TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Grado en Matemáticas

**Título: Formulación Geométrica de las Teorías Gauge y de Yang-Mills**

**Autor: Xavier Rivas Guijarro**

**Director: Narciso Román-Roy**

**Departamento: Matemática Aplicada IV**

**Convocatoria: Junio 2014**



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Trabajo de Fin de Grado

# Formulación Geométrica de las Teorías Gauge y de Yang-Mills

Xavier Rivas Guijarro

Director: Narciso Román-Roy

Departament de Matemàtica Aplicada IV

*The essence of mathematics lies in its freedom.*
Georg Cantor

# Prefacio

Este trabajo pretende desarrollar toda la geometría necesaria para poder entender las teorías gauge y poder escribir las ecuaciones de Yang-Mills usando el lenguaje de los fibrados principales. Pese a esto, escapa al alcance de este texto desarrollar la geometría diferencial desde el principio de modo que se supone que el lector posee una sólida base de topología, álgebra exterior y variedades diferenciables. No es estrictamente necesario pero sí recomendable un cierto conocimiento de geometría riemanniana. En caso que o bien el lector carezca de estos conocimientos o desee repasarlos puede usar los primeros capítulos de [**13**] para la parte topològica mientras que [**9**] es un buen texto para la base de geometría diferencial y álgebra exterior que necesita este trabajo.

Me gustaría agradecer especialmente a mi tutor Narciso Román-Roy toda su ayuda y apoyo en el desarrollo de esta memoria. También quiero agradecer el entusiasmo que he recibido por parte de los profesores Xavier Gràcia y Miguel C. Muñoz durante el desarrollo del trabajo. Por último quiero dar las gracias al futuro doctor Pere D. Prieto por la ayuda que he recibido desde el primer día que pisé la facultad.

# Resumen

**Palabras clave:** geometría riemanniana, grupo de Lie, álgebra de Lie, ecuaciones de Maxwell, fibrado principal, conexiones, gauge, ecuaciones de Yang-Mills

**MSC2000:** 22E50, 53C05, 55R10, 58E40, 70S15

Este trabajo presenta todas las herramientas propias de la geometría diferencial necesarias para poder describir adecuadamente las teorías gauge y en particular las ecuaciones de Yang-Mills. Concretamente, el trabajo empieza presentando las pseudométricas en espacios vectoriales y generalizándolas a las variedades pseudoriemannianas, incluyendo una descripción del operador estrella de Hodge y la coderivada. Como ejemplo canónico de teoría de Yang-Mills tomamos el caso del electromagnetismo, estudiándolo en detalle. También se incluye una introducción a los grupos y las álgebras de Lie.

En los capítulos centrales del trabajo se introducen los dos conceptos clave para poder escribir las ecuaciones de Yang-Mills: los fibrados y las conexiones principales. En estos capítulos se estudian en detalle estos conceptos ya que son la piedra angular de la teoría de Yang-Mills. Terminamos el trabajo escribiendo las ecuaciones de Yang-Mills en lenguaje geométrico.

# Abstract

**Keywords:** riemannian geometry, Lie group, Lie algebra, Maxwell equations, principal bundle, connections, gauge, Yang-Mills equations

**MSC2000:** 22E50, 53C05, 55R10, 58E40, 70S15

This bachelor's degree thesis presents all the geometric tools needed to properly describe gauge theories and in particular, Yang-Mills equations. First, we introduce pseudometrics in vector spaces and generalize this idea to define pseudorimannian manifolds, including a description of the Hodge star and the coderivative. Next, Maxwell equations are introduced and studied in detail as they are the canonical example when studying Yang-Mills theories. We also provide a brief introduction to Lie groups and Lie algebras since they are going to be used all over this thesis.

The central part of this thesis is the study of principal bundles and connections in principal bundles. These two elements are the cornerstone of the Yang-Mills equations. This thesis concludes writing the Yang-Mills equations in its geometric form.

# Índice general

Introducción 1

Capítulo 1. Preliminares geométricos 3
1. Pseudométricas en espacios vectoriales 3
2. Variedades pseudoriemannianas 5
3. Estrella de Hodge y coderivada 5

Capítulo 2. Ecuaciones de Maxwell 7

Capítulo 3. Grupos y álgebras de Lie 13
1. Grupos de Lie 13
2. Álgebras de Lie 15
3. Forma de Maurer-Cartan 18
4. Acción de un grupo de Lie sobre una variedad 20

Capítulo 4. Fibrados 23
1. Fibrados principales 23
2. El fibrado de referencias 26
3. Fibrados asociados 27

Capítulo 5. Conexiones principales y transformaciones gauge 31
1. Conexiones en fibrados principales 31
2. Curvatura 35
3. Transformaciones gauge de un fibrado principal 37

Capítulo 6. Teorías gauge y de Yang-Mills 39

Conclusiones 41

Bibliografía 43

# Introducción

Este es un trabajo de fin de grado que desarrolla toda la geometría diferencial necesaria para poder comprender las teorías gauge y en particular las ecuaciones de Yang-Mills. En el lenguaje de la física, una teoría gauge es una teoría de campos en la que el lagrangiano es invariante bajo la acción de un grupo de transformaciones: el grupo de gauge. La primera teoría de campos descubierta con simetría gauge fue la descripción de Maxwell en 1864 del campo electromagnético. Aun así, esta simetría gauge permaneció oculta en las primeras formulaciones del electromagnetismo. De forma similar, la simetría gauge de la teoría de la relatividad de Einstein también permaneció oculta durante un tiempo.

No fue hasta bien entrado el siglo XX que se empezó a ver la importancia de las simetrías gauge en el electromagnetismo, la relatividad e incluso en mecánica cuántica, por Weyl y Fock entre otros. Aun así, hubo que esperar hasta 1954 para obtener una primera formalización matemática por parte de Chen Ning Yang y Robert Mills, que intentaban describir la interacción nuclear fuerte.

Para esta formalización matemática, el grupo de gauge $G$ deberá ser un grupo de Lie para poder considerar variedades fibradas con base la variedad $M$ y fibra $G$. Existen multitud de teorías físicas en las que el lagrangiano es invariante bajo la acción de cierto de grupo de Lie. El ejemplo canónico de este hecho es el caso del campo electromagnético que ya hemos mencionado. En este caso el lagrangiano es invariante bajo la acción del grupo $U(1)$ que es isomorfo a la circunferencia unidad.

Este trabajo tiene como objetivo desarrollar todas las herramientas geométricas necesarias para poder escribir las ecuaciones de Yang-Mills. De este modo empezamos el capítulo 1 introduciendo el concepto de pseudométrica en un espacio vectorial. Esto es necesario ya que la definición de variedad pseudoriemanniana requiere esencialmente introducir una pseudométrica en cada espacio tangente de modo adecuado para que el cambio de un espacio tangente a otro sea lo suficientemente suave. A su vez se introduce el operador estrella de Hodge que nos será de gran utilidad ya que aparece en las ecuaciones de Yang-Mills explícitamente y también para poder definir la coderivada de $p$-formas diferenciales. De este modo el primer capítulo nos ofrece los preliminares geométricos necesarios antes de entrar en el formalismo matemático propiamente. El capítulo 2 empieza presentándonos las conocidas ecuaciones de Maxwell. Se prueba la formulación covariante equivalente y se presenta el lagrangiano del campo electromagnético. Así, este capítulo 2 nos da un

ejemplo para tener en la cabeza a lo largo de todo el trabajo para no perdernos en el formalismo.

A lo largo del capítulo 3 se desarrolla la teoría de grupos y álgebra de Lie. Los grupos de Lie son una parte esencial de las teorías gauge ya que el grupo de gauge es, de hecho, un grupo de Lie. Las álgebras de Lie aparecen de forma natural en cualquier estudio sobre grupos de Lie ya que en cierto modo son una versión infinitesimal de los grupos de Lie. A lo largo del capítulo debemos tener presente que los grupos de Lie serán las fibras de un fibrado principal (y también su grupo estructural) en los capítulos siguientes, especialmente en la sección dedicada a las acciones de grupos de Lie sobre variedades. El capítulo 4 desarrolla la teoría de fibrados principales introduciendo las trivializaciones y las secciones, así como las funciones de transición. En el capítulo 5 se introducen las conexiones principales dando tres definiciones alternativas de ellas y las propiedades más destacadas. Son cruciales en el desarrollo de la teoría ya que veremos que la elección de un gauge podrá verse como la elección de una conexión en el fibrado principal correspondiente. También hablaremos en este capítulo de las transformaciones gauge, es decir los automorfismos de un fibrado principal que dejan fija la variedad base.

El capítulo 6 concluye el trabajo usando todo el lenguaje geométrico introducido para finalmente escribir las ecuaciones de Yang-Mills de forma análoga a como se han escrito las ecuaciones de Maxwell en el segundo capítulo.

Consideraremos que todas las variedades diferenciables que aparezcan son reales, $\mathcal{C}^\infty$, hausdorff y satisfacen el segundo axioma de numerabilidad. Las aplicaciones y las estructuras se asumirán también de clase $\mathcal{C}^\infty$. A lo largo del trabajo se usará el convenio de suma de Einstein de índices repetidos cruzados.

# Capítulo 1
# Preliminares geométricos

En este primer capítulo vamos a introducir algunas herramientas geométricas que más tarde usaremos para escribir las ecuaciones de Yang-Mills. Empezaremos introduciendo la noción de métrica en un espacio vectorial y los conceptos de operador estrella de Hodge y coderivada, junto con las relaciones entre estos operadores con la ya conocida diferencial exterior. Haremos todo esto en el contexto de un espacio vectorial $V$ para luego generalizarlo fácilmente a variedades pseudoriemannianas usando los espacios tangentes en cada punto.

## 1. Pseudométricas en espacios vectoriales

DEFINICIÓN 1.1. *Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $n$. Una* ***pseudométrica en*** *$V$ es una forma bilineal*

$$\begin{array}{rccc} g\colon & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v,w) & \longmapsto & g(v,w) \end{array}$$

*simétrica y no degenerada.*

Como la métrica es bilineal, nos basta conocer sus valores en una base $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ de $V$. Definimos la matriz de la métrica $g$ respecto de la base $b_i$ como

$$g_{ij} = g(b_i, b_j)$$

Esta es una matriz simétrica $n\times n$ con determinante distinto de cero. Si cambiamos de base mediante la matriz $\gamma \in GL(n,\mathbb{R})$,

$$b'_i = (\gamma^{-1})_i^j b_j,$$

la matriz de la métrica se transforma como

$$g'_{ij} = g(b'_i, b'_j) = (\gamma^{-1T} g \gamma^{-1})_{ij}$$

TEOREMA 1.2. (de Gram-Schmidt) *Toda métrica admite una base ortonormal, es decir, una base $e_1,\dots e_n$ tal que*

$$g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$$

*donde $\eta$ es una matriz diagonal con $r$ 1's y $s$ $(-1)$'s, $r+s=n$:*

$$\eta = \operatorname{diag}\big(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1,\dots,-1}_{s}\big)$$

En otras palabras, para cada matriz $n\times n$ simétrica $g$ con determinante no nulo, existe una matriz invertible $\gamma$ tal que

$$\gamma^{-1T} g \gamma^{-1} = \eta$$

Notamos que la base ortonormal no tiene por que ser única. Definimos el **grupo pseudoortogonal** $O(r,s)$ como el subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ consistente en las matrices $A$ que dejan $\eta$ invariante:

$$A^{-1T}\eta A^{-1} = \eta$$

DEFINICIÓN 1.3. *Llamaremos **signatura de la métrica** al entero $r-s$.*

Notamos que la signatura está bien definida.

Vamos a ver ahora cómo una métrica en $V$ puede inducir una métrica en el dual de $V$, $V^*$. Sean $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ una base ortonormal de $V$ y $(e^i)_{i=1,\dots,n}$ su correspondiente base dual en $V^*$. Definimos una métrica $g^*$ en $V^*$ de tal forma que la base $e^i$ sea ortonormal:

$$g^*(e^i,e^j) = \eta^{ij} := \eta_{ij}$$

Notamos que esta métrica no depende de la elección de la base ortonormal $e_i$ de $V$. Si $V$ está orientado y $e_i$ es una base orientada, la $n$-forma $e^1\wedge\cdots\wedge e^n$ es la forma de volumen: evaluando esta forma en $n$ vectores nos da el volumen orientado del paralelepípedo formado por estos $n$ vectores. Para una base $b_i$ arbitraria de $V$ y su correspondiente base dual $\beta^i$ de $V^*$, definimos la matriz de la métrica $g^*$ como

$$g^{ij} = g^*(\beta^i,\beta^j)$$

OBSERVACIÓN 1.4. *Notamos que esta nueva matriz se distingue de su análoga en $V$ solo por la posición de los índices. De hecho un sencillo cálculo nos muestra que son inversas la una de la otra:*

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j.$$

*En particular, $\eta$ es igual a su inversa.*

Como $V$ y $V^*$ son espacios vectoriales $n$-dimensionales, son isomorfos:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & V^* \\ b_i & \longmapsto & \beta^i \end{array}$$

pero este isomorfismo no es canónico, es decir, depende de la base $b_i$ de $V$ escogida. El hecho de que la métrica sea no degenerada nos permite introducir un isomorfismo canónico $J$ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} J\colon & V & \xrightarrow{\cong} & V^* \\ & v & \longmapsto & g(v,\cdot) \end{array}$$

que en coordenadas se escribe como

$$J(b_i) = g_{ij}\beta^j.$$

## 2. Variedades pseudoriemannianas

DEFINICIÓN 2.1. *Una **variedad pseudoriemanniana (o semiriemanniana)** es una variedad diferenciable dotada de un tensor 2-covariante $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simétrico y no degenerado. En caso de que además el tensor sea definido positivo, diremos que se trata de una **variedad de Riemann**. El tensor $g$ es la **métrica** de la variedad.*

Observamos que una variedad pseudoriemanniana no es más que una variedad diferenciable dotada de una métrica pseudoriemanniana en cada espacio tangente $T_xM$. Cada espacio tangente es un espacio vectorial y por lo tanto todo lo dicho en la sección anterior es aplicable al caso $V = T_xM$. Estas métricas en cada espacio tangente deben variar de forma diferenciable respecto del punto $x \in M$ en el que estemos. De este modo, todas las construcciones hechas en la sección anterior son generalizables a un abierto $\mathcal{U} \subset M$.

## 3. Estrella de Hodge y coderivada

El punto clave para definir el operador estrella de Hodge es observar que

$$\dim \Lambda^p V = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \Lambda^{n-p} V$$

Dada una orientación $\omega$ y una métrica $g$ podemos definir el isomorfismo $*$.

