Capítulo 4.
Ejemplos numéricos.

Para comprobar la eficacia y corrección del método y modelo implementados se presentan a continuación una serie de ejemplos numéricos. En primer lugar se enuncian un conjunto de ejemplos que nos servirán como validación de la implementación llevada a cabo en el capítulo que acaba de ser presentado a partir de los cuales se podrá extraer el correcto funcionamiento de los programas elaborados. Una vez podamos dar como buenos los resultados obtenidos en estos ejemplos de validación se pasará al análisis y estudio de un ejemplo más representativo y característico dentro del campo de la mecánica de suelos como es el de una zapata superficial. Se ha escogido este ejemplo principalmente por el extenso historial de trabajos realizados sobre el mismo, lo cual será un punto fundamental de apoyo para poder llevar a cabo una adecuada comparación y contrastes adecuados.

4.1 Ejemplos de validación

Como acabamos de comentar dentro de este apartado se va a llevar a cabo la ejecución de algunos ejemplos que nos servirán como validación del código implementado en Matlab. Estos ejemplos numéricos corresponderán a dos problemas bidimensionales en deformación plana. Concretamente se tratará de dos placas (el material se despreciará tomando las fuerzas de volumen nulas) doblemente simétricas y con unas determinadas condiciones de contorno. Estos ejemplos en deformación plana se han reproducido a partir de los estudiados en [4] para el modelo de Von Mises, de esta forma se expondrán los resultados obtenidos para este y los obtenidos ahora con el modelo de Mohr-Coulomb. Ambos resultados, por tanto, podrán ser adecuadamente comparados y contrastados.

4.1.1 Placa agujereada

4.1.1.1 Placa sometida a tracción

Este ejemplo consiste en una placa agujereada doblemente y doblemente simétrica y traccionada a izquierda y derecha uniformemente. A continuación puede observarse la geometría del presente ejemplo:

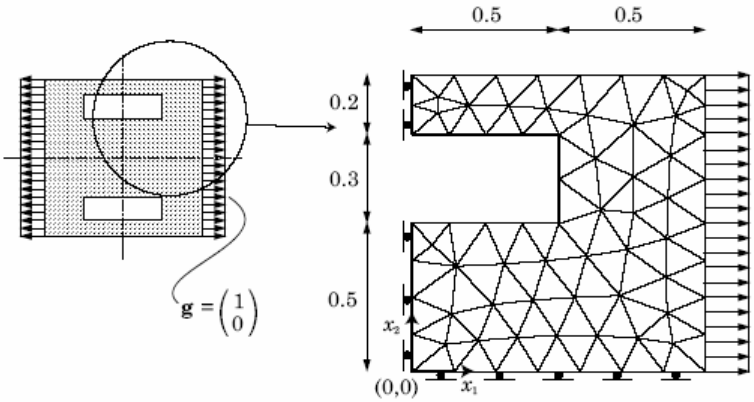


Figura 4-1. Geometría de una placa doblemente agujereada y doblemente simétrica con una carga uniformemente repartida a tracción en ambos lados.

Los resultados que se han obtenido, tanto para el modelo Von Mises (recuperando la implementación en [4]) como para el de Mohr-Coulomb (implementado en el trabajo presente), se corresponden con el empleo del método de adaptatividad de malla explicado anteriormente en el capítulo 3. Al mismo tiempo se aprovecha el hecho de la doble simetría resolviendo únicamente un cuarto de placa. De esta forma los resultados que se obtienen para el modelo de Von Mises se muestran a continuación:

MODELO VON MISES					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	108	1,2913	1,4151	0,1238	4,574
2	251	1,3128	1,3837	0,0709	2,628
3	645	1,3208	1,3632	0,0424	1,582
4	1345	1,3216	1,3493	0,0277	1,034
5	2444	1,3218	1,3402	0,0184	0,693

Tabla 4-1. Resultados obtenidos para el modelo Von Mises según [4].

Vemos como ambas cotas, superior e inferior, evolucionan correctamente de la misma forma que lo hace el error. Por otro lado tenemos que se obtiene la siguiente evolución de la deformada de un cuarto de placa:

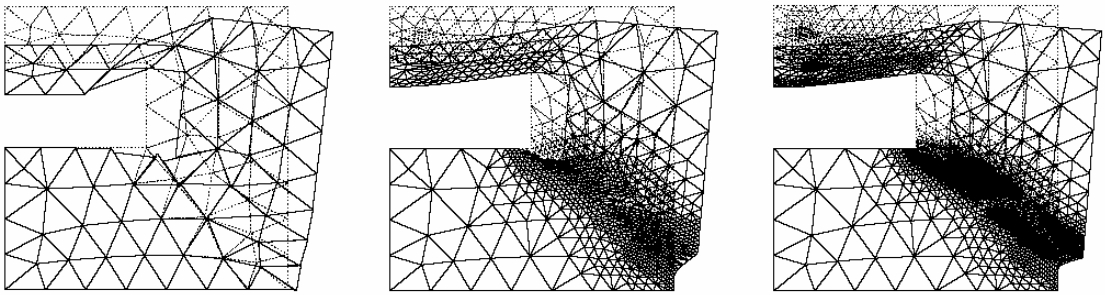


Figura 4-2. Deformadas correspondientes a la primera, cuarta y sexta iteración para Von-Mises.

Observamos como actúa la adaptatividad y únicamente se refinan aquellos elementos con una importante aportación a la evolución de las cotas. En las iteraciones avanzadas queda claramente definida la zona de colapso y de mayor deformación.

Si pasamos a utilizar el modelo de Mohr-Coulomb estos resultados variarán dependiendo de los parámetros que entremos en nuestro ejemplo. Estos parámetros, como se ha comentado en capítulos anteriores, son las características definitorias, en nuestro caso, del sólido deformable. Concretamente serán el ángulo de rozamiento interno (ϕ) y la cohesión del material (c). Empleando el modelo de Mohr-Coulomb, matemáticamente, no es posible recuperar el modelo de Von Mises con unos determinados valores para estos parámetros. Por el contrario, esto si es posible para el modelo de Drucker-Prager, ya que este, como se indicó en la introducción del presente documento, podría considerarse la extensión de Von Mises. Por tanto, empleando en D-P valor nulo para ϕ y una cohesión de valor igual a $\sqrt{3}/2$, recuperamos exactamente el modelo de V-M. Considerando esto, es razonable establecer que para estos valores se obtendrá la aproximación más correcta a V-M para nuestro modelo de M-C.

Por tanto, según lo comentado y para los valores citados, se obtienen los siguientes resultados empleando el modelo de Mohr-Coulomb:

MODELO MOHR-COULOMB					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	108	1.1183	1.2255	0.10721	4.574
2	251	1.1369	1.1983	0.061382	2.6285
3	645	1.1438	1.1806	0.036774	1.5821
4	1362	1.1446	1.1685	0.023925	1.0343
5	2490	1.1447	1.1607	0.15995	0.6938

Tabla 4-2. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi=0$ y $c=\sqrt{3}/2$.

Podemos apreciar como era de esperar unos valores de cota menores a los obtenidos en el modelo de V-M. Esto se debe lógicamente a que para el modelo de M-C con un ángulo de rozamiento interno nulo recuperamos el criterio de Tresca. Para este último, como se ha citado con anterioridad durante la introducción del presente trabajo, tenemos una superficie de fluencia representada en el espacio tridimensional por un prisma hexagonal que queda inscrito dentro del cilindro correspondiente al modelo de Von Mises (ver figura 1-3). Por tanto, Tresca responde a un criterio más restrictivo que el establecido por este último.

A continuación, vemos las deformadas correspondientes a este caso con el modelo de M-C. Se observa una evolución muy similar a la del modelo implementado en [4]:

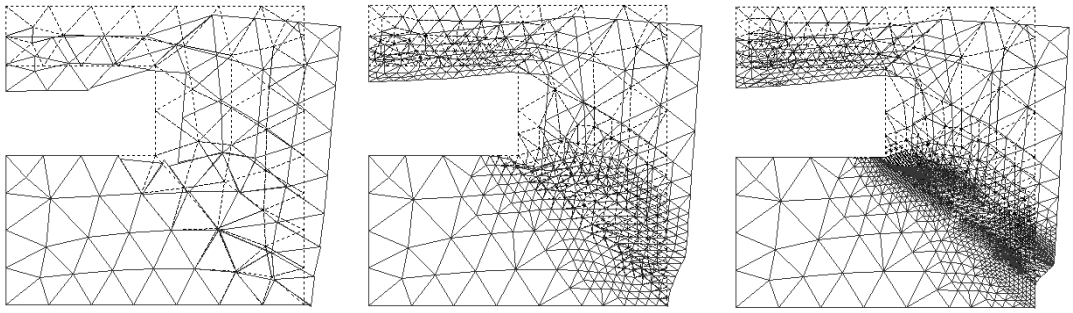


Figura 4-3. Deformadas correspondientes a la primera, tercera y quinta iteración para Mohr-Coulomb.

