



Treball de fi de màster

Títol: PAPIROFLÈXIA I GEOMETRIA A PRIMER DE ESO

Cognoms: VALERO LANAU

Nom: PEDRO

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat,
Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemàtiques – Grup MA2

Director/a: Albert Compta

Data de lectura: 27/06/2013

Índex

1	Introducció	3
2	Definició i Context del problema.....	4
2.1	La Geometria a l'Ensenyament.....	4
2.2	La situació actual de l'ensenyament de la Geometria	5
2.3	L'elecció del recurs.....	7
2.4	La Papiroflèxia	8
2.4.1	Una mica d'Història	8
2.4.2	Classificacions	8
2.4.3	L'Origami a l'Educació i a la Geometria.....	9
3	Descripció de la solució.....	10
3.1	Entorn i criteris generals de les sessions	10
3.2	Descripció de les sessions.....	12
3.2.1	Primera Sessió: Conceptes bàsics	12
3.2.2	Segona Sessió: Eina de Mesura.....	14
3.2.3	Tercera i Quarta sessions: l'Ocellet de paper.....	15
3.2.4	Cinquena sessió: Els Polígons Regulars.....	17
3.2.5	Sisena sessió	18
3.2.6	Setena sessió: Avaluació	18
4	Resultats.....	21
4.1	Resultats de cadascuna de les sessions.....	21
4.2	Observacions generals.....	27
4.3	Resultats de l'avaluació.....	28
5	Conclusions	29
6	Bibliografia	30
7	Annexos.....	31
7.1	Annex 1: Instruccions per a la construcció de l'ocellet de paper	31
7.2	Annex 2: Construcció polígons regulars a partir de DIN A4	32
7.3	Annex 3: Construcció de polígons regulars amb la tira de paper	33
7.3.1	Triangle Equilàter:	33
7.3.2	Quadrat:	33
7.3.3	Pentàgon regular:	33

1 Introducció

Les matemàtiques ja no es poden ensenyar com un tema fred i auster, sinó de manera dinàmica i accessible, comprensible i amena. S'han d'ensenyar com el que són: quelcom que tothom pot gaudir i apreciar. Hauria d'existir una tendència per part del docent a fer-les el més concretes i lúdiques possibles, sense oblidar una de les seves característiques principals: l'abstracció.

Per això, s'han de trobar diferents estratègies i recursos per a l'ensenyament d'aquesta matèria.

En particular, si agafem el bloc curricular d'Espai i forma, ens trobem potser davant la part de les matemàtiques més intuïtiva, concreta i lligada a la realitat. Al Decret 143/2007, es defineix el contingut que s'ha d'ensenyar a cada curs.

No obstant, la realitat és que la geometria, segons se'ns descriu al estudi "*Perspectives of the teaching of geometry for the 21st century*" (Mammana – Villani, 1998), ha perdut mica en mica la seva posició central dins l'ensenyament de les matemàtiques, passant a ser "la gran oblidada"¹ del bloc curricular.

Les raons que ens han fet arribar fins aquest punt han estat molt diverses, però el fet és que aquesta situació ha provocat que fins i tot existeixi una certa por per part de l'alumnat a aquesta matèria. Com es pot aconseguir resoldre aquest problema, canviar aquesta tendència?

La utilització de nombrosos recursos, sobretot del tipus TIC, està intentant remarcar la part més concreta de la geometria, facilitant les representacions de i una interacció més dinàmica entre l'alumne i les figures geomètriques.

No obstant, la realitat de crisi actual deixa patent una dificultat cada cop més gran per part de les famílies i dels centres educatius d'aconseguir eines informàtiques pels alumnes.

Cal doncs intentar utilitzar la imaginació per trobar recursos quotidians que estiguin a l'abast de tothom i que siguin pràctics en l'objectiu de facilitar l'aprenentatge.

L'objectiu d'aquest TFM és doncs el de proposar la utilització de la tècnica de la Papiroflèxia com un possible recurs que podria acomplir les característiques esmentades.

En concret, el treball es centra en el contingut Curricular d'Espai i Forma de Primer de ESO, buscant com a objectius més concrets la manipulació i la transformació de la geometria en una activitat més lúdica, i que la porti cap a un terreny més familiar per part de l'alumnat.

Els objectius que es perseguiran són doncs:

- ✓ Dotar a l'alumne i al professor d'un recurs on la pràctica i el tractament visual ajudaran a entendre els conceptes
- ✓ Desenvolupar el sentit artístic de l'alumne, amb la construcció de figures de la naturalesa
- ✓ Relacionar aquestes activitats amb l'estudi de les propietats geomètriques

S'ha posat en pràctica un conjunt d'activitats a tot un curs de Primer de ESO, compost per cinc classes, amb alumnes de tots els nivells i de procedències ben diverses, amb materials que han estat fruit de diferents recerques bibliogràfiques i de l'anàlisi personal d'algunes figures de papiroflèxia ben típiques.

Analitzarem els resultats obtinguts, tot i remarcant els errors comesos i les millores que s'hi podrien aplicar.

En cap cas, l'objectiu d'aquest TFM és el de criticar els recursos existents actualment a la majoria de centres de secundària per a l'ensenyament de la Geometria. El que es busca és l'anàlisi d'un d'aquests recursos que no se sol emprar.

¹ *Sobre la demostración en la Enseñanza/Aprendizaje de la Geometría y la formación de profesores*, Enrique de la Torre Fernández, 2004

2 Definició i Context del problema

2.1 La Geometria a l'Ensenyament

Hi ha hagut nombroses teories i corrents didàctiques que han anat apareixent on s'analitza la manera de com s'han d'ensenyar les Matemàtiques, com per exemple l'Educació Matemàtica Realista de Hans Freudenthal o el mètode d'ensenyar Geometria que ens proposa el matrimoni Van Hiele. El que tenen en comú moltes d'aquestes teories educatives és la idea que per ensenyar resulta molt important la utilització de situacions realistes, enteses com a situacions raonables, realitzables o imaginables, en forma concreta per part de l'alumne.

En aquestes corrents, s'insisteix en que els alumnes han d'aprendre Matemàtiques d'una manera activa, fent i participant. Per això, els contextos i les situacions realistes han de ser el punt de partida del procés de matematització dels alumnes. El professor ha d'aconseguir doncs portar el bloc que estigui començant cap a un món proper a l'alumne, i que li resulti ben concret.

Diversos autors han analitzat els diferents nivells de comprensió en el procés d'aprenentatge (Van Hiele, Van Den Heuvel-Panhuizen), però tots coincideixen en el fet que les situacions realistes seran de gran ajuda a l'hora de fer la transició d'un nivell cap al següent. Per això, s'han d'escollir bé aquells recursos que ens ajudin en aquesta funció i que a més permetin interrelacionar els diferents blocs curriculars, així com relacionar les Matemàtiques amb d'altres matèries.

Pel que fa a la Geometria, Freudenthal la considerava com una de les millors oportunitats per aprendre a matematitzar la realitat, per aprendre a descobrir. La Geometria, com el seu nom indica (geo-metria, mesura de la Terra), està molt relacionada amb l'estudi de l'espai que ens envolta, i per tant, el seu ensenyament també hauria d'estar-hi molt relacionat. La Geometria és la Ciència que permet estudiar l'Espai i la Forma, i es pot considerar com un punt de trobada entre la Matemàtica com una teoria i la Matemàtica com una font de models.

Hem de tenir en compte que el potencial que té aquesta matèria en els alumnes és doncs enorme, degut als sentiments estètics i de simetria que es desperta en ells des dels primers cursos, quan es troben analitzant i identificant les figures més senzilles.

La Geometria pot ser una molt bona aliada per tal d'introduir les primeres demostracions als nostres alumnes, i que ajudarà a desenvolupar competències bàsiques com la capacitat de raonament inductiu i deductiu, d'abstracció i sobretot d'intuïció.

Segons el Decret de Currículum 143/2007 pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de la ESO, pel que fa a l'espai i forma en el Primer Curs, *cal desenvolupar l'anàlisi de les característiques i propietats de les figures de dues i tres dimensions; localitzar i descriure relacions espacials; identificar i aplicar transformacions geomètriques, i utilitzar la visualització i models geomètrics per resoldre problemes*. Més endavant, aquest decret detalla amb més precisió els processos i continguts que es poden observar en la taula de la Figura 1.

Els continguts descrits identifiquen, en principi, uns coneixements bàsics que hauran de servir pel correcte aprenentatge del bloc d'espai i forma en els cursos següents.

Coneixent doncs els continguts del bloc curricular en el primer curs de la ESO, se'ns planteja la pregunta de com s'han d'ensenyar aquests continguts? Com han d'aprendre els alumnes aquesta informació?

Hi han moltes discussions entorn aquest tema, on uns consideren que és millor ensenyar la Geometria d'una manera més clàssica, més euclidiana, basant-se molt en la geometria del triangle. D'altres consideren que la Geometria s'ha d'ensenyar des d'un punt de vista més analític i algebraic ("à bas Euclide" Dieudonné 1969), no donant tanta importància als aspectes més visuals. Aquestes dues vessants enfronten un aprenentatge més visual i intuïtiu a un aprenentatge més abstracte que comporta una immersió en un món de càlculs i símbols que allunya l'alumne dels aspectes concrets que han de tenir les matemàtiques.

BLOC 3		PROCESSOS I CONTINGUTS: Espai i forma		ESO: primer cycle
Processos	Processos a desenvolupar en tots els cursos	Específics per continguts		
		1. Resolució de problemes 2. Raonament i prova 3. Comunicació i representació 4. Connexions		
Continguts	Anàlitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques	Comuns a tots els continguts		
		- Organització del pensament matemàtic propi (3). - Comunicació del pensament matemàtic propi a companys i professors i contrast amb el dels altres(3). - Connexions amb altres blocs de matemàtiques i amb altres àrees (4) (*)		
		Primer curs	Segon curs	
	Localitzar i descriure relacions espacials mitjançant coordenades geomètriques i altres sistemes de representació	-	- Representació (3) de figures geomètriques en un sistema de coordenades per ajudar a la descripció(3) de relacions espacials.	
	Aplicar transformacions i utilitzar la simetria per analitzar situacions matemàtiques	- Descripció(3) de grandària, posició i orientació de figures. - Detecció (4) de simetries en l'entorn que ens envolta (natura, construccions...) i fer-ne la seva representació (3).	- Descripció (3) de grandària, posició i orientació de figures a partir de mosaics i elements de l'entorn real (4). - Aplicació (2) dels teoremes de Tales i Pitàgores en la resolució de problemes (1) relatius a obtenir mesures. - Marc històric dels teoremes de Tales i Pitàgores (4)	
	Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes	- Dibuix (3) d'objectes geomètrics a partir de dades establertes: longituds i mesura d'angles mitjançant instruments de dibuix habituals, regla, escaire, compàs i transportador... - Representació (3) plana d'objectes en la resolució de problemes d'àrees. - Reconeixement (4) d'objectes en contextos no matemàtics (4) com l'art, les ciències i la vida quotidiana.	- Representació (3) plana d'objectes tridimensionals en la resolució de problemes (1) d'àrees i volums. - Ús (2) d'eines visuals en la representació i resolució de problemes (1) de la vida quotidiana. - Construcció, composició i descomposició (3) d'objectes complexos de dues i tres dimensions. Ús de croquis amb paper i llapis, models geomètrics i programes informàtics dinàmics. - Ús (2) de models geomètrics per representar i explicar relacions numèriques i relacions algebraïques.	

No estem aquí per analitzar a fons cadascuna d'aquestes vessants, ja que aquest podria ser el tema (i ha estat el tema) d'estudis sencers. El que es considera és que, utilitzant el sentit comú, en el primer curs de la ESO on els alumnes s'han de centrar en la *identificació* i la *descripció* dels elements més bàsics de la geometria plana, el més senzill per fer que la matèria sigui atractiva és intentar desenvolupar el descobriment, la descripció i la comprensió del món en el que l'alumne viu. Per això, considerem que és més adient començar per un ensenyament més experimental, que mica en mica els permetrà anar cap un anàlisi i una capacitat de modelització de la realitat.

És doncs a través de l'estudi de l'espai físic i els objectes que l'alumne s'endinsarà cap a les idees més abstractes i cap al pensament més analític i algebraic que es reclamen a les matemàtiques més modernes.