DEFINICIÓN 3.1. *El **operador estrella de Hodge** es el isomorfismo*

$$*\colon \Lambda^p V \to \Lambda^{n-p} V$$

*definido como*

$$*(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}) = \varepsilon_{i_1,\ldots,i_n} \eta^{i_1 i_1} \cdots \eta^{i_p i_p} e^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}$$

*y extendido por linealidad a todo $\Lambda^p V$.*

Puede probarse que este isomorfismo no depende de la elección de la base ortonormal escogida. La aplicación lineal $*$ es biyectiva: efectivamente ya que su cuadrado es igual a $\pm id$:

$$** \varphi = (-1)^{p(n-1)+s} \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Lambda^p V$$

Recordamos que la diferencial exterior es una aplicación que nos convierte $p$-formas en $(p+1)$-formas:

$$\mathrm{d}\colon \Lambda^p \mathcal{U} \longrightarrow \Lambda^{p+1} \mathcal{U}$$

Usando la estrella de Hodge podemos construir la **coderivada**:

$$\delta\colon \Lambda^p \mathcal{U} \longrightarrow \Lambda^{p-1} \mathcal{U}$$

definida como

$$\delta = (-1)^{np+n+1+s} * \mathrm{d} *$$

PROPOSICIÓN 3.2. *La coderivada satisface las tres propiedades siguientes*

*(1)* $\delta^2 = 0$

*(2) Sean $\varphi \in \Lambda^{p-1}\mathcal{U}$ y $\psi \in \Lambda^p\mathcal{U}$, entonces se tiene que*

$$\int_{\mathcal{U}} \mathrm{d}\varphi \wedge *\psi = \int_{\mathcal{U}} \varphi \wedge *\delta\psi \tag{1}$$

*(3)*

$$\int \varphi \wedge *\psi = \int \psi \wedge *\varphi \tag{2}$$

Combinando la diferencial exterior y la coderivada podemos definir el operador diferencial

$$\Delta\colon \Lambda^p\mathcal{U} \longrightarrow \Lambda^p\mathcal{U}$$

como $\Delta = -(\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})$. Si la métrica es definida positiva ($s = 0$), este operador recibe el nombre de **laplaciano**, mientras que si $r = 1$, se llama **operador de d'Alembert** y se denota mediante $\Box$.

# Capítulo 2
# Ecuaciones de Maxwell

Antes de entrar de pleno en el formalismo necesario para poder formular las Ecuaciones de Yang-Mills, vamos a dedicar una sección a comentar el caso particular de las Ecuaciones de Maxwell, ya que es el ejemplo canónico de teoría gauge. A lo largo del trabajo es importante tener en mente este ejemplo de motivación. En este caso nos situaremos en el espacio de Minkowski $\mathbb{M}^4$. Este espacio no es más que $\mathbb{R}^4$ con coordenadas cartesianas $(x^\mu)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, y dotado de una métrica pseudoriemanniana definida por

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{donde} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De este modo las ecuaciones de Maxwell se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}E + \frac{\partial}{\partial t}B = 0 \qquad & \mathrm{div}B = 0 \\ \mathrm{curl}B - \frac{\partial}{\partial t}E = j \qquad & \mathrm{div}E = \rho \end{aligned}$$

donde $E$ es el campo eléctrico, $B$ es el campo magnético, $\rho$ es la densidad de carga y $j$ es la densidad de corriente eléctrica. Consideramos las dos 2-formas $F$ y $G$ siguientes:

$$F = -\sum_{i=1}^{3} E_i \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} B_i \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

$$G = \sum_{i=1}^{3} B_i \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} E_i \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

Estas dos formas alternadas pueden representarse por medio de matrices antisimétricas como sigue:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(G_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La densidad de carga y las componentes de la densidad de corriente se juntan para formar el cuadrivector de corriente $j^\mu$ con $j^0 = \rho$. Con este cuadrivector podemos construirnos la 3-forma de densidad de corriente $j$:

$$j = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} j^\mu \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\tau$$

PROPOSICIÓN 0.3. *Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en términos de estas formas $F$, $G$ y $j$ como*

$$\mathrm{d}F = 0$$
$$\mathrm{d}G = j$$

DEMOSTRACIÓN. Empezamos calculando $\mathrm{d}F$:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu)$$

y por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}F &= \frac{1}{2!}\mathrm{d}F_{\mu\nu} \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \frac{1}{2}\Big(\cancelto{0}{\mathrm{d}F_{00} \wedge \mathrm{d}x^0} \wedge \mathrm{d}x^0 + \mathrm{d}F_{01} \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}F_{02} \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \\ &\quad + \mathrm{d}F_{03} \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}F_{10} \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^0 + \cancelto{0}{\mathrm{d}F_{11} \wedge \mathrm{d}x^1} \wedge \mathrm{d}x^1 \\ &\quad + \mathrm{d}F_{12} \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}F_{13} \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}F_{20} \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^0 \\ &\quad + \mathrm{d}F_{21} \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 + \cancelto{0}{\mathrm{d}F_{22} \wedge \mathrm{d}x^2} \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}F_{23} \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ &\quad + \mathrm{d}F_{30} \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^0 + \mathrm{d}F_{31} \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}F_{32} \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2 \\ &\quad + \cancelto{0}{\mathrm{d}F_{33} \wedge \mathrm{d}x^3} \wedge \mathrm{d}x^3\Big) \end{aligned}$$

y ahora agrupando obtenemos

$$\begin{aligned}2\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\Big(&(\mathrm{d}F_{01}-\mathrm{d}F_{10})\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1+(\mathrm{d}F_{02}-\mathrm{d}F_{20})\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2\\&+(\mathrm{d}F_{03}-\mathrm{d}F_{30})\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^3+(\mathrm{d}F_{12}-\mathrm{d}F_{21})\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\\&+(\mathrm{d}F_{13}-\mathrm{d}F_{31})\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3+(\mathrm{d}F_{23}-\mathrm{d}F_{32})\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\Big)\\=\;&\mathrm{d}F_{01}\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1+\mathrm{d}F_{02}\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}F_{03}\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^3\\&+\mathrm{d}F_{12}\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}F_{13}\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}F_{23}\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3.\end{aligned}$$

A continuació usamos que

$$\mathrm{d}F_{\mu\nu}=\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}\mathrm{d}x^\tau$$

de modo que

$$\begin{aligned}2\mathrm{d}F=&\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1+\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\\&+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2\\&+\frac{\partial F_{03}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^3+\frac{\partial F_{03}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^3\\&+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\\&+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3\\&+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\\=&\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{02}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}\right)\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\\&+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3}-\frac{\partial F_{03}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}\right)\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3\\&+\left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}-\frac{\partial F_{03}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}\right)\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\\&+\left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\end{aligned}$$

y si reemplazamos los $F_{\mu\nu}$ por sus valores vemos que los tres primeros términos son $\mathrm{curl}E+\frac{\partial}{\partial t}B$, mientras que el último es la divergencia de $B$. Por lo tanto hemos probado que el primer par de ecuaciones de Maxwell equivalen a

$$\mathrm{d}F=0 \tag{3}$$

de forma análoga puede probarse que el segundo par de ecuaciones de Maxwell equivalen a

$$\mathrm{d}G=j \tag{4}$$

■

Escritas de esta forma, las ecuaciones de Maxwell están libres de coordenadas y no dependen de ninguna métrica. Como consecuencia, las ecuaciones (3) y (4) con

$j = 0$ son invariantes bajo cambios de coordenadas, no solo transformaciones de Poincaré.

PROPOSICIÓN 0.4. *Los tensores electromagnéticos $F$ y $G$ satisfacen que*

$$*F = G$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
*F &= * \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \right) = \frac{1}{2} * \left( F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \right) \\
&= \frac{1}{2} \Big( F_{01}\varepsilon_{0123}\eta^{00}\eta^{11}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{01}\varepsilon_{0132}\eta^{00}\eta^{11}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&\quad + F_{02}\varepsilon_{0213}\eta^{00}\eta^{22}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{02}\varepsilon_{0231}\eta^{00}\eta^{22}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&\quad + F_{03}\varepsilon_{0312}\eta^{00}\eta^{33}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + F_{03}\varepsilon_{0321}\eta^{00}\eta^{33}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&\quad + F_{10}\varepsilon_{1023}\eta^{11}\eta^{00}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{10}\varepsilon_{1032}\eta^{11}\eta^{00}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&\quad + F_{12}\varepsilon_{1203}\eta^{11}\eta^{22}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{12}\varepsilon_{1230}\eta^{11}\eta^{22}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^0 \\
&\quad + F_{13}\varepsilon_{1302}\eta^{11}\eta^{33}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 + F_{13}\varepsilon_{1320}\eta^{11}\eta^{33}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^0 \\
&\quad + F_{20}\varepsilon_{2013}\eta^{22}\eta^{00}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{20}\varepsilon_{2031}\eta^{22}\eta^{00}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&\quad + F_{21}\varepsilon_{2103}\eta^{22}\eta^{11}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{21}\varepsilon_{2130}\eta^{22}\eta^{11}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^0 \\
&\quad + F_{23}\varepsilon_{2301}\eta^{22}\eta^{33}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 + F_{23}\varepsilon_{2310}\eta^{22}\eta^{33}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^0 \\
&\quad + F_{30}\varepsilon_{3012}\eta^{33}\eta^{00}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + F_{30}\varepsilon_{3021}\eta^{33}\eta^{00}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&\quad + F_{31}\varepsilon_{3102}\eta^{33}\eta^{11}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 + F_{31}\varepsilon_{3120}\eta^{33}\eta^{11}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^0 \\
&\quad + F_{32}\varepsilon_{3201}\eta^{33}\eta^{22}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 + F_{32}\varepsilon_{3210}\eta^{33}\eta^{22}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^0
\end{aligned}$$

y si ahora agrupamos tenemos

$$\begin{aligned}
*F = \frac{1}{2} \Big( &(F_{23} + F_{23} - F_{32} - F_{32})\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&+ (-F_{13} - F_{13} + F_{31} + F_{31})\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&+ (F_{12} + F_{12} - F_{21} - F_{21})\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
&+ (-F_{03} - F_{03} + F_{30} + F_{30})\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&+ (F_{02} + F_{02} - F_{20} - F_{20})\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
&+ (-F_{01} - F_{01} + F_{10} + F_{10})\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \Big)
\end{aligned}$$

y reemplazando los $F_{\mu\nu}$ por sus valores vemos que

$$*\,F = G \tag{5}$$

tal y como queríamos. ■

Para usar la estrella de Hodge, necesitamos una métrica y por lo tanto, la ecuación (5) solo es invariante por las isometrías del espacio de Minkowski $\mathbb{M}^4$, es decir, el grupo de Poincaré.

Notamos que la densidad $j$ de la ecuación (4) no puede elegirse arbitrariamente ya que $\mathrm{d}^2 = 0$ implica que

$$\mathrm{d}j = 0, \tag{6}$$

es decir, las ecuaciones de Maxwell son consistentes si y solo si se cumple la ecuación (6). Como

$$\mathrm{d}j = \partial_\mu j^\mu \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3,$$

queda claro que la ecuación (6) expresa la conservación de la corriente.

Aplicando la proposición anterior, el segundo par de ecuaciones de Maxwell se escriben como

$$\mathrm{d} * F = j \iff *\mathrm{d} * F = *j$$

de modo que podemos escribir las ecuaciones de Maxwell de la siguente forma:

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{7}$$

$$\delta F = *j \tag{8}$$

ya que en nuestro caso, $\delta = *\mathrm{d}*$. De este modo hemos visto que $F$ es cerrada y, por el lema de Poincaré, podemos asegurar que en dominios estrellados existe una 1-forma de potencial $A$ tal que $F$ puede escribirse como

$$F = \mathrm{d}A.$$

Lógicamente, $F$ no determina $A$ totalmente: existe lo que se llama una *libertad de gauge*. Para toda 0-forma $\Lambda$, $A$ y $A + \mathrm{d}\Lambda$ son dos posibles potenciales de $F$ ya que

$$\mathrm{d}(A + \mathrm{d}\Lambda) = \mathrm{d}A + \mathrm{d}^2\Lambda = \mathrm{d}A = F.$$

Mientras que el par de ecuaciones homogéneas se satisface idénticamente usando el potencial $A$, el segundo par, $\delta F = *j$, nos lleva a la siguiente ecuación para $A$:

$$\delta \mathrm{d}A = *j. \tag{9}$$

Si por ejemplo escogemos el gauge de Lorentz, $\delta A = 0$, podemos escribir

$$(\delta\mathrm{d} + \mathrm{d}\delta)A = *j$$

o de forma más compacta,

$$\Box A = - * j.$$

Esta ecuación es la ecuación de ondas escrita usando el operador de d'Alembert $\Box$.

La ecuación (9) puede derivarse de la acción

$$S[A] = \int \left(-\frac{1}{2} F \wedge *F - j \wedge A\right) = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_\mu A^\nu\right) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \tag{10}$$

Es importante notar que esta acción es invariante gauge solo en el caso de que la corriente $j$ se conserve:

$$S[A + \mathrm{d}\Lambda] - S[A] = -\int j \wedge \mathrm{d}\Lambda = \int \mathrm{d}(j \wedge \Lambda) - \int (\mathrm{d}j) \wedge \Lambda.$$

El primer término es nulo debido al teorema de Stokes mientras que el segundo es igual a cero independientemente de $\Lambda$ si $\mathrm{d}j = 0$.

Ahora vamos a obtener la ecuación (9) extremando el funcional (10). Por lo tanto vamos a considerar $S$ como un funcional de $A$. Es decir, las $F$ en (10) no son más que abreviaciones de $\mathrm{d}A$. Consideramos variaciones de $A$ y nos quedamos con los términos lineales en $a$:

$$S[A + a] - S[A] = \int \big(-(\mathrm{d}a) \wedge *\mathrm{d}A + a \wedge j\big) + \cdots$$

donde hemos usado la igualdad (2). Aplicando ahora (1) e ignorando los términos de contorno, tenemos que

$$S[A + a] - S[A] = \int a \wedge *(-\delta \mathrm{d}A + *j) + \cdots$$

de modo que $S$ tiene un punto estacionario en $A$ si se satisface la ecuacion (9).

# Capítulo 3
# Grupos y álgebras de Lie

Antes de poder escribir las ecuaciones de Yang-Mills, necesitamos el lenguaje de fibrados principales. En el capítulo 4 estudiaremos los fibrados principales en detalle, pero antes de eso necesitamos presentar el ingrediente esencial de los fibrados principales: los grupos de Lie. De modo que dedicaremos este capítulo a su estudio y también al de las álgebras de Lie, pues veremos que hay una estrecha relación entre los grupos y las álgebras de Lie que irá apareciendo a lo largo del trabajo.