Estos resultados nos indican claramente la correcta funcionalidad del código implementado. Aún así, es evidente que en este caso no se ha utilizado en ningún momento el ángulo de rozamiento interno, un elemento de vital importancia dentro del modelo de M-C. Por este motivo se muestran a continuación los resultados para algunos valores de ϕ (manteniendo una cohesión igual a $\sqrt{3}/2$). Se ha ido incrementando este valor, en primer lugar 2º y a continuación 5º y 10º.

Por tanto, para ϕ=2º y $c=\sqrt{3}/2$, obtenemos los siguientes resultados y deformadas:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	108	1.09	1.1894	0.099419	4.3616
2	316	1.1064	1.1633	0.056898	2.5068
3	695	1.1119	1.1465	0.034576	1.531
4	1417	1.1125	1.135	0.022561	1.0038
5	2694	1.1126	1.1275	0.016915	0.66583

Tabla 4-3. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 2^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

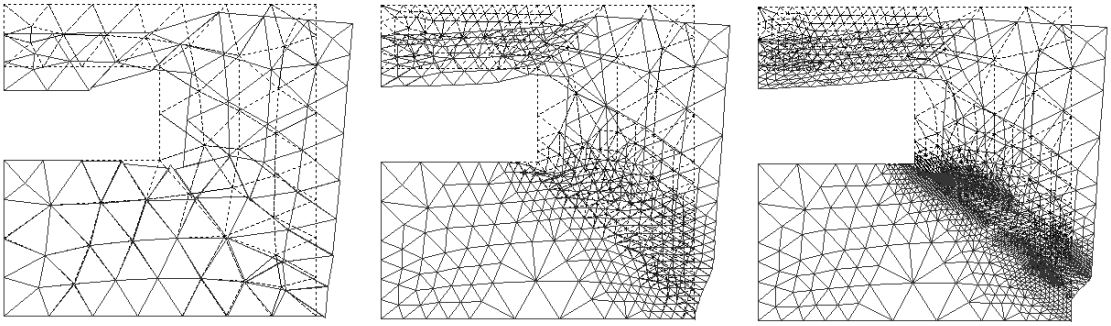


Figura 4-4. Deformada obtenida después de 4 iteraciones para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 2^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

Para ϕ=5º y $c = \sqrt{3}/2$, obtenemos los siguientes resultados y deformadas:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	108	1.048	1.136	0.088078	4.0329
2	335	1.0613	1.1127	0.051378	2.3634
3	854	1.0653	1.097	0.031762	1.4689
4	1724	1.0656	1.0864	0.020717	0.96269
5	4119	1.0658	1.0791	0.013321	0.62106

Tabla 4-4. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 5^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

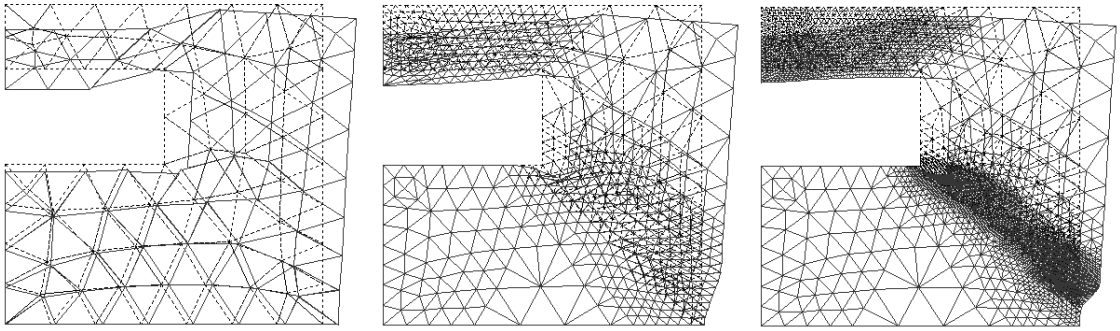


Figura 4-5. Deformada obtenida después de 4 iteraciones para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 5^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

Para ϕ=10º y $c=\sqrt{3}/2$, obtenemos los siguientes resultados y deformadas:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	108	0.97947	1.0354	0.055888	2.7738
2	238	0.98159	1.0289	0.047289	2.3521
3	694	0.98322	1.0244	0.041136	2.049
4	2273	0.98584	1.0214	0.035563	1.7718

Tabla 4-5. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 10^o$ y $c=\sqrt{3}/2$.

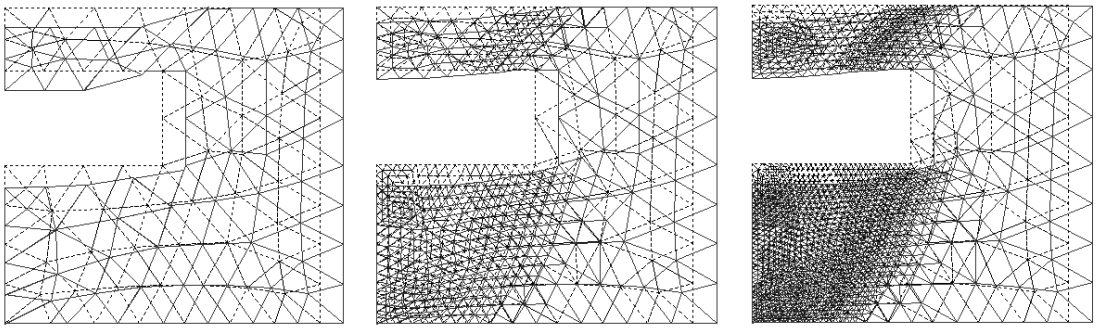


Figura 4-6. Deformada obtenida después de 4 iteraciones para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 10^o$ y $c=\sqrt{3}/2$.

Puede apreciarse como la evolución de los resultados al introducir valores no nulos para el ángulo de rozamiento interno es razonable. De la misma forma, las cotas obtenidas son menores lógicamente a medida que aumentamos el valor del ángulo. Esto es totalmente lógico para un estado de tracción, mientras que para uno de compresión la situación debería ser la opuesta, es decir, valores de cota mayores. Sin entrar en mayor detalle, estas deducciones son intuitivamente fáciles de analizar a partir de un diagrama típico de tensiones:

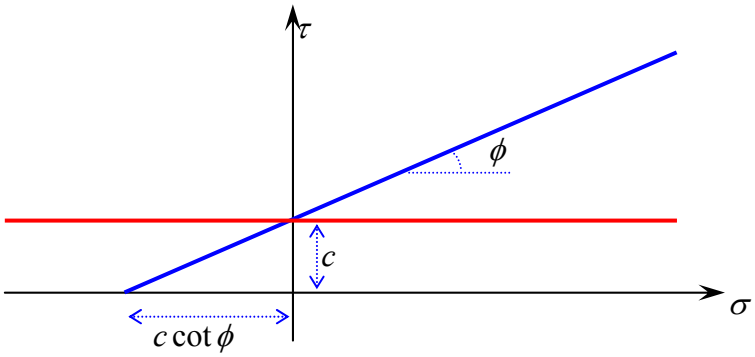


Figura 4-7. Diagrama tensional en el espacio $\sigma - \tau$ en el que se destacan los criterios bidimensionales para V-M (rojo) y M-C (azul). En la zona positiva de abcisas (para un estado principalmente de "compresión" según el convenio geotécnico de signos) el modelo de M-C admite mayores tensiones que el de V-M. En la zona negativa ocurre lo contrario.

Para los dos primeros casos los resultados obtenidos son muy similares a los de ϕ nula, mientras que para el caso de ϕ=10º la zona de rotura varía con respecto a los anteriores de forma considerable. Para ángulos entre 5 y 10º se aprecia la transición de zonas de colapso:

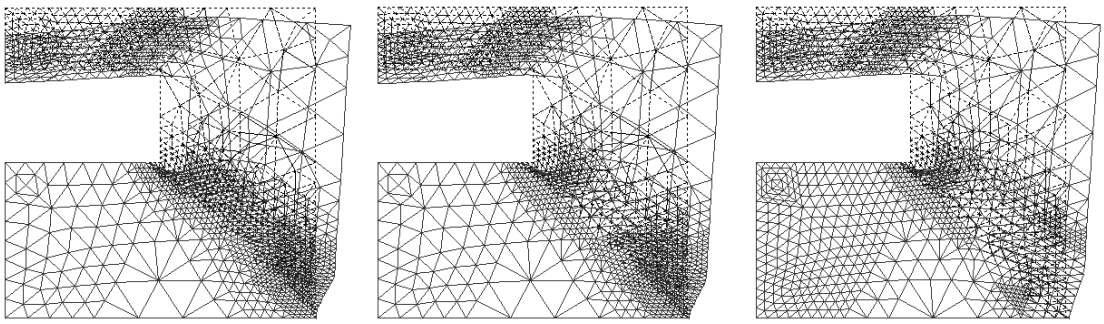


Figura 4-8. Deformadas correspondientes a $\phi=6^o$, $\phi=7{,}5^o$ y $\phi=9^o$ para la 4ª iteración donde se aprecia claramente la transición de zona de colapso.