Tota aquesta teoria és molt bonica sobre el paper, però quina és la realitat en quant a coneixements en Geometria en els nostre centres?

2.2 La situació actual de l'ensenyament de la Geometria

Per tal de veure la situació actual de l'ensenyament de la geometria a l'ESO, és interessant veure la perspectiva que tenen els mateixos docents sobre aquest tema. En aquest sentit, si ens centrem en les conclusions de l'estudi realitzat per S. Pérez y G. Guillén a la Universitat de València² sobre aquest tema, veiem que als professors els hi agrada la geometria, per norma general, degut al fet que la geometria es pot connectar molt bé amb l'entorn, que és una ciència molt interdisciplinària que està molt ben relacionada amb altres matèries com Tecnologia, Física o Plàstica. Tot i així, es remarca en aquest estudi la dificultat d'ensenyar la matèria.

S'insisteix en el fet que els alumnes arriben a la ESO amb un nivell de Geometria molt baix, amb errors conceptuals importants. Aquest nivell deficient es pot explicar fàcilment pel fet que

² Sergio Pérez y Gregoria Guillén (2007) *Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesoras de secundaria en relación con la Geometría y su enseñanza*

la Geometria, junt amb l'Estadística i la Probabilitat, són els blocs curriculars que se solen eliminar del programa quan els professors no tenen temps d'impartir-ho tot.

A més, es considera que els alumnes han d'arribar de l'Educació Primària amb uns coneixements de base sobre Geometria Plana, que actualment no tenen, i per tant és necessari fer un repàs a aquests conceptes.

Aquesta tendència a tenir un paper secundari per part de la geometria està present en la gran majoria de sistemes d'educació, i els grans responsables d'aquesta situació són els docents. Un dels motius és la formació més aviat pobre i poc coherent en Geometria que han rebut molts dels docents que estan actualment impartint classe a les aules. La història es repeteix doncs en les generacions d'alumnes que tenim actualment a les aules.

Aquest caràcter "secundari" que ha adquirit el bloc curricular d'Espai i Forma provoca a més una manca de recursos per part dels docents en l'ensenyament de la Geometria, degut segurament a un desconeixement dels mateixos, centrant-se en molts casos en recursos més clàssics com ara els llibres de text, els quaderns d'exercicis i les eines de dibuix (regla i compàs).

És evident que aquests recursos són necessaris, que s'ha de saber dibuixar els principals elements geomètrics amb regla i compàs, però hi ha un bon nombre de docents que utilitzen la imaginació i els recursos que tenen el seu abast per tal d'apropar la Geometria a la vida quotidiana dels alumnes.

Pel que fa a la realitat del centre on s'ha posat en pràctica el TFM, només hi ha un professor que imparteix matemàtiques a tots els grups de primer de ESO. Per tant, les limitacions i la perspectiva que es té sobre la situació en l'ensenyament de la Geometria és molt subjectiu. Tot i així, després de nombroses hores d'observació a l'aula i d'haver aplicat el recurs presentat en aquest treball, es comproven que moltes de les afirmacions del docent són ben certes.

El primer que constata el professor, com a l'estudi esmentat, és la presència d'errors conceptuals de base molt importants.

Un altre aspecte és que pels alumnes, la matèria de Geometria sol ser una matèria molt difícil i que els hi costa interessar-s'hi per aquest motiu. Segurament, això és degut a que s'ha dedicat massa poc temps a la impartició del bloc d'Espai i Forma en els cursos anteriors de Primària. En aquest sentit, el docent insisteix que ell intenta cada any donar molta importància a aquest bloc curricular, potser pel fet que en un temps va fer de delineant i per tant sap captar molt bé l'atractiu estètic de la matèria.

Pel que fa als recursos que utilitza, el docent es troba en un punt en que ha d'anar cap endarrere: des de fa uns anys, ho tenia estructurat en sessions centrades en la utilització del programa Geogebra. S'havia decantat per aquest programa, no només pel domini que en tenia i la potència de l'eina, sinó també pel fet que existien unes subvencions pels alumnes que permetien que quasi tots poguessin disposar d'un ordinador, i per tant poguessin construir ells mateixos les figures demanades. Els alumnes s'havien convertit en elements actius de la classe. Degut a les retallades, aquestes subvencions s'ha suprimit, i per tant els alumnes ja no disposen de l'eina que els hi facilitava el descobriment de la matèria.

En aquest punt, el docent es troba que encara que segueixi utilitzant l'ordinador i explicant com es construeix la figura mentre els alumnes prenen apunts, ja no són els alumnes els principals protagonistes en el seu aprenentatge. Aquesta situació pot provocar desinterès per part dels alumnes, i per tant el no aprenentatge de les nocions que es volen transmetre.

Queda doncs ben clar que s'han de trobar recursos imaginatius, que no suposin un cost pels alumnes, i que permetin arribar als objectius del docent. Analitzem alguns dels recursos existents en aquest moment, així com les característiques que tenen o haurien de tenir aquests recursos.

2.3 L'elecció del recurs

Als apartats anteriors s'ha deixat ben clar el desig d'ensenyar la Geometria d'una forma més experimental, de manera a que els alumnes arribin a veure-la com la ciència de l'Espai, com un mètode de visualització i de representació que suposarà finalment un punt de trobada entre la matemàtica més teòrica i abstracta i la matemàtica com a Model. Per atènyer aquests objectius, el professor ha d'organitzar el curs tenint en compte els "interessos i preferències dels alumnes" (Santaló, 1993), i utilitzar els materials o recursos didàctics que consideri adients, de manera a que ajudin a construir i entendre els conceptes.

Segons Coriat³, les condicions generals que ha de tenir un recurs adient són: disponibilitat en el moment que es decideixi utilitzar-lo, equipament suficient per tots els alumnes, certa pràctica per part del professor i dels alumnes abans de començar a raonar-hi de forma matemàtica, i per últim una temporalització adequada que permeti extreure conseqüències a la majoria dels alumnes en els moments previstos. A més el recurs s'ha d'adaptar a les diferents capacitats i nivells de coneixement previs de l'alumne, ha de fomentar el seu interès i facilitar l'aprenentatge.

El paper compleix totes aquestes característiques.

A més, tractant-se d'un curs on els nois tenen una mitja d'edat compresa entre els dotze i tretze anys, encara que sigui un curs de Secundària, quan s'està a classe, el docent se n'adona que en moltes ocasions encara està tractant amb nois, als quals els hi encanta jugar. El joc segueix tenint un paper molt important a les seves vides, encara que mica en mica deixarà l'espai a d'altres interessos més típics de l'adolescència.

Aquestes observacions realitzades durant les pràctiques al centre, em van fer pensar que la utilització d'un recurs més lúdic podria ser un bon aliat per a portar els alumnes cap a l'aprenentatge desitjat pel docent. Un recurs lúdic pot fer que l'alumne quedi satisfet, permetent que ell mateix construeixi el seu propi coneixement, tenint ganes d'anar a classe de Matemàtiques per aprendre Geometria.

Tenint en compte també que al pati es va observar com els alumnes jugaven entre ells amb una figura de paper (menjacocos), i que m'havia cridat molt l'atenció una obra que havia llegit d'una professora italiana⁴ que ensenyava als seus alumnes utilitzant com a recurs la papiroflèxia, vaig plantejar-me la utilització de la papiroflèxia com a recurs per aprendre Geometria.

L'elecció de la utilització del paper com a material didàctic proporciona de fet una implicació de l'alumne, fent-lo un actor actiu en el desenvolupament de la sessió, i permetent una manipulació que facilitarà l'adquisició de les idees i dels coneixements matemàtics.

És un element accessible i que apropa les matemàtiques a la vida quotidiana dels estudiants.

D'altres elements positius que desenvolupa la papiroflèxia són la motricitat de l'alumne (poder d'observació, atenció al detall, perfecció en els plecs, destresa i exactitud, concentració), l'autoestima (satisfacció en veure la peça realitzada), la superació del fracàs, la col·laboració entre els alumnes (quan un acaba la figura, li encanta ajudar els altres), el desenvolupament de la creativitat...

El docent amb qui es va posar en pràctica aquest recurs, va trobar també que era un moment idoni per tal d'aplicar aquest recurs, degut a les carències econòmiques a les quals s'estava veient sotmès el centre i, en conseqüència, els alumnes.

Per totes aquestes raons, es va escollir la utilització del paper com a recurs didàctic a l'hora d'impartir el bloc curricular d'Espai i Forma. Però abans d'atacar la solució desenvolupada, cal que ens endinsem en els orígens i les bases teòriques d'aquest art.

³ CORIAT (1997), *Materiales, recursos y actividades: un panorama*

⁴ Stella Ricotti, 2011, *Geometria i Origami*

2.4 La Papiroflèxia

2.4.1 Una mica d'Història

L'Origami és l'art japonès de fer figures mitjançant el plegat del paper. La paraula *Origami* té el seu origen en vocables japonesos "oru" (plegar) i "kami" (paper). Durant la seva història, hi ha hagut una evolució en la manera de denominar aquest art, al principi se'l va denominar "Kami", i després "Orikata" (Kata vol dir exercicis). No va ser fins el 1880 que es va denominar "Origami".

A casa nostra, es pot utilitzar el terme "papiroflèxia" que té els seus orígens en els vocables "papyrus" (paper) i "flectere" (doblegar), encara que alguns, com Miguel de Unamuno, van utilitzar d'altres termes com el de "Cocotologia".

L'origen del plegat del paper està ben lluny de ser clar i conegut (<http://www.mvg-ori.nl/ori-lists/history.htm>). El que sí que és segur és que està ben condicionat per l'origen del paper, que va ser inventat pels xinesos al segle II D.C., i que no va arribar al Japó fins el segle VII D.C.. És aquí on es va integrar a la tradició, formant part del divertiment de les classes més adinerades, ja que eren les úniques que es podien permetre el luxe d'aconseguir paper.

Així doncs, durant els períodes Heian (794-1183) i Kamakura (1183-1333), "només la noblesa o aquells que eren molt rics podien tenir els mitjans suficients per poder-ne entretenir amb l'Origami" (Yoshizawa – revista The Origamian vol.3 1963).

No és fins el període Muromachi (1338-1573) que el paper esdevé més accessible i l'Origami esdevé una forma de distinció social entre els individus mitjançant el tipus d'ornaments de paper que cadascú portava.

El període Tokugawa (1603-1867) va ser el període del "boom" de la Papiroflèxia. És en aquest període on apareixen els que semblen ser els primers llibres amb les primeres instruccions per doblegar el paper ("Chusingura Orikata" i "Sembarazu Orikata", 1797).

Els àrabs també van practicar aquesta tècnica, que van aprendre dels seus esclaus xinesos sobre el segle VIII. Per tant, la Papiroflèxia va estar molt present a la Península fins a la *Reconquesta*. La seva influència hi va ser residual fins a principis del s.XX, on el gran impulsor a la Península i a Sud-americà va ser Miguel de Unamuno.

És cap a la segona meitat del segle XIX que passem de la Papiroflèxia més Clàssica (Orikata) a la Papiroflèxia moderna (Origami). En el Orikata, estava permès la utilització de tisores, de cola i de pintura, mentre que a l'Origami modern més estricte estan totalment prohibits.

Ja en el segle XX, n'Akira Yoshizawa (1911-2005) ha estat el gran geni de l'Origami Modern. Junt amb en Samuel Randlett, ha estat el creador del sistema de símbols que s'utilitza per realitzar els diagrames de les figures de paper.

Evidentment hi ha hagut d'altres grans origamistes com ara en Isao Honda, Vicente Solórzano, Vicente Palacios, Montroll, Nakano, i un llarg etcètera.

2.4.2 Classificacions

Existeixen diverses classificacions d'aquest art segons:

- Finalitat: Artístic o educatiu
- Forma del paper utilitzat: quadrat, rectangle, tires
- Quantitat de peces implicades: tradicional o modular
- Regles d'utilització: es permet o no tallar, enganxar...

Les figures també es poden classificar en funció de les bases sobre les quals hagin estat desenvolupades. Aquestes bases sempre es desenvolupen a partir d'un full de paper quadrat i són cinc: cometa, peix, ocell, granota i bomba d'aigua. Aquestes són les bases més tradicionals, però actualment se'n venen desenvolupant cada cop més segons la complexitat de les figures i el desenvolupament de les eines informàtiques.