## 1. Grupos de Lie

Esta sección está dedicada al estudio de los grupos de Lie. Un grupo de Lie no es más que una variedad que posee estructura de grupo o, equivalentemente, un grupo topológico que además es diferenciable. Los ejemplos más importantes de grupos de Lie son los grupos de matrices.

DEFINICIÓN 1.1. *Un **grupo de Lie** es un conjunto $G$ dotado de las estructuras de grupo y de variedad diferenciable, de modo que el producto y la inversión*

$$\mu\colon \begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array} \qquad \iota\colon \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

*son aplicaciones diferenciables.*

Equivalentemente, las operaciones producto e inversión de un grupo de Lie son diferenciables si y solo si lo es la aplicación

$$\chi\colon \begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh^{-1} \end{array}$$

EJEMPLO 1.2. *Vamos a ver algunos de los ejemplos más importantes de grupos de Lie.*

*(1) La variedad $\mathbb{R}^n$ con la suma es un grupo de Lie de dimensión $n$.*
*(2) Las esferas $S^1$ y $S^3$ (complejos y cuaterniones de módulo 1) son grupos de Lie.*
*(3) El producto cartesiano de dos grupos de Lie define un grupo de Lie con la estructura de grupo dada por el producto directo de grupos y la estructura de*

*variedad diferenciable producto. En particular, el toro de dimensión $n$, $T^n = S^1 \times \overset{(n)}{\cdots} \times S^1$, es un grupo de Lie.*

(4) *El conjunto de todas las matrices $n \times n$ reales (complejas) es un grupo de Lie de dimensión $n^2$ con la suma de matrices.*

(5) *$GL(n, \mathbb{R})$, el conjunto de todas las matrices invertibles, es un grupo de Lie $n^2$-dimensional con el producto de matrices.*

DEFINICIÓN 1.3. *Dado un grupo de Lie $G$ y un elemento $g \in G$ fijado, definimos la **traslación izquierda** como*

$$\begin{array}{rccc} L_g\colon & G & \to & G \\ & h & \mapsto & gh \end{array}$$

*y la **traslación derecha** como*

$$\begin{array}{rccc} R_g\colon & G & \to & G \\ & h & \mapsto & hg \end{array}$$

Estas dos aplicaciones son difeomorfismos ya que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y satisfacen que

$$L_g \circ R_h = R_h \circ L_g.$$

DEFINICIÓN 1.4. *Un **subgrupo (regular) de un grupo de Lie** $G$ es un subconjunto $H \subseteq G$ que es a la vez subgrupo y subvariedad (regular). Con las estructuras inducidas, $H$ también es un grupo de Lie. Del mismo modo, un **subgrupo de Lie immerso** es un grupo de Lie que es a su vez subgrupo y subvariedad immersa.*

Para comprobar que un subgrupo $H \subseteq G$ de un grupo de Lie es una subvariedad, basta comprobarlo alrededor de un punto (por ejemplo el elemento neutro $e$).

TEOREMA 1.5. (de Cartan) *Un subgrupo cerrado de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie regular.*

EJEMPLO 1.6. *Los subgrupos $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ y $SU(n)$ de $GL(n)$ (tanto reales como complejos) son subgrupos de Lie de $GL(n)$ (en particular son grupos de Lie por sí mismos).*

Estos grupos de matrices son algunos de los ejemplos más importantes de grupos de Lie.

EJEMPLO 1.7. *Como variedad, $SU(2)$ es isomorfo $S^3$.*

DEFINICIÓN 1.8. *Una aplicación $f\colon G \to H$ es un **morfismo de grupos de Lie** si es diferenciable y morfismo de grupos. La condición de morfismo de grupos puede reescribirse como*

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$$

Observamos que un morfismo entre grupos de Lie siempre tiene rango constante.

PROPOSICIÓN 1.9. *Si $f\colon G \to H$ es un morfismo entre grupos de Lie, entonces $\ker f \subseteq G$ es un subgrupo de Lie regular. Por otro lado, la imagen $f(G)$ puede no ser una subvariedad regular de $H$.*

# 2. Álgebras de Lie

Siempre que se estudien los grupos de Lie no pueden pasarse por alto las álgebras de Lie. A continuación presentamos las álgebras de Lie y veremos como asociar a cada grupo de Lie un álgebra de Lie de forma que el álgebra nos dé información del grupo de Lie alrededor del elemento neutro $e$. Podemos pensar en el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie como una *versión infinitesimal* del grupo.

DEFINICIÓN 2.1. *Un* ***álgebra de Lie (real)*** *es un espacio vectorial real* $\mathfrak{g}$ *junto con una operación binaria* $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$*, llamada paréntesis de Lie, que satisface las siguientes propiedades:*

*(1) es bilineal*
*(2) es alternada*
*(3) cumple la identidad de Jacobi:* $[[x,y],z]+[[z,x],y]+[[y,z],x]=0$ *para todo* $x,y,z\in\mathfrak{g}$*.*

EJEMPLO 2.2. *Vamos a ver algunos ejemplos de álgebras de Lie.*

*(1) Dado $E$ un espacio vectorial (real), podemos dotar a $E$ de estructura de álgebra de Lie (real) definiendo el paréntesis de Lie como idénticamente cero.*
*(2) El espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ es un álgebra de Lie con el paréntesis de Lie dado por el producto vectorial.*
*(3) Sea $A$ un álgebra asociativa con producto $*$. Entonces $A$ es un álgebra de Lie con el paréntesis de Lie definido como $[x,y]=x*y-y*x$.*
*(4) Dada una variedad diferenciable $M$, el conjunto de sus campos vectoriales tiene estructura de álgebra de Lie de dimensión infinita con el paréntesis de Lie de campos vectoriales.*

Vamos a ver ahora como asociar un álgebra de Lie a un grupo de Lie. Un grupo de Lie y su álgebra de Lie tienen una relación muy estrecha, tal y como veremos más adelante.

DEFINICIÓN 2.3. *Dado $X\in\mathfrak{X}(G)$ un campo vectorial en $G$, diremos que $X$ es* ***invariante por la izquierda*** *si*

$$L_{g*}X=X$$

*para todo $g\in G$. Denotaremos por $\mathfrak{X}_L(G)$ el conjunto de los campos invariantes por la izquierda de un grupo de Lie. Análogamente podemos definir el conjunto $\mathfrak{X}_R(G)$ de los campos vectoriales sobre $G$ invariantes por la derecha.*

PROPOSICIÓN 2.4. *$\mathfrak{X}_L(G)$ y $\mathfrak{X}_R(G)$ son subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo demostraremos para $\mathfrak{X}_L(G)$ y el caso de $\mathfrak{X}_R(G)$ es totalmente análogo. Obviamente la suma de dos campos invariantes por la izquierda nos da otro campo invariante por la izquierda. Solo nos falta probar que el paréntesis de Lie de dos campos invariantes también lo es. Tomando $g\in G$ y $X,Y\in\mathfrak{X}_L(G)$, tenemos que

$$L_{g*}[X,Y]=[L_{g*}X,L_{g*}Y]=[X,Y]$$

tal y como queríamos ver. ∎

DEFINICIÓN 2.5. *Sea $G$ un grupo de Lie. El* ***álgebra de Lie de*** *$G$ es $\mathfrak{X}_L(G)$. La denotamos por $\mathfrak{g}$ o $Lie(G)$.*

PROPOSICIÓN 2.6. *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathfrak{X}_L(G)$ y $T_eG$ donde $e \in G$ es el elemento neutro.*

DEMOSTRACIÓN. A cada campo $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, le hacemos corresponder un vector de $T_e(G)$ mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \theta_1\colon & \mathfrak{X}_L(G) & \longrightarrow & T_eG \\ & X & \longmapsto & X(e) = X_e \end{array}$$

Recíprocamente, a partir de cada vector tangente al neutro $X_e \in T_eG$, podemos construir un único campo vectorial $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ mediante

$$\begin{array}{rccc} X\colon & G & \longrightarrow & TG \\ & g & \longmapsto & (g, TL_gX_e) \end{array}$$

que es un campo vectorial pues para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, la aplicación $X(f)\colon G \to \mathbb{R}$ es diferenciable y, por tanto, $X$ también lo es. Además, $X$ es invariante por la izquierda por construcción. Denotaremos por $\theta_2\colon T_eG \to \mathfrak{X}_L(G)$ a la aplicación que nos da un campo invariante por la izquierda a partir de un vector $X_e$ tangente en el neutro. ■

De ahora en adelante será habitual identificar $\mathfrak{g}$ con $T_eG$. De modo que a partir de esta identificación es posible definir el paréntesis de Lie de dos vectores $X_e, Y_e \in T_eG$ como $[X_e, Y_e] = [\theta_2 X_e, \theta_2 Y_e](e)$.

DEFINICIÓN 2.7. *Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$. Entonces se tiene que $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ para ciertas constantes $c_{ij}^k$ llamadas* ***constantes de estructura de*** *$G$.*

De las propiedades básicas de un álgebra de Lie se deduce la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.8. *Las constantes de estructura $c_{ij}^k$ de un grupo de Lie $G$ cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$c_{ij}^k$ son las componentes de un tensor de tipo (1,2).*
2. *$c_{ij}^k = -c_{ji}^k$.*
3. *$c_{ij}^l c_{kl}^m + c_{ki}^l c_{il}^m + c_{jk}^l c_{il}^m = 0$.*

DEFINICIÓN 2.9. *Una curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ es un* ***subgrupo uniparamétrico de*** *$G$ si*

$$\gamma(t) \cdot \gamma(s) = \gamma(t+s) \qquad \gamma(0) = e \tag{11}$$

TEOREMA 2.10. *Existe una biyección entre campos vectoriales invariantes por la izquierda y subgrupos uniparamétricos de $G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma$ un subgrupo uniparamétrico de $G$, entonces $\gamma(t) \cdot \gamma(s) = \gamma(t+s)$ o equivalentemente,

$$L_{\gamma(t)}\gamma(s) = \gamma(t+s).$$

Entonces, fijado $t$, el vector tangente a $\gamma$ en $s+t$ es

$$(L_{\gamma(t)*} \circ \dot{\gamma})(s) = \dot{\gamma}(s+t)$$

y poniendo $s = 0$,

$$(L_{\gamma(t)*} \circ \dot{\gamma})(0) = \dot{\gamma}(t).$$

Ahora consideremos el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ correspondiente al vector $\dot{\gamma}(0)$ mediante el isomorfismo $\theta_2$. Entonces,

$$L_{\gamma(t)*}\dot{\gamma}(0) = X(\gamma(t))$$

y por lo tanto,

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)).$$

Esta última ecuación nos dice que $\gamma$ es una curva integral del campo $X$ que pasa por $e$, y por lo tanto es única. Recíprocamente, cada campo invariante por la izquierda tiene una curva integral pasando por el neutro $e$ con las propiedades (11). ■

LEMA 2.11. *Si $\gamma_X$ es el subgrupo uniparamétrico de $G$ correspondiente al campo invariante por la izquierda $X$, entonces*

$$\gamma_{aX}(t) = \gamma_X(at) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

DEFINICIÓN 2.12. *La **aplicación exponencial** se define como*

$$\begin{array}{rccc} \exp\colon & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G \\ & X & \longmapsto & \gamma_X(1) \end{array}$$

TEOREMA 2.13. *La aplicación exponencial satisface las siguientes propiedades:*

*(1)* $\exp aX = \gamma_X(a)$
*(2)* $\exp(a+b)X = (\exp aX)(\exp bX)$
*(3)* $\exp(-a)X = (\exp aX)^{-1}$

Como $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial $n$-dimensional, puede dotarse de estructura diferenciable y provarse que la aplicación exp es diferenciable. Además, nos da un difeomorfismo de un entorno del 0 en $\mathfrak{g}$ en un entorno de $e$ en $G$.

TEOREMA 2.14. *Si $G$ y $H$ son grupos de Lie y $\phi\colon G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie, entonces la aplicación tangente $\phi_*$ aplica $T_eG$ en $T_eH$. Identificando $T_eG$ con $\mathfrak{g}$ y $T_eH$ con $\mathfrak{h}$, tenemos que*

*(1) $\phi_*$ es un morfismo de álgebras de Lie.*
*(2) El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[\phi]{} & H \end{array}$$

*es commutativo.*

DEFINICIÓN 2.15. *Sea $g \in G$. Los **automorfismos interiores o de conjugación** son los morfismos*

$$\mathrm{aut}_g = R_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$$

Notamos que efectivamente, las aplicaciones $\mathrm{aut}_g$ son automorfismos, mientras que las traslaciones derechas e izquierdas no lo son a pesar de ser difeomorfismos. Si consideramos ahora la aplicación $G \to \mathrm{Aut}(G)$ definida por $g \mapsto \mathrm{aut}_g$ se ve que es un homomorfismo de grupos.

TEOREMA 2.16. *(1) La aplicación tangente a los automorfismos interiores,*

$$\mathrm{aut}_{g*}\big|_{T_eG} : T_eG \longrightarrow T_eG$$

*es un automorfismo de* $T_eG \cong \mathfrak{g}$.

*(2) La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} Ad: & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(T_eG) \\ & g & \longmapsto & \mathrm{aut}_{g*}\big|_{T_eG} \end{array}$$

*es un homomorfismo de clase* $\mathcal{C}^\infty$.

DEFINICIÓN 2.17. *La aplicación Ad definida en el teorema anterior recibe el nombre de* ***representación adjunta de*** $G$ ***en*** $\mathfrak{g}$. *Identificando* $T_eG$ *con* $\mathfrak{g}$, *escribiremos* $Ad\colon G \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$.

Notamos que

$$Ad_g X = (R_{g^{-1}} \circ L_g)_* X = R_{g^{-1}*} \circ L_{g*} X$$

de modo que si $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, se tiene que

$$Ad_g X = R_{g^{-1}*} X$$

Notamos que si $G$ es abeliano, $Ad\,G \subset \mathrm{Aut}(G)$ es la identidad. La relación entre $\mathrm{aut}_g$ y $Ad_g$ es un caso particular del teorema 2.14. De nuevo, la aplicación tangente a $Ad$ aplica $T_eG$ en $T_e(\mathrm{Aut}G)$ o, equivalentemente,

$$Ad_*\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$$

y por el teorema 2.14, tenemos que $ad = Ad_*$ es un homomorfismo de álgebras de Lie y hace commutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathrm{End}\,\mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[Ad]{} & \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g} \end{array}$$

# 3. Forma de Maurer-Cartan

Introducimos ahora las formas diferenciables sobre un grupo de Lie . Veremos que podemos definirnos una invariancia por la izquierda de forma totalmente análoga al caso de los campos vectoriales. Dentro de las formas invariantes, estudiaremos una especialmente importante: la forma de Maurer-Cartan.