4.1.1.2 Placa sometida a compresión

Podemos apreciar como pasamos de una zona de colapso abajo a la derecha muy definida en la primera figura y como en la segunda y la tercera se pasa a destacar más la zona abajo a la izquierda y a difuminar la anterior zona.

Por último, después de validar el correcto funcionamiento del código implementado para estos casos, sería interesante considerar ejemplos en que el estado tensional sea principalmente de compresión. Se muestran a continuación dos ejemplos idénticos a los anteriores pero con la carga uniformemente repartida con sentido inverso y para ángulos de rozamiento interno algo mayores que los empleados anteriormente.

Para ϕ=20º y $c=\sqrt{3}/2$, con un estado tensional básicamente de compresión, obtenemos los siguientes resultados y deformadas:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	108	1.3654	1.6503	0.28484	9.4452
2	291	1.4672	1.6174	0.1502	4.8695
3	866	1.508	1.5885	0.080526	2.6005
4	2565	1.5132	1.568	0.054729	1.7762

Tabla 4-6. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi=20^o$ y $c=\sqrt{3}/2$.

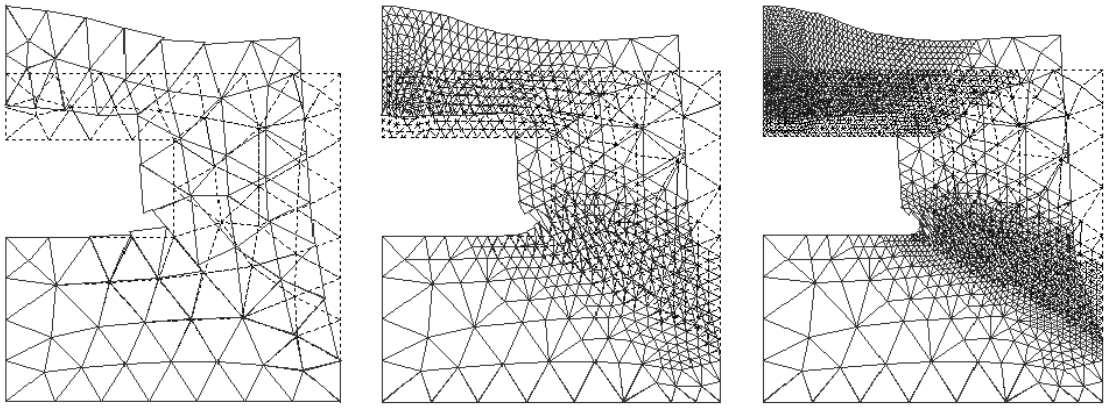


Figura 4-9. Deformada obtenida después de 1, 3 y 4 iteraciones para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 20^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

Para ϕ=25º y $c = \sqrt{3}/2$, con un estado tensional básicamente de compresión, obtenemos los siguientes resultados y deformadas:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	108	1.4236	1.7896	0.36603	11.392
2	314	1.583	1.7515	0.16854	5.0546
3	866	1.6153	1.7179	0.1026	3.0782
4	2563	1.6235	1.6943	0.070886	2.1365

Tabla 4-7. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 25^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

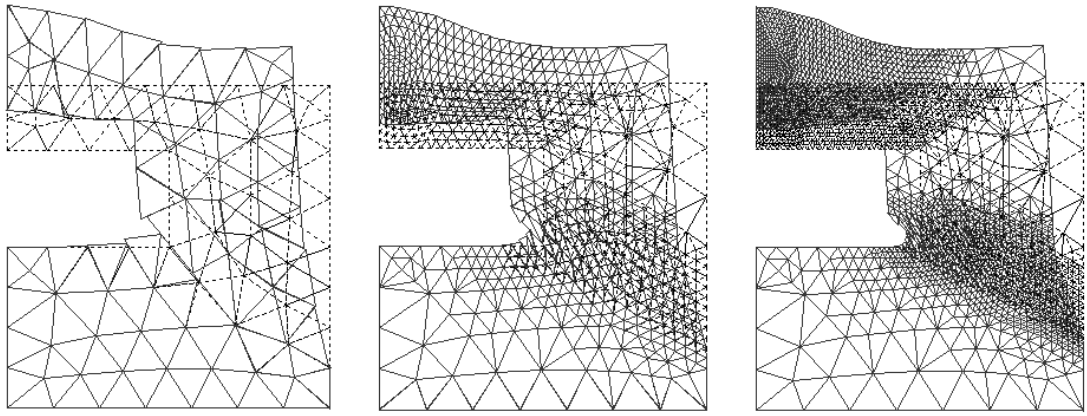


Figura 4-10. Deformada obtenida después de 1, 3 y 4 iteraciones para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 25^o$ y $c = \sqrt{3}/2$.

Vemos como los resultados que se consiguen también son del todo lógicos. Los valores de las cotas en este caso son mayores debido al estado tensional (principalmente a compresión) y para mayor ϕ también son mayores estos valores.

4.1.2 Placa con cortes

Antes de pasar a analizar el caso de la zapata superficial y como segundo ejemplo de validación presentamos aquí una placa doblemente simétrica como la anterior pero con dos cortes verticales en el mismo eje de simetría:

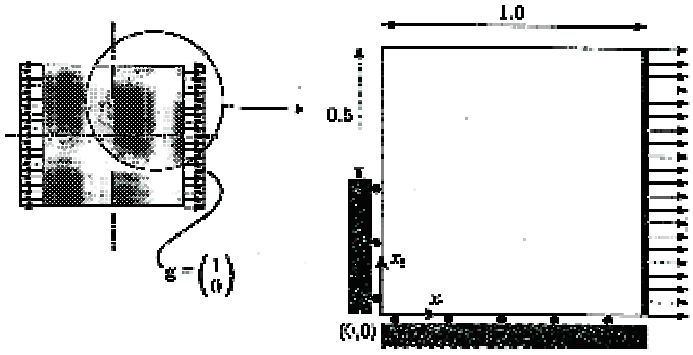


Figura 4-11. Geometría de una placa doblemente agujereada y doblemente simétrica con una carga uniformemente repartida a tracción en ambos lados.

De la misma forma que se hizo en el anterior ejemplo se comparan a continuación los resultados y deformadas obtenidas tanto para el modelo de Von Mises en el trabajo realizado en [4] como para el modelo de Mohr Coulomb.

MODELO VON MISES					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	16	1.11405	1.22888	0.114830	4.9854
2	38	1.12425	1.20063	0.076386	3.3352
3	114	1.13035	1.17830	0.047951	2.1455
4	397	1.13126	1.16087	0.029602	1.3216
5	1089	1.13147	1.15011	0.018635	0.92765

Tabla 4-8. Resultados obtenidos para el modelo Von Mises según [4].

MODELO MOHR-COULOMB					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	16	0.96479	1.0642	0.099445	4.9011
2	38	0.97363	1.0398	0.066153	3.2856
3	114	0.97891	1.0204	0.041527	2.077
4	397	0.9797	1.0053	0.025636	1.2914
5	1082	0.97989	0.99602	0.016135	0.81657

Tabla 4-9. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para los valores $\phi = 0$ y $c = \sqrt{3}/2$.

Al igual que en el caso de la placa doblemente agujereada, los valores de cotas obtenidos para el modelo de Mohr-Coulomb son menores que para el de Von Mises. Aunque aquí no se muestren resultados, se ha llevado a cabo un proceso parecido al anterior variando el ángulo de rozamiento interno y situación tensional, obteniendo resultados correctos y similares a los conseguidos anteriormente. Podemos apreciar también como la evolución de deformadas es muy parecida para ambos casos:

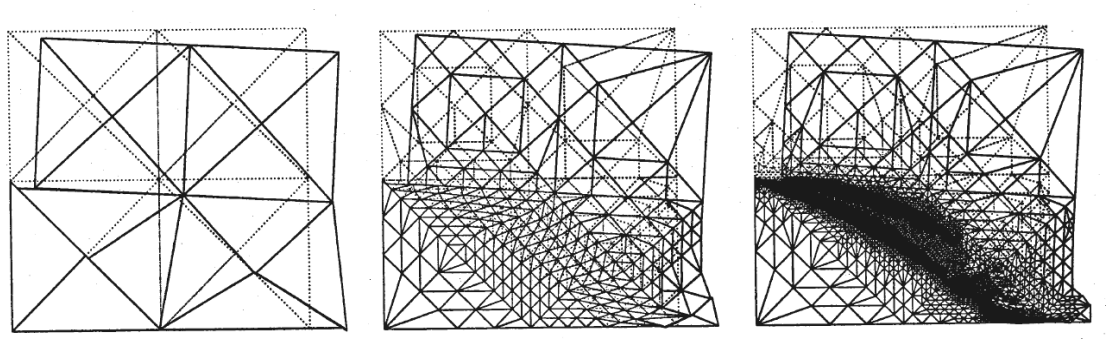


Figura 4-12. Deformadas correspondientes a la primera, cuarta y sexta iteración para Von Mises.