A finals del segle XIX, el pedagog alemany Friedrich Fröebel va ser un dels primers en incorporar i desenvolupar la Papiroflèxia com a recurs didàctic a les seves aules. Ràpidament aquesta tendència es va escampar als jardins d'infància japonesos com a recurs per l'aprenentatge de les figures geomètriques.

Des de llavors, no han deixat d'aparèixer nombroses publicacions sobre els beneficis d'aquest art en l'educació.

Una de les matèries on més presència ha tingut i on més estudis s'han desenvolupat ha estat a les Matemàtiques.

En els últims anys, s'ha utilitzat aquest art per realitzar demostracions geomètriques, per resoldre equacions de tercer grau, o fins i tot per realitzar operacions geomètriques que no es podrien aconseguir utilitzant el regle i el compàs, com per exemple la trisecció de l'angle, o bé duplicar el volum d'un cub qualsevol. S'ha estudiat a fons les propietats geomètriques dels mapes de cicatrius que deixen les figures, fins a arribar al punt en què l'aplicació d'una metodologia específica permet arribar a crear quasi qualsevol forma. Totes aquestes metodologies es basen en una sèrie de teoremes que resumeixen el que és possible arribar a fer.

Les primeres publicacions matemàtiques que utilitzaven la papiroflèxia per demostrar construccions geomètriques van aparèixer a finals del segle XIX i principis del segle XX, amb autors com T.Sundara Rao⁵, Margarita P.Beloch.

Ja cap a finals del segle XX, els autors Jacques Justin (1989) i finalment en Huzita-Hatori (1991) van aconseguir determinar els axiomes geomètrics de la papiroflèxia. Aquests axiomes permetran analitzar la geometria de qualsevol figura d'Origami amb 6 plecs bàsics:

1. Axioma 1: Donats dos punts P i Q, es pot realitzar un plec que els uneixi. Un únic plec passa pels 2 punts P i Q.
2. Axioma 2: Donats dos punts P i Q, es pot realitzar un plec que situï P sobre Q. Només un plec portarà en punt P sobre el punt Q.
3. Axioma 3: Donats un punt P i una recta r, es pot realitzar un únic plec perpendicular a r que passi per P.
4. Axioma 4: Donades dues rectes r i s, es pot realitzar un únic plec que situï r sobre s.
5. Axioma 5: Donats dos punts P i Q i una recta r, podem realitzar un únic plec que situï P sobre r i que passi per Q.
6. Axioma 6: Donats dos punts P i Q i dues rectes r i s, es pot realitzar un únic plec que situï P sobre r i Q sobre s.

Aquests axiomes són la base sobre la qual es centrarà l'estudi de qualsevol figura, i ens servirà doncs com a base per la realització del nostre treball a l'aula.

Val a dir que actualment existeixen molts congressos i convencions que relacionen i ajuden a desenvolupar cada cop més les Matemàtiques amb la Papiroflèxia (*International Conference on Origami in Science, Math and Education*).

Les matemàtiques presents en aquest art, no només se centren en la Geometria, sinó que es pot recolzar molts altres temes amb aquest recurs, com ara les sèries convergents, la resolució de màxims i mínims, etc.

⁵ T. Sundara Rao (1893) *Geometric Exercises in Paper Folding*

3 Descripció de la solució

Com ja s'ha esmentat a l'apartat anterior, la solució va consistir en la utilització de la Papiroflèxia en la impartició d'una part del Bloc Curricular d'Espai i Forma a diferents grups del primer curs de ESO.

El motiu pel qual es va decidir realitzar el treball en aquest curs va ser, primer de tot, sota el consell dels professors tutors.

A més, com ja hem comentat, els alumnes tenen una edat on encara existeix una atracció molt forta, en general, pel joc i les activitats lúdiques. D'aquesta manera, es va pensar que seria molt més fàcil arribar a captar l'interès de cada individu, i per tant del grup en general, i així aconseguir portar-los cap al terreny de la Geometria, cap a l'estètica de les figures geomètriques, de les seves propietats i de les seves relacions, tot amagat en els plecs d'un tros de paper.

3.1 Entorn i criteris generals de les sessions

La tipologia dels estudiants era bastant variada, i el fet de poder impartir aquesta solució a cinc grups d'uns vint-i-dos alumnes cadascun, va permetre arribar a observar resultats en estudiants de tot tipus: de nivell molt avançat fins a nivell bastant just. La gran majoria d'estudiants provenien de la mateixa escola de primària, situada al costat del centre de secundària, encara que també hi havia estudiants nou vinguts d'altres centres i de països estrangers. Una característica important d'aquests últims era la limitació en quant a l'idioma.

Des d'un primer moment el professor tutor va restar molt participatiu amb tot el projecte dut a terme, impartint ell també moltes sessions a les quals no vaig poder assistir. En ocasions, fins i tot va ajudar al desenvolupament dels materials preparats, aportant presentacions i fotografies relacionades amb la papiroflèxia. Però el que més es va agrair van ser els consells aportats en quant a la manera de portar les sessions i de captar l'interès dels alumnes.

L'activitat es va desenvolupar en sis sessions. En el transcurs d'aquestes, es buscava fer una incursió a la gran majoria de continguts del Bloc Curricular d'Espai i Forma, començant per un repàs de les nocions més bàsiques de geometria que haurien d'haver estat adquirides en els cursos anteriors a Primària i acabant per aplicacions de les nocions i els càlcul d'àrees de figures de papiroflèxia. Entrarem més en detall en els continguts vistos a cada sessió en el següent apartat.

En un primer moment, es van preparar unes fitxes que els alumnes havien d'anar fent, però finalment es va optar per no entregar aquestes fitxes, i guiar les classes des de la perspectiva del docent.

Evidentment, per arribar a uns resultats satisfactoris va ser necessària una estructura ben estudiada de cadascuna de les sessions, on s'havia de controlar molt bé els temps de cada activitat.

La opció escollida pel que fa a la impartició de les classes va variar segons les sessions i les activitats programades: no es va repartir de la mateixa manera la part teòrica i la part pràctica a totes les classes. Mentre en algunes de les sessions es barrejava constantment la teoria amb la pràctica, en d'altres es va optar per separar la sessió en una part de classe magistral on s'impartia la teoria que s'hauria d'aplicar més tard en construccions de papiroflèxia; d'altres sessions van ser quasi íntegrament de construcció, mentre que s'anava explicant el que es construïa i es donaven les instruccions de les construccions utilitzant en tot moment un vocabulari amb nocions geomètriques. En aquest sentit, es va voler insistir molt en que havien de ser molt rigorosos a l'hora d'utilitzar els conceptes geomètrics tant a l'oral com a l'escrit, deixant ben patent que encara que s'estava desenvolupant una activitat lúdica, es tractava d'una classe de matemàtiques.

De fet, un dels perills en quant a la utilització de certs recursos pedagògics amb un caràcter més lúdic del que estan acostumats els alumnes, i més tractant-se d'una edat més propera a la infantesa que a la adolescència, és perdre el control del grup degut a un augment del nivell d'excitació.

L'estratègia utilitzada per tal d'evitar aquesta situació va ser deixar ben clares unes normes bàsiques de bon funcionament que es van plantejar, veient sobretot el resultat de les primeres classes:

- Aixecar la mà abans de parlar, sempre que el professor estigués donant instruccions o alguna explicació. Mentre es realitzaven les tasques pràctiques, es permetia que parlessin entre ells, però sense superar un cert nivell de soroll, i sempre que tingués relació amb la sessió. S'ensenyava així que s'ha de tenir un respecte pel grup per tal de convida de manera correcta.
- Tot aquell que acabés abans que els altres del seu entorn la figura, ajudaria els altres acabar les seves. Es fomenta així la convivència a dins del grup classe.
- Si un dels objectius de la sessió era el de acabar amb una figura feta, tothom havia de tenir acabada la figura realitzada. Fomentant la igualtat entre els alumnes.
- Al principi de cada sessió es dedicarien entre cinc i deu minuts en fer un repàs de les nocions vistes en les sessions anteriors. El repàs de les nocions adquirides té uns beneficis didàctics evidents.
- Sempre que fos possible, s'hauria d'aprofitar paper ja utilitzat i no un paper en blanc per fer les figures: d'aquesta manera es buscava insistir en tot moment en la necessitat de reciclar. Així, un dels pocs deures que tenien era el de portar un parell de fulls de paper que no estiguessin en blanc.
- Sempre que es pogués, s'havia d'utilitzar notacions i un vocabulari geomètric. Per exemple, quan es feia un plec, s'havia de parlar de la recta generada pel plec.

En aquest seguit de normes, es va buscar sempre desenvolupar certs aspectes que la Papiroflèxia porta implícita, i que no només serveixen per a una educació de les habilitats matemàtiques, sinó també en l'adquisició de competències i de valors socials.

En general, l'ambient que es volia difondre en totes les sessions era un ambient de col·laboració entre tots, on els alumnes havien de formar part del desenvolupament correcte de les sessions. Aquest aspecte col·laboratiu no només es volia trobar entre el docent i els alumnes, sinó també entre ells.

En totes les sessions, es va buscar un equilibri en els recursos utilitzats: encara que s'estigués centrant l'activitat en un recurs mil·lenari, s'aprofitaria les representacions dels resultats amb la utilització de programes informàtics com per exemple Geogebra, s'utilitzaria la pissarra per aclarir conceptes o passos de les construccions. A més, en tot moment els alumnes havien de tenir la llibreta a mà per tal de poder prendre apunts de les definicions que s'anaven aportant. Les definicions importants, en general, s'escriuen a la pissarra per tal que els hi fos més fàcil d'apuntar i en recordar-se'n. Així, encara que aquest TFM tracti sobre la utilització de la Papiroflèxia a l'aula, val a dir que la millor manera d'aprofitar aquest recurs és barrejant la seva aplicació amb d'altres recursos que també siguin quotidians pels alumnes.

Finalment, val a dir que a totes les sessions es va intentar que els alumnes construïssin una nova figura de papiroflèxia, algunes més vistoses que les altres. Així, es buscava que els alumnes tinguessin ganes d'aplicar els coneixements obtinguts, i que conservessin la seva atenció fins al final de la classe.

3.2 Descripció de les sessions

Les classes es van estructurar amb l'objectiu de veure la gran majoria del contingut del bloc d'Espai i Forma. Així, es va partir des d'una voluntat de treballar els conceptes més bàsics, fins a aplicacions pràctiques del que s'havia vist fins ara.

En quant a continguts, es va intentar seguir l'estructura del llibre escolar de matemàtiques.

3.2.1 Primera Sessió: Conceptes bàsics

Enunciat:

1. *Agafeu un tros de paper i dibuixeu-hi un punt que anomenarem A.
Doblega el full de manera que el doblec passi per aquest punt.
Desdobla el full i observa el plec obtingut.
Què pots dir d'aquest doblec?*

*Passa ara el full al teu company, i que faci un altre doblec diferent a l'anterior que passi pel mateix punt A.
Fixeu-vos que per un punt passen infinites rectes.*

2. *En un altre paper, dibuixa dos punts A i B.
Fes ara un doblec que passi per A i B. Anomenarem la recta obtinguda la **recta (AB)**.
Intenta fer un altre doblec que passi per A i per B.
Què pots deduir?*

*Amb un llapis, identifica ara el **segment [AB]**.
Escriu la definició d'un segment:*

*Amb un altre color, senyala la **semirecta** d'origen A que no conté el segment [AB].
Escriu la definició de semirecta:*

3. *Doblega el full per poder superposar els dos punts, és a dir, porta el punt A sobre el punt B.
Anomenarem la nova recta obtinguda d.
Com són els angles formats per les dues rectes?
Què podem dir de la nova recta obtinguda?*

*La recta d talla el segment [AB] pel punt O.
Què pots dir del punt O respecte al segment [AB]?
Què pots deduir de la recta obtinguda respecte al segment [AB].*

*Marca un punt C de la mediatriu.
Dibuixa ara el segment [AC] i el segment [CB].
Torna a doblegar el full per d.
Explica què passa amb els segments [AC] i [CB].
Dedueix com són les distàncies AC i AB.*

*Observa que aquesta propietat és vàlida per qualsevol punt que s'agafi de la recta d.
Escriu una propietat de la recta mediatriu.*

Comentaris:

Es diu també que:

- *el punt A és la imatge de B mitjançant la simetria d'eix d.*
- *El segment [AC] és l'imatge del segment [BC] mitjançant aquesta simetria.*

*Observa com són els angles \widehat{ACO} i \widehat{BCO} . Per què?
Què pots doncs dir de la recta d respecte a l'angle \widehat{ACB} ?*

Fixa't que donades dues rectes secants que formen un angle, sempre podrem obtenir la recta que divideix l'angle en dos fent un plec de manera a posar una recta sobre l'altre.