DEFINICIÓN 3.1. *Una forma diferencial* $\omega \in \Omega^p(G)$ *es* ***invariante por la izquierda*** *si es invariante por todas las traslaciones izquierdas:*

$$L_g^* \omega = \omega \qquad \forall g \in G$$

De forma totalmente análoga pueden definirse las formas invariantes por la derecha. Las combinaciones lineales y los productos exteriores de formas invariantes por la izquierda, son formas invariantes por la izquierda, de modo que la subálgebra de formas invariantes por la izquierda es isomorfa al álgebra exterior $\bigwedge T_e^*G$. En el caso de las 1-formas, tenemos resultados análogos al caso de los campos invariantes por la izquierda.

TEOREMA 3.2. *Las 1-formas invariantes por la izquierda de $G$ forman un espacio vectorial isomorfo a $T_e^*G$, de modo que denotaremos por $\mathfrak{g}^*$ al conjunto de las 1-formas invariantes por la izquierda.*

TEOREMA 3.3. *Si $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ y $\omega$ es una 1-forma invariante por la izquierda, entonces $\langle \omega, X \rangle$ es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $X$, $\omega$ y $\phi\colon h \mapsto \phi(h)$, se tiene que

$$\langle \phi^*\omega(\phi(h)), X(h)\rangle = \langle \omega(\phi(h)), \phi_* X(h)\rangle.$$

De modo que en particular, para $\phi = L_g\colon h \mapsto L_g h = gh$ y $X$, $\omega$ invariantes, se tiene que

$$\langle \omega(h), X(h)\rangle = \langle \omega(L_g h), X(L_g h)\rangle$$

para todo $g, h \in G$. ■

TEOREMA 3.4. (Ecuación de estructura de Maurer-Cartan) *Sea $A_1, \ldots, A_m$ una base de $\mathfrak{g}$. Sea $\zeta^1, \ldots, \zeta^m$ su base dual de $\mathfrak{g}^*$. Entonces*

$$\mathrm{d}\zeta^i = -\frac{1}{2} c^i_{kl} \zeta^k \wedge \zeta^l \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\zeta^i(A_k, A_l) &= i_{A_l} i_{A_k} \mathrm{d}\zeta^i = i_{A_l}(\mathscr{L}_{A_k}\zeta^i - \mathrm{d} i_{A_k}\zeta^i) = \mathscr{L}_{A_k} i_{A_l}\zeta^i - i_{[A_k, A_l]}\zeta^i \\ &= -c^j_{kl}\zeta^i(A_j) = -c^j_{kl}\delta^i_j = -c^i_{kl} \end{aligned}$$

■

La identidad $\mathrm{d}^2\zeta^i = 0$ es equivalente a la identidad de Jacobi expresada en términos de las constantes de estructura. Como consecuencia, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está unívocamente determinada por las formas $\zeta^i$, llamadas **formas de Maurer-Cartan**, junto con la ecuación (12), conocida como ecuación de estructura de Maurer-Cartan.

Vamos a repetir la construcción de la forma de Maurer-Cartan, pero libres de coordenadas. Esta vez definimos la **forma de Maurer-Cartan** como la 1-forma con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\zeta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$, tal que

$$\zeta|_{\mathfrak{g}} = id_{\mathfrak{g}}$$

de modo que, si $v_g \in T_gG$, tenemos que

$$\zeta(g) \cdot v_g = L^{-1}_{g*} v_g \in T_eG$$

de modo que dado un vector de $T_gG$ nos devuelve su valor en el neutro. El siguiente teorema nos prueba que de hecho las dos definiciones de forma de Maurer-Cartan son equivalentes.

TEOREMA 3.5. *Dada una base $\{A_i\}$ de $T_eG$, la forma de Maurer-Cartan en $G$ viene dada por $\zeta(X) = \zeta^i(X)A_i$, donde $\zeta^i$ son los duales de los campos vectoriales $X_i$ correspondientes a la base $A_i$.*

DEMOSTRACIÓN. $X_g = v^j_g X_j$, de modo que $\zeta(X_g) = \zeta^i(v^j_g X_j)A_i = v^i_g A_i$. ■

De modo que queda claro que $\zeta$ es invariante bajo traslaciones izquierdas. Veamos como se comporta respecto a las traslaciones derechas.

TEOREMA 3.6.

$$R_g^*\zeta = Ad_{g^{-1}}\zeta$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $h \in G$,

$$\begin{aligned} R_g^*\zeta(v_{hg^{-1}} &= \zeta(R_{g*}v_{hg^{-1}}) && \text{(por definición del pull-back)} \\ &= L_{h*}^{-1}(R_{g*}v_{hg^{-1}}) && \text{(definición de } \zeta) \\ &= L_{g*}^{-1} \circ L_{hg^{-1}}(R_{g*}v_{hg^{-1}}) \\ &= L_{g*}^{-1} \circ R_{g*}(L_{hg^{-1}}v_{hg^{-1}}) \\ &= L_{g*}^{-1} \circ R_{g*}\zeta(v_{hg^{-1}}) \\ &= Ad_{g^{-1}}\zeta(v_{hg^{-1}}) \end{aligned}$$

■

Usando esta forma de Maurer-Cartan libre de coordenadas, la ecuación de estructura de Maurer-Cartan se escribe como

$$\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2}[\zeta, \zeta]$$

# 4. Acción de un grupo de Lie sobre una variedad

Las acciones de grupos sobre conjuntos son de mucha utilidad en multitud de situaciones diferentes y las teorías gauge no son una excepción. En nuestro caso, tendremos un grupo de Lie (el grupo de gauge) que actuará por definición sobre un fibrado principal, que en particular es una variedad diferenciable. De esta manera, no podemos hablar de fibrados principales sin antes ofrecer una introducción a las acciones de grupos de Lie sobre variedades.

DEFINICIÓN 4.1. *Sean $M$ una variedad diferenciable y $G$ un grupo de Lie. Una* ***acción derecha de*** *$G$* ***en*** *$M$ es una aplicación diferenciable*

$$\mathcal{R}\colon M \times G \longrightarrow M$$

*tal que las aplicaciones $\mathcal{R}_g\colon M \to M$ satisfacen*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gh} &= \mathcal{R}_h \circ \mathcal{R}_g \\ \mathcal{R}_e(x) &= x \qquad \forall x \in M \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 4.2. *Notamos que las condiciones impuestas sobre $\mathcal{R}$ implican directamente que el conjunto de transformaciones $\{\mathcal{R}_g \mid g \in G\}$ es un subgrupo de* $\mathrm{Diff}(M)$*, el grupo de difeomorfismos de $M$. Además, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & G & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(M) \\ & g & \longmapsto & \mathcal{R}_g \end{array}$$

*es un homomorfismo. Si $\rho$ es un isomorfismo con su imagen, diremos que $\rho$ actúa* ***efectivamente*** *en $M$ (o que la acción es* ***fiel****) y en este caso se puede identificar $G$ con $\{\mathcal{R}_g\}$. Además, una acción derecha induce una partición de $M$ en clases de*

*equivalencia* $\mathcal{O}_p = \{q \in M \mid q = \mathcal{R}_g p,\ g \in G\}$. *Llamaremos a* $\mathcal{O}_p$ ***órbita*** *de* $p$ *y tenemos una proyección canónica*

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & M & \longrightarrow & M/G \\ & p & \longmapsto & \mathcal{O}_p \end{array}$$

Análogamente pueden hacerse las mismas construcciones para acciones por la izquierda.

Ahora, dada una acción derecha $\mathcal{R}$ de $G$ sobre $M$, en lugar de fijarnos en las aplicaciones $\mathcal{R}_g\colon M \to M$, nos centraremos en las aplicaciones $\mathcal{R}_x\colon G \to M$ con $x \in M$ definidas por $g \mapsto \mathcal{R}_x(g)$. En particular, $\mathcal{R}_x(e) = x$ para todo $x \in M$, y $\mathcal{R}_{x*}\colon T_eG \to T_xM$. De este modo para cada $v \in T_eG \cong \mathfrak{g}$ tenemos un campo vectorial $X_v \in \mathfrak{X}(M)$ definido como

$$\begin{array}{rccc} X_v\colon & M & \longrightarrow & TM \\ & x & \longmapsto & \mathcal{R}_{x*}(v) \end{array}$$

Entonces, si $\mathcal{X} \in \mathfrak{g} = \mathfrak{X}_L(G)$, el álgebra de Lie de $G$, y $v = \mathcal{X}(e)$, $\mathcal{X} \mapsto v \mapsto X_v$ donde $X_v$ esta definido como en la ecuación (4) define una aplicación

$$\lambda\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Definición 4.3. *Dado* $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$, $\lambda(\mathcal{X})$ *es el* ***campo vectorial fundamental (en*** $M$***) asociado a*** $\mathcal{X}$ *y se tiene que*

$$\lambda(\mathcal{X})(x) = X_v(x) = \mathcal{R}_{x*}(v) \qquad \text{donde } v = \mathcal{X}(e). \tag{13}$$

*En ocasiones se dice que* $\lambda$ *es la "versión infinitesimal" de la acción de* $G$ *en* $M$.

También se puede obtener $\lambda$ mediante los subgrupos uniparamétricos de $G$. Así, dado $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$, tenemos el subgrupo uniparamétrico de $G$ $\gamma_{\mathcal{X}}$ dado por $\gamma_{\mathcal{X}}(t) = \exp(t\mathcal{X})$. Sea ahora

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}\colon & \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ & (t, x) & \longmapsto & \mathcal{A}_t(x) = \mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}}(t)} x \end{array}$$

la acción del subgrupo uniparamétrico $\gamma_{\mathcal{X}}$ sobre $M$. Entonces, la curva $\mathcal{A}_x$ es la imagen de $\gamma_{\mathcal{X}}$ bajo $\mathcal{R}_x$ y el vector tangente a $\mathcal{A}_x$ en $t = 0$ es la imagen de $\mathcal{X}$ bajo la aplicación tangente $\mathcal{R}_{x*}$, es decir $\lambda(\mathcal{X})x$.

Teorema 4.4. $\lambda$ *es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Definición 4.5. *Sea* $\mathcal{R}$ *una acción derecha de* $G$ *en* $M$. *Diremos que* $\mathcal{R}$ *es* ***libre*** *se cumple que* $\mathcal{R}_g x = x$ *implica que* $g = e$ *para todo* $x \in M$. *El* ***grupo de isotropía de*** $x$ *es el subgrupo de* $G$

$$I(x) = \{g \in G \mid \mathcal{R}_g x = x\}$$

Observación 4.6. *Notamos que toda acción libre es efectiva.*

Teorema 4.7. *(1)* $G$ *actúa libremente en* $M$ *si y solo si* $I(x) = \{e\}$ *para todo* $x \in M$.
*(2) Si* $x, y$ *están en la misma órbita, entonces* $I(x)$ *y* $I(y)$ *son subgrupos conjugados.*

Teorema 4.8. *(1)* $\lambda$ *es un ismorfismo entre* $\mathfrak{g}$ *y* $\lambda(\mathfrak{g})$ *si* $G$ *actúa efectivamente en* $M$.
*(2)* $\lambda(\mathcal{X})(x) = 0$ *implica que* $\mathcal{X} = 0$ *si* $G$ *actúa libremente en* $M$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $\lambda(\mathcal{X}_1) = \lambda(\mathcal{X}_2)$, entonces sus flujos coinciden: $\mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}_1}(t)}x = \mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}_2}(t)}x$ para todo $x$ y para todo $t$. Por lo tanto, $\mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}_1}(t)} = \mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}_2}(t)}$ y, si la acción de $G$ en $M$ es efectiva, tenemos que $\gamma_{\mathcal{X}_1}(t) = \gamma_{\mathcal{X}_2}(t)$ y por tanto $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$.
(2) Si $\lambda(\mathcal{X})(x) = 0$, el vector tangente a $\mathcal{A}_x$ en $t = 0$ es cero, lo que implica que $\mathcal{A}_x(t) = x$ para todo $t$, pero entonces $\mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}}(t)}x = x$ y si $G$ actúa libremente sobre $M$, $\gamma_{\mathcal{X}}(t) = e$ y se tiene que $\mathcal{X} = 0$.

■

COROLARIO 4.9. *Si $G$ actúa libremente en $M$, entonces la aplicación tangente $\mathcal{R}_{x*}\colon T_eG \to T_xM$ es biyectiva.*

El siguiente teorema nos dice como se comportan los campos vectoriales fundamentales bajo una acción derecha.

TEOREMA 4.10. *Dados $g \in G$, $x \in M$ y $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$, se tiene que*

$$\mathcal{R}_{x*}(\lambda(\mathcal{X})(x)) = \lambda(Ad_{g^{-1}}\mathcal{X})(\mathcal{R}_g x) \tag{14}$$

DEMOSTRACIÓN. Dados $\mathcal{X}$ y $g$, si $\gamma_{\mathcal{X}}$ es el subgrupo uniparamétrico correspondiente a $\mathcal{X}$, entonces $g^{-1}\gamma_{\mathcal{X}}g$ es el subgrupo uniparamétrico correspondiente a $Ad_{g^{-1}}\mathcal{X}$. Con $g^{-1}\gamma_{\mathcal{X}}g$ tenemos la acción del grupo uniparamétrico sobre $M$ definida por

$$\mathcal{R}_{g^{-1}\gamma_{\mathcal{X}}g} = \mathcal{R}_g \circ \mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}}(t)} \circ \mathcal{R}_{g^{-1}}$$

y que tiene a $\lambda(Ad_{g^{-1}}\mathcal{X})$ por generador infinitesimal. Ahora, el campo vectorial de este flujo es $\mathcal{R}_{g*}(\lambda(\mathcal{X}))$ ya que $\lambda(\mathcal{X})$ es el generador infinitesimal de $\mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{X}}(t)}$. ■

# Capítulo 4
# Fibrados

En este capítulo entramos en el mundo de los fibrados y en especial en el de los fibrados principales. Fijada una variedad diferenciable $M$, pensaremos en un fibrado como en variedad que localmente se parece a $\mathcal{U} \times F$ donde $\mathcal{U} \subset M$ es un abierto y $F$ es una variedad diferenciable que llamaremos fibra (a menudo la fibra $F$ será un grupo de Lie o un espacio vectorial). Además, en general, estos espacios *fibrados* no seran difeomorfos al producto cartesiano $M \times F$, sinó que las fibras estaran retorcidas de modo que necesitaremos algo que nos indique como pegar estas fibras: las llamadas *funciones de transición*. Vamos a pensar en un sencillo ejemplo que nos permita imaginar este *retorcimiento*: consideremos que nuestra variedad base $M$ es la circumferencia $S^1$ y la fibra $F$ es el intervalo $(-1, 1)$. Una forma de pegar las fibras a lo largo de $S^1$ puede darnos como resultado un fibrado difeomorfo a un cilindro. Pero también podríamos ir girando la fibra a medida que damos una vuelta a la $S^1$ de modo que al terminar la vuelta hayamos realizado una rotación en la fibra de ángulo $\pi$. De esta forma hemos obtenido una banda de Möbius que no es difeomorma al cilindro. Del mismo modo, un fibrado con base $S^1$ y fibra $S^1$ puede ser tanto un toro, $T^2$, o una botella de Klein, $K$, en función de como estén pegadas las fibras unas con otras alrededor de la base $S^1$. A lo largo de este capítulo profundizaremos en estos conceptos y veremos algunos ejemplos no triviales de todo esto.