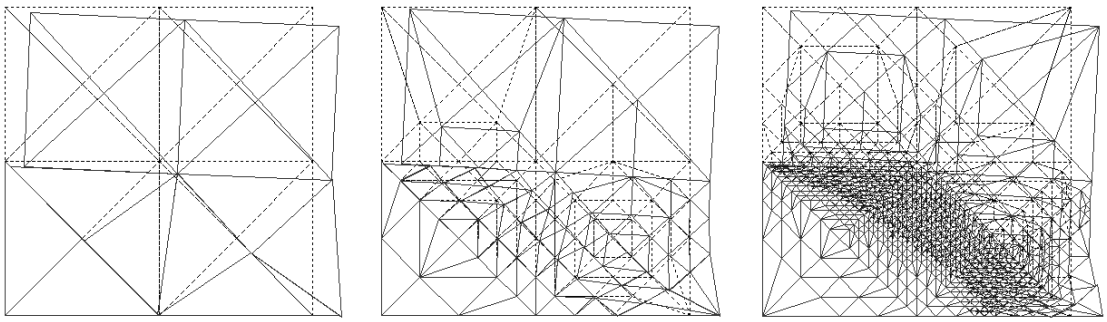


Figura 4-13. Deformadas correspondientes a la primera, tercera y quinta iteración para Mohr-Coulomb.

4.1.3 Conclusiones sobre los ejemplos de validación

Gracias a los ejemplos de validación que acaban de ser expuestos podemos extraer básicamente la conclusión de que el código implementado para el modelo de rotura de Mohr-Coulomb es correcto. Hemos comprobado el correcto funcionamiento con la introducción de diferentes ángulos de rozamiento interno, con diferentes estados tensionales y en dos ejemplos distintos que pueden contrastarse con los resultados obtenidos para el modelo de Von Mises analizado en [4]. En todos estos casos el análisis realizado es favorable y satisfactorio.

4.2 Zapata superficial

En este apartado se va a estudiar y analizar un problema característico dentro del campo de la mecánica de suelos. Se trata de una zapata superficial en la que puede adoptarse simetría simple mediante un eje vertical. Este caso ha sido ampliamente estudiado y, por este motivo, disponemos de resultados analíticos para un ejemplo ideal con cohesión y ángulo de fricción interno constantes para todo el terreno. Serán de gran utilidad aquí los estudios de Prandtl, ya que este estableció una formulación analítica con la que obtener la carga de colapso exacto para el caso denominado aquí "zapata superficial", es decir, una carga uniformemente repartida en una porción de terreno, aplicada

verticalmente sobre este y en sentido descendente. Claramente, dicha carga pretende emular la fuerza del peso que ejerce la cimentación de una estructura determinada sobre el suelo.

La geometría en concreto que se tratará para ejecutar este problema será la siguiente:

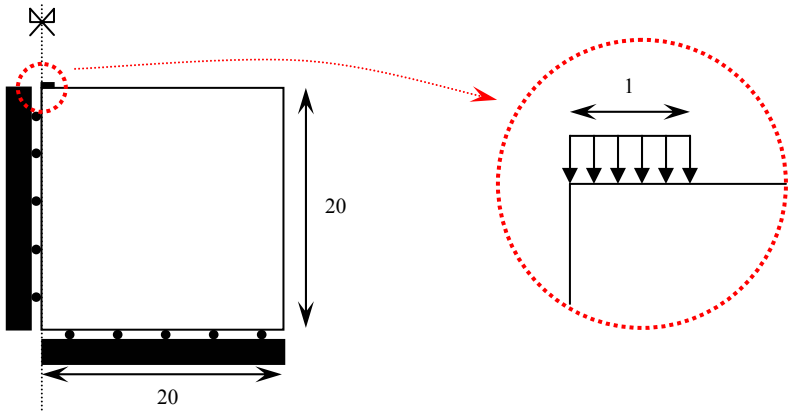


Figura 4-14. Geometría empleada para llevar a cabo el ejemplo de la zapata superficial.

Como puede observarse se aprovecha la simetría simple existente. También podemos ver como se utiliza una relación 1 a 20 para la zona de aplicación de carga con respecto a la longitud del estrato de terreno (idéntica que para el ejemplo de Prandtl y suficiente para mantener la influencia de la carga alejada del contorno exterior).

4.2.1 Formulación teórica y analítica

Según Prandtl, para una zapata rígida (como faja de carga) sobre un suelo cohesivo y friccional, despreciando el peso, la carga de colapso exacta viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{q}{c'} = (e^{\pi \tan \phi'} \cdot \tan^2(45 + \frac{\phi'}{2}) - 1) \cdot \cot \phi' \qquad (4.1)$$

donde la ϕ' y c' son el ángulo de fricción interno efectivo y la cohesión efectiva respectivamente. En nuestro caso consideramos ausencia de agua y, por tanto, las características efectivas se tornan totales. A partir de esta expresión podemos obtener fácilmente los valores teóricos de la carga de colapso q para unas ϕ' y c' determinadas. La única condición geométrica impuesta es la de establecer las condiciones de contorno suficientemente alejadas para no influir en el proceso deformacional del suelo.

A continuación se muestra una tabla de los resultados teóricos obtenidos a partir de la solución de Prandtl para una cohesión igual a la unidad y para distintos valores del ángulo de fricción interno. Se tomará concretamente cohesión igual a 1 para establecer una mayor facilidad en el momento de comparar resultados.

Cohesión (N/m^2)	Ángulo fricción interno	Carga colapso (N/m^2)
1	0,1	5,16
1	1	5,38
1	5	6,49

1	10	8,34
1	15	10,98
1	20	14,83
1	25	20,72
1	30	30,14
1	35	46,12
1	40	75,31
1	45	133,87
1	50	266,88
1	55	624,92
1	60	1855,10

Tabla 4-10. Valores exactos de carga de colapso para la zapata superficial según la solución de Prandtl.

Esta tabla nos servirá como referencia de contraste para los resultados obtenidos mediante la implementación para el modelo de Mohr-Coulomb. Vemos como para un estado tensional eminentemente de compresión, como es el caso de la zapata, tendremos mayores valores de carga de colapso para mayores ángulos de fricción internos.

4.2.2 Resultados obtenidos

En primer lugar analicemos el comportamiento para este problema del modelo de Von Mises según [4]. Evidentemente con esto no conseguiremos simular un ejemplo realista, ya que el modelo VM no es adecuado para problemas geotécnicos y no tiene en consideración las características propias de un suelo. Aún así será interesante ver que resultados obtenemos ya que más adelante nos servirán para compararlos y contrastarlos con los resultados obtenidos mediante el modelo de Mohr-Coulomb. Como ya se ha comentado anteriormente dentro de este capítulo, podríamos considerar que Von Mises emplea una cohesión de valor $\sqrt{3}/2$ y un ángulo de rozamiento interno nulo (valores para los que mediante el modelo de Drucker-Prager recuperamos exactamente el de VM).

Los resultados obtenidos para el modelo de VM son los siguientes:

MODELO VON MISES					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	101	3.7326	5.2566	1.524	16.954
2	240	3.7326	5.2006	1.468	16.433
3	809	3.7326	5.1747	1.4421	16.19
4	3015	3.7326	5.1603	1.4277	16.055

Tabla 4-11. Resultados obtenidos para el modelo Von Mises según [4] para el ejemplo de la zapata superficial.