4. *Sobre el mateix paper, fes una perpendicular a la recta d passant pel punt C. Recorda que obtindrem una recta perpendicular a d dobllegant el paper de manera a superposar les dues semirectes d'origen C. Anomenarem aquesta recta e. Observa que hi ha una única recta e que passa per C i és perpendicular a d. Què pots dir d'aquesta recta?*

*Fes una altra recta perpendicular a d.
Com serà aquesta recta respecte de la recta e?*

Descripció:

Els **objectius** que es buscaven en aquesta primera sessió eren, fonamentalment, aprendre a plasmar el llenguatge matemàtic sobre el paper mitjançant els plecs. Es tracta doncs d'una sessió introductòria en la qual els alumnes comencen a treballar amb el paper i descobreixen la manera de veure la geometria a través dels plecs. A més, aquesta sessió va servir per veure el nivell de geometria que tenien.

Encara que les operacions de plegat són molt bàsiques, en aquesta classe els alumnes van aprendre, sense adonar-se'n, la gran majoria d'**axiomes d'Huzita** detallats al 2.4.3. De fet, els axiomes vistos van ser:

- ✓ Axioma 1 al punt 2
- ✓ Axiomes 2 i 3 al punt 3
- ✓ Axioma 4 al punt 4

En quant a **continguts** geomètrics, aquesta sessió va servir per detallar i definir els conceptes més bàsics dels elements geomètrics, com són: el punt, la recta, la semirecta, el segment i les seves anotacions.

També es van veure les posicions relatives entre rectes, mitjançant la construcció de perpendiculars i paral·leles.

D'altres rectes notables com la mediatriu i la bisectriu també van ser definides.

També es va aprofitar per fer un repàs de triangle, tema que ja havien vist amb el professor tutor en sessions anteriors.

En aquesta sessió es van fer, també, demostracions molt senzilles, com ara fer que els alumnes mateixos dedueixin que un angle és un angle recte. La demostració es va fer mostrant que es divideix un angle de 360° en quatre angles que se superposen, i que per tant són quatre angles iguals (per tant, de 90°).

En quant a la **temporalització** d'aquesta sessió, no hi va haver un temps per explicar la part més teòrica i un altre per explicar la part més pràctica: en tot moment es va tractar de barrejar teoria i pràctica, de manera a que cada cop que els alumnes construïen en element geomètric, s'aprofitava per donar la seva definició.

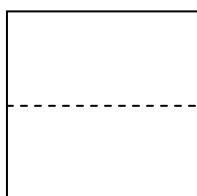
Pel que fa a la resta de **recursos** utilitzats, es va fer ús de la pissarra i de la representació dels plecs obtinguts amb el programa informàtic Geogebra, per tal d'aclarir els passos que havien de fer.

Enunciat:

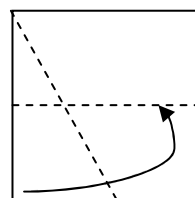
1. Agafem un full de paper quadrat obtingut a partir d'un DIN A5. Doblegarem el full de paper per la meitat i desdoble.

En quin tipus de quadrilàters s'ha dividit el quadrat d'aquesta manera?

Quina relació hi ha entre l'àrea de cadascun d'aquests quadrilàters respecte al quadrat inicial?



2. Doblegarem el de manera a fer coincidir el vèrtex G amb el segment [BC], tot i generant una recta que passi pel punt D. La nova recta tallarà el segment [GF] en el punt M. Quin tipus de triangle és el triangle DGM?

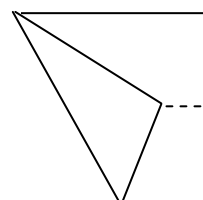


3. Aprofitant la recta (DG), portarem el punt A cap al segment [DM].

Desdobleu el full i repasseu les cicatrius amb un llapis.

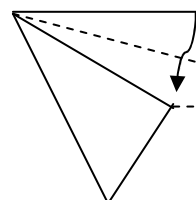
L'angle \hat{D} està dividit en tres angles. Quan medeix cadascun?

Al triangle GDM, quan mesura l'angle \hat{M} ?



4. Tornem a doblegar la figura com la teníem al final del punt 2. i portem el punt A cap al punt G, de manera a que tots dos punts passaran a estar superposats sobre el segment [BC]. La nova recta generada tallarà (AB) en E.

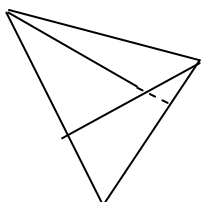
Quina serà ara la mesura de l'angle \hat{D} ?



Porteu el punt F sobre el segment [DM] doblegant per la recta (EM).

5. En el triangle EDM, deduiu la mesura de tots els seus angles.

Què representen les rectes (EF) i (DB) en aquest triangle?



*Marqueu el valor de tots els angles fets en el paper.
Guardarem aquest triangle per a les següents classes. L'utilitzarem com a eina de mesura.*

Descripció:

En aquesta sessió, els estudiants ja tenien un **objectiu** ben marcat que era el de acabar fent una eina de mesura d'angles. Se'ls hi va explicar primer quina utilitat tindria l'eina de mesura i se'ls hi va ensenyar la figura acabada, per tal que ells mateixos sabessin quin objectiu final havien d'aconseguir.

D'aquesta manera, se'ls hi va deixar veure que la feina realitzada en aquesta sessió tindria una utilitat ben pràctica, que era un objectiu ben concret.

En quan a objectiu didàctic, es vol que els alumnes raonin amb angles, i que partint dels angles coneguts d'un quadrat, obtinguin angles de 30° , 45° , 60° i 75° , sense utilitzar en cap moment regla, transportador ni compàs, eines de construcció més tradicionals.

En termes de papiroflèxia, van aprendre com fer un quadrat a partir d'un full DINA, element bàsic per iniciar qualsevol figura de Papiroflèxia, van aprendre com triseccionar un angle.

Pel que fa als **continguts geomètrics**, es va raonar a partir de la propietat dels angles del triangle que sumen 180° , a més d'utilitzar la manera d'identificar angles rectes ensenyada a la classe anterior. Es va explicar també un concepte nou que és el concepte de trisecció d'un angle. Els alumnes van treballar amb els angles més típics com són els angles de 30° , 45° , 60° , 75° , 90° i 180° .

D'altres definicions i propietats d'elements geomètrics van aparèixer al llarg de la sessió conforme s'avançava en la construcció de l'eina. Per exemple: rectangle, quadrat, triangle rectangle, altura.

En quant a la **distribució** de part pràctica i part teòrica, es va anar introduint i definint conceptes geomètrics, però no es van fer dues parts ben separades. Aquesta sessió havia de ser molt més pràctica i es buscava en tot moment insistir en la capacitat de raonament matemàtic dels alumnes.

Pel que fa als **recursos** utilitzats, només es va fer ús de la pissarra.

3.2.3 Tercera i Quarta sessions: l'Ocellet de paper

Enunciat :

Construeix l'ocellet de paper a partir de les instruccions (Annex 1).

- 1. A cada pas de la construcció, identifiqueu els elements geomètrics que esteu generant.*
- 2. Determineu en un segon pas la mesura dels angles formats.
Per això, cada cop que doblegueu, haureu de desdoblar del tot i observar els plecs generats.*
- 3. A l'esquelet de l'ocellet, identifica:*
 - a) Quants quadrats veus*
 - b) Quants tipus de quadrats de diferent superfície veus*
 - c) Relaciona la superfície dels quadrats entre ells*

4. Ara, identifica:
 - a) Quants triangles veus, quants diferents i identifica els tipus de triangles de diferent superfície que has generat
 - b) Relaciona les àrees de cada tipus de triangle
 - c) Determina les àrees dels quadrats identificats en la pregunta anterior a partir del nombre de triangles que veus.

5. Tenint en compte que hem fet la figura a partir d'un full DIN A4, que per norma té el costat més petit que mesura 21 cm, determina quan valdrà el costat del quadrat més petit identificat a la pregunta 3.
A partir d'ara, crearem una nova unitat de mesura que anomenarem U. Una U serà igual al costat del quadrat més petit identificat a la pregunta 3.

6. Calcula el Perímetre dels quadrats identificats a la pregunta 3 en funció de la nova unitat de mesura U.

7. Calcula l'àrea del quadrat més petit en funció de U.
Dedueix, utilitzant els resultats de la pregunta 3, les àrees de la resta de quadrats en funció de U.

8. Torna a fer l'ocellet. Dedueix la superfície d'una de les cares de l'ocellet en funció de U.
Per això, intenta determinar quants quadrats de costat U componen un costat de l'ocellet.

9. Dedueix l'àrea de l'ocellet en cm^2 .

10. Amb el mateix paper i aprofitant els mateixos plecs, fes ara el molinet seguint les explicacions del professor. Compara la seva superfície amb la del ocelllet.

11. Amb el mateix paper i aprofitant els mateixos plecs, fes ara la caseta. Compara la seva superfície amb la del ocelllet i amb la del molinet.

Descripció:

En aquesta sessió, l'**objectiu** era fer un ocelllet de paper i estudiar les propietats dels elements geomètrics que es generaven en la construcció de la figura. Resumint, aquesta sessió consistia en construir, descriure, identificar i deduir. Es van introduir els conceptes d'àrea i perímetre d'un polígon i es volia que els alumnes treballessin amb aquests conceptes, fins al punt de deduir numèricament l'àrea de l'ocellet construït només utilitzant la observació, sense utilitzar cap eina de mesura.

Es volia doncs en aquesta sessió fer una aplicació molt pràctica, on el fet de conèixer l'àrea d'uns quants polígons ben senzills, ens permetien deduir i conèixer les àrees de figures més complexes.

Sense adonar-se'n, els alumnes estaven aplicant la triangulació de l'ocellet de paper per determinar la seva superfície.

En quant als **continguts** geomètrics, primer es demanava la identificació dels polígons generats en els diferents passos de la construcció (quadrats i triangles rectangles).

Després, es va definir els conceptes d'àrea i perímetre, però després que els alumnes raonessin sobre les superfícies dels polígons identificats.

Pel que fa a la **distribució** entre part teòrica i part pràctica, la primera part de la sessió va ser una sessió molt més pràctica on els alumnes havien de construir la figura. Es va guiar la construcció emprant un llenguatge geomètric a l'hora de donar instruccions.

A la segona part de la sessió, però, es va començar recordant les definicions d'àrea dels polígons més coneguts, per després practicar aquestes definicions treballant sobre la figura construïda.

En aquesta sessió, els **recursos** utilitzats a part de la papiroflèxia van ser la representació dels diferents passos mitjançant Geogebra i la pissarra.

3.2.4 Cinquena sessió: Els Polígons Regulars

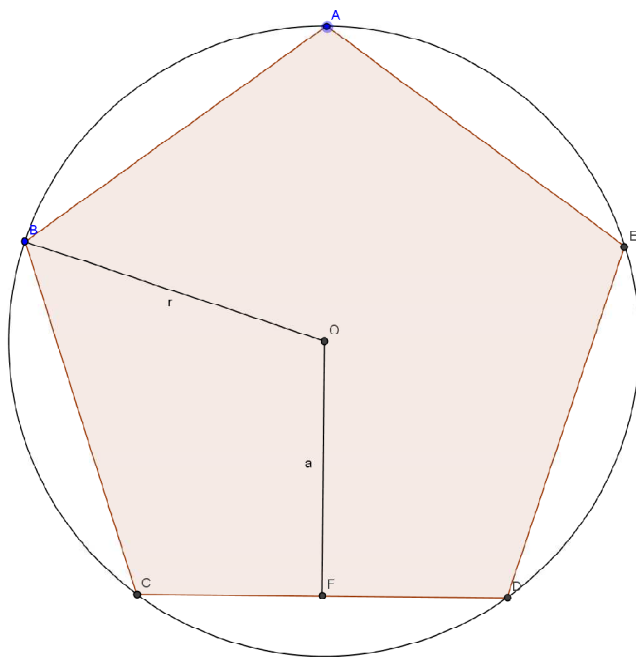
Enunciat:

En aquesta pràctica, es tracta de generar polígons regulars a partir de diverses formes de paper: fulls DIN A, tira de paper i fulls quadrats.

