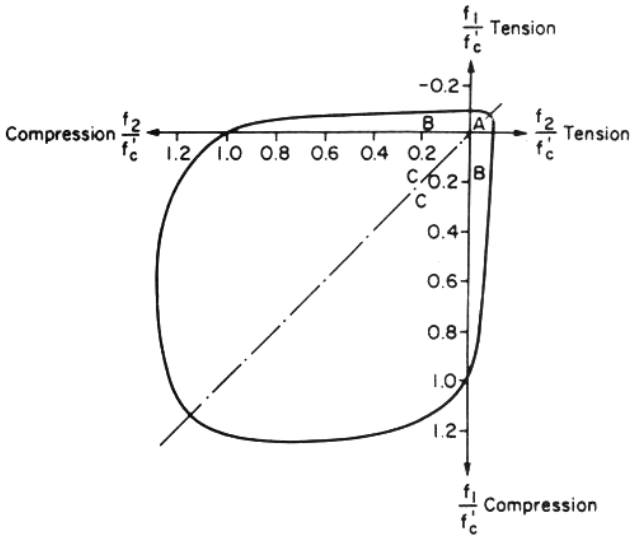


Fig. 2.9. Comportament del formigó sota l'acció de tensions principals.

És a dir, incrementar l'esforç axil de compressió mitjançant la força de pretensat incrementa la tensió principal de compressió per tallant, i per tant la capacitat de resistir la tensió principal de tracció de la biga serà menor.

- Resistència a compressió del formigó.
Un altra manera de veure l'efecte que s'acaba de comentar, i tal i com es pot observar en el gràfic de la figura 2.9, per a una mateixa força de pretensat, a l'incrementar fc la relació entre la tensió principal de compressió i f_c (f_2/f_c, en el gràfic) baixa i per tant el descens degut a l'efecte de la força axil en la resistència a tracció és menor que no pas per a un fc menor.

A més tal i com s'ha comentat anteriorment el formigó d'alta resistència presenta una superfície de fissura més llisa que un formigó convencional i per tant es redueix l'efecte de l'engranament entre els àrids.

- Component inclinada de la força de pretensat.
Si el traçat de l'armadura activa no és pla, la força de pretensat tindrà una component vertical que directament servirà per contrarrestar el tallant produït per les càrregues exteriors.

2.1.2.2 Bigues amb armadura de tallant

El propòsit de l'armadura de tallant és que les bigues de formigó puguin assolir tota la resistència a flexió possible. Abans d'arribar a la fissuració, la deformació als estreps és igual a la deformació en el formigó i per tant la tensió als estreps serà relativament baixa, és a dir l'armadura de tallant no serveix per a prevenir l'aparició de fissures inclinades, ja que no comenca a treballar fins que aquestes ja han tingut lloc.

Forces internes que actuen en una biga amb armadura de tallant

Les forces internes que es transmeten en una biga amb reforç a tallant són bàsicament les mateixes que en una biga sense armat transversal, la única nova força que apareix és la vertical dels estreps.

A la figura següent poden observar-se les forces internes que actuen en una biga amb estreps, un cop s'ha format una fissura inclinada.

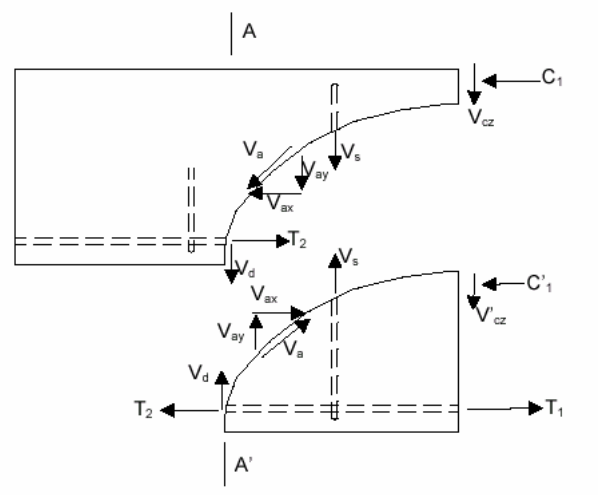


Fig. 2.10 Forces internes a una biga amb armadura de tallant (MacGregor, 1988)

Als termes corresponents al tallant V_{cz} (tallant transmès al cap comprimit), V_{ay} (tallant transmès a través de l'engranament dels àrids) i V_d (component deguda a l'efecte passador) s'afegeix ara V_s (tallant transmès pels estreps).
La figura 2.11 ens mostra la història de càrrega d'una biga amb estreps i fissuració a tallant. Abans de la fissuració tota la càrrega és suportada pel formigó. Entre la fissuració per flexió i la fissuració per tallant, el tallant extern el resisteixen V_{cz}, V_{ay} i V_d. Un cop s'ha produït la fissuració per tallant comença a col·laborar V_s. Quan els estreps plastifiquen, V_s es manté constant, i les fissures s'obren més ràpidament, fent que V_{ay} decreixi i forci a augmentar la contribució de V_d i V_{cz}. En estats posteriors de càrrega es creen fissures que segueixen la direcció de l'armadura longitudinal fins que V_d ja no contribueix. També pot succeir la fallida degut a l'aixafament del formigó al cap de compressions.

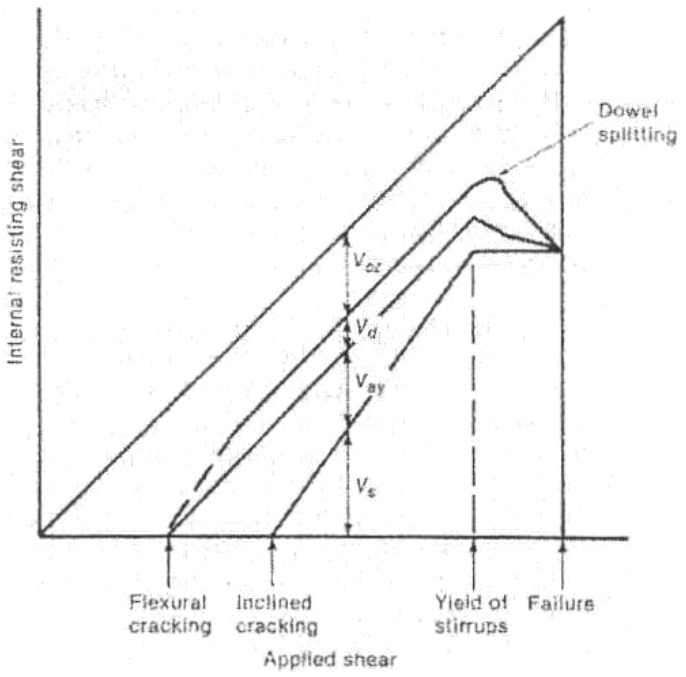


Fig. 2.11 Contribució a la resistència per tallant dels diferents mecanismes en una biga amb armadura transversal

Donada la dificultat de determinar V_{ay}, V_d i V_{cz}, aquests termes s'agrupen en un altre anomenat V_c, que es coneix com a tallant resistit pel formigó. Així s'arriba a una expressió per a la capacitat a tallant present en moltes normatives:

$$V_n = V_c + V_s$$

Tradicionalment es pren V_c com a la capacitat última d'una biga igual a la considerada però sense armadura de tallant.

Factors que afecten a la resistència per tallant

Els factors que col·laboren en la resistència al tallant en una biga amb reforç a tallant seran els mateixos que en una biga sense aquest reforç més el factor corresponent a l'armadura transversal. Com més armadura transversal tingui una biga, major serà el tallant que podrà resistir.

2.2 Evolució del coneixement

Evolució del coneixement en bigues sense armadura de tallant

Al 1902, Mörsch va obtenir la distribució de tensions de tallant per a una biga de formigó armat amb fissures de flexió. Aquesta tensió de tallant assoleix el seu valor màxim a la fibra neutre, i és constant fins a l'armadura longitudinal de flexió. Aquesta formulació és una simplificació, ja que no té en compte la força

transversal que es pot transmetre gràcies a la inclinació de la compressió transversal ni l'efecte passador a l'acer longitudinal.

Posteriorment, Kani va proposar un model on s'estudiaven les "dents" de formigó entre les fissures de flexió. Aquest model s'ha anat perfeccionant amb el temps per diferents autors, fins arribar a models que s'ajustaven força als assaigs realitzats.

Els models de bieles i tirants també poden aplicar-se en el cas d'elements sotmesos a tallant sense armadura transversal. Tot i això, han sigut els models empírics els que més importància han tingut a l'hora de desenvolupar equacions per al disseny d'elements de formigó armat sense armadura de tallant. Hi ha diverses formulacions per a obtenir la resistència a tallant d'elements de formigó sense armat transversal, se'n destaquen dues, la primera per la seva simplicitat i rellevància històrica que consisteix en obtenir el límit inferior de les tensions mitges de tallant al trencament.

$$\frac{V_c}{bd} = \frac{\sqrt{f_c}}{6} \qquad \text{N, MPa, mm}$$

L'altra és la que utilitza la norma espanyola.

$$\frac{V_c}{bd} = 0{,}12\left(1+\sqrt{\frac{200}{d}}\right)\cdot\left(100\cdot\rho_l\cdot f_{ck}\right)^{1/3} - 0{,}15\cdot\sigma'_{cd}$$

Hi ha moltes formules empíriques més, i molts més models basats en diverses teories. Una altre model que es pot aplicar és el de la teoria del camp de compressions modificada, la qual s'explica a l'apartat 2.2.2. Aquesta teoria es basa en l'aplicació d'equilibri, compatibilitat i relacions constitutives dels diferents elements de formigó armat, i no es basa en assaigs empírics com les formules abans comentades.