Vemos aquí por primera vez que la cota inferior, al contrario que la superior, no evoluciona. Desafortunadamente no será la última vez que lo veamos. Como más adelante veremos, se ha detectado que el código implementado, tanto en lo llevado a

cabo en [4] como en lo ejecutado en el presente trabajo, es especialmente sensible a la evolución de la cota inferior. Los solvers que se han empleado como herramientas de cálculo para los conos de Lorentz, tanto el SeDuMi como el SDPT3, se encuentran con problemas en la resolución del problema de la cota inferior. Mientras SeDuMi es más eficaz en velocidad de procesamiento, el SDPT3 presenta una mayor robustez de cálculo. Es decir, SeDuMi para determinados problemas y mallas de cálculo ofrece resultados incoherentes e incorrectos para los valores de la cota inferior. Por otro lado, el SDPT3 para mallas de un número considerable de elementos se estanca. Aunque nos encontremos con este problema en el cálculo para la cota inferior vemos que lo que sucede con la cota superior es muy distinto. Esta última evoluciona correctamente y, además, lo hace hacia un valor totalmente razonable y lógico si lo comparamos con el resultado obtenido para la solución de Prandtl con un ángulo 0.1 y una cohesión igual a la unidad. La deformada para la cuarta iteración según el modelo de VM queda como en la siguiente figura:

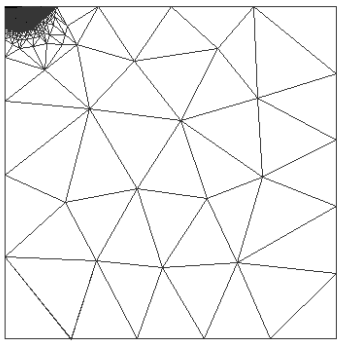


Figura 4-15. Deformada para la cuarta iteración de la zapata según el modelo de VM.

A continuación, ejecutaremos el mismo ejemplo de la zapata superficial para el modelo aquí implementado de Mohr-Coulomb. Tomaremos en un principio $\phi = 0º$ y $c = \sqrt{3}/2$, como se ha hecho en el anterior apartado.

MODELO MOHR-COULOMB					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	101	3.7326	5.2566	1.524	16.954
2	240	3.7326	5.2006	1.468	16.433
3	809	3.7326	5.1747	1.4421	16.19
4	3015	3.7326	5.1603	1.4277	16.055

Tabla 4-12. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi = 0$ y $c = \sqrt{3}/2$.

Podemos observar unos resultados muy parecidos a los anteriores pero con valores menores como era de esperar. También apreciamos como la cota inferior vuelve a estancarse desde la primera iteración. La deformada obtenida para este caso en la cuarta iteración es también muy similar a la vista para el modelo de Von Mises:

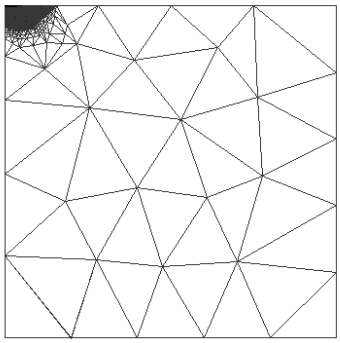


Figura 4-16. Deformada para la cuarta iteración de la zapata según el modelo de MC.

Veamos ahora como se comporta el modelo con la introducción de ángulo de fricción interno. Se irá incrementando el valor de éste de forma progresiva y podremos ver si su evolución sigue lo establecido por Prandtl.

4.2.2.1 Caso $\phi = 10^o$

Para el caso $\phi = 10^o$ y cohesión igual a la unidad tendremos los resultados que se muestran a continuación:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	101	5.1568	8.7994	3.6372	26.072
2	276	5.1568	8.5925	3.4357	24.988
3	959	5.1568	8.4868	3.33	24.407
4	3416	5.1568	8.4252	3.2685	24.065

Tabla 4-13. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi = 10^o$ y $c=1$.

Vemos como los valores de las cotas aumentan como era de esperar al proporcionar un mayor ángulo de fricción. También apreciamos como la cota inferior continúa estancándose desde la primera iteración. Más adelante se intentará mejorar este comportamiento mediante una implementación alternativa a la hora de conformar la malla de cálculo y el cálculo propiamente dicho. Se muestran a continuación unas gráficas de convergencia y evolución del error para el cálculo de cada una de las cotas en las 4 iteraciones en las que se aprecia la estanqueidad comentada:

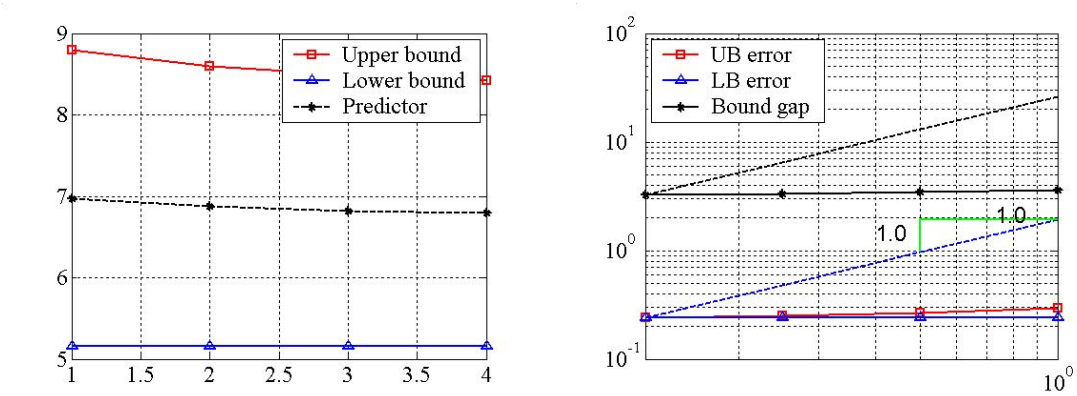
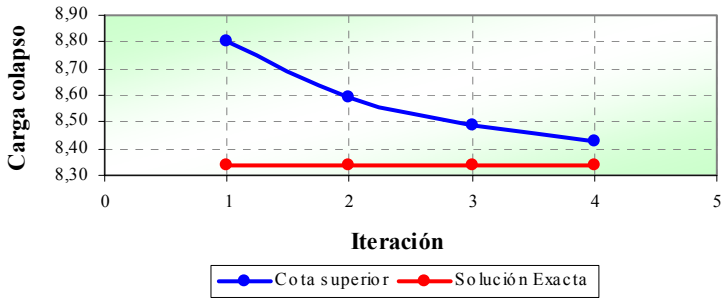
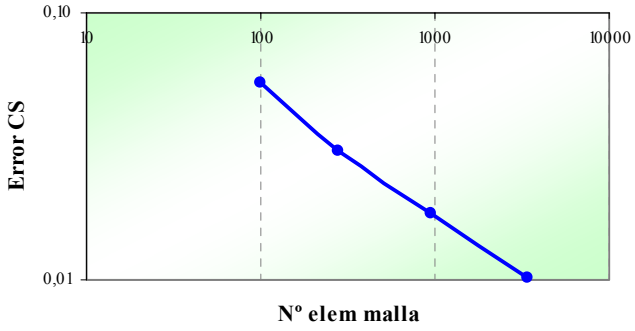


Figura 4-17. Convergencia en el proceso iterativo y evolución del error. Puede apreciarse el comportamiento inadecuado de la cota inferior.

Si al contrario que en estas gráficas nos paramos a analizar únicamente el comportamiento de la cota superior, observaremos unos resultados mucho mejores.



(a)



(b)

Figura 4-18. Convergencia en el proceso iterativo (a) y evolución del error (b) únicamente analizando el comportamiento de la cota superior.

Efectivamente comprobamos que la convergencia de la cota superior evoluciona correctamente y el error con respecto a la solución de Prandtl progresa linealmente. Por último vemos como evoluciona la deformada en las distintas iteraciones:

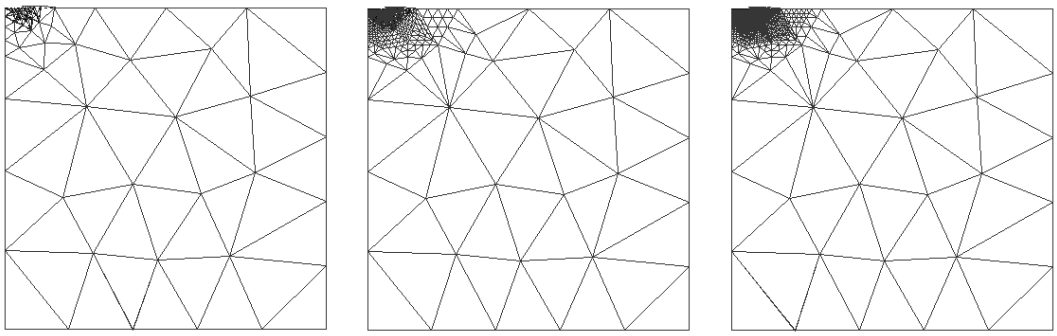


Figura 4-19. Deformadas para las iteraciones 1, 3 y 4.

Se aprecia claramente una zona de de deformación y colapso muy parecida a la típica espiral logarítmica de la mecánica de suelos. Puede observarse como con la introducción de ángulo de fricción interna aparece una zona de levantamiento del suelo junto a la faja de carga de la zapata. Veamos un detalle de la zona en concreto:

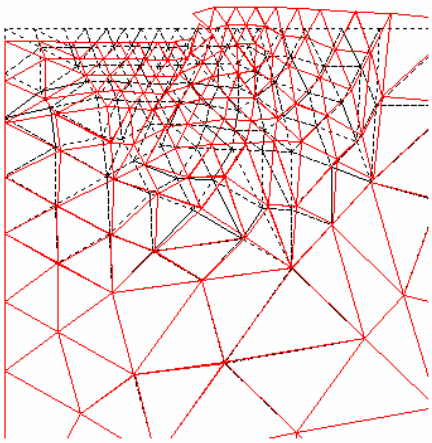


Figura 4-20. Detalle de la zona de faja de carga de la zapata superficial (en negro malla sin deformar, en rojo deformada para la 2ª iteración).