Definició: Un polígon regular és un polígon que té tots els costats i els angles iguals.

Propietats:

- La suma dels angles d'un polígon regular de n costats val $180 \cdot (n-2)$ graus. Cada angle valdrà doncs $180 \cdot (n-2)/n$.
- El centre de la circumferència on el polígon regular està inscrit és el centre del polígon. El radi r del cercle és el radi del polígon. El segment a traçat des del centre de la circumferència fins el punt mitjà d'un costat és l'apotema del polígon regular.
- Els polígons regulars es poden descompondre en tants triangles iguals com costats tingui. La base de cadascun d'aquests triangles és el costat del polígon i l'altura és l'apotema del polígon.



- A partir d'un full DIN A, seguint les instruccions dels Annexos 2 i 3, construeix i anomena els polígons regulars de 3, 6 i 4 costats. Identifica en cadascuna de les figures el centre, l'apotema i el radi del polígon.
- Ara agafa una tira de paper i fes un polígon regular de cinc costats. Identifica centre, apotema i radi del polígon.
- Agafa el full quadrat que us entregarà el professor, i mitjançant les bisectrius dels angles del quadrat, construeix un polígon regular de 8 costats.
- Identifica en els polígons regulars de n costats que has fet els n triangles d'altura l'apotema i de base el costat.
- Dedueix l'àrea del polígon a partir de l'àrea d'aquests triangles.

Descripció:

L'**objectiu** d'aquesta sessió era que els alumnes entenguessin el que és un polígon regular i sabessin identificar les seves propietats i els seus elements més bàsics. Al final de la sessió, els alumnes haurien après no només a identificar, sinó també a construir els polígons regulars de 3, 4, 5, 6 i 8 costats.

A més, en aquesta sessió també va tornar a aparèixer la triangulació de la superfície del polígon per tal que els alumnes deduïssin la superfície total.

Els **continguts** geomètrics són el de polígon regular i els elements geomètrics que s'en deriven (apotema, centre, radi, etc).

En aquesta sessió, la **distribució** entre part teòrica i part pràctica va estar molt més marcada que a d'altres sessions: es va començar per uns quinze/vint minuts de part teòrica, per després passar a la part pràctica amb la construcció d'alguns polígons regulars.

En quant a **recursos**, només es va utilitzar la pissarra a més del paper.

3.2.5 Sisena sessió

En aquesta sisena sessió, no es va donar cap enunciat. De fet, el que es desitjava era que els grups més potents fessin una figura de papiroflèxia més complexa que les realitzades fins llavors: la caixa estrellada.

L'**objectiu** d'aquesta construcció era deixar que els alumnes descrivissin ells mateixos, sense l'ajuda del professor, els elements geomètrics que identifiquen l'esquelet.

Els **continguts** geomètrics que hi ha en la construcció, són triangles isòsceles, rectangles, trapezis isòsceles i les principals rectes notables del triangle. També intervenen raonaments usant les mesures dels angles.

Pels grups més lents a l'hora de fer les construccions, se'ls va passar un vídeo on apareix en Robert Lang, origamista molt conegut, pioner de les formes més noves de la papiroflèxia i expert en el disseny de figures de papiroflèxia mitjançant algorismes matemàtics molt senzills, però molt potents a l'hora.

Amb aquest vídeo es buscava donar una perspectiva més pràctica de la papiroflèxia i del seu estudi matemàtic. Els alumnes havien de veure com estudis semblants als que havíem realitzat a classe, però a un nivell una mica més avançat, permetia aplicacions en àmbits d'aeroespacial o, fins i tot, d'enginyeria biomèdica.

L'objectiu del vídeo era donar una visió del que es podia arribar a fer amb la Geometria més que no pas els continguts geomètrics en sí.

El vídeo estava en anglès subtítulat, i per tant era un recurs que permetia a la vegada el desenvolupament i la millora de l'anglès dels alumnes.

L'enllaç del vídeo és:

http://www.ted.com/talks/lang/es/robert_lang_folds_way_new_origami.html

3.2.6 Setena sessió: Avaluació

Enunciat:

Primera part: Teoria i definicions

1 – Defineix:

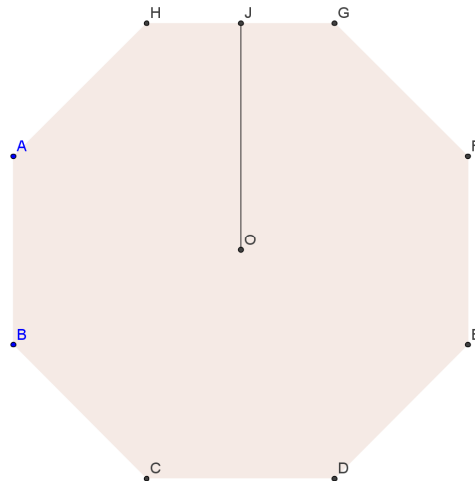
- a) Segment (0,5 punts)
- b) Mediatriu d'un segment (0,5 punts)
- c) Bisectriu d'un angle (0,5 punts)

- d) *Altura d'un triangle (0,5 punts)*
- e) *Apotema d'un polígon regular (0,5 punts)*
- f) *Radi d'un polígon regular (0,5 punts)*
- g) *Polígon inscrit (0,5 punts)*

Segona Part: Exercicis

2 – *Sigui el polígon regular de la figura. Sabem que el perímetre és de 64 cm i on l'apotema mesura 9,7 cm. Totes les respostes hauran de ser justificades i els resultats arrodonits a la centèsima.*

- a) *Quin és el valor del costat del polígon? (1 punt)*
- b) *Què val l'àrea del polígon? (1 punt)*



3 – *A partir d'un full DIN A4 fes un ocellet de paper. Si no te'n recordes, mira les instruccions que s'adjunten.*

- a) *Fes l'ocellet de la manera més acurada possible. (1,5 punts)*
- b) *El primer pas que has fet en la teva construcció és retallar un quadrat a partir del full DIN A4. Quina és l'àrea d'aquest quadrat? Recorda que un full DIN A4 medeix 21cm x 29,7 cm. (0,5 punts)*
- c) *Un cop hakis fet la figura, desfés-la i identifica amb un bolígraf en el mapa de cicatrius el polígon regular més petit que puguis. Justifica perquè és un polígon regular. A aquest polígon l'anomenarem p1. (0,25 punts)*
- d) *De quants polígons p1 està compost el quadrat de la pregunta a)? (0,25 punts)*
- e) *Dedueix l'àrea de p1. (0,5 punts)*
- f) *Torna a fer la l'ocellet i indica de quants polígons p1 està composta una cara de l'ocellet ? (0,5 punts)*
- g) *Dedueix l'àrea de l'ocellet en cm^2 . (1 punt)*

Descripció:

Per últim, es va acordar amb el professor tutor una hora d'avaluació a cadascun dels grups. A l'examen constava d'una primera part amb definicions teòriques dels conceptes geomètrics que s'havien vist durant les sis sessions anteriors i una segona a,b un exercici sobre polígons regulars, i un altre amb la construcció de l'ocellet de paper i la determinació de la seva àrea.

Es va voler avaluar sobre tot els conceptes geomètrics adquirits i l'aplicació del concepte d'àrea.

En definitiva, l'estructura dels continguts seguia la que es presenta en el llibre de text, però es van estructurar les activitats de manera que l'alumne comencés per plasmar els conceptes geomètrics sobre el paper (primera sessió), després fer figures, descriure-les i estudiar-les amb els conceptes geomètrics adquirits o amb noves nocions (segona a quarta sessió). A la cinquena sessió es va fer una classe més magistral, més tradicional en el sentit que es buscava que hi hagués primer una part de teoria i després una part de pràctica. La sisena sessió era per a que els alumnes veiessin les enormes possibilitats que tenia l'estudi del plegat del paper i les aplicacions que s'havien desenvolupat.

Passem ara a analitzar els resultats d'aquestes sessions, i si la utilització de la papiroflèxia com a recurs és una bona opció didàctica.

4 Resultats

4.1 Resultats de cadascuna de les sessions

Pel que fa a la **primera sessió**, el resultat havia de ser una figura semblant a la Figura 2: Resultat de la primera Sessió.

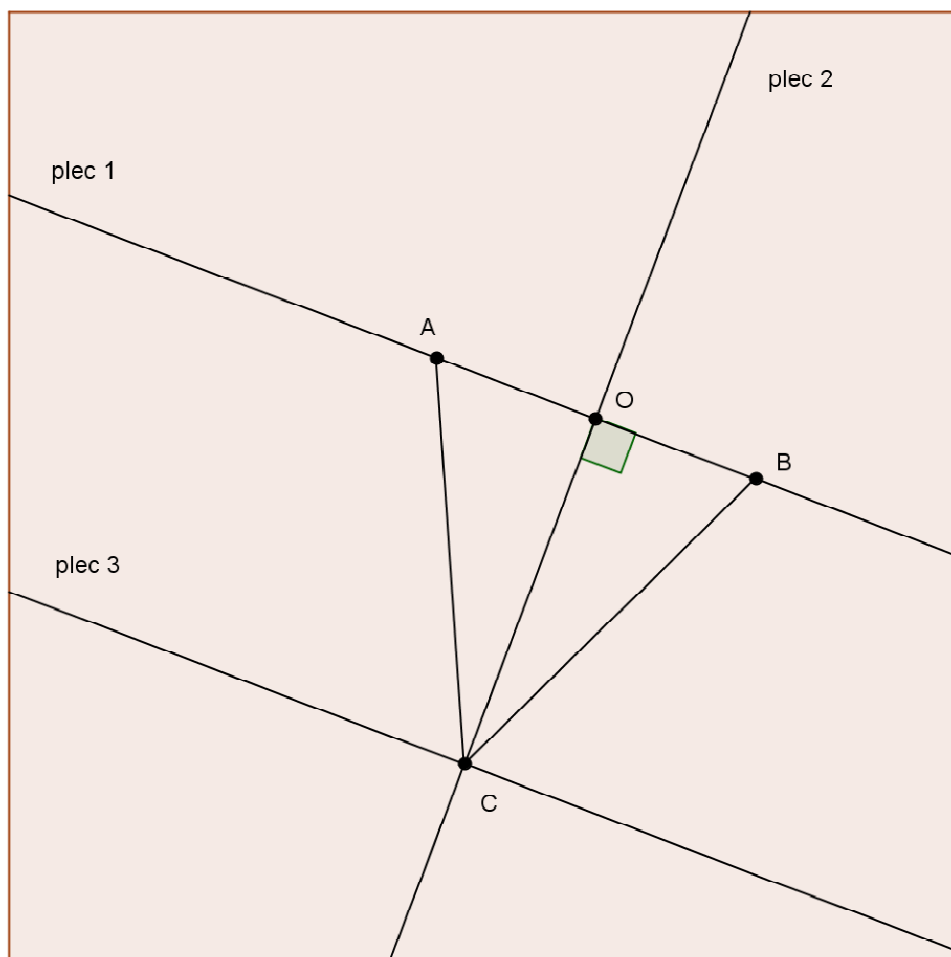


Figura 2: Resultat de la primera Sessió

Es va observar una molt bona acollida per part dels alumnes a la utilització de la papiroflèxia. En general, tots sabien el que era i en algun moment havien jugat a intentar fer figures. Un gran nombre d'ells, a més, tenien moltes ganes d'aprendre a fer figures de paper, ja que justament en aquesta època s'havia posat de moda jugar amb la figureta del menjacocos.

Es notava que la introducció d'un element nou captava molt bé l'atenció del grup. I més pel fet que aquest element fos tant quotidià per ells.