Evolució del coneixement en bigues amb armadura de tallant

Els mètodes més utilitzats per a aconseguir entendre el mecanisme resistent d'una biga davant l'esforç tallant han sigut tradicionalment els models de gelosia. A principis del segle XX Ritter i Mörsch van proposar els primers models de gelosia per al disseny a tallant de bigues de formigó armat (figures 2.12 i 2.13). Aquest mètode és un bon model per a entendre conceptualment les forces que actuen al formigó que fissura degut a l'esforç tallant. No té en compte però les aportacions de V_{cz}, (tallant resisitit pel cap de compressió), de V_{ay} (tallat resistit per fricció) i V_d (resistència deguda a l'efecte passador), ja que aquest model únicament considera que les compressions es transmeten per bieles de compressió, i les traccions per les armadures longitudinal i transversal. En aquests models de gelosia no es considera que el formigó tingui cap resistència a tracció. Tot i les seves limitacions, aquesta teoria va ser la base per al disseny a tallant de bigues de formigó armat durant les primeres dècades del segle XX, fins que als anys 50 es va produir el trencament a tallant

de les bigues dels magatzems d'una base aèria a l'estat nord-americà d'Ohio. Aquest trencament, de tipus fràgil, va fer que es qüestionessin els mètodes de disseny basats en el model de gelosia.

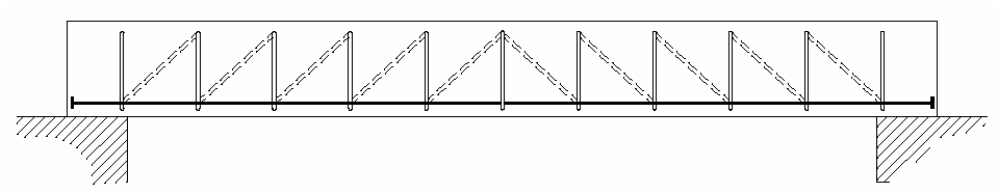


Fig. 2.12. Model de gelosia de Ritter

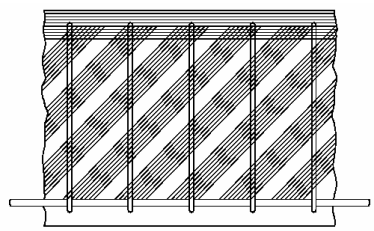


Fig.2.13. Model de gelosia de Mörch

Després d'aquest fet van començar a desenvolupar-se les teories que es basen en que el trencament d'una biga per tallant es deu a l'aixafament del formigó a la zona comprimida (cap de compressió de flexió), que es va reduint en tamany a l'anar creixent les fissures diagonals. Posteriorment es va anar analitzant la influència de l'efecte biga i l'efecte arc. També es van estudiar models de gelosia però amb angles d'inclinació variables.

La teoria del camp diagonal de compressions 'MCFT' (Mitchell i Collins, 1974) es va desenvolupar per a l'anàlisi d'elements sotmesos a torsió pura, i posteriorment es va ampliar per a analitzar també elements sotmesos a esforç tallant. La teoria de Mitchell i Collins considera compatibilitat, equilibri i relacions constitutives dels elements que intervenen en la resistència a tallant, per la qual cosa té en compte de manera més realista el comportament real de la peça. A partir d'hipòtesis semblants a les de la MCFT, els models d'angle variable de Hsu i els DSFM de Vecchio són un pas més en la recerca de la resposta d'un element sotmès a tallant.

2.2.1 Models de gelosia

Aquests mètodes expliquen bastant bé el comportament de bigues sotmeses a tallant i són usats en algunes normatives de disseny força recents, per exemple la EHE espanyola.

Per a aconseguir un model de gelosia cal fer algunes simplificacions. Per exemple, es substitueixen tots els estreps interceptats en una secció per

elements diagonals treballant a tracció. El cordó comprimit és una força en el formigó, però es mostra com a un element de la gelosia. Els elements comprimits de la gelosia es representen amb línies discontínues, ja que en realitat es tracta de forces en el formigó. Els elements que treballen a tracció es representen per mitjà de línies continues.

A la figura 2.14 es poden veure les condicions d'equilibri per a una peça de formigó fissurada segons aquests models

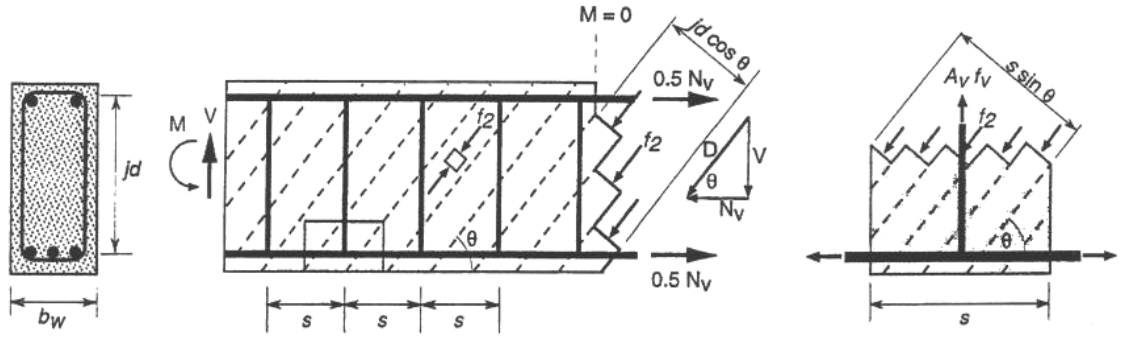


Fig. 2.14. Condicions d'equilibri en un model de gelosia (Duthinh i Carino, 1996)

D'on s'obtenen les següents expressions d'equilibri:

$$f_2 = \frac{V}{b_w z}\left(\tan\theta + \cot\theta\right)$$

$$N_v = V\cot\theta$$

$$\frac{A_v f_v}{s} = \frac{V}{z}\tan\theta$$

On f_2 representa el valor de la tensió principal de compressió a través de les bieles de compressió inclinades un angle θ i N_v representa la força de tracció a l'armadura longitudinal deguda al tallant. D'aquesta manera tenim tres equacions per a quatre incògnites, per a resoldre el problema es pot suposar un cert valor de l'angle d'inclinació de les compressions o bé suposar un cert valor de la força de compressió quan s'arriba a rotura.

Amb aquests models de gelosia només es té en compte l'equilibri de la peça, i no es considera la compatibilitat entre el formigó i l'acer, per la qual cosa obtindrem una aproximació a la càrrega de trencament de la peça per tallant, però no podrem reproduir el camí de càrrega-deformació que seguirà la biga.

La instrucció espanyola utilitza un model de bieles i tirants basat en models de

gelosia per al seu plantejament de l'estat límit últim de tallant. A la normativa espanyola es considera la contribució de l'acer per a resistir el tallant, i assumeix que el formigó contribueix també a resistir l'esforç tallant, considerant que aguanta aproximadament un 85 % de la càrrega de fissuració per tallant de la mateixa biga però sense armadura transversal (en el cas de que θ=45°). Depenent de l'angle d'inclinació de les compressions θ, la importància de la contribució del formigó serà més o menys gran. Per a θ =27°, la contribució del formigó a la resistència serà despreciable.

El model de gelosia permet identificar els models de trencament d'una biga degut a l'esforç tallant:

- Plastificació dels estreps:
Cal tenir en compte que l'armadura de tallant no actua en una biga si no és travessada per cap fissura inclinada. Per això es limita la separació màxima entre estreps a una distància menor que el cantell útil de la biga, Si assumim que tots els estreps que travessa una fissura plastifiquen abans del trencament, aleshores el tallant que resistirà aquesta armadura de tallant valdrà:

$$V_s = A_v \cdot f_y \cdot (\sin\theta + \cos\theta) \cdot \frac{d}{s}$$

Aquesta hipòtesis de que els estreps plastifiquen és només certa si estan ben ancorats.

- Plastificació del formigó
A les bieles diagonals de la gelosia existeixen compressions. Si la biga té l'ànima massa estreta o la força de pretensat és massa gran, aquestes compressions poden ser la causa del trencament del formigó en aquesta zona. Per tal de preveure la resistència a tallant mitjançant l'ús del mètode de la gelosia, cal considerar en el càlcul la resistència efectiva del formigó. Aquesta es pot adoptar com el valor de 0,6 f_{ck}.

- Plastificació de l'armadura longitudinal
La component longitudinal de les tensions diagonals de compressió es contraresta per la força de tracció a l'armadura longitudinal de flexió. Aquesta tracció pot provocar la plastificació de l'armadura longitudinal i causar el col·lapse de la biga.

2.2.2 Models del camp de compressions

2.2.2.1 Introducció

L'efecte de l'esforç tallant a l'ànima fissurada d'una biga de formigó és bastant complex. A mida que s'incrementa la càrrega, apareixen noves fissures i les ja existents es propaguen i canvien d'inclinació. Els models de gelosia de Ritter i Mörsch consideraven que el tallant el suportaven tensions diagonals de compressió inclinades 45° respecte a l'eix longitudinal, i considerant que no existien tensions de tracció al formigó amb fissures inclinades. Posteriors

investigacions van demostrar que si es volien aconseguir valors de càlcul que coincidissin amb els experimentals, calia considerar inclinacions inferiors a 45° per a les tensions de compressió (les fissures a tallant solen tenir inclinacions inferiors a 45°). Va ser Wagner qui, al 1929, va assumir que la inclinació del camp diagonal de tensions coincidia amb la inclinacïó de la deformació principal a tracció. A partir d'aleshores es van anar desenvolupant models en els quals es determinava la inclinació de les bieles comprimides a partir de les deformacions de l'armadura transversal, de l'armadura longitudinal i del formigó comprimit. Aquests models es coneixen com a "compression field approaches", aproximacions al camp de compressions, i utilitzen les equacions d'equilibri, compatibilitat i relacions tensió-deformació per a predir la resposta d'una secció sotmesa a tallant.