Podemos apreciar claramente como el flujo de deformación cae verticalmente en la zona de la faja de carga de la zapata y progresivamente va inclinándose hacia la derecha (conformando la comentada espiral logarítmica) hasta llegar a la superficie adjunta a la carga prácticamente vertical y hacia arriba. Observamos en la figura 4-21 la teórica espiral logarítmica.

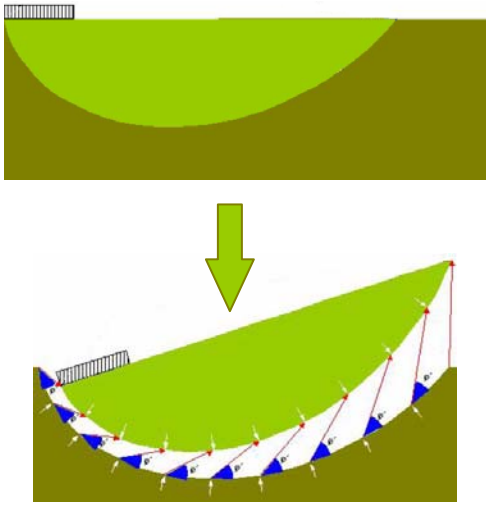


Figura 4-21. Deformación y sistema de rotura para una zapata teórica, conocida como espiral logarítmica.

4.2.2.2 Caso $\phi = 20^o$

Para el caso $\phi = 20^o$ y cohesión igual a la unidad tendremos los resultados que se muestran a continuación:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	101	8.3551	16.418	8.0628	32.547
2	298	8.3551	15.678	7.323	30.47
3	1038	8.3551	15.301	6.9461	29.362
4	3947	8.3551	15.078	6.7229	28.69

Tabla 4-14. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi = 20^o$ y $c=1$.

De nuevo, vemos como los valores de las cotas aumentan como era de esperar al proporcionar un mayor ángulo de fricción y como la cota inferior continúa estancándose desde la primera iteración. Si al analizamos únicamente el comportamiento de la cota superior tenemos las siguientes figuras de convergencia:

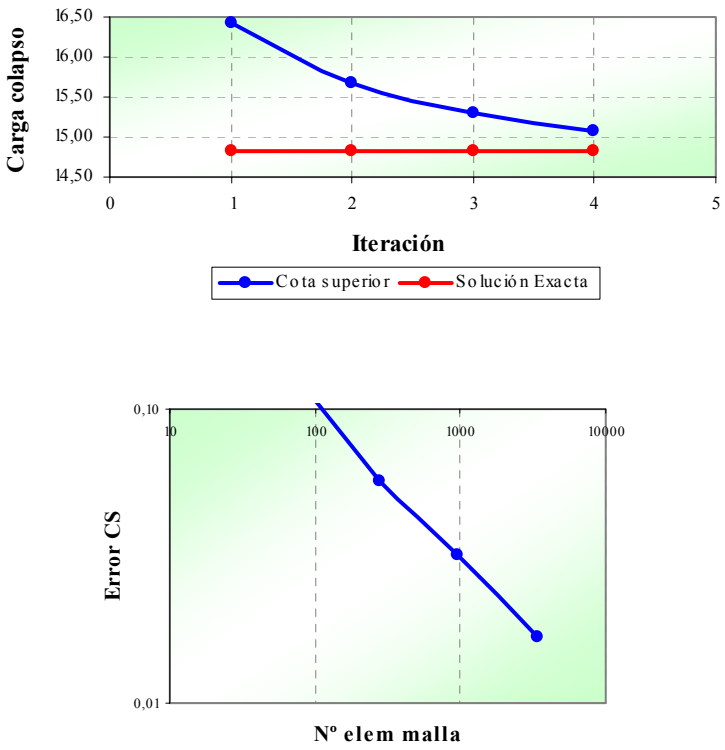


Figura 4-22. Convergencia en el proceso iterativo y evolución del error únicamente analizando el comportamiento de la cota superior.

Estas figuras son muy similares a las del caso anterior.

4.2.2.3 Caso $\phi = 30º$

Para el caso $\phi = 30º$ y cohesión igual a la unidad tendremos los resultados que se muestran a continuación:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	101	14.401	36.053	21.652	42.915
2	324	14.401	33.118	18.717	39.388
3	1204	14.401	31.595	17.194	37.381
4	4356	14.401	30.873	16.472	36.383

Tabla 4-15. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi = 30º$ y $c = 1$.

Nuevamente apreciamos como la cota superior progresa hacia la solución de Prandtl (para este caso igual a 30.14) y como la cota inferior se estanca de nuevo. El valor que se obtiene en la primera iteración para la cota inferior se incrementa a medida que incrementamos el ángulo de la misma forma que la carga de colapso teórica, aún así nunca evoluciona en las sucesivas iteraciones. Se muestran a continuación otra vez las gráficas de convergencia y evolución del error para el cálculo de la cota superior en las 4 iteraciones:

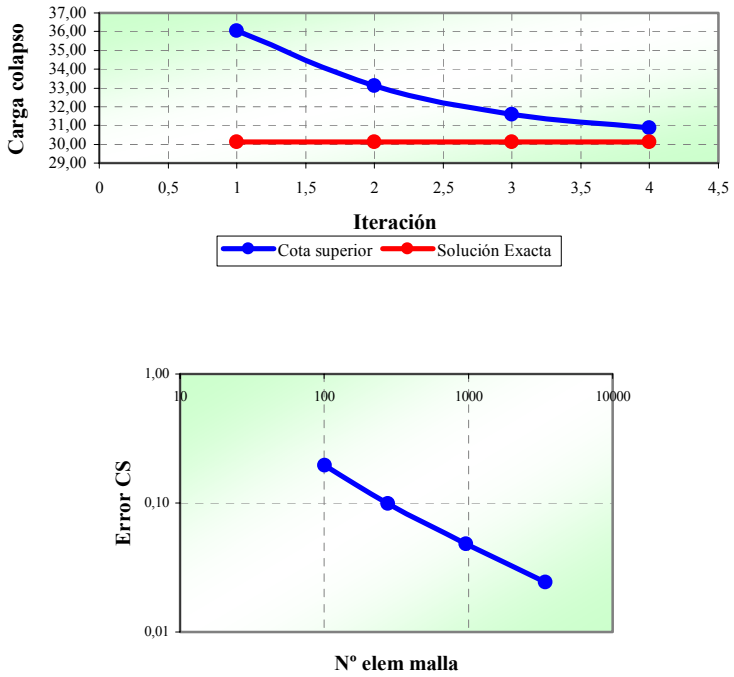


Figura 4-23. Convergencia en el proceso iterativo y evolución del error únicamente analizando el comportamiento de la cota superior.

Volvemos a tener resultados muy parecidos a los dos casos anteriores. Veamos ahora como evoluciona la deformada dentro del proceso iterativo:

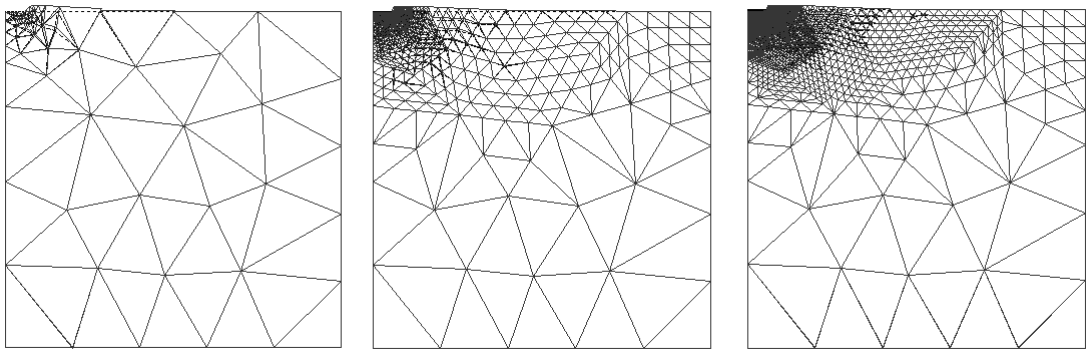


Figura 4-24. Deformadas para las iteraciones 1, 3 y 4.