En tot moment els alumnes van estar molt atents en tots els grups. Val a dir que a cada copa que cada cop que s'impartia aquesta sessió en un grup, es decidia la introducció de millores pels altres grups per mantenir en tot moment l'atenció dels alumnes, com per exemple decidir dir als nois que la figura realitzada l'havien de guardar amb cura per una futura utilització.

Es va observar que, en general, els nois tenien dificultats a l'hora de fer els plects de manera correcta. En aquesta primera classe es va veure que hi havia uns quants alumnes que entenien i deduïen molt bé els passos a seguir per obtenir cada element geomètric.

Des del punt de vista col·laboratiu, els alumnes s'ajudaven entre ells.

Pel que fa a la **segona sessió**, tot es va desenvolupar en un ambient molt més pràctic. Des del principi, els alumnes tenien una certa curiositat per saber què fariem.

És veritat que en tots els grups, hi va haver alumnes que demanaven quan podrien fer figures més conegudes per ells, com ara l'ocellet de paper, la grulla, o figures més típicament relacionades amb la papiroflèxia.

Els alumnes van col·laborar força bé. Al principi no veien massa bé com raonar amb les mesures dels angles, però cap al final, es podia dir que la gran majoria del grup havien entès què havien fet: partint d'un full de paper DIN A, havien aconseguit realitzar una eina, tot raonant a partir d'una propietat ben coneguda sobre la suma dels angles d'un triangle. La Figura 3: Angles de l'eina de mesura ens mostra els angles que es van obtenir finalment.

En certa manera, aquesta sessió va ser un èxit en quant a la demostració de que la geometria podia ser molt útil.

Un dels problemes observats en una construcció que ocupava tota una hora era que aquells nois que es quedaven més endarrerits en la construcció, tendien a perdre el fil conductor de la classe, fet que implicava més enrenou i, per tant, problemes en alguns grups. Sobretot, en aquells que venien de l'hora del pati i per tant estaven més esvalotats.

Un problema similar apareixia amb aquells alumnes que per degut a haver tingut poca cura a l'hora de fer els plecs, no podien seguir plegant de manera correcta la figura.

En els dos casos precedents, la solució va ser que els havia de fer les seves figures de manera a que no estiguessin fora de la dinàmica del grup. Però aquesta tampoc era una bona solució perquè d'aquesta manera descuidava la resta del grup. Finalment, la solució adoptada va ser que agafava els alumnes que anaven més ràpid en el plegat del paper, i els hi demanava que ajudessin els més endarrerits en fer les seves figures. D'aquesta manera es va aconseguir un ambient de col·laboració que es va intentar mantenir fins el final del projecte.

La **tercera** sessió es va desenvolupar en un ambient molt constructiu: tots els alumnes estaven molt il·lusionats pel fet de fer la seva primera figura de paper. En general, tots volien arribar al final i intentaven estar molt atents. Fins i tot es va observar una certa impaciència que dificultava segons quines explicacions que requerien que els alumnes desfessin la seva construcció.

Totes les instruccions es van donar utilitzant llenguatge geomètric. Primer s'intentava donar-les sense fer l'acció de plegat amb el paper, intentant que els propis alumnes fossin capaços de traduir les paraules i els conceptes en plecs. D'aquesta manera, s'ajuda a l'estudiant a que tingui el costum de relacionar la realitat del plec de paper amb conceptes geomètrics com "diagonals", "triangles", "quadrats", etc.

Vam trobar, en segons quins grups, el mateix problema que a la segona sessió, on alguns alumnes es quedaven endarrerits, perdien la motivació de seguir la classe i aprofitaven per parlar entre ells.

Els motius pels quals aquests alumnes es quedaven endarrerits eren, principalment, degut a la lentitud en la realització dels plecs, a que estaven des d'un principi parlant amb els seus companys o al fet que no eren suficientment precisos a l'hora de fer els plecs, i per tant no aconseguien obtenir la figura desitjada.

Un altre punt que es va observar en aquesta sessió era que es perdia molt de temps en fer que els alumnes fessin un quadrat a partir del full DIN A. Molts no arribaven a fer correctament el quadrat, i per tant no tenien la base de la seva figura correcta, provocant així un resultat no desitjat.

Per sort, la figura a realitzar era molt senzilla i els resultats de la primera sessió van ser bastant bons, obtenint una bona participació per part dels alumnes, i observant que els conceptes bàsics com ara "diagonals del quadrat", "triangle rectangle", "perpendicularitat", "mediatriu", "bisectriu", etc estaven ja ben assimilats per part d'ells.

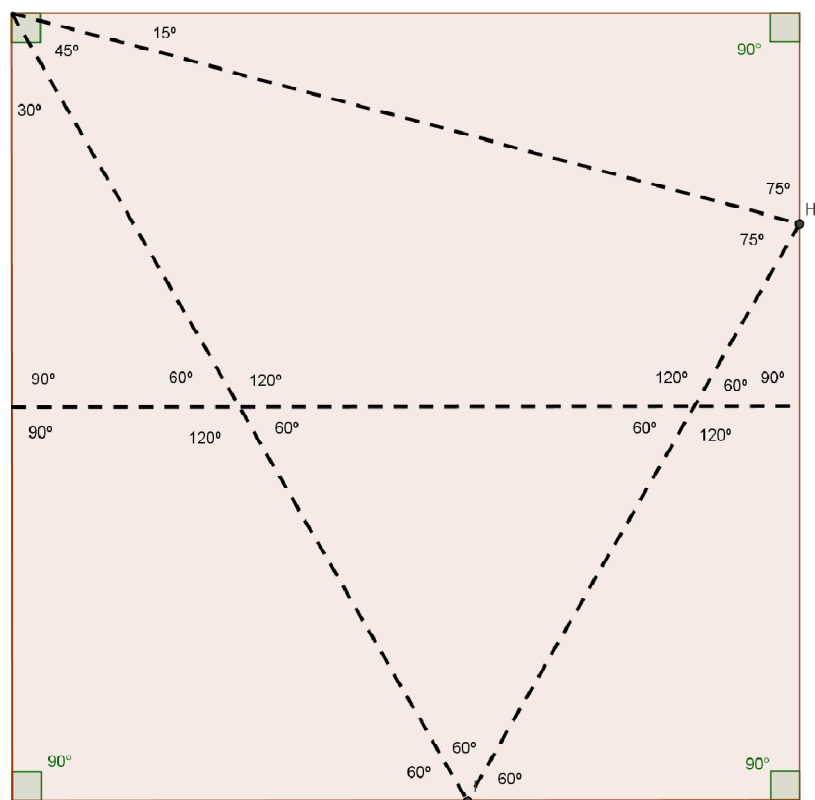


Figura 3: Angles de l'eina de mesura

Pel que fa a la identificació dels polígons obtinguts, la comparació entre les superfícies va costar una mica més: els alumnes no acabaven de veure què es volia exactament. No entenien què es desitjava aconseguir amb la pregunta de relacionar les superfícies dels quadrats entre ells.

L'esquelet resultant de la figura de l'ocellet de paper es mostra a la Figura 4: Esquelet Ocelllet de Paper.

A la **quarta** sessió, que era la segona sessió amb l'ocellet de paper, havien de treballar amb la figura que havien realitzat el dia anterior. Doncs bé, en molts casos, els alumnes havien perdut la seva figura, ralentitzant així l'inici de la classe. Aquest aspecte es va tenir en compte posteriorment en la resta de classes, on ja portava ocellets de paper de més.

Aquesta sessió va tenir resultats molt positius amb alguns grups, i resultats menys positius en d'altres. De fet, no només es recordaven les definicions d'àrees i perímetres dels polígons coneguts, sinó que es feia tot seguit una aplicació molt pràctica (triangulació de superfície).

En alguns grups, hi havia alumnes que van seguir perfectament el raonament, i fins i tot van aconseguir determinar l'àrea de l'ocellet, del molinet i de la caseta (Figures 5 i 6) en cm^2 per comparar-los.

A d'altres, en canvi, els hi va costar molt entendre per què s'introduïa una unitat de mesura nova (U). No van arribar a veure exactament quina era la utilitat d'aquesta nova unitat de mesura. Es pot dir, doncs, que alguns no van arribar a entendre la utilitat de l'exercici, i que per tant el concepte d'àrea i per a què servien les definicions donades no van arribar a tenir massa sentit.

Aquesta dificultat va ser observada més tard en l'avaluació de l'examen on es va posar un exercici molt semblant.