2.2.2.2 Teoria del camp diagonal de compressions (CFT)

La CFT (teoria del camp diagonal de compressions) és una solució exacta que va ser proposada per Collins i Mitchell al 1974. Aquesta teoria verifica les equacions d'equilibri, compatibilitat de deformacions i relacions tensió-deformació dels materials, i descriu el comportament a tallant a través de tota la història de càrregues a partir de la fissuració i fins a l'estat límit últim.
Es modelitza el formigó considerant les tensions a les direccions principals. A l'acer només és consideren tensions axials.

2.2.2.3 Teoria modificada del camp de compressions (MCFT)

La MCFT és també una teoria exacta, que es basa en la CFT i en la teoria del camp de compressions de Wagner. La CFT assumia que després de la fissuració no existeixen tensions de tracció en el formigó. Assaigs experimentals han demostrat que fins i tot després d'una intensa fissuració hi ha traccions en el formigó que contribueixen significativament en la capacitat de resistir esforços tallants. La MFCT inclou aquestes tensions de tracció, millorant així els resultats aconseguits amb la CFT, que tendia a infravalorar la capacitat d'una biga.

La MCFT té en compte les condicions de compatibilitat, equilibri, i relacions de tensió deformació que permeten obtenir les deformacions i tensions del formigó i de l'acer per a cada estat de càrrega al que es troba sotmès l'element.

Cal tenir en compte que la MCFT utilitza la hipòtesi simplificadora que les direccions principals de deformació coincideixen amb les direccions principals de tensió (experimentalment s'ha comprovat que són paral·leles en ±10°). Cal tenir en compte que en aquest cas es treballa amb tensions i deformacions mitges, i per això és necessari limitar la tensió mitja principal de tracció del formigó, per a assegurar que les tensions mitges són compatibles.

Seguidament s'explicaran les relacions de compatibilitat, equilibri i relació constitutiva, que permeten obtenir les deformacions i tensió al formigó i l'acer per cada estat de càrrega al que es trobi sotmès l'element.

Compatibilitat de deformacions:

Com s'ha comentat anteriorment, els models de camp de compressions poden determinar l'angle θ d'inclinació de les direccions principals de compressió, prenent com a hipòtesi que l'armadura està perfectament ancorada en el formigó. D'aquesta forma, en establir la compatibilitat podem dir que una deformació experimentada pel formigó es tradueix en una mateixa deformació en l'acer. Les relacions que trobarem en les membranes fissurades s'estableixen a partir de les transformacions geomètriques representades en el cercle de Mohr de la següent figura:

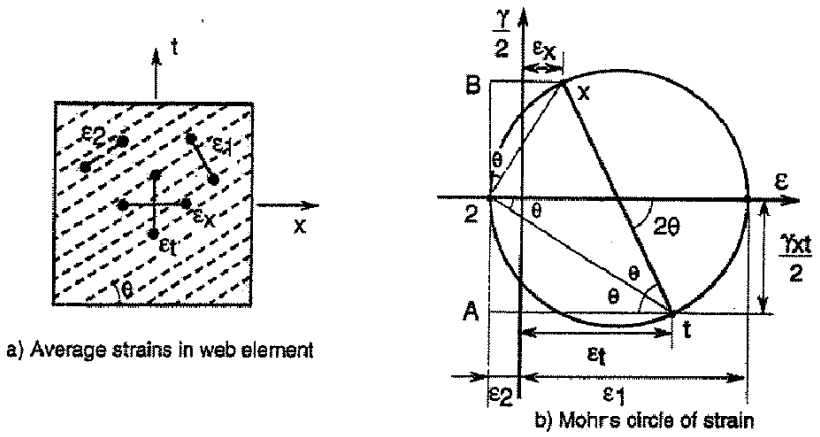


Fig.2.15. Condicions de compatibilitat per a malles d'elements fissurats (Duthinh i Carino, 1996)

$$\gamma_{xt} = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_2)\cot\theta$$
$$\gamma_{xt} = 2(\varepsilon_t - \varepsilon_2)\tan\theta$$

On: ε_x : deformació longitudinal de l'element fissurat.
ε_t : deformació transversal de l'element fissurat
ε_2 : deformació principal de compressió.
γ_{xt} : deformació de tall.

D'aquestes dues expressions podem obtenir l'angle d'inclinació de la compressió diagonal:

$$\tan^2\theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_t - \varepsilon_2}$$

A més a més de la condició de compatibilitat anterior, poden establir-se altres relacions de compatibilitat de deformacions (a partir del cercle de Mohr de deformacions que es mostra en la figura 2.15) al formigó fissurat que ens proporcionaran les següents relacions:

$$\varepsilon_x = \frac{(\varepsilon_1 \tan^2\theta + \varepsilon_2)}{1 + \tan^2\theta}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tan^2\theta\right)}{1+\tan^2\theta}$$

$$\gamma_{xt} = 2\left(\varepsilon_x - \varepsilon_2\right)\cot\theta$$

S'ha de destacar que al formigó fissurat aquestes relacions de compatibilitat s'expressen en termes de deformacions mitges, és a dir, deformacions mesurades sobre referències o longituds lo suficientment grans com per a incloure varies fissures.

Equilibri:

Les equacions que es presenten formulen l'equilibri entre punts de la biga situats entre fissures. En aquestes, les forces externes aplicades són resistides per les tensions del formigó i de l'armadura. Així doncs, les equacions d'equilibri relacionen les tensions en el formigó i en les armadures amb les càrregues aplicades.
En una secció tipus el tallant és resistit a través de les tensions diagonals de compressió i de les tensions diagonals de tracció. Les tensions de tracció varien des de 0 a les fissures fins a un valor màxim entre fissures, com s'ha comentat anteriorment, per plantejar equilibri es pren el valor mig d'aquestes tensions de tracció. En la següent figura veiem representades aquestes condicions d'equilibri.

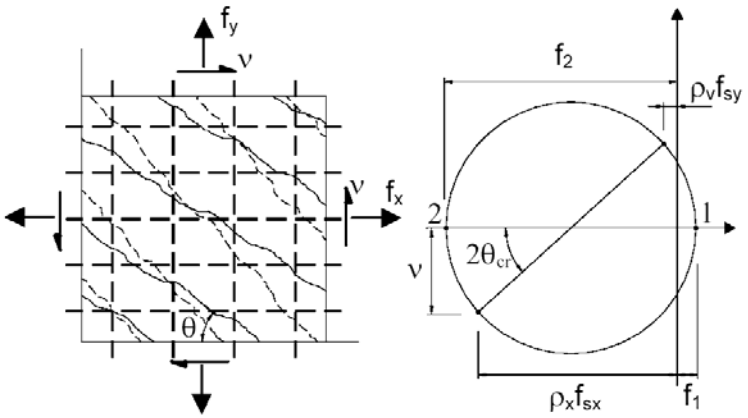


Fig. 2.16. Equilibri en termes de tensió mitja.

Així doncs de plantejar l'equilibri de forces verticals i horitzontals i de les relacions que es dedueixen del cercle de Mohr, obtenim les següents equacions:

$$\rho_y f_{sy} = f_y + v\tan\theta - f_1 \qquad (*)$$

$$\rho_x f_{sx} = f_x + v\cot\theta - f_1$$

$$f_2 = v\left(\tan\theta + \cot\theta\right) - f_1 \qquad (**)$$

on f_x, f_y són les càrregues externes en sentit longitudinal i vertical respectivament, f_1, f_2 són les tensions diagonals que es produeixen en el formigó i f_{sx}, f_{sy} les tensions a les armadures.

Un altra manera de veure l'equilibri és a partir dels termes de força (en lloc de tensions), de forma esquemàtica es troben representats a la següent figura:

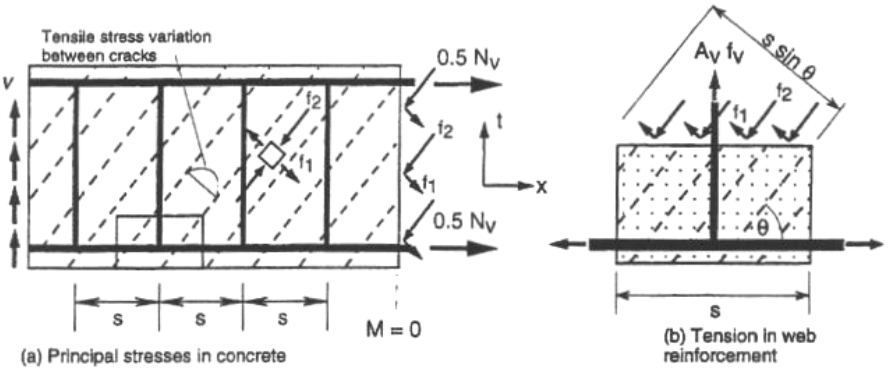


Fig. 2.17. Condicions d'equilibri de la MCFT (Duthinh i Carino, 1996)

Per tant les dues equacions d'equilibri anteriors poden escriure's com:

$$A_v f_v = \left(f_2 \sin^2\theta - f_1 \cos^2\theta\right)\cdot b_w s$$
$$A_{sx} f_{sx} = \left(f_2 \cos^2\theta - f_1 \sin^2\theta\right)\cdot b_w jd$$

on jd és la distància entre les armadures longitudinals superior i inferior.

Combinant la primera d'aquestes equacions amb la relació (**) anterior obtinguda del cercle de Mohr, trobem que:

$$V = \frac{A_v f_v}{s} jd \cot\theta + f_1 b_w jd \cot\theta = V_s + V_c$$

és a dir, contribució de l'acer més contribució del formigó, on es pot veure que el terme corresponent a la contribució de l'acer coincideix amb la contribució que s'obté d'aplicar l'analogia de la gelosia, per tant podríem entendre que la MFCT en termes d'equilibri es correspon a un model de gelosia amb contribució del formigó, més endavant es comentaran les principals diferències entre ambdos models.
De la segona expressió podem obtenir que:

$$A_{sx} f_{sx} = V \cot\theta - f_1 \qquad \text{on} \qquad v = \frac{V}{b_w jd}$$

que seria l'increment de tracció que es produeix en l'armadura longitudinal deguda al tallant.