## 1. Fibrados principales

Definición 1.1. *Sean $E$ y $M$ dos variedades diferenciables y sea $\pi\colon E \to M$ una aplicación diferenciable exhaustiva. Diremos que $E$ (o $\pi$) es* ***localmente trivial*** *si todo $x \in M$ tiene un entorno $\mathcal{U}$ y un difeomorfismo de la forma*

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{U} \times F \\ & p & \longmapsto & (\pi(p), \phi(p)) \end{array}$$

*para alguna variedad $F$ y para alguna aplicación $\phi\colon \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to F$ diferenciable. Llamaremos a $(\mathcal{U}, \psi)$* ***trivialización local de*** *$E$ de la cual diremos que $F$ es la* ***fibra típica*** *y $\pi^{-1}(x)$ es la* ***fibra por*** *$x \in M$.*

La condición $\psi(p) = (\pi(p), \phi(p))$ puede reescribirse como $\pi = p_1 \circ \psi$ para puntos de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ donde $p_1$ es la proyección $\mathcal{U} \times F \to \mathcal{U}$. Además, esta condición también implica que la aplicación

$$\phi|_{\pi^{-1}(x)} \colon \pi^{-1}(x) \longrightarrow F \tag{15}$$

es biyectiva, y $\psi(\pi^{-1}(x)) = (x, \phi(\pi^{-1}(x)))$, de modo que

$$\phi|_{\pi^{-1}(x)} = p_2 \circ \psi|_{\pi^{-1}(x)} \tag{16}$$

DEFINICIÓN 1.2. *Sea $\pi$ una aplicación diferenciable y exhaustiva de $E$ en $M$ y sea $\mathcal{U}$ un abierto de $M$. Una* ***sección local de*** *$E$ es una aplicación diferenciable $\sigma \colon \mathcal{U} \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = id$.*

TEOREMA 1.3. *Sea $E$ (o $\pi$) localmente trivial, entonces*

*(1) existen secciones locales de $E$,*
*(2) para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad regular cerrada de $E$,*
*(3) para cada $x \in M$, $\phi|_{\pi^{-1}(x)}$ es un difeomorfismo de $\pi^{-1}(x)$ en $F$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\sigma \colon \mathcal{U} \to E$ definida como $x \mapsto \psi^{-1}(x, i(x))$ con $i$ una aplicación diferenciable es una sección de $E$.
(2) Como $p_1$ es una submersión y $\psi$ es un difeomorfismo, $\pi = p_1 \circ \psi$ es una submersión, de modo que $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad regular cerrada de $E$.
(3) La variedad $\pi^{-1}(x)$ es difeomorfa con la variedad $\{x\} \times F$ mediante el difeomorfismo $\psi|_{\pi^{-1}(x)}$, y por (16) $\phi|_{\pi^{-1}(x)}$ es un difeomorfismo.

■

Vamos a estudiar ahora un caso particular de fibrado: los fibrados principales.

DEFINICIÓN 1.4. *Supongamos que $F = G$ un grupo de Lie y que existe una acción derecha $\mathcal{R} \colon E \times G \to E$ de $G$ en $E$, tal que $\pi(p) = \pi(q)$ si y solo si $p \sim q$ con la relación de equivalencia determinada por $\mathcal{R}$. Esto es, la fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$ por $x = \pi(p)$ es la órbita $\mathcal{O}_p$ de $p$ de $\mathcal{R}$. Finalmente, supongamos que en $\pi^{-1}(\mathcal{U})$, $\phi$ y $\mathcal{R}$ estan relacionadas por*

$$\phi(\mathcal{R}_g p) = \phi(p)g \tag{17}$$

*(equivariancia). Entonces, $(E, M, \pi, G, \mathcal{R})$ es un* ***fibrado principal diferenciable sobre*** *$M$* ***con grupo estructural*** *$G$.*

NOTACIÓN 1.5. *En el caso de los fibrados principales, usaremos la letra $P$ en lugar de la letra $E$ y es habitual cometer el abuso de notación $\mathcal{R}_g p = pg$.*

OBSERVACIÓN 1.6. *Veamos algunas consecuencias inmediatas de la definición:*

*(1) Debido a (17), $\mathcal{R}$ es transitiva en las fibras (si $p, q \in \pi^{-1}(x)$, existe $g \in G$ tal que $p = qg$), y con cada sección local $\sigma$ de $P$ obtenemos una trivialización local $(\mathcal{U}, \psi)$ dada por $\psi(\sigma(x)g) = (x, g)$ tal que $\sigma(x) = \psi^{-1}(x, e)$.*
*(2) Para cada $p \in P$,*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R}_p \colon & G & \longrightarrow & P \\ & g & \longmapsto & \mathcal{R}_p(g) = \mathcal{R}_g(p) = pg \end{array}$$

*es un difeomorfismo entre $G$ y $\pi^{-1}(\pi(x))$.*

Ahora, gracias a que $P$ es localmente trivial, podemos escoger una **trivialización de** $P$, i.e. un recubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de $M$ y un conjunto de trivializaciones locales $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ con $\psi_\alpha = (\pi, \phi_\alpha)$. Entonces, para $p \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$, tenemos que

$$(\phi_\alpha(pg))(\phi_\beta(pg))^{-1} = \phi_\alpha(p)g(\phi_\beta(p)g)^{-1} = \phi_\alpha(p)(\phi_\beta(p))^{-1}$$

para todo $g \in G$, de modo que $\phi_\alpha(p)(\phi_\beta(p))^{-1}$ es igual en cada punto $p$ de la fibra. Así pues, para cada pareja $\alpha, \beta$ podemos definir la aplicación

$$\phi_{\alpha\beta} \colon \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow G$$

como

$$\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha(\pi^{-1}(x))(\phi_\beta(\pi^{-1}(x)))^{-1}$$

Las aplicaciones $\phi_{\alpha\beta}$ reciben el nombre de **funciones de transición**. El siguiente teorema nos detalla las relaciones entre estas funciones de transición.

TEOREMA 1.7. *Las funciones de transición $\phi_{\alpha\beta}$ satisfacen la llamada condición de compatibilidad*

$$\phi_{\alpha\beta} \cdot \phi_{\beta\gamma} = \phi_{\alpha\gamma} \tag{18}$$

*para $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$. En particular, $\phi_{\alpha\alpha}(x) = e$ y $\phi_{\alpha\beta}(x) = (\phi_{\beta\alpha})^{-1}$.*

Denotando por $\phi_{\alpha x}$ a la restricción $\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$ obtenemos la siguiente relación entre las funciones de transición $\phi_{\alpha\beta}$ y las aplicaciones $\phi_{\alpha x}$ y $\phi_{\beta x}$. Si $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ y $g \in G$, entonces para todo $p \in \pi^{-1}(x)$ tal que $\phi_\beta(p) = g$, se tiene que $\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi_{\alpha x}(p)g^{-1}$ y $(\phi_{\alpha x} \circ \phi_{\beta x}^{-1})(g) = \phi_{\alpha x}(p)$ de manera que

$$\phi_{\alpha\beta}(x)g = (\phi_{\alpha x} \circ \phi_{\beta x}^{-1})(g). \tag{19}$$

Con la ecuación (19) y la relación

$$\phi_x(\sigma(x)g) = g \tag{20}$$

entre trivializaciones locales y secciones locales, obtenemos una relación entre las funciones de transición y las secciones locales.

TEOREMA 1.8. *Si $\sigma_\alpha$ y $\sigma_\beta$ son secciones locales en $\mathcal{U}_\alpha$ y $\mathcal{U}_\beta$ respectivamente, y $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, tenemos que*

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\phi_{\alpha\beta}(x)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ y sea $\gamma(x) \in G$ dado por

$$\mathcal{R}_{\gamma(x)}\sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(x)$$

es decir,

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\gamma(x) \tag{21}$$

entonces, a partir de (19) y (20) tenemos que

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta}(x)g &= \phi_{\alpha x}(\phi_{\beta x}^{-1}(g)) = \phi_{\alpha x}(\sigma_\beta(x)g) \\ &= \phi_{\alpha x}(\sigma_\alpha(x)\gamma(x)g) = \phi_{\alpha x}(\sigma_\alpha(x)(g\gamma(x))) = g\gamma(x)\end{aligned}$$

Así, a partir de (21), $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)g^{-1}\phi_{\alpha\beta}(x)g$ y podemos poner $g = e$ para obtener el resultado deseado. ■

Con dos recubrimientos $\{\mathcal{U}_{\overline{\alpha}}\}$ y $\{\mathcal{U}_{\overline{\overline{\alpha}}}\}$ de $M$ de un cierto fibrado principal, $P$ tiene sus respectivas trivializaciones y funciones de transición. Podemos reemplazar estas por las trivializaciones $\{(\mathcal{V}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\{(\mathcal{V}_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ con funciones de transición $\phi_{\alpha\beta}$ y $\phi'_{\alpha\beta}$ con un recubrimiento común $\{\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{U}_{\overline{\alpha}} \cap \mathcal{U}_{\overline{\overline{\alpha}}}\}$.

TEOREMA 1.9. *Si $\{(\mathcal{V}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\{(\mathcal{V}_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ son trivializaciones de un fibrado principal, entonces existen aplicaciones $\lambda_\alpha \colon \mathcal{V}_\alpha \to G$ tales que*

$$\phi'_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\beta(x)\phi_{\alpha\beta}(x)(\lambda_\alpha(x))^{-1} \qquad x \in \mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta \tag{22}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\alpha$ existe una aplicación $\lambda_\alpha$ tal que $\phi'_\alpha(p) = \lambda_\alpha(p)\phi_\alpha(p)$ para $p \in \pi^{-1}(\mathcal{V}_\alpha)$. De este modo,

$$\phi'_\alpha(p)\phi'_\beta(p)^{-1} = \lambda_\alpha(p)\phi_\alpha(p)(\lambda_\beta(p)\phi_\beta(p))^{-1} = \lambda_\alpha(p)(\phi_\alpha(p)(\phi_\beta(p))^{-1})(\lambda_\beta(p))^{-1} \tag{23}$$

para $p \in \pi^{-1}(\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)$. Además, para todo $\mathcal{V} \in \{\mathcal{V}_\alpha\}$,

$$\lambda(p)\phi(pg) = \lambda(p)\phi(p)g = \phi'(p)g = \phi'(pg) = \lambda(pg)\phi(pg)$$

de modo que $\lambda(p) = \lambda(pg)$. Así queda probado que $\lambda$ solo depende de $x = \pi(p)$. Con esto, (23) se convierte en (22). ■

La importancia de las funciones de transición radica en el hecho de que pueden usarse para *construir* fibrados principales. En cierto modo, las funciones de transición nos dicen como deben "pegarse" las fibras unas con otras. Más específicamente, dados $M$, $G$, un recubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ y un conjunto de funciones de transición $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ cumpliendo la condición de compatibilidad (18), podemos construir $P$, $\mathcal{R}$ y $\pi$ con las propiedades necesarias y con estas mismas funciones de transición. Los fibrados principales construidos de este modo reciben el nombre de **fibrados principales coordenados**.

EJEMPLO 1.10. **La fibración de Hopf**. *Puede probarse que la esfera $S^3$ es un fibrado principal con base $S^2$ y fibra típica $U(1) \cong S^1$. A pesar de esto, la fibración de Hopf no es trivial ya que sabemos que $S^3 \ncong S^2 \times S^1$.*

## 2. El fibrado de referencias

En esta sección vamos a tratar con detalle un ejemplo muy importante de fibrado principal: el fibrado de referencias. Este fibrado tiene como base una variedad diferenciable $M$ y como fibra $\pi^{-1}(x)$ el conjunto de todas las bases de $T_xM$.

Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$. En cada uno de sus espacios tangentes, $T_xM$, consideremos el conjunto $F_xM$ de todas las bases ordenadas $(e_1, \ldots, e_n)_x$ de $T_xM$. Sea $F(M) = \bigcup_{x\in M} F_xM$. Llamaremos a $F(M)$ el **fibrado de referencias de** $M$ y puede dotarse de una estructura de variedad diferenciable. Sea $(\mathcal{U}, \mu)$ una carta de $M$ de modo que $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \nu)$ será una carta de $F(M)$ donde $\pi \colon (e_1, \ldots, e_n)_x \mapsto x$ y

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+n^2} \\ & p & \longmapsto & (\mu^i(x), e^j_k(x)) \end{array}$$

donde $e_k(x) = e^j_k(x)\ \frac{\partial}{\partial \mu^j}\Big|_x$.

DEFINICIÓN 2.1. *El **fibrado de referencias de** $M$ es $P = F(M)$ dotado de la proyección $\pi\colon F(M) \to M$ definida anteriormente. Sean $G = GL(n,\mathbb{R})$ y*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R}\colon & P \times G & \longrightarrow & P \\ & ((e_1,\dots,e_n)_x, (a^i_j)) & \longmapsto & (e_i a^i_1, \dots, e_i a^i_n)_x \end{array}$$

*De este modo el fibrado de referencias es $(F(M), M, \pi, GL(n,\mathbb{R}), \mathcal{R})$.*

Notamos que $\pi(p) = \pi(q)$ si y solo si $p \sim q$ y de las expresiones coordenadas es evidente que $\pi$ y $\mathcal{R}$ son diferenciables. Además, en $\mathcal{U}$,

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{U} \times G \\ & (e_1,\dots,e_n)_x & \longmapsto & (x, e^i_j(x)) \end{array}$$

de modo que $\phi(p) = e^i_j(\pi(p))$. En $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, $e^i_j \frac{\partial}{\partial \mu^i} = \overline{e}^k_j \frac{\partial}{\partial \overline{\mu}^k}$, quedándonos

$$\phi_{\alpha\beta}(x) = (e^i_j(x))(\overline{e}^k_l(x))^{-1} = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial \overline{\mu}^j}(x)\right) \tag{24}$$

En el fibrado de referencias, existe una 1-forma que toma valores en $\mathbb{R}^n$ que será muy útil para definir las conexiones lineales más adelante. Observamos que existe una correspondencia biyectiva entre referencias $p \in F_x M$ y aplicaciones lineales

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{u}_p\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T_x M \\ & (a^1,\dots,a^n) & \longmapsto & a^i e_i \end{array}$$

que es evidentemente un isomorfismo de espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 2.2. *La **forma de soldadura**, $\Sigma$, de $F(M)$ es una 1-forma en $F(M)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ dada por*

$$\Sigma_p(\xi_p) = \mathbf{u}_p^{-1}(\pi_*(\xi_p)) \qquad \xi_p \in T_p F(M).$$

TEOREMA 2.3. *(1) $\Sigma(\xi) = 0$ cuando $\xi$ pertenece al tangente de $\pi^{-1}(x)$, es decir cuando $\xi$ es horizontal.*
*(2) $\Sigma_{pg}\mathcal{R}_{g*}(\xi_p) = g^{-1} \cdot \Sigma_p(\xi_p)$, es decir $\Sigma$ es equivariante.*

*Notamos que en este caso, como $G = GL(n,\mathbb{R})$, el producto $g^{-1} \cdot \Sigma(\xi)$ denota el producto matriz por vector.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\pi_*(\xi) = 0$ cuando $\xi$ es tangente a $\pi^{-1}(x)$.
(2) $\Sigma_{pg}\mathcal{R}_{g*}(\xi_p) = \mathbf{u}^{-1}_{pg}\pi_*(\mathcal{R}_{g*}(\xi_p)) = (\mathbf{u}_p g)^{-1}\pi_*(\xi_p) = g^{-1}\Sigma_p(\xi_p)$.

■

# 3. Fibrados asociados

TEOREMA 3.1. *Dado un fibrado principal $(P, M, \pi, G, \mathcal{R})$, una variedad $F$ y una acción izquierda $\mathcal{L}\colon G \times F \to F$, se tiene que*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R}'\colon & (P \times F) \times G & \longrightarrow & P \times F \\ & ((p,f),g) & \longmapsto & (\mathcal{R}_g p, \mathcal{L}_{g^{-1}} f) \end{array}$$

*es una acción derecha en $P \times F$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'_h \circ \mathcal{R}'_g(p,f) &= \mathcal{R}'_h(\mathcal{R}_g p, \mathcal{L}_{g^{-1}} f) = (\mathcal{R}_h(\mathcal{R}_g p), \mathcal{L}_{h^{-1}}(\mathcal{L}_{g^{-1}} f)) \\ &= (\mathcal{R}_h \circ \mathcal{R}_g(p), \mathcal{L}_{h^{-1}} \circ \mathcal{L}_{g^{-1}}(f)) = (\mathcal{R}_{gh} p, \mathcal{L}_{h^{-1}g^{-1}} f) = \mathcal{R}'_{gh}(p,f)\end{aligned}$$

■

Ahora con $P \times F$, $G$ y $M$ podemos construir

(I) $E = (P \times F)/_G$, el cociente de $P \times F$ respecto $G$ con la proyección $\overline{\pi}\colon P \times F \to E$ y elementos $[(p,f)]$ con $(p,f) \sim (pg, g^{-1}f)$. Notamos que de nuevo abreviamos $\mathcal{R}_g p$ con $pg$ y $\mathcal{L}_g p$ con $gp$.

(II) Una aplicación $\pi_E\colon E \to M$ definida por $\pi_E \circ \overline{\pi} = \pi \circ p_1$ tal i como muestra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{p_1} & P \times F \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\pi}} \\ M & \xleftarrow[\pi_E]{} & E \end{array}$$

Teorema 3.2. *Podemos definir una estructura diferenciable en $E$ tal que*

*(1) $\pi_E$ es diferenciable,*
*(2) para cada $x \in M$, existe un entorno $\mathcal{U}$ i un difeomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \Psi\colon & \pi_E^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & \zeta & \longmapsto & (\pi_E(\zeta), \Phi(\zeta)) \end{array}$$

*donde $\zeta \in \pi_E^{-1}(\mathcal{U})$ y $\Phi\colon \pi_E^{-1}(\mathcal{U}) \to F$ es una aplicación diferenciable.*
*(3) $\Phi_{ij} = \Phi_i|_{\pi_E^{-1}(x)} \circ \left(\Phi_j|_{\pi_E^{-1}(x)}\right)^{-1}$ es una función de $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ diferenciable y $\Phi_{ij}(x) \subset \{\mathcal{L}_g \mid g \in G\} \subset \mathrm{Diff}(F)$.*

Demostración. Dado un cierto $\mathcal{U}$, definimos una biyección $\Psi\colon \pi_E^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ donde para $\zeta \in \pi_E^{-1}(\mathcal{U})$, $\Psi(\zeta) = (\pi_E(\zeta), \Phi(\zeta))$ con $\Phi(\zeta) = \mathcal{L}_{\phi(p)} f$ (recordamos que $\phi$ proviene de $\psi = (\pi, \phi)$). Notamos que, efectivamente, $\Phi$ solo depende de $\zeta$. Si definimos una aplicación $\eta\colon \mathcal{U} \times F \to \pi_E^{-1}(\mathcal{U})$ tal que $(x,f) \mapsto [(\psi^{-1}(x,e), f)]$, entonces $\Psi \circ \eta$ y $\eta \circ \Psi$ son identidades y por lo tanto $\Psi$ es biyectiva, de modo que es un difeomorfismo con lo que ya tenemos probado el punto (2). Ahora usando la aplicación $\eta$ tenemos para $\zeta \in \pi_E^{-1}(x)$

$$\Phi_i(\zeta) \circ \Phi_j^{-1}(\zeta) f = \mathcal{L}_{\phi_i(p)\phi_j^{-1}(p)} f \tag{25}$$

que muestra que $\Phi_{ij}$ solo depende de $x$, y que $\Phi_{ij}(x)$ está en $\{\mathcal{L}_g \mid g \in G\}$ y, en particular, es un difeomorfismo con lo que ya tenemos (3). Finalmente, como $\Phi_{ij} \circ \Phi_{jk} = \Phi_{ik}$ (condición de compatibilidad) podemos juntar las piezas $\pi_E^{-1}(\mathcal{U})$ para formar un fibrado principal coordenado a partir de $E$ de modo que, en particular, tiene una estructura diferenciable con $\pi_E$ diferenciable. ■

Definición 3.3. *Con $E = (P \times F)/_G$ dotado de la estructura conferida por el teorema anterior, decimos que $E$ es un **fibrado principal asociado a $P$ con fibra $F$**. Las $\Phi_{ij}$ reciben el nombre de **funciones de transición**. A menudo se*

*describe la ecuación (25) diciendo que las* $\Phi_{ij}$ *son las* ***funciones de transición asociadas a las*** $\phi_{ij}$ ***via la representación*** $\rho\colon G \to \{\mathcal{L}_g\}$.

Es importante notar que con las partes (1) y (2) del teorema anterior tenemos los ingredientes y condiciones descritos al principio del capítulo. Así, las trivializaciones locales nos dan secciones locales, las fibras por $x$ son subvariedades regulares cerradas de $E$ y para cada $x \in M$, $\Phi|_{\pi_E^{-1}(x)}$ es un difeomorfismo de $\pi_E^{-1}(x)$ en $F$. Además, ahora tenemos para cada $p \in P$, un difeomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \overline{\pi}_p & F & \longrightarrow & \pi_E^{-1}(\pi(p)) \\ & f & \longmapsto & [(p,f)] \end{array}$$

que satisface

$$\overline{\pi}_p(gf) = \overline{\pi}_{pg}(f)$$

TEOREMA 3.4. *El grupo de automorfismos para cada fibra* $\pi_E^{-1}(\pi(p))$ *es isomorfo a* $G$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, un automorfismo de una fibra es una aplicación de la forma

$$\overline{\pi}_{pg} \circ \overline{\pi}_p^{-1}$$

■

Ahora ya estamos en condiciones de presentar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.5. *Un* ***fibrado con grupo estructural*** $G$ ***y fibra*** $F$ *consiste en un grupo de Lie* $G$*, tres variedades* $E$*,* $M$ *y* $F$*, una aplicación exhaustiva* $\pi\colon E \to M$ *y una acción izquierda* $\mathcal{L}\colon G \times F \to F$ *de forma que se cumplan las hipòtesis del teorema 3.2.*

De acuerdo con esta definición, todo fibrado asociado a un fibrado principal es un fibrado por si mismo. Por otro lado tenemos el recíproco. Dado un fibrado, podemos definir su fibrado principal subyacente tomando $F = G$ y $\mathcal{L}$ el producto por la izquierda. Entonces podemos definir una acción derecha de $G$ en $E$ de modo que $E$ será un fibrado principal. Por tanto, el fibrado asociado con él con fibra $F$ se corresponderá con el fibrado inicial. En conclusión, todo fibrado es un fibrado asociado de su fibrado principal subyacente.

A continuación presentamos un lema que será necesario más adelante al tratar las transformaciones gauge referente a los fibrados asociados.

LEMA 3.6. *Sea* $E$ *un fibrado asociado a* $P$ *con fibra* $F$*. Entonces, existe una correspondencia biyectiva entre aplicaciones diferenciables* $\overline{\psi}\colon P \to F$ *tales que* $\overline{\psi}(pg) = g^{-1}\overline{\psi}(p)$ *y secciones* $\psi\colon M \to E$ *según el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\overline{\psi}} & F \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\pi}_p} \\ M & \xrightarrow{\psi} & E \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Dada una sección $\psi$, tenemos que

$$\overline{\psi} = \overline{\pi}_p^{-1} \circ \psi \circ \pi \tag{26}$$

es una aplicación de $P$ en $F$. Además, como $\overline{\pi}_p(gf) = \overline{\pi}_{pg}(f)$, $\overline{\psi}$ satisface la condición deseada. Recíprocamente, si $\overline{\psi}$ satisface la condición requerida, entonces (26) tiene el mismo valor en $p$ y en $pg$, de modo que (26) define $\psi$ como aplicación de $M$ en $E$. ■

# Capítulo 5
# Conexiones principales y transformaciones gauge

En este capítulo introduciremos el concepto de conexión en un fibrado principal. Esta nueva estructura no es más que una generalización de la conocida derivada covariante, que no es más que una conexión en el fibrado tangente a una variedad. Existen multitud de definiciones equivalentes de conexión principal, pero nosotros solo comentaremos tres de ellas poniendo una especial atención en la tercera: la 1-forma de conexión. Una vez definidas las conexiones principales, estaremos en condiciones de presentar la 2-forma de curvatura de una conexión a partir de la 1-forma de conexión correspondiente, que tendrá una especial importancia al escribir las ecuaciones de Yang-Mills en lenguaje geométrico.

Al final del capítulo hablaremos de las transformaciones gauge: los automorfismos de $P$ que dejan fija la base. Veremos múltiples caracterizaciones de las transformaciones gauge para acabar observando que la elección de un gauge es equivalente a la elección de una conexión en $P$.

## 1. Conexiones en fibrados principales

DEFINICIÓN 1.1. *Una* ***conexión en un fibrado principal*** $P$ ***con grupo*** $G$ *es una aplicación diferenciable*

$$\Gamma\colon P \longrightarrow \mathcal{L}(T_xM, T_pM) \qquad x = \pi(p)$$

*tal que*

*(1)* $\pi_* \circ \Gamma_p = id$ *para todo* $p \in P$
*(2)* $\Gamma_{pg}(v) = \mathcal{R}_{g*} \circ \Gamma_p(v)$ *donde* $v \in T_xM$, $g \in G$ *y* $pg = \mathcal{R}_g p$.

La propiedad (1) nos dice que las imágenes de los $T_xM$ son espacios vectoriales $n$-dimensionales ($n = \dim M$), mientras que la propiedad (2) nos dice que para puntos de la misma fibra, las imágenes de los $T_xM$ se aplican unos a otros mediante la aplicación tangente de $\mathcal{R}_g$.

DEFINICIÓN 1.2. *Los espacios $H_p = \Gamma_p(T_xM)$ reciben el nombre de* ***subespacios horizontales de*** *$T_pP$. Si $X$ es un campo vectorial en $M$, entonces $\overline{X}\colon p \mapsto \Gamma_p(X(\pi(p)))$ es un campo vectorial en $P$ que toma valores en $H_p$. Llamamos a este nuevo campo vectorial en $P$ el* ***levantamiento horizontal de*** *$X$* ***(por la conexión*** *$\Gamma$****).***

En términos de $X$, la propiedad (2) nos dice que $\overline{X}$ es invariante bajo la acción derecha de $G$ en $P$.

Dada una curva $\gamma$ inyectiva en $M$, sabemos que tiene un campo tangente $\dot{\gamma}\colon \mathbb{R} \to TM$, que puede ser extendido a un campo vectorial local $X$ en $M$ del cual *gamma* es curva integral. Sea $\overline{X}$ el levantamiento horizontal de $X$ por la conexión $\Gamma$. Si $p_0 \in P$ es tal que $\pi(p_0)$ pertenece a la imagen de $\gamma$, entonces tenemos que

$$\dot{\overline{\gamma}}(t) = (\overline{X} \circ \overline{\gamma})(t) \tag{27}$$

tiene una única solución que pase por $p_0$.

DEFINICIÓN 1.3. *La solución $\overline{\gamma}_{p_0}$ de la ecuación (27) que pasa por $p_0$ es el* ***levantamiento horizontal de la curva*** *$\gamma$* ***pasando por*** *$\pi(p_0)$ y los puntos de $\overline{\gamma}$ se dice que son* ***trasladados paralelamente*** *a lo largo de $\overline{\gamma}$.*

Es importante notar que esta construcción es una construcción local. Con un poco de esfuerzo extra podemos juntar estas piezas y construir el levantamiento horizontal de una curva entera.

TEOREMA 1.4. *Si $\overline{\gamma}_p$ es un levantamiento horizontal de $\gamma$, entonces $\mathcal{R}_g \circ \overline{\gamma}_p$ es un levantamiento horizontal de $\gamma$ para todo $g \in G$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata a partir de la ecuación (27) y la propiedad (2) de una conexión. ■

El teorema anterior nos dice que $\overline{\gamma}_{pg} = \mathcal{R}_g \circ \overline{\gamma}_p$. Esto quiere decir que la acción derecha del grupo $G$ sobre $P$ commuta con los desplazamientos paralelos. Así, fijada una curva $\gamma$ en $M$, una conexión $\Gamma$ nos da aplicaciones $\tau_\gamma$ de las fibras, el **transporte paralelo de las fibras**, definido como el traslado paralelo de puntos a lo largo del levantamiento horizontal de cualquier curva.