Aunque sigamos apreciando una zona de rotura en espiral logarítmica para este caso vemos como la deformación se extiende mucho más que en los casos anteriores. Esto parece razonable al tener mayor ángulo de rozamiento y distanciarse más el valor de la cota superior con el estancamiento de la inferior. Como se ha explicado con anterioridad el proceso de adaptatividad de malla considera las variaciones de cálculo en el proceso de resolución de ambas cotas. Para la cota inferior se toma como principal variable las tensiones y para la cota inferior las velocidades o flujos de deformación. Con el funcionamiento inadecuado de la cota inferior y un ángulo de rozamiento interno elevado la diferencia entre cotas es mayor, esto hace que el refinamiento de malla sea mucho más sensible y abarque más zona de la que debería en cada una de las iteraciones. A pesar de todo esto, el proceso de deformación y la forma de colapso se sigue asemejando notablemente a la solución teórica de Prandtl.

Se puede seguir observando como con la introducción de ángulo de fricción interna aparece una zona de levantamiento del suelo junto a la faja de carga de la zapata, en este caso más pronunciada que líneas atrás. Veamos un detalle de la zona en concreto:

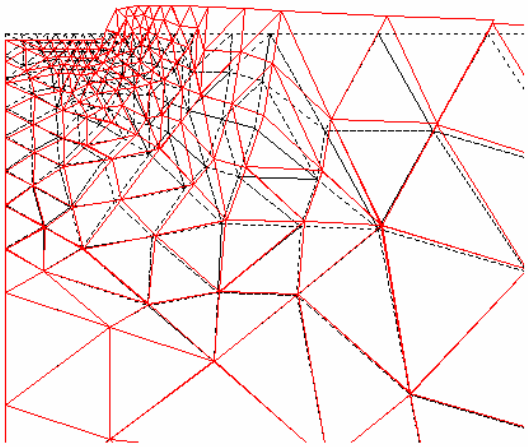


Figura 4-25. Detalle de la zona de faja de carga de la zapata superficial (en negro malla sin deformar, en rojo deformada para la 2ª iteración).

De nuevo apreciamos un sistema de deformación muy similar al anterior, lo que nos indica un correcto funcionamiento del proceso iterativo a pesar de la cota inferior.

4.2.3 Alternativas de cálculo

Con el fin de intentar solucionar el problema existente en el proceso de cálculo de la cota inferior dentro de las sucesivas iteraciones se han planteado principalmente dos alternativas. A partir de las dos alternativas se consiguen mejorar los resultados obtenidos anteriormente. Para llevar a cabo su presentación en este trabajo se han considerado unos parámetros $\phi = 30º$ y cohesión igual a la unidad. El empleo de un ángulo elevado nos permite visualizar de una forma más clara la mejora o evolución obtenidas, ya que como se ha mostrado anteriormente cuánto mayor es el ángulo empleado mayor es la diferencia entre la evolución favorable de la cota superior y el estancamiento de la inferior. Por otro lado, el empleo de $c=1$ nos permite seguir contrastando y comparando fácilmente nuestros resultados con los de Prandtl. A continuación se presentarán ambas alternativas.

En primer lugar cabe plantearse si el problema de la cota inferior puede derivarse de un problema en la adaptatividad de malla empleada en el cálculo. Para verificar si realmente es así se ha llevado a cabo una resolución mediante refinamiento de malla uniforme. Evidentemente el coste computacional de esta resolución es más elevado que con el empleo de un refinamiento de malla uniforme. Con únicamente tres iteraciones se aprecia como el estancamiento de la cota inferior continúa estando presente:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	101	14.401	36.053	21.652	42.915
2	404	14.401	33.117	18.716	39.388

3	1616	14.401	31.595	17.194	37.381

Tabla 4-16. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi=30^{o}$ y $c=1$ empleando un refinamiento de malla uniforme.

Se aprecian unos resultados exactamente iguales a los mostrados anteriormente empleando adaptatividad, pero lógicamente en este caso utilizando un mayor número de elementos en cada paso iterativo. Vemos como la cota inferior sigue sin evolucionar. Con esto podemos podemos descartar que el problema se deba simplemente al proceso de adaptatividad. La forma de solucionar el estancamiento de la cota inferior se enfoncará, por tanto, por otro camino: dar un mayor número de grados de libertad al cálculo de los elementos. Para ello se propone la introducción de un cuarto nodo por elemento situado en el baricentro del mismo. Este nodo baricéntrico se plantea según dos alternativas que se presentan a continuación:

4.2.3.1 Nodo barcéntrico en el proceso iterativo

En primer lugar la solución que se plantea es la siguiente: seguir el mismo proceso iterativo y el mismo criterio de refinamiento uniforme de malla anteriormente comentado, pero, antes de llevar a cabo el proceso de cálculo en cada una de las iteraciones, introducir un nuevo nodo en cada uno de los elementos en el baricentro de estos. De esta forma el cálculo de cotas se realiza empleando 3 nodos por elemento igual que antes, pero para cada elemento original se emplean 3 elementos en el cálculo.

La implementación realizada tiene el siguiente funcionamiento: para el primer cálculo se empleará la misma malla inicial M_0 que para el resto de ejemplos, pero en la segunda iteración, después de obtener la nueva malla M_1 (mediante la criterio uniforme de refinamiento establecido) se introduce el comentado nodo baricéntrico en cada uno de los elementos obteniendo la malla $M_{1,Nodo}$. Una vez realizado el cálculo de cotas se recupera la malla M_1 y se le aplica nuevamente el criterio de refinamiento de malla obteniendo una nueva malla M_2. Sobre esta malla volvemos a introducir un nodo baricéntrico en cada elemento y obtenemos la malla $M_{2,Nodo}$. Ahora recuperamos de nuevo la malla M_2 y continuamos el mismo proceso. Mientras las mallas iniciales serán idénticas, comparemos aquí las mallas de cálculo para la segunda iteración para refinamiento uniforme con nodo baricéntrico o sin:

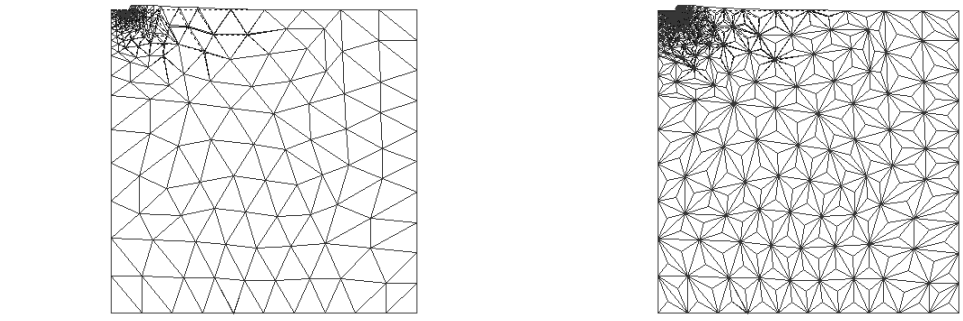


Figura 4-26. Mallas de cálculo para la 2ª iteración sin nodo baricéntrico (izquierda) y con nodo baricéntrico (derecha).

Tomando como referencia el último ejemplo expuesto ($\phi=$ 30º, $c=1$ y refinamiento uniforme) tendremos que para la primera iteración se emplea el mismo número de elementos, mientras que para el resto el triple. Los resultados que se obtienen aplicando

esta alternativa mejoran en la primera iteración en la que se introducen los nodos baricéntricos, pero a partir de ese momento la cota inferior vuelve a estancarse:

	Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)	
M_0 →	1	101	14.401	36.053	21.652	42.915	→ M_1 →
→ $M_{1,nodo}$ →	2	1212	20.204	32.8	12.596	23.765	→ M_2 →
→ $M_{2,nodo}$ →	3	4848	20.204	31.435	11.231	21.748	

Tabla 4-17. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi=30^o$ y $c=1$ empleando un refinamiento de malla uniforme y un nodo en el baricentro de cada elemento a partir de la 2ª iteración. Se aprecian también las mallas empleadas y las mallas de salida tras cada iteración.