Relació tensió – deformació:

La relació constitutiva que relaciona les deformacions i les tensions al formigó, no poden assimilar-se per a aquest cas a les tradicionals relacions obtingudes mitjançant assajos de compressió uniaxials. Això és degut a que les condicions de deformació en que es troba el formigó son totalment diferents. El formigó fissurat que es troba a una biga sotmesa a esforç tallant no tindrà el mateix comportament tensió – deformació que un formigó sotmès a un assaig convencional de compressió uniaxial. La diferència fonamental entre ambdós es troba en el fet que el formigó sotmès a un assaig de compressió es troba sotmès a només unes petites tensions de tracció degudes a l'efecte Poisson, per altra banda el formigó situat entre les fissures inclinades es troba sota unes tensions de tracció molt superiors a les anteriors. En aquest darrer cas tindrem també que les compressions diagonals f_2 hauran de transmetre's, en alguna ocasió, entre les fissures previament creades i és per aquests dos motius que un formigó situat en una malla fissurada diagonalment és més dèbil i tou que no pas un formigó sota una càrrega uniaxial de compressió. Per aquest motiu no es fan servir les relacions constitutives convencionals, sinó que s'utilitzen unes relacions tensió – deformació específiques per al problema, derivades d'uns assaigs fets per Vecchio i Collins (1982).

Dels resultats obtinguts en aquests assaigs, es va trobar que la tensió principal de compressió al formigó no depenia exclusivament de la deformació principal de compressió sinó que també depenia de la deformació principal de tracció. A partir dels resultats obtinguts (figura 2.18) es suggeriren les següents relacions tensió - deformació:

$$f_2 = f_{2\max}\left[2\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c}\right)-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c}\right)^2\right] \qquad \text{on} \qquad \frac{f_{2\max}}{f'_c} = \frac{1}{0{,}8+170\varepsilon_1} \leq 1{,}0$$

Per a la tensió principal de tracció:

Si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr}$ llavors $f_1 = E_c\varepsilon_1$

Si $\varepsilon_1 > \varepsilon_{cr}$ llavors $f_1 = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 f_{cr}}{1+\sqrt{500\varepsilon_1}}$

On

ε_{cr}, f_{cr}: deformació i resistència al moment de la fissuració

α_1, α_2: factors que depenen del tipus de barra i del tipus de càrrega.

Per a les barres d'armadura la relació tensió – deformació és l'habitual diagrama bilinial.

$$f_{sx} = E_s\varepsilon_x \leq f_{x,yield}$$

$$f_{sy} = E_s \varepsilon_y \leq f_{y,yield}$$

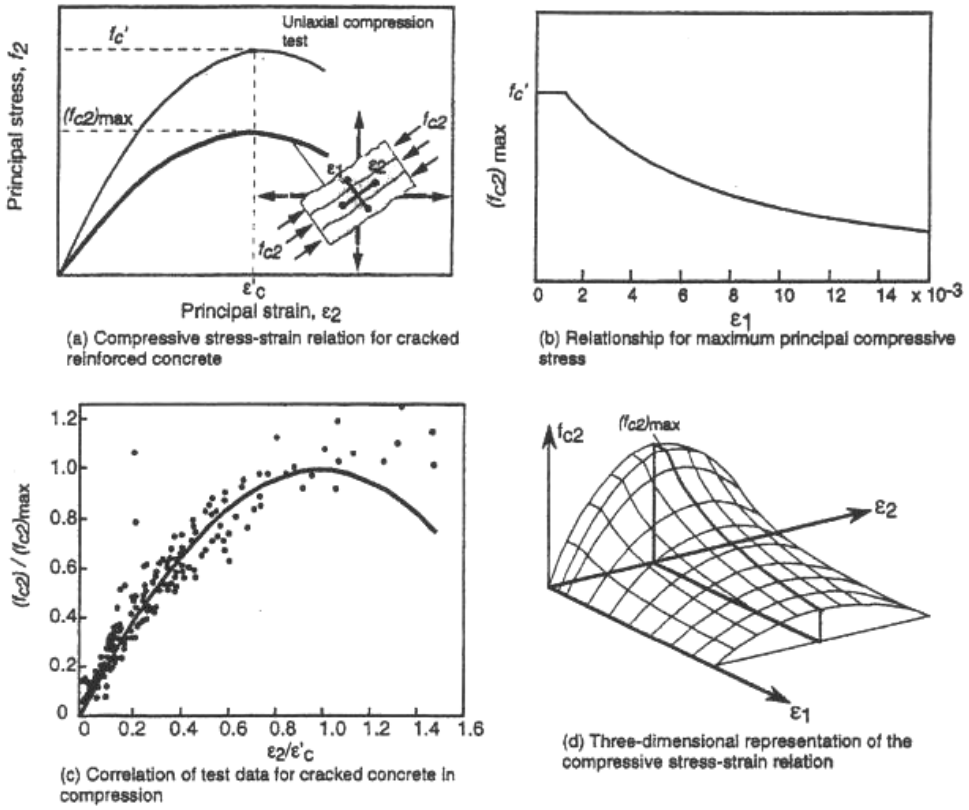


Fig.2.18. Relació tensió - deformació de compressió per al formigó fissurat (Duthinh i Carino, 1996)

D'aquestes relacions podem veure com va decreixent la tensió de compressió màxima que pot assolir-se a mesura que s'augmenta la deformació de tracció al formigó. Tanmateix s'observa com la tensió principal de tracció comença a decréixer a partir del punt de fissuració de l'element.

Equilibri a les fissures:

El fet d'haver utilitzat les tensions i deformacions mitges per a plantejar l'equilibri i compatibilitat, fa que sigui necessari de plantejar un estat d'equilibri a través de les fissures per copsar les variacions locals que es generen en aquestes.
A les fissures les tensions de tracció de l'armadura seran majors que la mitja, per contra, a la meitat de la fissura seran menors. Al formigó li succeeix lo contrari, les tensions de tracció seran nul·les a la fissura i majors que la mitja a la meitat entre fissures. Aquestes variacions locals son importants perquè la capacitat última d'un element sotmès a un estat de tensions biaxial pot estar determinada per la capacitat de l'acer de transmetre tracció a través de les fissures.
Per tant a més d'establir les equacions generals d'equilibri expressades en

termes de tensió mitja, també s'hauran de definir unes equacions d'equilibri a les fissures, ja que el colapse pot ser produït per culpa d'aquestes tensions locals.
Per tal de modelar-les s'idealitzen mitjançant una sèrie de fissures equiespaiades una distància s_θ trobada per Collins al 1993. Això no obstant, no deixa de ser una aproximació ja que sota l'efecte del tallant es poden formar noves fissures, es poden tancar algunes ja existents o es poden tornat inactives.

Per a valors baixos de tallant, la tensió és transmesa a través de la fissura mitjançant increments locals de la tensió de l'armadura, fins que arribi un moment en que l'armadura plastifiqui i ja no podrà transmetre més càrrega, per tant per a transmetre més càrrega és necessitarà una tensió local de tall (v_{ci}) a la superfície de la fissura.
La capacitat de transmetre força per part de la fissura dependrà de l'ample de fissura que es produeixi, quan més ample sigui la fissura menor serà la capacitat d'aquesta per transmetre tensions.
El valor màxim de v_{ci} proposat per Vecchio i Collins és:

$$v_{ci} \leq \frac{0{,}18\sqrt{f'_c}}{0{,}3 + \frac{24w}{a+16}}$$ expressades en MPa i mm

On a és el tamany màxim de l'àrid i w és l'ample de fissura. Aquesta expressió està basada en una campanya experimental de Walreven (1981) per a formigons les resistències a proveta cúbica dels quals era de 13 a 59 MPa. Tenint en compte que per a formigons d'alta resistència els àrids poden fracturar-se i donar lloc a superfícies de rotura més llises, aquest valor de v_{ci} hauria de revisar-se i ésser adaptat per a formigons d'alta resistència.

La obertura de fissura pot estimar-se a partir de la tensió principal de tracció i la separació mitjana entre fissures diagonals:

$$w = \varepsilon_1 s_{m\theta}$$

on la separació entre fissures inclinades dependrà de les armadures longitudinals i transversals i de la distància entre elles en la disposició d'armat de la biga. La separació entre fissures diagonals pot relacionar-se amb la separació de fissures verticals i horitzontals:

$$s_{m\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{s_{mx}} + \frac{\cos\theta}{s_{mv}}}$$

a on la separació entre fissures verticals i horitzontals pot estimar-se segons el Codi Model CEB-FIP:

$$s_{mx} = 2\left(c_x + \frac{s_x}{10}\right) + 0{,}25k_1 \frac{d_{bx}}{\rho_x}$$

$$s_{mv} = 2\left(c_v + \frac{s_v}{10}\right) + 0{,}25k_1 \frac{d_{bv}}{\rho_v}$$

essent:

d_b : diàmetre de la barra
c : distància a l'armadura
s : separació entre barres
ρ_v = $A_v/(b_w s)$
ρ_x = A_x/A_c
k_1 = 0,4 per barres corrugades i 0,8 per barres llises.