Sea $\gamma$ una curva cerrada que pasa por $x \in M$, entonces las aplicaciones $\tau_\gamma$ son difeomorfismos de la fibra $\pi^{-1}(x)$ en si misma. Si $C_x$ es el conjunto de todas las curvas $\mathcal{C}^\infty$ a trozos que pasan por $x \in M$, el correspondiente grupo de difeomorfismos de $\pi^{-1}(x)$ con $\tau_{\gamma_1} \cdot \tau_{\gamma_2} = \tau_{\gamma_1 \circ \gamma_2}$ y $\tau_\gamma^{-1} = \tau_{\gamma^{-1}}$ forma un grupo: $\mathcal{H}_x$, el **grupo de holonomia** de $\Gamma$ en $x$.

Dado un punto $p \in \pi^{-1}(x)$, existe un homomorfismo $\mathcal{H}_x \to G$ dado por $\tau_\gamma = pg$. La imagen es un subgrupo de $G$, $G_p$, llamado **grupo de holonomia** de $\Gamma$ en $p$. Está claro que $g \in G_p$ si y solo si $pg$ y $p$ están en el mismo levantamiento horizontal de alguna curva $\gamma$, es decir que $pg$ y $p$ pueden unirse mediante una curva horizontal.

TEOREMA 1.5. *Si $p, q \in \pi^{-1}(x)$, entonces $G_p$ y $G_q$ son subgrupos conjugados, y si, en particular, $p$ y $q$ están en el mismo levantamiento horizontal de alguna curva $\gamma$, tenemos que $G_p = G_q$.*

DEMOSTRACIÓN. Notamos por $p \sim q$ si puede conectarse $p$ con $q$ mediante alguna curva horizontal. Tenemos que $p \sim pb$. También $q = pa$ para algún $a \in G$. Entonces $q = pa \sim pba$. De modo que $q \sim pba$. Pero $p = qa^{-1}$. De modo que $q \sim qa^{-1}ba$. El caso particular se deduce de la transitividad de $\sim$. ■

El conjunto de puntos de $P$ que pueden ser unidos a un cierto punto $p \in P$ mediante una curva horizontal se llama **fibrado de holonomia de** $p$, $P(p)$. Está claro que $\Gamma$ divide $P$ en una unión disjunta de fibrados de holonomia.

TEOREMA 1.6. *El grupo de holonomia es el mismo subgrupo de $P$ para todos los puntos de un fibrado de holonomia.*

Volviendo al principio del capítulo, observamos que la definición de conexión dada puede escribirse de un modo ligeramente diferente: en lugar de centrar la atención en la aplicación $\Gamma$, nos fijamos en el conjunto de imágenes $H_p = \Gamma_p(T_xM) \subset T_pP$. De esta manera tenemos una **distribución horizontal diferenciable de dimensión** $n$, $\mathcal{D}_H \colon P \to \bigcup_{p\in P} H_p$. Remarcamos que también tenemos una **distribución vertical**, $\mathcal{D}_V$, cuyos espacios vectoriales $V_p$ son las espacios tangentes $m$-dimensionales a las fibras ($m = \dim G$). Si $H_p$ y $V_p$ son espacios horizontales y verticales respectivamente, entonces tenemos que $H_p \cap H_q = 0$. Por lo tanto $T_pP = H_p \oplus V_p$. De este modo podemos definir una conexión del siguiente modo:

PROPOSICIÓN 1.7. (Definición alternativa de conexión) *Una **conexión en un fibrado principal** $P$ es una distribución $n$-dimensional $\mathcal{D}_H$ en $P$ tal que para todo $p \in P$, $g \in G$, se tiene*

*(1')* $T_pP = H_p \oplus V_p$
*(2')* $H_{pg} = \mathcal{R}_{g*}H_p$

Con una conexión en un fibrado principal $P$, podemos construir otros objetos en $P$ a partir de la conexión. En particular, podemos construir una 1-forma en $P$ con valores en el álgebra de Lie de $G$, $\mathfrak{g}$, de modo que caracterice y a su vez esté totalmente determinada por la conexión $\Gamma$. Recordamos del capítulo anterior que gracias a la acción derecha $\mathcal{R}$ de $G$ en $P$, tenemos un morfismo de álgebras de Lie $\lambda \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ definido en términos de las aplicaciones tangentes $\mathcal{R}_{p*}$ de $T_eG$ en $T_pP$, de modo que en particular tenemos estas estructuras en el caso de que $P$ sea un fibrado principal. Además, como $\mathcal{R}_p$ es un difeomorfismo de $G$ en $\pi^{-1}(\pi(p))$, las aplicaciones tangentes $\mathcal{R}_{p*}$ son isomorfismos. Definimos (para cada $p$) una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \lambda_p \colon & \mathfrak{g} & \longrightarrow & T_pP \\ & \mathcal{X} & \longmapsto & \lambda(\mathcal{X})(p) \end{array}$$

que asocia $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$, el valor del campo vectorial fundamental asociado a $\mathcal{X}$ en $p$. Así, por la ecuación (13) tenemos que $\lambda_p$ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ con $T_p(\pi^{-1}(\pi(p))) = V_p$. Ahora, si $P$ tiene una conexión, entonces por (1'), tenemos las proyecciones $\mathbf{h}_p \colon T_pP \to H_p$ y $\mathbf{v}_p \colon T_pP \to V_p$ y podemos definir aplicaciones $\mathscr{A}_p$ de $T_pP$ en $\mathfrak{g}$ como

$$\mathscr{A}_p = \lambda_p^{-1} \circ \mathbf{v}_p \tag{28}$$

y una 1-forma diferenciable en $P$ con valores en $\mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{A}: & P & \longrightarrow & \Lambda^1(T^*P, \mathfrak{g}) \\ & p & \longmapsto & \mathscr{A}_p \end{array}$$

Esta 1-forma $\mathscr{A} \in \Omega(M, \mathfrak{g})$ recibe el nombre de **1-forma de conexión** de la conexión $\Gamma$. Vamos a ver algunas propiedades de esta forma de conexión.

TEOREMA 1.8. *$\mathscr{A}$ satisface las siguientes propiedades*

*(1) $\mathscr{A}_p(\xi) = 0$ cuando $\xi \in H_p$, es decir, $\mathscr{A}$ es una forma vertical*
*(2) Si $\xi = \lambda_p(\mathcal{X})$, se tiene que $\mathscr{A}_p(\xi) = \mathcal{X}$*
*(3) Para $\xi \in T_pP$,*

$$\mathscr{A}_{pg}(\mathcal{R}_{g*}\xi) = Ad_{g^{-1}}\mathscr{A}_p(\xi) \tag{29}$$

*o en otras palabras, $\mathscr{A}$ es $\mathfrak{g}$-equivariante.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Inmediato a partir de la definición de la 1-forma de conexión.
(2) $\xi \in V_p$, de modo que $\mathscr{A}_p(\xi) = \lambda_p^{-1}(\xi) = \mathcal{X}$.
(3) Si $\xi \in H_p$, entonces $\mathcal{R}_{g*}\xi \in H_{pg}$ por la propiedad (2') de modo que ambos lados de la ecuación desaparecen. Si $\xi$ es vertical, existe un único $\mathcal{X}$ tal que $\xi = \lambda_p(\mathcal{X})$ y aplicando la ecuación (14) tenemos que

$$\mathscr{A}_{pg}\mathcal{R}_{g*}(\lambda(\mathcal{X})(p)) = \mathscr{A}_{pg}(\lambda(Ad_{g^{-1}}\mathcal{X})(pg))$$

y por lo tanto, como $\mathscr{A}_{pg} \circ \lambda_{pg} = id$ y usando la propiedad (2), tenemos lo que queríamos:

$$\mathscr{A}_{pg}\mathcal{R}_{g*}(\xi) = Ad_{g^{-1}}\mathscr{A}_p(\xi)$$

■

Para terminar esta sección, probaremos que, efectivamente, podemos definir una conexión a partir de una 1-forma de conexión.

TEOREMA 1.9. *Sea $\mathscr{A}$ una 1-forma en el fibrado principal $P$ tomando valores en $\mathfrak{g}$ tal que satisface las condiciones (2) y (3) del teorema anterior. Entonces, existe una única distribución $\mathcal{D}_H$ en $P$ satisfaciendo las condiciones (1') y (2').*

DEMOSTRACIÓN. Definamos $H_p = \{\xi \in T_pP \mid \mathscr{A}(\xi) = 0\}$. Entonces, $H_p \cap V_p = 0$. Ahora, si $\xi \in T_pP$, sea $\mathscr{A}(\xi) = \mathcal{X}$. Sea $\eta \in V_p$ tal que $\eta = \lambda(\mathcal{X})$, entonces por (2), $\mathscr{A}(\eta) = \mathcal{X}$. Por tanto $\mathscr{A}(\xi) - \mathscr{A}(\eta) = 0$, o $\xi - \eta \in H_p$ y queda probado que todo elemento de $T_pP$ es la suma de un elemento de $H_p$ y uno de $V_p$.

De la condición (3) tenemos que si $\mathscr{A}(\xi) = 0$, entonces $\mathscr{A}_{pg}(\mathcal{R}_{g*}\xi) = 0$ lo que implica que $\mathcal{R}_{g*}\xi \in H_{pg}$ de modo que $\mathcal{R}_{g*}H_p \subset H_{pg}$ y por tanto $\mathcal{R}_{g*}H_p = H_{pg}$. ■

Resumiendo, hemos probado que una conexión en un fibrado principal queda determinada por una aplicación $\Gamma$, una distribución $\mathcal{D}_H$ o una 1-forma $\mathscr{A}$ con valores en $\mathfrak{g}$. En lo que sigue usaremos indistintamente las tres definiciones, aunque sin duda la que más utilizaremos es la de 1-forma de conexión, por su importancia al escribir las ecuaciones de Yang-Mills.

# 2. Curvatura

En esta sección asociaremos una 2-forma a cada conexión $\mathscr{A}$ del fibrado principal $P$: la llamada *forma de curvatura de la conexión*. Esta 2-forma tendrá un papel clave al escribir las ecuaciones de Yang-Mills. También provaremos que la curvatura de una conexión satisface una ecuación de estructura similar a la descrita en el capítulo 3.

DEFINICIÓN 2.1. *Sea $\omega$ una $s$-forma de un fibrado principal $P$ que toma valores en un espacio vectorial $W$. Si $P$ está dotado de una conexión, la* ***derivada covariante exterior*** *de $\omega$ es la $(s+1)$-forma $D\omega$ definida como*

$$D\omega(X_1,\dots,X_{s+1}) = \mathrm{d}\omega\circ\mathbf{h}(X_1,\dots,X_{s+1}) = \mathrm{d}\omega(\mathbf{h}X_1,\dots,\mathbf{h}X_{s+1})$$

TEOREMA 2.2. *(1) $D\omega$ es horizontal.*
*(2) Si $\omega$ es equivariante, $\mathrm{d}\omega$ y $D\omega$ también son equivariantes.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Obvio a partir de la definición.
(2) Podemos escribir la ecuación (29) como

$$(\mathcal{R}_g^*\omega_{pg})(\xi_1,\dots,\xi_g) = Ad_{g^{-1}}\omega_p(\xi_1,\dots,\xi_g).$$

Entonces, $\mathrm{d}\omega$ y $D\omega$ satisfacen la misma ecuación.

■

DEFINICIÓN 2.3. *Sea $\mathscr{A}$ una forma de conexión en un fibrado principal $P$. La* ***forma de curvatura de la conexión*** *es*

$$\mathscr{F} = D\mathscr{A}$$

Por el teorema anterior, la forma de curvatura es horizontal y $\mathfrak{g}$-equivariante. Antes de provar la ecuación de estructura de Cartan, necesitamos el lema siguiente.

LEMA 2.4. *Si $X$ es horizontal y $Y$ es vertical, entonces $[X,Y]$ es horizontal.*

DEMOSTRACIÓN. Escribimos $[Y,X] = \mathscr{L}_{\lambda(A)}X$, la derivada de Lie de $X$ respecto de $\lambda(A)$. El flujo de $\lambda(A)$ viene dado por $\mathcal{A}_t = \mathcal{R}_{\gamma_{\mathcal{A}}(t)}$, de modo que en este caso los valores de $X_p^{\#}$ son $(\mathcal{R}^*_{\gamma_{\mathcal{A}}(t)}X)(p)$. Pero $\mathcal{R}^*_{\gamma_{\mathcal{A}}(t)}$ aplica vectores horizontales en vectores horizontales, de modo que la derivada $D_0X_p^{\#}$ es horizontal. ■

TEOREMA 2.5. (ecuación de estructura) *Si $\mathscr{A}$ es una forma de conexión en un fibrado principal $P$ y $\mathscr{F}$ es su forma de curvatura, entonces*

$$\mathscr{F} = \mathrm{d}\mathscr{A} + \frac{1}{2}[\mathscr{A},\mathscr{A}] \tag{30}$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar que

$$\mathscr{F}(X,Y) = \mathrm{d}\mathscr{A}(X,Y) + \frac{1}{2}[\mathscr{A}(X),\mathscr{A}(Y)]$$

en los tres casos posibles: $X,Y$ son ambos horizontales, $X,Y$ son ambos verticales, $X$ es horizontal y $Y$ es vertical.

Supongamos que tanto $X$ como $Y$ son horizontales. En este caso el primer término de la derecha es nulo y obtenemos el resultado deseado.

Si $X, Y$ son vectores verticales, entonces $\mathscr{F}(X,Y) = 0$ ya que $\mathscr{F}$ es una forma horizontal. Sean $A$ y $B$ tales que

$$\Big\{ X = \lambda(A) Y = \lambda(B)$$

y por tanto el lado derecho de (30) nos queda

$$\frac{1}{2}[\mathscr{A}(\lambda(A)), \mathscr{A}(\lambda(B))] + \frac{1}{2}\left(\lambda(A)\mathscr{A}(\lambda(B)) - \lambda(B)(\lambda(\mathscr{A})) - \mathscr{A}([\lambda(A), \lambda(B)])\right)$$
$$= \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{2}(\lambda(A)B - \lambda(B)A - [A,B])$$

ya que $\lambda$ es morfismo de álgebras de Lie. Finalmente, como $A$ y $B$ tienen componentes constantes tenemos que tanto $\lambda(A)B$ como $\lambda(B)A$ son ambos cero.