La mejora lograda en la segunda iteración es notable pero no suficiente, ya que no desbloquea la situación de la cota inferior por completo. Veamos como quedarían los gráficos de convergencia para estos resultados:

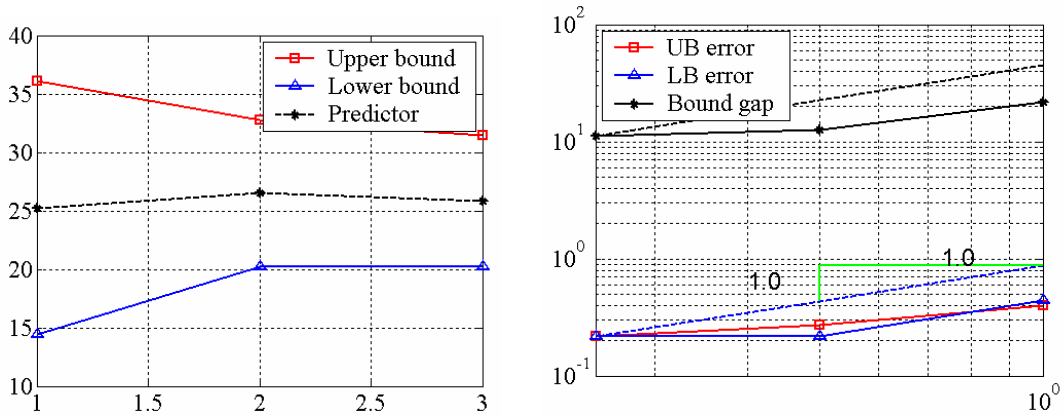


Figura 4-27. Convergencia de las cotas superior e inferior (izquierda) y evolución de errores (derecha).

Podemos ver como la cota superior mantiene una evolución aún más positiva de lo que se había apreciado hasta el momento cuando la cota inferior progresa. Si ahora pasamos a ejecutar la misma alternativa aquí planteada pero haciendo uso del refinamiento de malla adaptativo obtendremos los siguientes resultados:

Iter	Número elementos malla	Cota inferior	Cota superior	Diferencia cotas	Máx. Error relativo (%)
1	101	14.401	36.053	21.652	42.915
2	972	20.204	32.8	12.596	23.765
3	3372	20.204	31.785	11.58	22.275

Tabla 4-18. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi=30^o$ y $c=1$ empleando un refinamiento de malla adaptativo y un nodo en el baricentro de cada elemento a partir de la 2ª iteración.

Vemos como la diferencia más notable con respecto al refinamiento uniforme es el número de elementos de malla. Con el proceso adaptativo se logra un ahorro computacional importante, aunque en la 3ª iteración se logren unos resultados algo más mediocres. Esto no parece significativo y puede deberse simplemente al mal funcionamiento de la cota inferior.

4.2.3.2 Nodo baricéntrico en la malla inicial

Como segunda alternativa lo que se plantea es lo siguiente: introducir un nodo en el baricentro de cada uno de los elementos únicamente en la malla inicial de cálculo. Es decir, no alterar en nada el proceso iterativo de cálculo establecido desde un principio e introducir una malla inicial para el proceso en la que cada uno de los elementos originales quede como tres nuevos individuales. En este caso, al contrario que en el anterior, el proceso adaptativo de malla progresará respecto a una malla con nodos introducidos en los baricentros de cada uno de los elementos.

Con esta alternativa conseguimos una mejora notable de los resultados obtenidos aunque a partir de la cuarta iteración la cota inferior vuelve a estancarse. Veamos la tabla de resultados:

MODELO MOHR-COULOMB					
Iter	**Número elementos malla**	**Cota inferior**	**Cota superior**	**Diferencia cotas**	**Máx. Error relativo (%)**
1	303	20.394	35.831	15.437	27.456
2	972	23.427	34.056	10.629	18.49
3	3510	25.184	32.24	7.0566	12.289
4	12367	25.184	31.27	6.086	10.781

Tabla 4-19. Resultados obtenidos para el modelo Mohr-Coulomb para el ejemplo de la zapata superficial con $\phi=30^o$ y $c=1$ empleando un refinamiento de malla adaptativo y un nodo en el baricentro de cada elemento desde la malla inicial.

Vemos que las mejoras logradas en la evolución de la cota inferior son muy positivas, aún así para la cuarta iteración nos volvemos a encontrar con el mismo problema que con anterioridad. Por otro lado si nos paramos a analizar las gráficas de convergencia, volvemos a encontrarnos con problemas ya que considerando ambas cotas nos dirigimos hacia una solución algo menos que la de Prandtl. Estos dos hechos nos llevan a la conclusión de que a pesar de la favorable evolución del problema de la cota inferior, este persiste, aunque en menor medida. Veamos las gráficas de convergencia para 3 iteraciones:

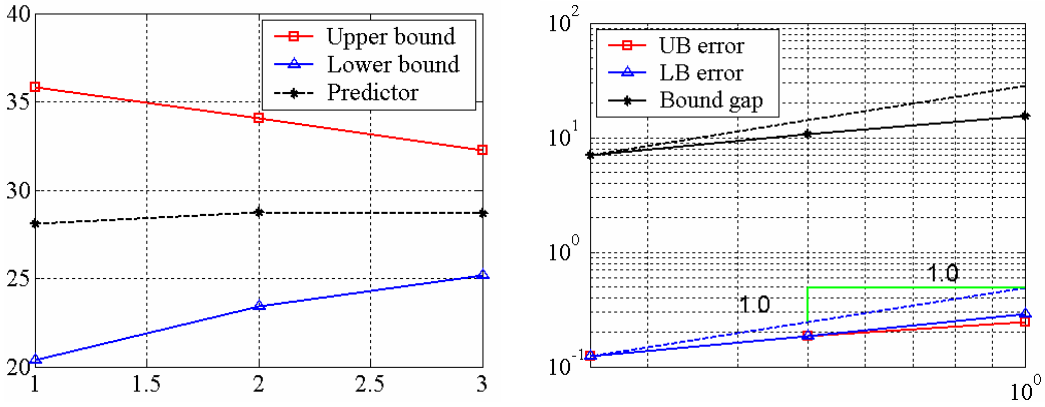


Figura 4-28. Convergencia de las cotas superior e inferior (izquierda) y evolución de errores (derecha).

La evolución de la deformada se muestra en la siguiente figura:

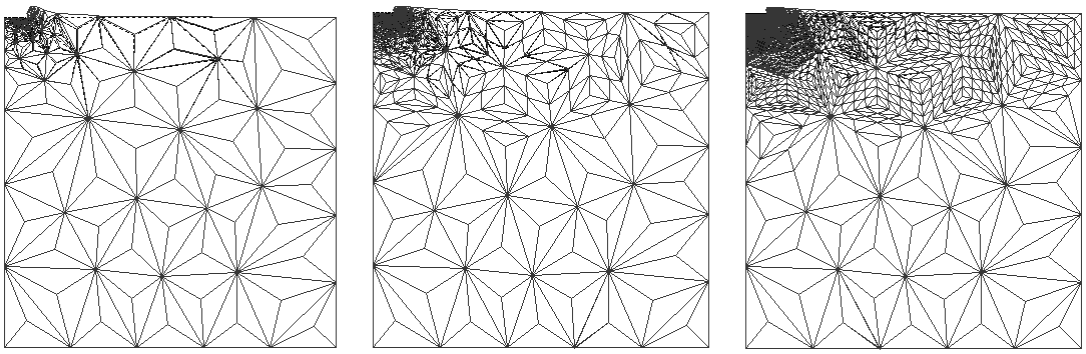


Figura 4-29. Convergencia de las cotas superior e inferior (izquierda) y gráfico de los errores (derecha).

4.2.4 Conclusiones sobre la zapata superficial

Después de este seguido de ejemplos mostrados y de muchos otros implementados pero no presentados en este trabajo podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- Para todos los ejemplos realizados la cota superior funciona correctamente. Ésta progresa favorablemente en todos los casos hacia la solución establecida por Prandtl y el error cometido en cada una de las iteraciones evoluciona linealmente. También se puede concluir que el hecho de que la cota inferior se estanque no influye en exceso sobre el comportamiento de la cota superior, aunque sí en el proceso de refinamiento, lo que hace empeorar la convergencia. Con todo esto podemos establecer que los resultados que se obtienen para la cota superior de la carga de colapso son totalmente válidos.

- Con respecto al funcionamiento de la cota inferior se ha comprobado su alta sensibilidad dentro del conjunto del problema planteado. Para problemas de una cierta complejidad en su geometría o en sus condiciones de contorno, el cálculo de la cota inferior se muestra altamente sensible. Se han conseguido mejorar los resultados obtenidos inicialmente en los que a partir de la primera iteración la evolución era nula. Mediante la colocación de un nodo baricéntrico en el proceso iterativo (apartado *4.2.3.1*) se consigue evolucionar en la cota inferior hasta la segunda iteración. Por otro lado, mediante la colocación de un nodo

baricéntrico en malla inicial (apartado *4.2.3.2*) se consigue evolucionar en la cota inferior hasta la tercera iteración. También se ha logrado dar resultados para la cota inferior más cercanos a la solución de Prandtl, especialmente con la introducción de un nodo en el baricentro de cada uno de los elementos de la malla inicial.

- Por último, cabe destacar que se ha comprobado como el criterio de refinamiento de malla no es determinante dentro del problema existente con la cota inferior. Es evidente y lógico, que con el empleo de un criterio adaptativo el coste computacional en el proceso iterativo es menor y, aunque en el algunos resultados concretos se obtengan valores peores, estos responden a casos puntuales y no significativos.