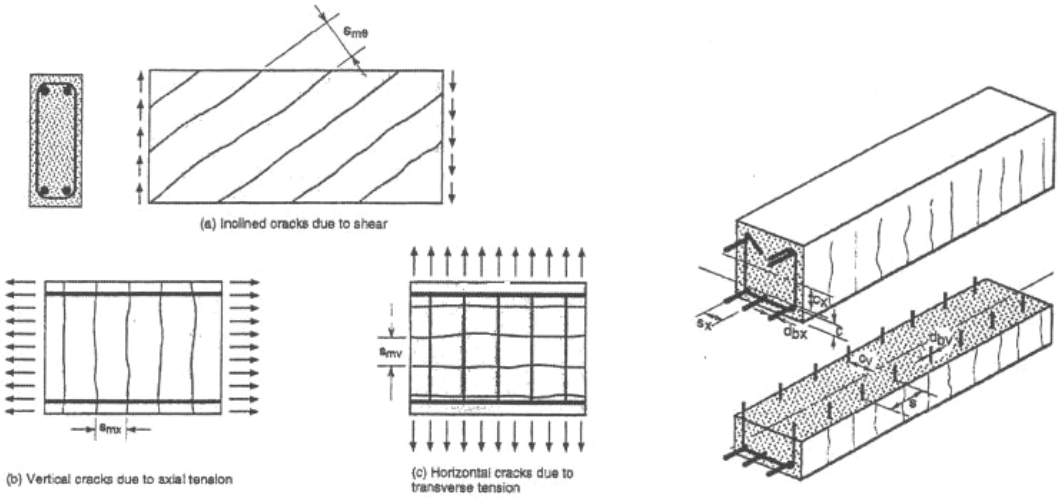


Fig.2.19. Paràmetres que influeixen a l'obertura de les fissures (Duthinh i Carino, 1996)

Un cop coneguda la capacitat de transmetre esforç de tallant de la fissura es pot plantejar l'equilibri a través d'aquestes, de la següent figura es pot deduir la tensió a l'armadura en una fissura:

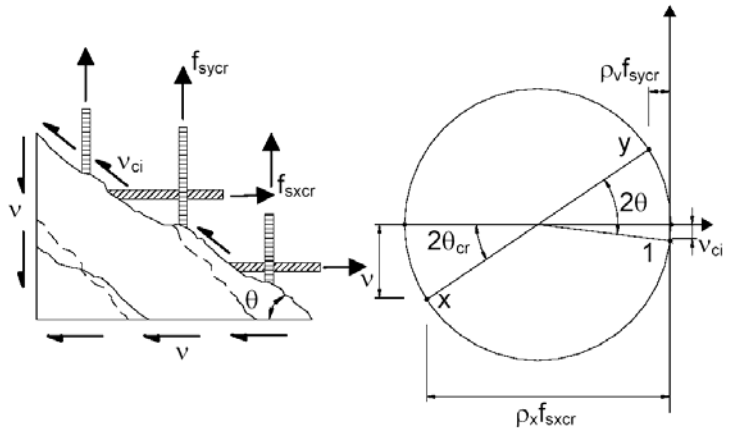


Fig.2.20. Equilibri en termes de tensions locals a la fissura (Collins i Mitchell, 1997)

$$\rho_x f_{sxcr} = f_x + v\cot\theta + v_{ci}\cot\theta$$

$$\rho_y f_{sycr} = f_y + v\tan\theta - v_{ci}\tan\theta \qquad (***)$$

L'estat tensional definit per les tensions mitges a la fissura i l'estat tensional definit per les tensions de tall entre les fissures han de ser estàticament equivalents.

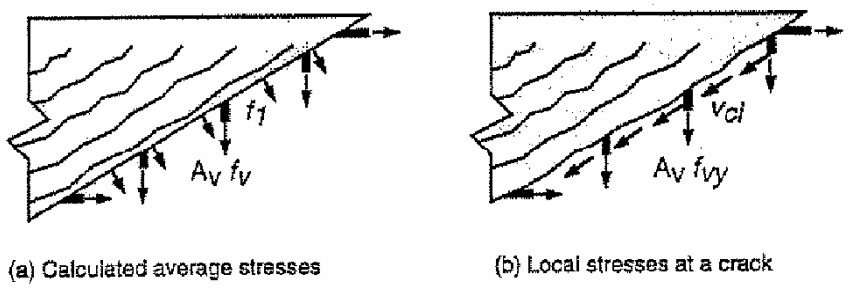


Fig. 2.21. Equilibri a les fissures (Duthinh i Carino, 1996)

Llavors de les equacions (*) i (***) (equilibri vertical en tensions mitges i equilibri vertical a les fissures), s'obté que la tensió principal de tracció ha d'estar limitada pel següent valor:

$$f_1 = v_{ci}\tan\theta + \rho_v\left(f_{sycr} - f_{sy}\right)$$

Tenint en compte que, per a nivells alts de càrrega, la deformació mitja als estreps sobrepassa generalment el límit elàstic de l'acer. En aquests casos f_{sy} i f_{sycr} igualaran el límit elàstic de l'armadura dels estreps. Tenint en compte això i substituint el valor de v_{ci} obtingut anteriorment, l'equació anterior queda:

$$f_1 \leq \frac{0{,}18\sqrt{f'_c}}{0{,}3 + \frac{24w}{a+16}} \tan\theta$$

Amb les equacions anteriors d'equilibri, compatibilitat i les corbes tensió-deformació, pot trobar-se una solució complerta per a la resistència d'un element sotmès a tallant.

La MFCT és una teoria que s'aproxima bastant bé a la realitat, tot i que no exactament ja que realitza algunes hipòtesis simplificatives (tensions i deformacions principals paral·leles) que fan perdre precisió. Existeixen d'altres teories basades en la MFCT que introdueixen alguna millora, però que son difícils de portar després a un àmbit normatiu pel fet de la seva complexitat.

2.2.3 Comparació entre els models en gelosia i la Modified Compression Field Theory.

La MCFT pot explicar-se com un model de gelosia a on la resistència a tallant és la suma de les contribucions de l'acer i el formigó. La principal diferència respecte als models de gelosia és que la contribució del formigó a la MCFT és la component vertical del tallant transmès a través de la fissura v_{ci} en lloc de la tracció diagonal de fissuració.

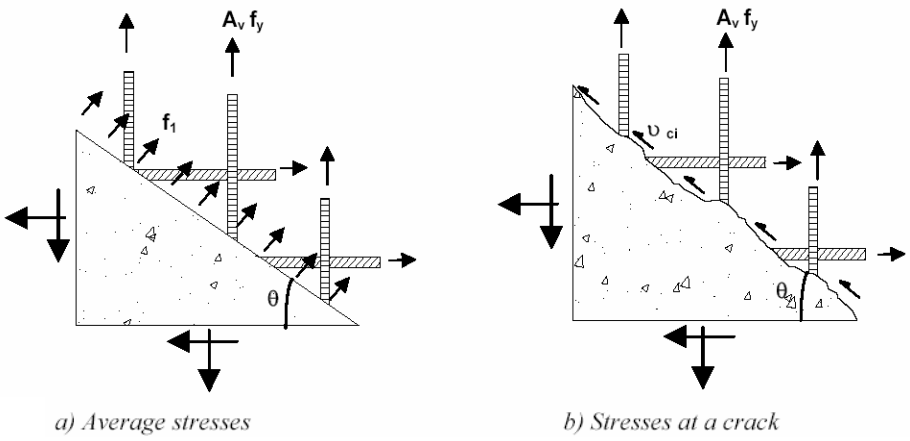


Fig. 2.22. Tensions mitges i tensions locals a una fissura.

$$V = V_c + V_s$$

$$V_s = \frac{A_v}{s} f_y d_v \cot\theta$$

$$V_c = v_{ci} b_w d_v$$

A la figura 2.22 pot veure's com la tensió mitja transversal a l'armadura de tallant, f_1, dona lloc a una força vertical de valor f_1 b_w d_v cotθ. Com s'ha vist anteriorment els dos esquemes de la figura han d'equilibrar el mateix tallant vertical, per tant:

$$V_c = v_{ci} b_w d_v = f_1 b_w d_v \cot\theta$$

és a dir:

$$f_1 = v_{ci} \tan\theta$$

Per tant després de la plastificació dels estreps la biga pot no col·lapsar si el tallant – fricció augmenta i la inclinació de les compressions, θ, decreix. La fallida de la biga bé determinada per l'aplastament de les bieles de compressió entre fissures, o bé per el lliscament de la fissura. La tensió de compressió, f_2, a una biela és:

$$f_2 = f_1 - v(\tan\theta + \cot\theta)$$

El formigó està sotmès a tensions de tracció normals a les de compressió, i per tant a mida que augmenta la deformació per tracció, es redueix la màxima compressió resistent.

Per tant, després de la plastificació dels estreps, la resistència a tallant de la biga pot incrementar-se. Generalment, per una biga de formigó convencional, la fallida està determinada per l'aplastament del formigó. En canvi per a bigues de formigó d'alta resistència, les bieles són capaces de suportar més càrrega, i la fallida es produeix per un lliscament a la fissura.

Hi ha dues diferències més a destacar entre els models de gelosia i la MCFT respecte a la contribució del formigó:

Per a bigues amb armadura de tallant els models de gelosia consideren la contribució del formigó com la que tindria la mateixa biga sense reforç a tallant. La MCFT te en compte la contribució del formigó a partir del mecanisme de col·lapse real de la biga amb estreps.

En els models de gelosia la contribució del formigó no depèn de la quantia d'armadura transversal que es disposa, en canvi a la MCFT la contribució del formigó depèn de l'obertura de fissura i aquesta està relacionada amb la quantitat d'armadura. Quanta més armadura transversal hi hagi, menor serà la fissura i, per tant, major serà la contribució del formigó.

2.3 Disseny a tallant de bigues de formigó

2.3.1 Segons les especificacions de AASHTO -LFRD

Les especificacions de l' AASHTO-LFRD són l'últim codi que ha adoptat un mètode de disseny basat en la MCFT.

Bigues sense armat transversal

El tallant de disseny per a un element de formigó armat ve donat per:

$$Vc = \beta\sqrt{fc'} \cdot b_v \cdot d_v$$

on: d_v = 0,9d

El valor de β, tabulat a la figura 2.23, depèn de la distància equivalent entre fissures (S_{xe}) i de la deformació longitudinal de l'ànima (ε_x) que s'aproxima per a la deformació de l'armadura longitudinal (ε_t).

$$S_{xe} = \frac{35}{a+16} \cdot S_x$$

on a és el tamany màxim de l'àrid en mm i S_x és el paràmetre de distància entre fissures que defineix la figura 2.23

$$\varepsilon_x = \varepsilon_t$$

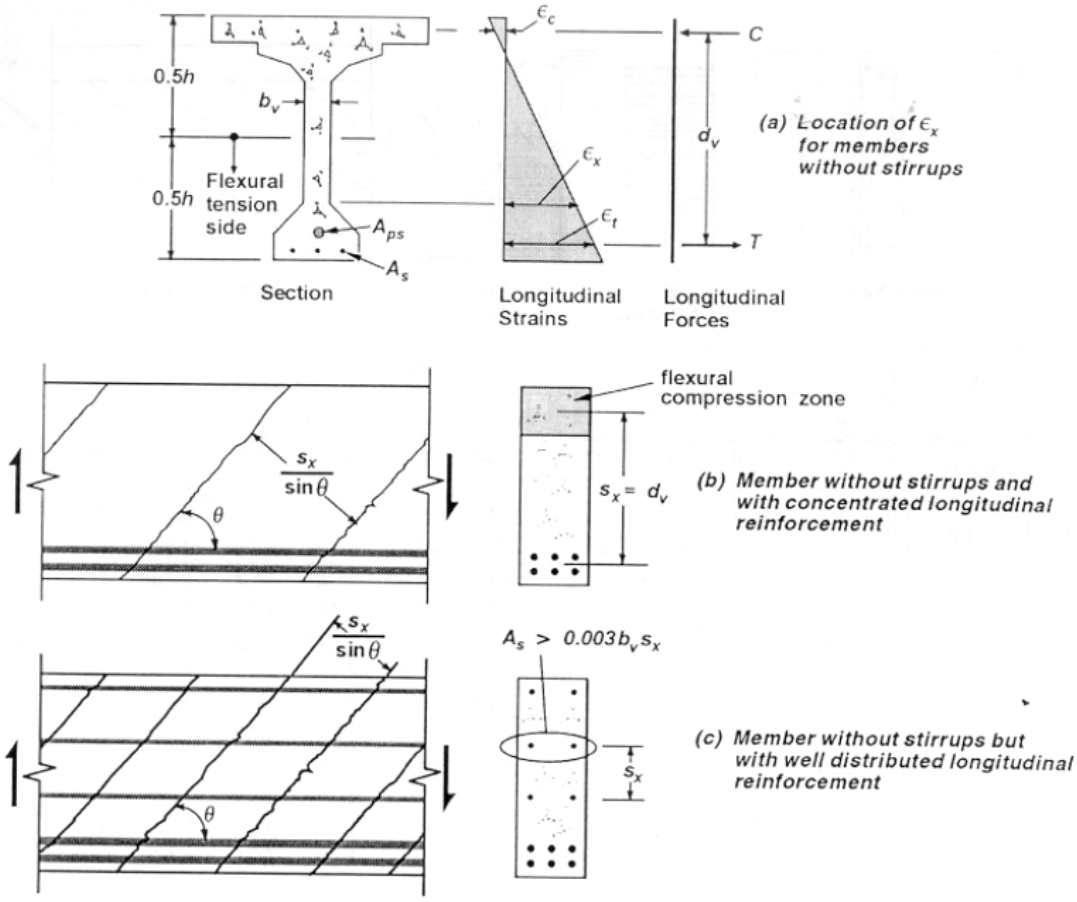
$$\varepsilon_t = \frac{\frac{M_f}{d_v} + V_f - \phi_p V_p + 0{,}5N_f - A_p f_{p0}}{E_s A_s + E_p A_p}$$

on: f_{p0} pot pendre's com $0{,}7f_{pu}$ per als nivells de pretensat habituals.

si $\varepsilon_t < 0$, el denominador canvia per la expressió:

$$E_s A_s + E_p A_p + E_c A_c$$

on: A_c és l'àrea de la mitja secció inferior de formigó.



s_z		$\varepsilon_x \times 1000$							
		≤ 0.00	≤ 0.125	≤ 0.25	≤ 0.50	≤ 0.75	≤ 1.00	≤ 1.50	≤ 2.00
≤ 125	β	0.428	0.366	0.325	0.271	0.238	0.214	0.184	0.163
	θ	26.4	27.7	28.9	30.9	32.4	33.7	35.6	37.2
≤ 250	β	0.406	0.336	0.292	0.239	0.208	0.185	0.156	0.137
	θ	29.3	31.6	33.5	36.3	38.4	40.1	42.7	44.7
≤ 375	β	0.393	0.317	0.272	0.219	0.188	0.167	0.140	0.121
	θ	31.1	34.1	36.5	39.9	42.4	44.4	47.4	49.7
≤ 500	β	0.383	0.303	0.257	0.204	0.174	0.154	0.126	0.109
	θ	32.3	36	38.8	42.7	45.5	47.6	50.9	53.4
≤ 750	β	0.368	0.282	0.234	0.182	0.153	0.133	0.108	0.091
	θ	34.2	38.9	42.3	46.9	50.1	52.6	56.3	59
≤ 1000	β	0.337	0.266	0.218	0.166	0.138	0.119	0.095	0.079
	θ	36.6	41.1	45	50.2	53.7	56.3	60.2	63
≤ 1500	β	0.291	0.242	0.193	0.143	0.116	0.098	0.076	0.062
	θ	40.8	44.5	49.2	55.1	58.9	61.8	65.8	68.6
≤ 2000	β	0.257	0.225	0.175	0.126	0.100	0.084	0.063	0.051
	θ	44.3	47.1	52.3	58.7	62.8	65.7	69.7	72.4

Fig. 2.23. Valors de β i θ per a bigues sense reforç transversal.

Bigues amb armat transversal

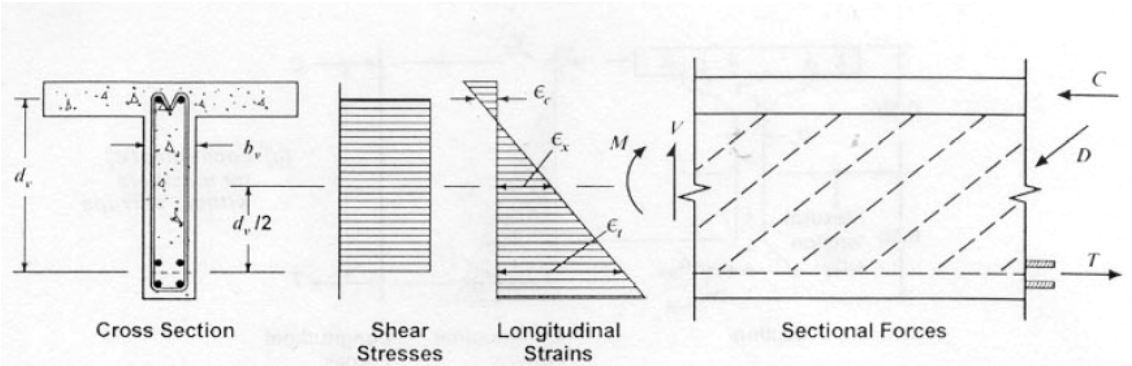
El tallant últim ve determinat per l'expressió:

$$V_c = \beta\sqrt{f_c'} \cdot b_v \cdot d_v + \frac{A_v f_y}{s} d_v \cot\theta$$

on ara β i θ, tabulats a la figura 2.24, són funció de la tensió tangencial (ν) i de la deformació longitudinal de l'ànima (ε_x)

$$\nu = \frac{V_n - V_p}{b_v \cdot d_v}$$

$$\varepsilon_x = 0{,}5\varepsilon_t$$



$\frac{\nu_f}{\phi_c f'_c}$		$\varepsilon_x \times 1000$					
		≤ 0.00	≤ 0.125	≤ 0.25	≤ 0.50	≤ 0.75	≤ 1.00
≤ 0.075	β	0.311	0.269	0.244	0.215	0.198	0.185
	θ	21.8	24.3	26.6	30.5	33.7	36.4
≤ 0.100	β	0.261	0.242	0.228	0.208	0.193	0.181
	θ	22.5	24.9	27.1	30.8	34	36.7
≤ 0.125	β	0.238	0.228	0.218	0.201	0.188	0.177
	θ	23.7	25.9	27.9	31.4	34.4	37
≤ 0.150	β	0.226	0.216	0.209	0.196	0.184	0.173
	θ	25	26.9	28.8	32.1	34.9	37.3
≤ 0.175	β	0.21	0.209	0.203	0.189	0.178	0.163
	θ	26.26	28	29.7	32.7	35.2	36.8
≤ 0.200	β	0.208	0.202	0.197	0.178	0.161	0.149
	θ	27.4	29.0	30.6	32.8	34.5	36.1
≤ 0.225	β	0.199	0.194	0.178	0.154	0.144	0.136
	θ	28.5	30.0	30.8	32.3	34.0	35.7
≤ 0.250	β	0.178	0.176	0.160	0.141	0.131	0.125
	θ	29.7	30.6	31.3	32.8	34.3	35.8

Fig. 2.24. Valors de β i θ per a bigues amb reforç transversal.

2.3.2 Segons la Instrucció EHE-99

Consideracions generals

Per a l'anàlisi de la capacitat resistent de els estructures de formigó davant d'esforços tallants s'estableix com a mètode general de càlcul el de Bieles i Tirants (art. 24 i 40), que s'haurà d'utilitzar en tots aquells elements estructurals o part dels mateixos que, presentant estats plans de tensió o estats assimilables a aquests, estiguin sotmesos a sol·licitacions tangencials segons un pla conegut i no corresponguin als casos particulars tractats de forma explícita a la instrucció (com elements lineals, plaques i lloses).

Resistència a l'esforç tallant

Les prescripcions que inclou la EHE són d'aplicació en elements lineals sotmesos a esforços combinats de flexió, tallant i axil (de tracció o de compressió), i a plaques o lloses treballant fonamentalment en una direcció.

Esforç tallant efectiu

Les comprovacions relatives a l'estat límit d'esgotament per esforç tallant poden fer-se a partir de l'esforç tallant efectiu V_{rd} donat per l'expressió:

$$V_{rd} = V_d + V_{pd} + V_{cd}$$

on

V_d: Valor de càlcul de esforç tallant produït per les accions exteriors

V_{pd}: Valor de càlcul de la component de la forca de pretensat paral·lela a la secció d'estudi

V_{cd}: Valor de càlcul de la component paral·lela a la secció de la resultant de les tensions normals, tant de compressió com de tracció, sobre fes fibres longitudinals de formigó, en les peces de secció variable.

Comprovacions que cal fer

L'estat límit d'esgotament a tallant es pot assolir al esgotar-se la resistència a compressió de l'ànima o al esgotar-se la seva resistència a tracció. Així doncs, cal comprovar que es compleixen simultàniament dues condicions:

$V_{rd} < V_{u1}$ (comprovació a la vora del recolzament)
$V_{rd} < V_{u2}$ (comprovació a una distància d del recolzament)

on

V_{rd}: Esforç tallant efectiu de càlcul

V_{u1}: Esforç tallant d'esgotament per compressió obliqua a l'ànima

V_{u2}: Esforç tallant d'esgotament per tracció a l'ànima

En aquelles peces que no tenen armadura de reforç a tallant no és necessària la comprovació d'esgotament per compressió obliqua a l'ànima.

Obtenció de V_{u1}

L'esforç tallant d'esgotament per compressió obliqua de l'ànima es dedueix de la següent expressió:

$$V_{u1} = K \cdot f_{1cd} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{\cot g\,\theta + \cot g\,\alpha}{1 + \cot g^2\theta}$$

on:

f_{1cd}: Resistència a compressió del formigó (f_{1cd} = 0,6 f_{cd})

b_0: Amplada neta mínima de l'element

K: Coeficient de reducció per efecte de esforç axil

$$K = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}}\right) \leq 1$$

on

σ'_{cd}: Tensió axil efectiva a la secció (tracció positiva). $\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$

N_d: Esforç axil de càlcul (tracció positiva), incloent el pretensat amb el seu valor de càlcul

A_c: Àrea total de la secció de formigó

α: Angle de les armadures amb l'eix de la peca

θ: Angle entre les bieles de compressió de formigó i l'eix de la peca. Es prendrà un valor que compleixi:
0,5 ≤ cotg θ ≤ 2,0

Obtenció de V_{u2}

- Peces sense armadura de tallant

L'esforç tallant d'esgotament per tracció a l'ànima val

$$V_{u2} = \left[0{,}12 \cdot \xi \left(100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck}\right)^{1/3} - 0{,}15 \cdot \sigma'_{cd}\right] \cdot b_0 \cdot d$$

amb fck expressat en N/mm2, on :

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$$ amb d expressat en mm

ρ_l quantia geomètrica de l'armadura longitudinal traccionada, passiva i activa adherent, ancorada a una distància igual o major que d a partir de la secció de

càlcul

$$\rho_l = \frac{A_s + A_p \dfrac{f_{yp}}{f_{yd}}}{b_0 \cdot d} \leq 0{,}02$$

- Peces amb armadura de tallant

Esforç tallant d'esgotament per tracció a l'ànima val:

$$V_{u2} = V_{cu} + V_{su}$$

on

V_{su}: Contribució de l'armadura transversal de l'ànima a la resistència a tallant;

$$V_{su} = z \cdot \sin\alpha(\cot\alpha + \cot\theta)\sum A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d}$$

on

A_α: Àrea per unitat de longitud de cada grup d'armadures que formen un angle α amb la directriu de la peca

$f_{y\alpha,d}$: Resistència de càlcul de l'armadura Aα

z: Braç mecànic, pot adoptar-se aproximadament z = 0,9d

V_{cu}: Contribució del formigó a la resistència a tallant

$$V_{cu} = \left[0{,}10 \cdot \xi(100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} - 0{,}15 \cdot \sigma'_{cd}\right] \cdot b_0 \cdot d \cdot \beta$$

amb fck expressat en N/mm2, i on:

$$\beta = \frac{2\cot\theta - 1}{2\cot\theta_e - 1} \qquad \text{si } 0{,}5 \leq \cot\theta < \cot\theta e$$

$$\beta = \frac{2\cot\theta - 2}{2\cot\theta_e - 2} \qquad \text{si } \cot\theta e \leq \cot\theta < 2{,}0$$

θ_e, Angle de referència d'inclinació de les fissures, deduït de l'expressió:

$$\cot\theta_e = \frac{\sqrt{f_{ct,m}^2 - f_{ct,m}(\sigma_{xd} + \sigma_{yd}) + \sigma_{xd}\sigma_{yd}}}{f_{ct,m} - \sigma_{ud}}$$

$f_{ct,m}$: Resistència mitja a tracció del formigó considerada com a positiva

σ_{xd},σ_{yd}: Tensions normals de càlcul a nivell del centre de gravetat de la secció, paral·leles a la directriu de la peca i a esforç tallant V_d respectivament.

Les tensions σ_{xd},σ_{yd} s'obtindran a partir de les accions de càlcul, incloent el pretensat, d'acord amb la teoria de la elasticitat i suposant el formigó no fissurat i positives les tensions de tracció.

-Disposicions relatives a les armadures

La separació s_t entre armadures transversals ha de complir les següents condicions per a aconseguir un adequat confinament del formigó sotmès a compressió obliqua:

$s_t \leq 0{,}80d \leq 300$ mm si $V_{rd} \leq 1/5\ V_{u1}$
$s_t \leq 0{,}60d \leq 300$ mm si $1/5\ V_{u1} < V_{rd} \leq 2/3\ V_{u1}$
$s_t \leq 0{,}30d \leq 200$ mm si $V_{rd} > 2/3\ V_{u1}$

La quantia mínima de l'armat transversal ha de ser:

$$\sum \frac{A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d}}{\sin\alpha} \geq 0{,}02 f_{cd} b_0$$

Almenys un terç de l'armadura necessària per tallant, i en qualsevol cas la quantia mínima indicada, es disposarà en forma d'estreps que formin un angle de 90° amb l'eix de la biga.

- Armadures longitudinals

Les armadures longitudinals de flexió hauran de ser capaces de suportar un increment de tracció respecte a la produïda per M_d igual a:

$$\Delta T = V_{rd} \cot\theta - \frac{V_{su}}{2}\left(\cot\theta + \cot\alpha\right)$$

Aquesta prescripció es compleix de manera automàtica decalant la llei de moments de càlcul M_d, en el sentit més desfavorable, una magnitud igual a:

$$s_d = z\left[\cot\theta - \frac{1}{2}\frac{V_{su}}{V_{rd}}\left(\cot\theta + \cot\alpha\right)\right]$$

- Recomanacions per a formigons d'alta resistència

Com es comenta a la norma, les prescripcions i requisits inclosos a la present estan avalats per la experimentació únicament per a formigons de resistència no major a 50MPa.
La instrucció espanyola contempla a nivell d'annex la possibilitat d'utilitzar formigons de entre 50 i 100 MPa, als que denomina formigons d'alta resistència. En lo referent a l'estat límit d'esgotament a tallant, la instrucció EHE-99 diu lo següent:

En la comprovació i dimensionament de peces sotmeses a esforç tallant cal considerar que la alta resistència de la matriu i de la interfase entre la matriu i els àrids pot donar lloc a fissures amb poc engranament entre les seves cares, disminuint per tant el terme V_{cu} corresponent a la contribució del formigó a la resistència a tallant.

Per aquest motiu, per a la determinació dels valors de V_{u2} per a peces sense armadura de tallant i de V_{cu} per a peces amb armadura de tallant, es limitarà el valor de fck ≤ 60 N/mm^2.

Per a la determinació de esforç tallant d'esgotament per compressió obliqua de l'ànima es limitarà el valor de f_{1cd}.

$f_{1cd} = 0{,}6\ f_{cd}$	per a $f_{ck} \leq 60$ N/mm^2
$f_{1cd} = (0{,}9-0{,}005\ f_{ck})\ f_{cd}$	per a 60 N/mm^2 $f_{ck} \leq 80$ N/mm^2
$f_{1cd} = 0{,}5\ f_{cd}$	per a 80 N/mm^2 < f_{ck}

2.3.2.1 Consideracions de la EFHE.

La normativa de forjats unidireccionals es basa en la EHE, però quan defineix la resistència a tallant de lloses alveolars pretensades, al determinar el tallant d'esgotament per tracció de l'ànima V_2, distingeix dos casos en funció de la relació entre el moment de solicitació i el moment que produeix la descompressió de la secció.

- Zona en la que Md < M_0.

$$V_{u2} = \frac{Ib_0}{S}\sqrt{f_{ct,d}^2 + \alpha\sigma_{cpm} f_{ct,d}}$$

on:

Md el moment de cálcul de la secció.
M_0 el moment de descompressió de la secció.
I el moment d'inercia.
S el moment estàtic de la secció.
$f_{ct,d}$ la resistència de càlcul de tracció del formigó.
σ la tensió mitja al formigó degut a la força del pretensat.
α el coeficient igual a $x/(1{,}2\ l_{bd}) \leq 1$
éssent:
x la distància de la secció a l'extrem.
l_{bd} la longitud de transferència de l'armadura activa de pretensat, en mm, que pot pendre's com: $l_{bd} = \Phi\sigma_p/21$
on:
σ_p la tensió de pretensat, després de perdues, en Mpa.
Φ el diàmetre de l'armadura activa.

- Zona en la que Md > M_0.

En aquest cas es determina segons estableix la norma EHE.

2.3.3 Segons la Instrucció ACI 318-99.

La ACI distingeix les bigues de formigó armat de les bigues de formigó

pretensat, proposant dos procediments de càlcul del tallant últim d'una biga clarament diferenciats. A continuació només s'exposa el cas per a bigues pretensades.

Mètode simplificat. Equació 11-9.

El mètode simplificat determina el tallant últim com:

$$V_c = \left(\frac{\sqrt{f_c'}}{20} + 5\frac{V_u \cdot d}{M_u} \right) b_w \cdot d$$

complint la condició:

$$V_c \leq 0{,}4\sqrt{f_c'} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_c \geq \frac{1}{6}\sqrt{f_c'} \cdot b_w \cdot d$$

essent M_u el moment concomitant amb V_u a la secció de càlcul i $\frac{V_u \cdot d}{M_u} \leq 1$

Mètode més detallat. Equacions 11-10 i 11-12.

La ACI proposa un mètode més precís de càlcul distingint el tallant últim per flexió – tallant (V_{ci}) i per tallant a l'anima (V_{cw}).

Així doncs V_c serà el menor de V_{ci}, V_{cw}.

Determinació de V_{ci}.

El tallant que provoca la fallida per tallant - flexió, és aquell necessari per a produir una fissura de flexió a la secció estudiada més un increment de tallant addicional per a canviar una fissura de flexió per una de flexió – tallant.

$$V_{ci} = \left(\frac{\sqrt{f_c'}}{20} \right) b_w \cdot d + V_d + \frac{V_i \cdot M_{cr}}{M_{\max}} \qquad V_{ci} \geq \frac{\sqrt{f_c'}}{7}$$

on M_{max} i V_i s'ha de calcular amb la combinació de càrrega que provoca el moment màxim a la secció i V_d és el tallant degut a la càrrega permanent.

$$M_{cr} = \frac{I}{y_t} \left(\frac{\sqrt{f_c'}}{2} + f_{pe} - f_d \right)$$

essent: y_t la distància del centre de gravetat a la fibra més traccionada i f_d, f_{pe} són les tensions de tracció en les fibres extremes degudes a la càrrega permanent i el pretensat respectivament.

Determinació de V_{cw}.

La fissuració per tallant a l'anima s'inicia en un punt interior de l'element quan els esforços principals de tracció sobrepassen la resistència a tracció del formigó.

$$V_{cw} = 0{,}3\left(\sqrt{f_c'} + f_{pc}\right) \cdot b_w \cdot d + V_p$$

on f_{pc} és la tensió de compressió a la fibra neutra i V_p és la component vertical del pretensat.

La següent figura il·lustra els dos tipus de fissuració inclinada.

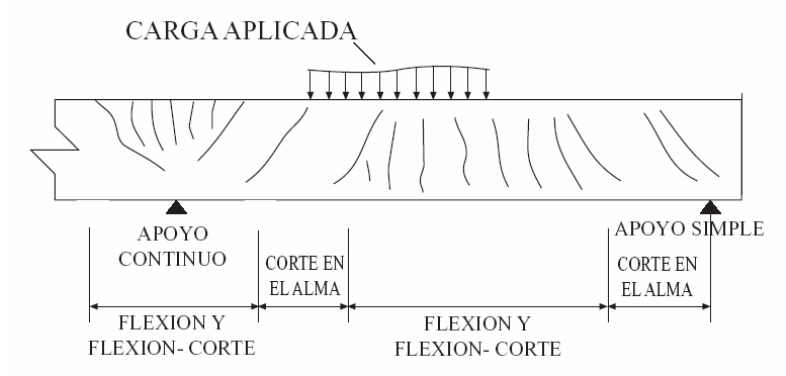


Fig. 2.25. Tipus de fissuració inclinada en bigues de formigó. (ACI 318-99)

2.4 Formigó d'alta resistència

Els formigons d'alta resistència s'anomenen també d'altes prestacions, ja que l'augment de la resistència del formigó va acompanyat de la millora d'altres propietats, com ara la rigidesa, la resistència a tracciò, menors deformacions diferides i un bon comportament davant d'ambients agressius degut a que el formigó d'alta resistència presenta una porositat menor i per tant una menor permeabiliat.

Comportament mecànic

El diferent comportament que s'observa entre el formigó convencional i el d'alta resistència es deu a la seva microestructura. En el formigó convencional la diferència de rigidesa entre els àrids i la pasta provoca que al carregar apareguin deformacions relatives a la superfície de contacte que trenquen l'adherència a la interfase i generen microfissuració. Aquesta microfissuració és propaga a l'augmentar la càrrega, i provoca desviacions en el diagrama tensió-deformació respecte al diagrama lineal. En formigó d'alta resistència, la pasta i els àrids tenen rigideses semblants i millor adherència, i per això la microfissuració s'endarrereix, donant un comportament lineal fins a un percentatge de càrrega respecte a la de rotura major que als formigons

convencionals. El formigó d'alta resistència també té una deformació major per a la situació de tensió màxima i una corba de descàrrega amb una major pendent

A la següent figura s'observa en el diagrama de Sargin les diferències de comportament entre formigons de diferent resistència característica:

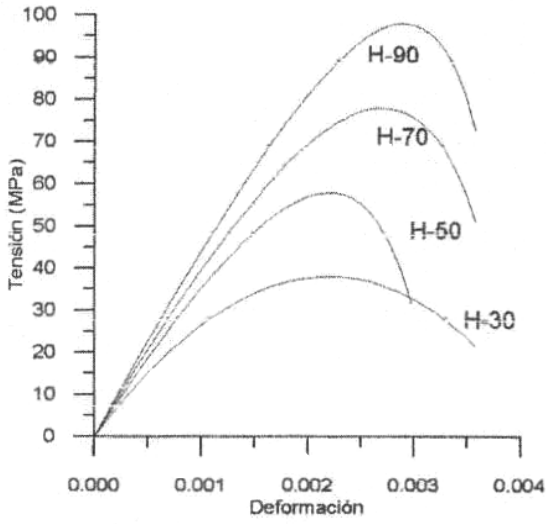


Fig. 2.23. Diagrama de Sargin

La superfície de trencament d'un formigó convencional presenta un engrapament entre cares, que permet transmetre un cert esforç tangencial. En formigó d'alta resistència aquesta superfície és més neta, i travessa els àrids en lloc de vorejar-los, reduint-se així la capacitat de transmissió dels esforços tangencials i disminuint la deformació última. La fissura es propaga per allà on li és més fàcil, i en el cas del formigó d'alta resistència, al ser la matriu tant o més resistent que els àrids, ho fan a través d'aquests últims.

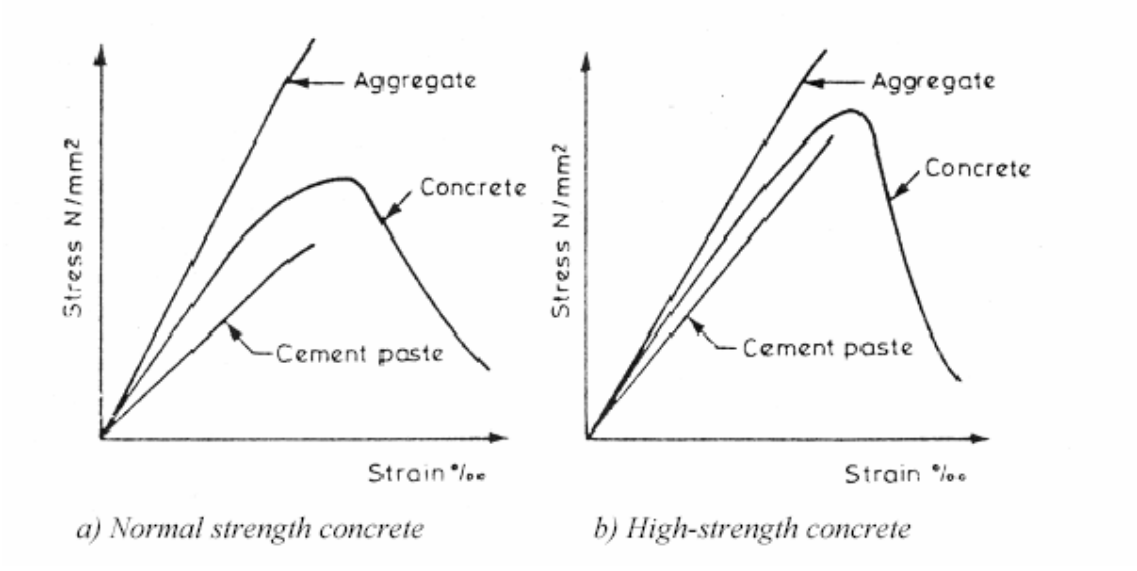


Fig. 2.24. Rigideses de la pasta de ciment i dels àrids en formigó convencional i d'alta resistència (FIP/CEB, 1990)

Les diferències entre els dos tipus de formigó no justifiquen canvis en els principis bàsics de projecte ni en els valors dels coeficients de seguretat, però hi ha certs aspectes que cal considerar en el projecte constructiu d'una estructura.

Cal tenir en compte que el formigó d'alta resistència té un pes propi més alt, degut a la seva major compacitat. Un valor raonable és γ=24KN/m^3 sense armadures. També cal recordar que la resistència a tracció del formigó creix en menor mesura que la resistència característica a compressió, ja que està influïda per la forma i textura dels àrids. La resistència a tracció és fonamental en el formigó, influeix en la seva deformabilitat, fissuració, resistència a tallant i adherència. La quantia mecànica mínima també està directament relacionada amb la resistència a tracció del formigó, en lloc de la de compressió. La formulació de molts dels codis actuals sobreestima la resistència a tracció del formigó d'alta resistència.

Pel que fa a la retracció, si bé és cert que el formigó d'alta resistència presenta una retracció inicial relativament major, es pot considerar que als 110 dies d'assecat la retracció serà aproximadament igual en els dos tipus de formigó. En canvi, el valor de la fluència d'un formigó d'alta resistència pot ser fins a un 50 % menor al d'un formigó convencional.

Pel que fa a l'estat últim de flexocompressió és important destacar que caldrà usar diagrames tensió-deformació que s'adaptin al comportament experimental observat. Encara no hi ha un acord sobre si cal utilitzar el diagrama rectangular o de paràbola rectangle per al formigó d'alta resistència.