Por último, supongamos que $X$ es horizontal y que $Y$ es vertical. Entonces tanto $\mathscr{F}(X,Y)$ como $[\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(Y)]$ se anulan. Entonces, tenemos que

$$\mathrm{d}\mathscr{A}(X,Y) = \frac{1}{2}(X\mathscr{A}(Y) - Y\mathscr{A}(X) - \mathscr{A}([X,Y]))$$

Pero $X\mathscr{A}(Y) = 0$ ya que $\mathscr{A}(Y)$ es constante, $Y\mathscr{A}(X) = 0$ ya que $\mathscr{A}(X) = 0$ y finalmente $\mathscr{A}[X,Y] = 0$ por el lema anterior. ■

Corolario 2.6. *Si tanto $X$ como $Y$ son horizontales, la ecuación (30) se escribe como*

$$\mathscr{F}(X,Y) = -\frac{1}{2}\mathscr{A}\left([X,Y]\right) \tag{31}$$

La ecuación (31) tiene una consecuencia interesante. En el caso que tanto $X$ como $Y$ sean horizontales se tiene que $[X,Y]$ es horizontal si y solo si $\mathscr{F} = 0$. Esto quiere decir que la distribución $\mathcal{D}_H$ es involutiva si y solo si $\mathscr{F} =$ y en este caso $P$ tiene una subvariedad integral de dimensión $n$. En caso que la forma de curvatura $\mathscr{F}$ sea nula diremos que la conexión es **plana**.

Consideremos ahora $\theta^i$, $\eta^i$ las coordenadas de dos formas diferenciales $\theta$, $\eta$ que toman valores vectoriales en una base $\{e_j\}$. Es un mero cálculo comprobar que

$$\theta^i \wedge \eta^j(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})[e_i, e_j]$$
$$\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi[\theta(\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(p)}), \eta(\xi_{\pi(p+1)}, \ldots \xi_{\pi(p+q)})]$$

En el caso particular $\theta = \eta = \mathscr{A}$ con $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, la ecuación (30) toma la forma

$$\mathscr{F}^k = \mathrm{d}\mathscr{A}^k + \frac{1}{2}c_{ij}^k \mathscr{A}^i \wedge \mathscr{A}^j \tag{32}$$

Corolario 2.7. *Para el caso de campos vectoriales verticales en $P$, la ecuación (32) se reduce a*

$$\mathrm{d}\mathscr{A}^k = -\frac{1}{2}c_{ij}^k \mathscr{A}^i \wedge \mathscr{A}^j$$

*que es la ecuación de Maurer-Cartan (12) que ya vimos en el capítulo 3 para 1-formas en un grupo de Lie.*

Corolario 2.8. (Identidad de Bianchi) *La forma de curvatura satisface la identidad de Bianchi*

$$D\mathscr{F} = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Si diferenciamos la ecuación (32) obtenemos

$$\mathrm{d}\mathscr{F}^k = \frac{1}{2}c_{ij}^k(\mathrm{d}\mathscr{A}^i \wedge \mathscr{A}^j - \mathscr{A}^i \wedge \mathrm{d}\mathscr{A}^j)$$

Para obtener $D\mathscr{F}(X,Y,Z)$ solo tenemos que evaluar $\mathrm{d}\mathscr{F}$ sobre campos vectoriales horizontales obteniendo el resultado que buscamos. ■

Terminamos la sección mostrando una ecuación para calcular la diferencial covariante exterior de $s$-formas horizontales $\mathfrak{g}$-equivariantes.

TEOREMA 2.9. *Sea $\mathscr{A}$ una forma de conexión en $P$. Sea $\omega$ una $s$-forma horizontal $\mathfrak{g}$-equivariante. Entonces tenemos que*

$$D\omega = \mathrm{d}\omega + [\mathscr{A}, \omega]$$

# 3. Transformaciones gauge de un fibrado principal

De entre todas las transformaciones posibles de un fibrado principal, las más importantes son los morfismos de fibrados principales. Estas aplicaciones llevan fibras a fibras. Nosotros nos centraremos en un tipo muy particular de morfismo entre fibrados principales: las transformaciones gauge.

DEFINICIÓN 3.1. *Un **automorfismo de un fibrado principal** $P$ es un difeomorfismo $F\colon P \to P$ tal que $F(pg) = F(p)g$ para $p \in P$ y $g \in G$. Claramente, un automorfismo de $P$ es un morfismo de fibrados. Si la aplicación correspondiente en la variedad base $M$ es la identidad, diremos que $F$ es una **transformación gauge de $P$ (o un automorfismo vertical de $P$)**. El conjunto de todas las transformaciones gauge forma un grupo $G_P$, llamado el **grupo gauge de $P$.***

Existen muchas caracterizaciones distintas de las transformaciones gauge. Más adelante veremos algunas de ellas.

Consideremos el fibrado asociado, $B_G$, el **fibrado gauge** con fibra $G$ y acción izquierda $\mathcal{L}$ dada por $\mathcal{L}_g h = ghg^{-1}$ (acción por conjugación).

LEMA 3.2. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de transformaciones gauge y el conjunto de secciones de $B_G$.*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el lema de la sección 4.3 para mostrar una correspondencia biyectiva entre elementos de $G_P$ y aplicaciones $\overline{\psi}\colon P \to G$ tales que $\overline{\psi}(pg) = \mathcal{L}_{g^{-1}}\overline{\psi}(p) = g^{-1}\overline{\psi}(p)g$. Así, dada $\overline{\psi}$, sea

$$F(p) = p\overline{\psi}(p)$$

Entonces, $F(pg) = pg\overline{\psi}(pg) = pgg^{-1}\overline{\psi}(p)g = p\overline{\psi}(p)g = F(p)g$ de modo que $F \in G_P$. Recíprocamente, si tenemos dada una transformación gauge $F$ tal que $F(p) = p\overline{\psi}(p)$, entonces $pg\overline{\psi}(pg) = F(pg) = F(p)g = p\overline{\psi}(p)g$, de modo que $\overline{\psi}(pg) = g^{-1}\overline{\psi}(p)g$ y $\overline{\psi}$ tiene la propiedad deseada. ■

Ahora podemos definir el producto $\overline{\psi}_1 \circ \overline{\psi}_2$ de aplicaciones $\overline{\psi}\colon P \to G$ del lema de la sección 4.3 mediante $\overline{\psi}_1 \circ \overline{\psi}_2(p) = (p\overline{\psi}_1(p))\overline{\psi}_2(p)$ y también podemos definir el producto de aplicaciones $\psi$ mediante el de las $\overline{\psi}$. De modo que tenemos el resultado siguiente.

TEOREMA 3.3. *El grupo $G_P$ de las transformaciones gauge de $P$ es isomorfo al grupo de las secciones de $B_G$ y al grupo de las aplicaciones $\overline{\psi}$ del lema de la sección 4.3.*

TEOREMA 3.4. *Dada una trivialización $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}$ de $P$ con funciones de transición $\phi_{\alpha\beta}$, existe una biyección entre transformaciones gauge de $P$ y trivializaciones de $P$.*

DEMOSTRACIÓN. Por un lado, suponemos que $F(p) = p'$. Definimos una trivialización $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ como $\phi'_\alpha(p) = \phi_\alpha(p')$. Ahora existe una aplicación

$$\lambda_\alpha\colon \mathcal{U}_\alpha \to G$$

tal que $\phi_\alpha(p') = \lambda_\alpha(x)\phi_\alpha(p)$ de modo que $\phi'_\alpha(p) = \lambda_\alpha(x)\phi_\alpha(p)$ para todo $\alpha$. Entonces, para $p \in \pi^{-1}(x)$,

$$\lambda_\alpha(x)\phi_{\alpha\beta}(x)\phi_\beta(p) = \lambda_\alpha(x)\phi_\alpha(p) = \phi'_\alpha(p) = \phi'_{\alpha\beta}(x)\phi'_\beta(p) = \phi'_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x)\phi_\beta(p)$$

de modo que

$$\lambda_\alpha(x)\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi'_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x) \tag{33}$$

Esta es la condición del teorema 1.9 para que $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ sea una trivialización de $P$. Por otro lado, dada una trivialización $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ definimos $F(p) = p'$ con $p'$ dado por $\phi_\alpha(p') = \phi'_\alpha(p)$ para algun $\alpha$. Si las aplicaciones $\lambda_\alpha$ satisfacen la condición (33), entonces empezando por la igualdad (33) y siguiendo con la serie de igualdades precedente en el sentido opuesto obtenemos que $\phi_\beta(p') = \phi_\beta(p')$ para todo $p$ de modo que $p'$ está bien definida. ■

A causa de este último resultado a menudo se describe una transformación gauge como un cambio de trivialización. Además, como existe una correspondencia natural entre trivializaciones locales y secciones locales de $P$, una trasformación gauge a menudo se describe como un cambio de secciones locales. Finalmente, a menudo se dice que una transformación gauge viene dada por una familia de funciones $\{\lambda_\alpha\}$ satisfaciendo la condición (33) ([**2**]).

OBSERVACIÓN 3.5. *Observamos que la fijación de un gauge se corresponde con una conexión en $P$. De este modo, elegir un gauge es equivalente a elegir una distribución horizontal. Del mismo modo la elección de un gauge también equivale a la elección de una 1-forma de conexión $\mathscr{A}$ en $P$. Esta última caracterización será la que nos permitirá escribir las ecuaciones de Yang-Mills en el siguiente capítulo.*

# Capítulo 6
# Teorías gauge y de Yang-Mills

Ahora ya tenemos toda la base matemática necesaria para poder atacar el problema de formular las ecuaciones de Yang-Mills en fibrados principales. Consideraremos el caso particular en que la variedad base $M$ es el espacio de Minkowski $\mathbb{M}^4$ o el espacio euclideo $\mathbb{R}^4$. Como todos los fibrados sobre $\mathbb{R}^4$ son trivializables (ya que la base es contráctil), la elección de una trivialización se reduce a la elección de un gauge global. Consideremos un grupo de Lie $G$, que llamaremos el grupo de gauge. A partir de aquí, podemos construirnos el fibrado principal $P$ a partir de la variedad base $M$ y el grupo estructural $G$. Un **campo gauge** es una conexión en el fibrado principal $P$. De este modo, podemos identificar un campo gauge con una 1-forma de conexión $\mathscr{A}$ o con sus componentes $\mathscr{A}_i$ en una base del fibrado cotangente de la variedad base:

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_i \mathrm{d}x^i$$

Ahora, la 2-forma de curvatura se define como la derivada exterior covariante

$$\mathscr{F} = \mathrm{d}\mathscr{A} + \frac{1}{2}[\mathscr{A}, \mathscr{A}]$$

En una base $\{\mathrm{d}x^i\}$, los coeficientes $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ de la 2-forma $\mathscr{F}$ se escriben como sigue

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{A}_\nu - \partial_\nu \mathscr{A}_\mu + [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu]$$

Con las estructuras definidas previamente ya estamos en condiciones de escribir las ecuaciones de campo. La primera ecuación corresponde a la identidad de Bianchi (análogo de las ecuaciones de Maxwell homogéneas):

$$D\mathscr{F} = \mathrm{d}\mathscr{A} + \frac{1}{2}[\mathscr{A}, \mathscr{F}] = 0$$

La segunda ecuación de Yang-Mills se escribe de forma análoga a como escribíamos el segundo par de ecuaciones de Maxwell, usando la 3-forma de corriente $j$ de modo que nos queda la ecuación

$$D * \mathscr{F} = j$$

Estas dos ecuaciones,

$$\begin{cases} D\mathscr{F} = 0 \\ D * \mathscr{F} = j \end{cases}$$

pueden obtenerse también a partir de un principio variacional mediante la **acción de Yang-Mills** formada a partir de la 2-forma de curvatura:

$$A_{YM} = \frac{1}{4}\int \mathscr{F} \wedge *\mathscr{F}$$

Es importante notar que el parecido con el caso del campo electromagnético es total, tanto en las ecuaciones como en el lagrangiano (en este caso $j = 0$). Notamos que en el caso del electromagnetismo, el grupo de gauge es $U(1)$, que es abeliano, y el fibrado $P$ es trivial; pero pueden darse casos en los que el grupo de gauge puede no ser abeliano o el fibrado no ser trivial. Un ejemplo de esto puede ser el caso de la cromodinámica cuántica, donde el grupo de gauge es $SU(3)$. También puede verse la teoría de la relatividad como una teoría gauge en la que el grupo de gauge es $SL(2, \mathbb{C})$. Existe cierta controversia acerca de si la relatividad es realmente una teoría gauge o no, ya que en este caso el grupo de gauge no es compacto. En cualquier caso, si admitimos que el grupo de gauge no sea compacto, la relatividad posee una simetría gauge.

# Conclusiones

En esta disertación se realiza una presentación de las herramientas matemáticas que intervienen en las formulaciones geométricas de las teorías gauge de la física y, en particular, en las teorías de Yang-Mills.

Estas herramientas son, esencialemente los fibrados principales y las conexiones. Como hemos visto, los grupos de Lie son una parte esencial de la teoría de fibrados principales. Debido a la estrecha relación entre grupos y álgebras de Lie, también hemos estudiado estos objetos. En la teoría de fibrados es fundamental el modo en como los grupos de Lie (y también las álgebras de Lie) actúan sobre variedades diferenciables, pues hemos visto que en la definición de fibrado principal, la fibra $G$ actúa por la derecha sobre el fibrado $P$.

Una vez hecha esta descripción, el trabajo concluye con la presentación de las ecuaciones de Yang-Mills en forma geométrica. Como caso particular, se ha descrito con todo detalle la teoría clásica del electromagnetismo de Maxwell.

# Bibliografía


[1] M. F. Atiyah. *Geometry of Yang-Mills Fields*. Accademia Nazionale dei Lince Scuola Normale Superiore, Pisa. 1979.

[2] M. Daniel y C. M. Viallet. "The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type". *Rev. Mod. Phys.* **52**(1) 175-197 (1980).

[3] M. Drechsler y M. E. Mayer *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories*. Lecture Notes in Physics Springer-Verlag, Austin. 1977.

[4] M. Göckeler y T.Schücker. *Differential geometry, gauge theories and gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge. 1987.

[5] Xavier Gràcia. *Geometria diferencial 2. Definicions i resultats*. Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya (2011).

[6] Dale Husemoller. *Fibre Bundles* (3rd Edition). Graduate Texts in Mathematics Springer, Haverford. 1994.

[7] Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Classics Library, Berkeley. 1996.

[8] J. A. Lázaro y N. Román-Roy. *Introduction to the theory of actions of Lie groups*. Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya.

[9] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics Springer, Washington. 2000.

[10] John M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics Springer, Washington. 1997.

[11] Kishore B. Marathe y G. Martucci. "The Geometry of Gauge Fields". *J. Geom. Phys.* **6**(1) 1-106 (1989).

[12] P. K. Mitter y C. M. Viallet. "On the Bundle of Connections and the Gauge Orbit Manifold in Yang-Mills Theory". *Commun. Math. Phys.* **79** 457-472 (1981).

[13] James R. Munkres. *Topology* (2nd Edition). Prentice Hall, Massachusetts. 2000.

[14] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds* (2nd Edition). Universitext Springer, Paris. 2010.

[15] Robert H. Wasserman. *Tensors and Manifolds With Applications to Physics* (2nd Edition). Oxford University Press, Oxford. 2004.