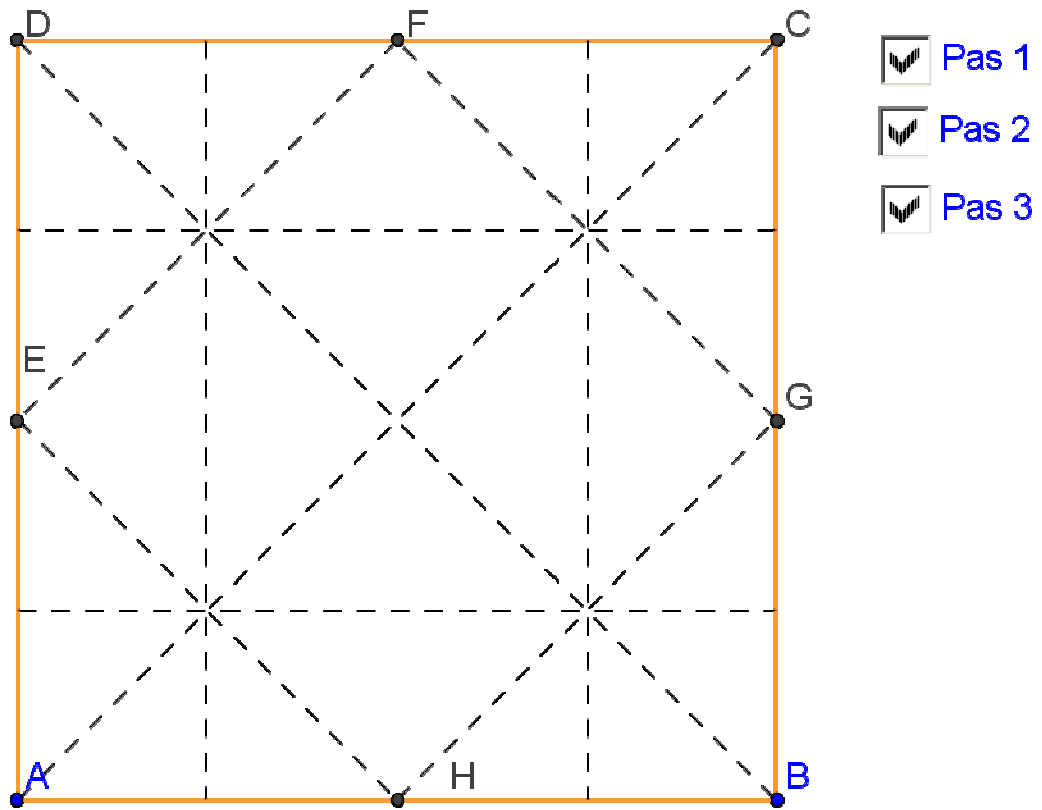


Figura 4: Esquelet Ocelllet de Paper

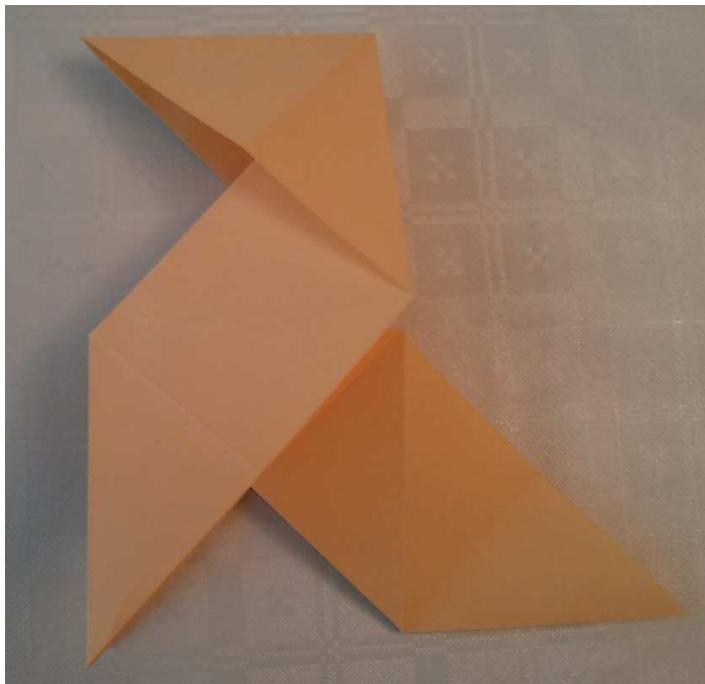


Figura 5: Ocelllet de paper

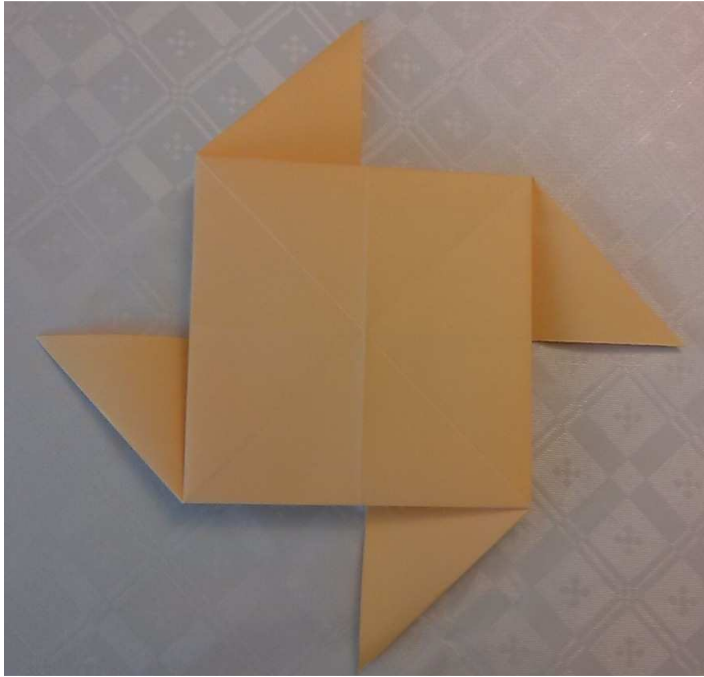


Figura 6: Molinet de paper

A la **cinquena** sessió es va intentar dur a terme un format de classe més clàssic, però amb la utilització de la papiroflèxia: primer una part teòrica i després una part més pràctica on es veuen els conceptes de la primera part.

Els alumnes van veure aquest format com un retorn a les classes normals, on havien d'agafar primer la llibreta i el llapis per prendre apunts. Es notava que existia un cert desencís en general, ja que sens dubte s'esperaven fer una altra figura com la de l'ocellet. Per tant, aquesta sessió, en general, va ser molt menys lúdica que les anteriors, i es va aconseguir captar menys l'atenció dels alumnes.

Ara bé, un aspecte que sí que es va notar és que en general, els alumnes tenien molta més cura a l'hora de realitzar els plecs, i anaven molt més ràpid en les construccions.

Potser el punt que més els va interessar va ser la facilitat de construir el pentàgon regular amb la tira de paper⁶, fet que demostra que variar el format inicial del paper ajuda també a captar l'atenció del grup.

Aquesta sessió, però, ens va ajudar a consolidar la triangulació de superfície vista a la sessió anterior, ja que la descomposició dels polígons regulars en triangles iguals era bastant evident, com es pot observar a l'octògon de la Figura 7.

A la **sisena** i última sessió, en les classes que anaven més ràpid vam realitzar la caixeta estrellada (Figura 8), per després deixar que els alumnes analitzessin les figures geomètriques que apareixien a l'esquelet (Figura 9).

De seguida, però, es va observar que la figura era massa complicada i els alumnes trigaven molt en realitzar cadascun dels passos.

El resultat va ser doncs que només va donar temps a acabar la figura, i no vam poder discutir sobre els elements geomètrics que s'observaven al seu esquelet.

Ara bé, els alumnes estaven encantats de fer una caixeta, d'arribar a acabar aquesta nova figura.

⁶ Revista Suma nº 46 (1994) – “Polígonos con una tira de papel” – Grupo Alquerque de Sevilla

Podem, doncs, dir que, pel que fa a l'objectiu de didàctica matemàtica, aquesta sessió no va ser ni molt menys un èxit.

Per tant, i veient el resultat a les millors classes, als grups següents se'ls hi va fer veure al projector la conferència de Robert Lang, per després comentar-lo. Els alumnes van quedar molt sorpresos de les figures que es podien arribar a fer a partir d'un full de paper quadrat, i utilitzant conceptes geomètrics per dissenyar el resultat final.

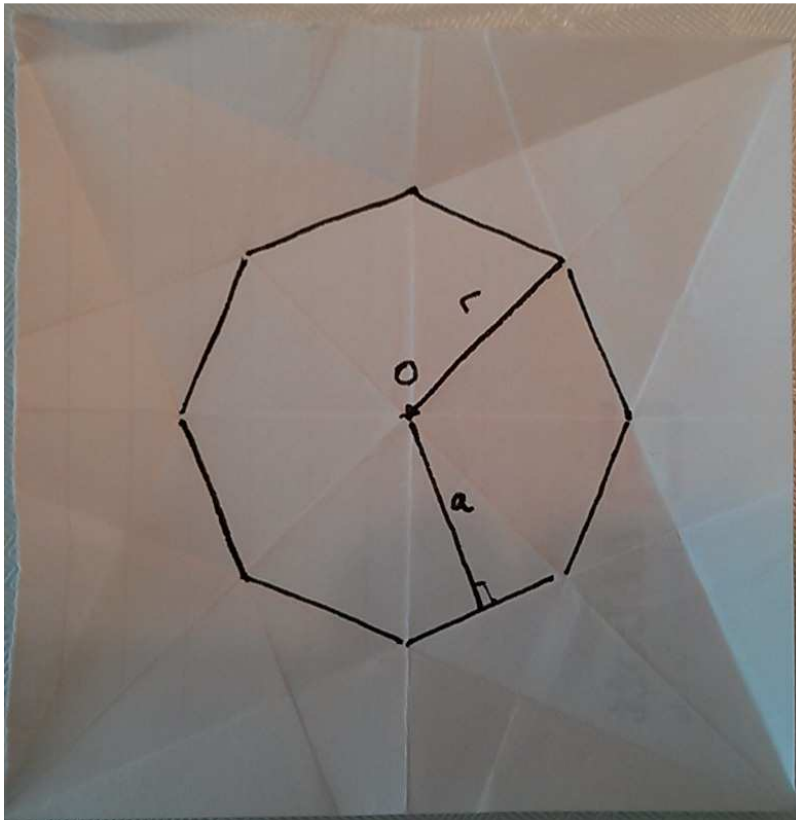


Figura 7: Octògon regular fet a partir de les bisectrius successives dels angles d'un quadrat

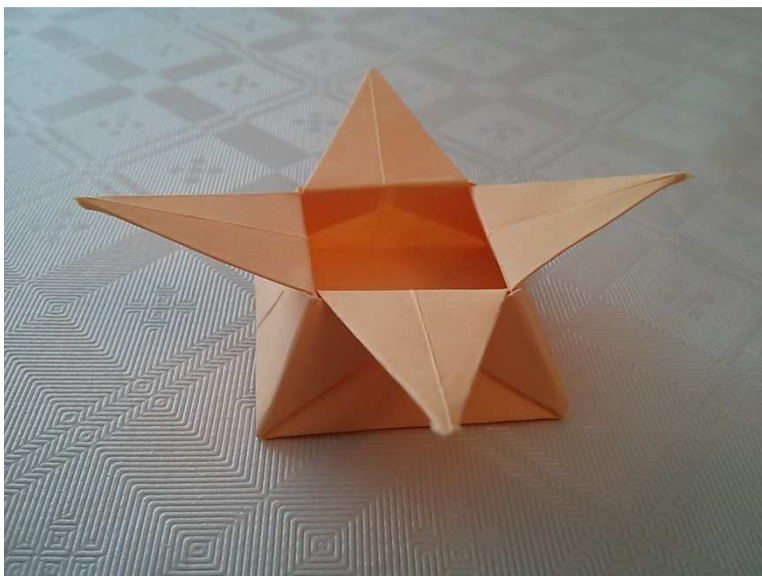


Figura 8: Caixa Estrellada

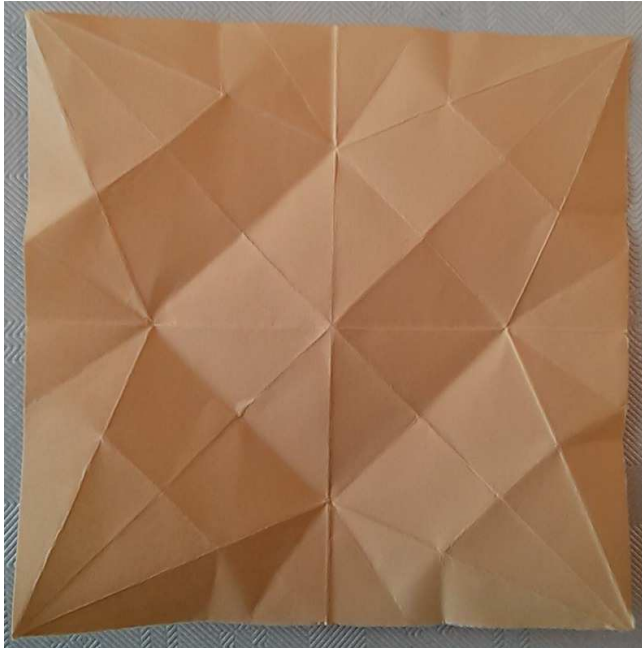


Figura 9: Esquelet Caixa Estrellada

4.2 Observacions generals

A les sis sessions de classe que es van dur a terme, es va notar en general un interès i una acceptació per part dels alumnes sobre aquest nou recurs del qual tots havien sentit parlar, però que ningú mai els hi havia ensenyat i menys, sota una perspectiva geomètrica.

El fet que fos un recurs bastant lúdic, va provocar en certs moments problemes conductuals del grup, causats la majoria de vegades, per alumnes que normalment es quedaven endarrerits en les construccions.

En relació als conceptes geomètrics que es volien fer assimilar, el transcurs de les classes, i la dinàmica dels diferents grups a les últimes, donava a entendre que els alumnes n'havien adquirit la gran majoria.

Des del punt de vista de les competències i valors desenvolupats al llarg de l'activitat, els resultats van ser molt satisfactoris, sobre tot en termes de col·laboració entre els alumnes, de comunicació i de capacitat de raonament matemàtic: al final de la sisena sessió, els alumnes deduïen, ells mateixos, propietats de les construccions que estaven realitzant.

Un aspecte molt important, segons el meu parer, és que alumnes amb menys capacitats acadèmiques en altres blocs de Matemàtiques, van agafar aquest bloc amb molt d'interès, millorant el seu comportament i la seva atenció, i per tant, els resultats acadèmics. El fet que aquest tipus d'alumnat estigués interessat per la classe, també provocava una dinàmica positiva en el grup.

També alguns alumnes més apartats del grup van demostrar molta facilitat a l'hora de manipular el paper, i per tant es van veure en una posició en la qual se'ls demanava que ajudessin els seus companys, augmentant el seu pes a nivell de grup i ajudant per tant en la seva integració.

Els alumnes estrangers que hi havia a l'aula, encara que tinguessin moltes limitacions amb l'idioma, van poder seguir les classes sense cap mena de problema, en general.

4.3 Resultats de l'avaluació

Pel que fa a l'avaluació feta, els resultats van ser, en general, molt negatius. La gran majoria d'alumnes van suspendre.

La part teòrica, en general, la gran majoria van aprovar-la, fet que reforça que els conceptes geomètrics més bàsics van ser assolits pels alumnes.

L'exercici de polígons regulars, en general, també van aprovar-lo.

Ara bé, l'exercici on es tornava a calcular l'àrea de l'ocellet de paper, va ser un desastre en quant a notes. Gairebé no va haver cap alumne que aconseguís fer de manera correcta el problema. Recordaven conceptes vistos a classe però, potser per com estava plantejat el problema, potser perquè no es va dir explícitament que aquell problema entraria i no s'ho van doncs estudiar, no van aconseguir repetir el que es va fer a classe.

Per tant, tenint en compte que les dues primeres parts de l'examen es van aprovar justet, i la última va ser un desastre, va haver un bon nombre de suspesos.

Val a dir que també va haver alumnes que van treure deus o nous. Es tractava dels alumnes que normalment sempre treien bones notes a Matemàtiques.

A la sessió on es va corregir l'examen, repassant les preguntes una per una, els alumnes s'averonyien de segons quines respostes, i la gran majoria va acabar dient que l'examen no era difícil. El problema de l'ocellet, per exemple, el van resoldre sense cap mena de problema quan estaven en grup.

També es van observar errors greus de base en quant a la utilització de les unitats de longitud, unitats d'àrees, etc.

5 Conclusions

Veient els resultats i la dinàmica general dels diferents grups, es pot afirmar que el recurs utilitzat en aquest projecte va tenir molt bona acceptació per part dels alumnes. Es va aconseguir, en general, captar l'atenció del grup.

La Papiroflèxia, sense cap mena de dubte, és de gran ajut pel docent per fer veure als alumnes el contacte de la Geometria amb la realitat. Per fer veure que la Geometria és una eina que no només permet ajudar a la descripció de la realitat, sinó que també és una eina que ens pot permetre explicar i construir models.

En referència als conceptes geomètrics que s'han d'adquirir en aquesta edat, també resulta una eina de gran ajut, ja que els principals polígons estudiats, i la gran majoria d'elements que els defineixen al llibre de text, per exemple, estan presents en les figures de papiroflèxia.

La captació dels conceptes i de les definicions és bastant bona, segons s'observa en la part teòrica de l'avaluació.

Ara bé, val a dir que el recurs es veu bastant limitat en segons quines figures geomètriques, com per exemple per l'estudi de la circumferència. Cal doncs investigar una mica més per tal de completar-lo.

Pel que fa a termes comportamentals, el recurs té una doble cara: el seu aspecte lúdic permet captar l'atenció d'elements del grup que normalment no segueixen la classe. Però a la vegada, si en algun moment algun alumne perd el fil conductor de la classe o es perd en alguna construcció, tenint en compte que el recurs implica una certa activitat a l'aula, és fàcil que comenci a parlar amb el del costat i que, per tant, es generi de mica en mica un enrenou a l'aula.

Per últim, un aspecte que s'ha de corregir en futures ocasions és l'avaluació. Els resultats estan molt en desacord amb la dinàmica observada al llarg de totes les sessions, fet que demostra que és el docent (jo mateix), el que es va equivocar en el tipus d'examen que va posar. Potser l'avaluació hauria d'haver estat una avaluació molt més continuada, on es tingués en compte la participació durant les sessions. Potser un possible exercici a avaluar hauria estat el de donar una figura a fer a casa, i que identifiquessin al mapa de cicatrius de la figura tots els elements geomètrics que veiessin, així com les propietats dels mateixos. Una altre possible exercici que va faltar desenvolupar va ser el mostrar als alumnes una figura de papiroflèxia, i que intentessin deduir la forma del mapa de cicatrius. Aquest últim exercici, encara que tingui una gran dificultat, pot permetre potenciar el pensament deductiu dels alumnes.

Pel que fa al professor tutor, li va agradar molt el recurs, fins el punt que l'any que ve l'utilitzarà també. Aquest punt és un aspecte que confirma la gran utilitat d'aquest recurs.

6 Bibliografía

Grupo Alquerque de Sevilla (2004), "Polígonos con una tira de papel" Revista SUMA nº 46 pp 95-98

Alejandrina Cervantes, M^a Dolores Pulido, Liliana Berenice, (2006) Tesis "La Construcción del conocimiento geométrico en los alumnos de segundo grado de educación primaria"

Sue Pope (2002), "The use of origami in the teaching of Geometry"

Grupo Pi, (2009), "Geometría Plana con Papel"

Grupo Pi, (2002), "Taller: El Papel como Material Didáctico en la Construcción de la Geometría Plana"

Francisco Maíz Jiménez (2011), "Taller de papiroflexia matemàtica"

T. Sundara Rao (1893) *Geometric Exercises in Paper Folding*

Grupo Pi (2003a), "Geometría con Papel". Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

Br. Pérez S. Keyla M (2009), "Enseñanza de la Geometría para un aprendizaje significativo a través de actividades lúdicas", tutoría de Dra Nieves Vílchez G.

CORIAT (1997), "Materiales, recursos y actividades: un panorama"

Stella Ricotti, (2011), "Geometria i Origami"

Enrique de la Torre Fernández, (2004), "Sobre la Demostración en la Enseñanza/Aprendizaje de la Geometría y la formación de profesores"

C. Blanco y T. Otero (2005), "Geometría con papel (papiroflexia matemàtica)"

S. Villarroel, N. Sgreccia (2012) "Enseñanza de la Geometría en Secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas"

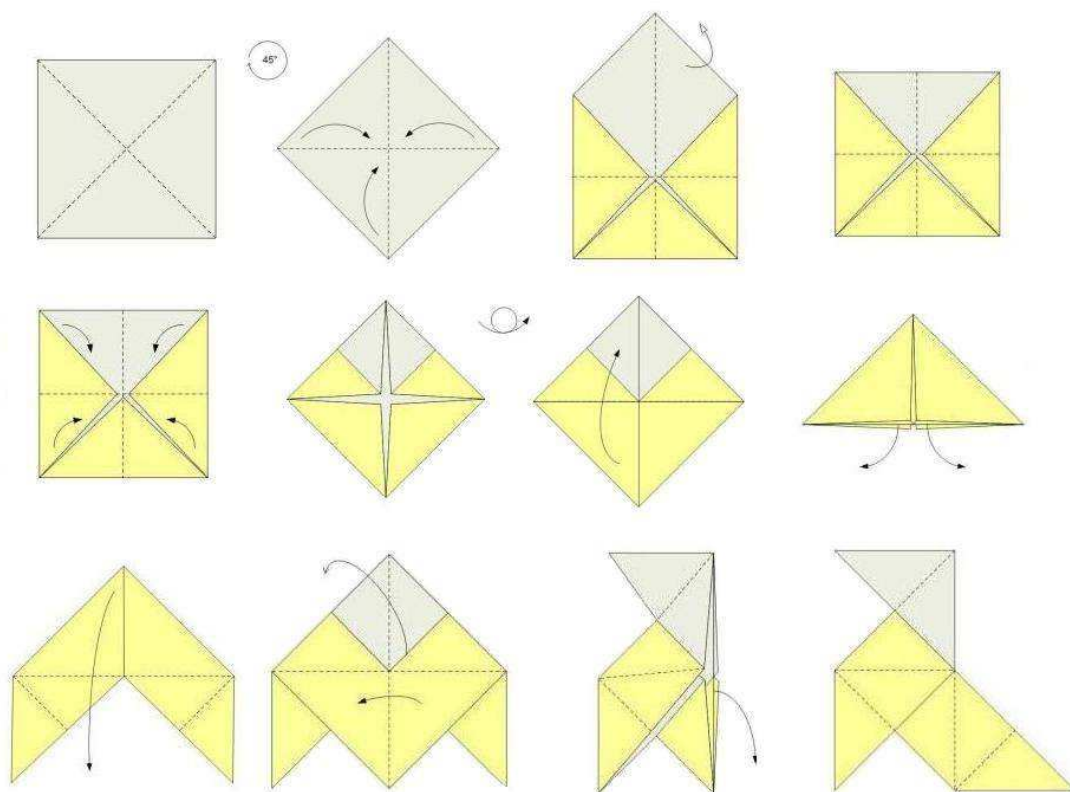
Webs

http://www.papiroflexia.net/papiroflexia_historia.html

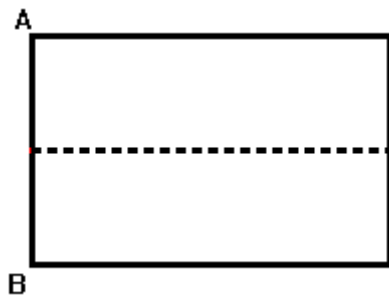
<http://www.mvg-ori.nl/ori-l/lists/history.htm>

7 Annexos

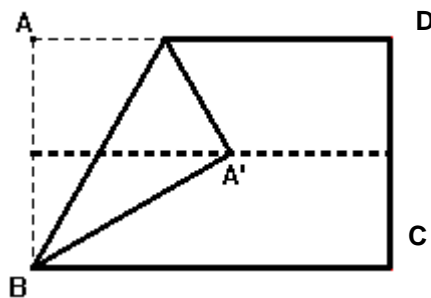
7.1 Annex 1: Instruccions per a la construcció de l'ocellet de paper



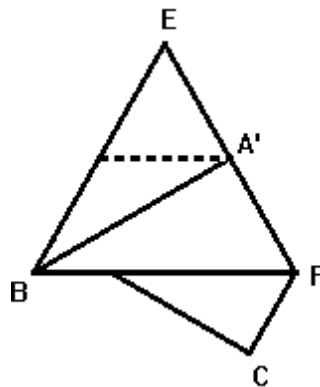
1. Doblegant, fes la paralela mitja en el sentit llarg del rectangle.



2. Porta el punt A sobre la paralela mitja de manera que el plec realitzat passi per B.



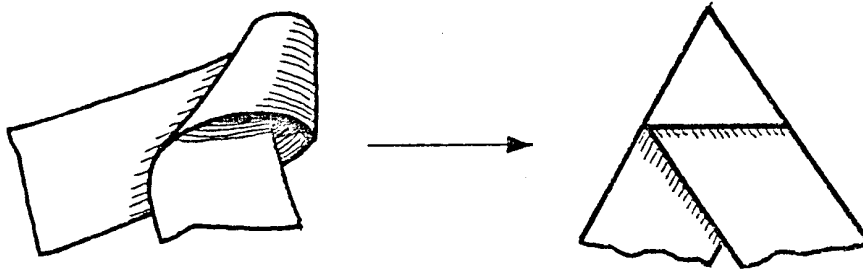
3. Sense desdoblar la figura anterior, amb un nou plec, prolonga el costat més curt del triangle. Finalment, porta el punt C sobre el segment $[A'F]$, de manera que el plec sigui coincident amb el costat $[BF]$. D'aquesta manera ja hauràs obtingut el triangle equilàter EBF.



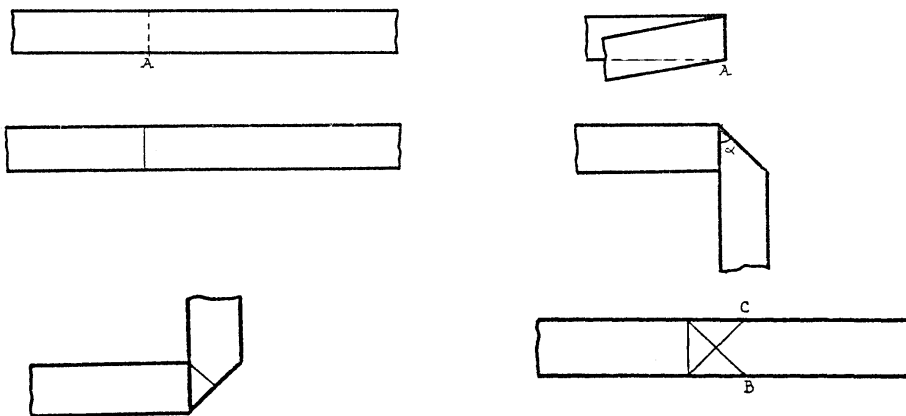
4. Per obtenir ara un hexàgon regular, primer hauràs de determinar el centre del polígon. Per això, hauràs de portar el punt B sobre el punt F, de manera que el plec passi per E. Desdobra i porta ara el punt F sobre el E. El punt d'intersecció d'aquests dos plecs és el centre O del triangle. Ara només caldrà que portis els punts E, B i F sobre el punt O i obtindràs un hexàgon regular.

7.3 Annex 3: Construcció de polígons regulars amb la tira de paper

7.3.1 Triangle Equilàter:



7.3.2 Quadrat:



7.3.3 Pentàgon regular:

