

# CONTROL DE ACTITUD DE UN COHETE DE SONDEO ATMOSFERICO

Pau Manent Bistué  
pau.manent@bistue.es

Joseba Jokin Quevedo Casín  
Joseba.Quevedo@upc.edu

Bernardo Morcego Seix  
bernardo.morcego@upc.edu

## Resumen

*Un cohete necesita de un sistema de control de actitud para superar posibles perturbaciones. Sobre un cohete pueden aparecer fuerzas que lo desestabilicen de una trayectoria idealmente vertical: viento, des-alineamiento de las fuerzas de empuje, asimetría de la carga, etc. Estas y muchas más son las perturbaciones de un cohete, y para evitar que éste se desestabilice y caiga o explote se requiere de un sistema que controle su actitud.*

*En el presente estudio se opta por un sistema de control activo basado en modificar la dirección del vector empuje simbolizado con TVC (Thrust Vector Control).*

*El estudio está dividido en dos partes: una primera parte en que se modela matemáticamente el cohete y el sistema de control de empuje y una segunda parte en que se estudia el comportamiento de distintas estructuras de control (PID clásico, control predictivo MPC (Model of Predictive Control) y control auto-sintonizado STR (Self-Tuning Regulator)). Se finaliza con la elección de un sistema de control y sus parámetros. Finalmente, la última sección se dedica al estudio del control discreto y en que se tratan temas relacionados con el tiempo de muestreo, la sensibilidad y la precisión de los sensores, entre otros.*

*En este estudio se hace especial hincapié en comparar la respuesta de distintos modelos de control de una planta inestable.*

**Palabras clave:** Control de actitud, Control auto-sintonizado, Control predictivo, Control PID, Doble integrador, Planta inestable, Control discreto

## 1 MODELO MATEMÁTICO DE LA PLANTA

En todo estudio sobre el control de distintos dispositivos es necesario saber a priori que forma tiene la planta a controlar, pues esta es una planta dinámica con parámetros que pueden cambiar en el tiempo. En este capítulo hay dos apartados: el primero trata de la modelización de la dinámica de un cohete mono-propulsor y el segundo apartado comenta la dinámica del sistema TVC

### 1.1 DINÁMICA DEL COHETE

El cohete se modela como un sólido rígido libre que está sujeto a fuerzas y momentos provenientes del empuje motor (T), el peso (W) y la resistencia aerodinámica (D). En este caso no se han tenido en cuenta las fuerzas de sustentación aerodinámica porque resultan mucho menores que las de resistencia. Las fuerzas de empuje motor se sitúan en un punto de la tobera, para simplificar el estudio se consideran situadas en el centro de la garganta de la tobera. Las fuerzas aerodinámicas, que son fuerzas distribuidas, se pueden simplificar en una fuerza y un momento situado en el centro de presiones del cohete. Finalmente, el peso se sitúa en el centro de gravedad. La figura 1 muestra un esquema de las fuerzas sobre el cohete en una posición arbitraria, donde aparecen las siglas T para empuje, L y D para sustentación y resistencia aerodinámica, W para el peso,  $v$  para velocidad,  $\delta$  para la deflexión del flujo,  $\alpha$  para la inclinación del cohete respecto al aire y  $\gamma$  para la inclinación del cohete respecto a la vertical.

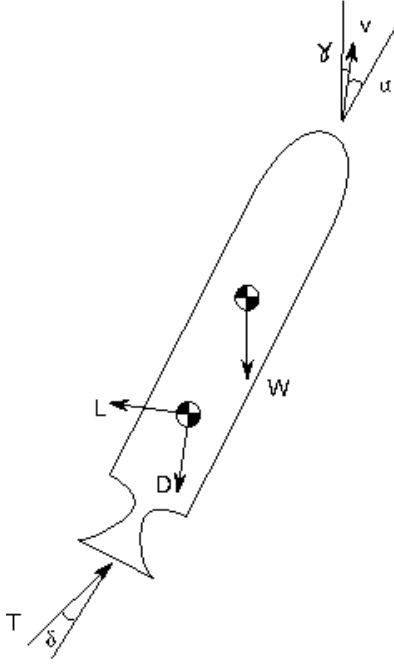


Figura 1: Fuerzas sobre un cohete

Las ecuaciones se estudian en un sistema de referencia situado sobre el cohete donde el centro de coordenadas está situado en el centro de gravedad, el eje 'x' apunta en el eje axial del cohete hacia la cofia, el eje 'y' es perpendicular a 'x' y apunta hacia la posición concreta de un elemento actuador del sistema TVC y el eje 'z' completa el triedro a derechas. Tras proyectar las fuerzas y momentos sobre los tres ejes fijos en la estructura del cohete (ejes *body*) y realizar las correspondientes transformaciones entre los ejes *body* y los ejes *earth* se concluye que las ecuaciones de la dinámica del cohete vistas desde los ejes *body* son:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= T \cos \delta \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \delta_z \\ \tan \delta_y \end{pmatrix} - W \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta \sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M} &= \begin{pmatrix} I_x \ddot{\theta} \\ I_y \ddot{\psi} \\ I_z \ddot{\phi} \end{pmatrix} = T \cos \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -\tan \delta_y \\ -\tan \delta_z \end{pmatrix} l_{0,CG} \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix} l_{CP,CG} \end{aligned} \quad (2)$$

La primera ecuación corresponde al modelado de fuerzas mientras que la segunda ecuación corresponde al modelado de momentos. La segunda

ecuación será sobre la que se podrá aplicar control del vector empuje y la que determinará que ángulo es necesario desviar el chorro de gases. Como se puede observar en ambas ecuaciones, los movimientos en distintos ejes están acoplados. Este acoplamiento provoca que si existen movimientos en al menos dos ejes, sobre el tercer eje aparece un movimiento inducido. Otro factor a tener en cuenta es que algunos de los parámetros de las ecuaciones no son constantes a lo largo del tiempo, como es el caso del empuje, la masa, la inercia o la distancia entre el centro de gravedad y el centro de presiones. Esto se debe a que mientras se consume el combustible, el cohete pierde masa con lo que reduce su peso y su inercia y el centro de gravedad avanza hacia la cofia. Además el empuje depende de términos como la temperatura de los gases de salida o la presión atmosférica, la cual varía con la altitud. Todos estos parámetros se han estudiado en detalle y se han representado en un conjunto de ecuaciones lineales que dependen del tiempo. Respecto al empuje, la ecuación combina los efectos ya comentados con la altitud predicha del cohete para ajustar una curva. Las ecuaciones 3 a 7 muestran cómo se modifican los parámetros del cohete en función del tiempo.

$$m = 45.038 - 0.75437t \text{ [kg]} \quad (3)$$

$$W = m \cdot 9.81 \text{ [N]} \quad (4)$$

$$I_x = 1.4 - 0.023t \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (5)$$

$$I_y = I_z = 45 - 0.769t \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F &= -0.000619t^6 + 0.053441t^5 - 1.795309t^4 \\ &\quad + 29.473727t^3 - 244.163881t^2 \\ &\quad + 983.066926t \text{ [N]} \end{aligned} \quad (7)$$

Sí se observa como el modelo dinámico es realmente complicado: 6 ecuaciones con movimientos acoplados y además con parámetros que cambian a lo largo del tiempo. A continuación se presenta la linealización de estas ecuaciones.

## 1.2 LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Existen distintos niveles de linealización de las ecuaciones del movimiento del cohete. Comentaremos algunos niveles. El primer nivel de linealización de las ecuaciones se consigue suponiendo los ángulos pequeños. Esta suposición se puede realizar en el caso que nos ocupa porque un ángulo se considera pequeño si está por debajo de los 20°; en este caso el cohete será inestable y no se podrá estabilizar nunca si se alcanzan ángulos girados entorno los 15°. Por este motivo resulta posible linealizar las ecuaciones. Los resultados son:

Tabla 1: Ecuaciones tras la linealización

$$\Sigma \bar{F} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_z \\ -\delta_y \end{pmatrix} - W \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho S C_D \dot{x} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Sigma \bar{M} = \begin{pmatrix} I_x \ddot{\theta} \\ I_y \ddot{\psi} \\ I_z \ddot{\phi} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta_y \\ -\delta_z \end{pmatrix} l_{0,CG} - \frac{1}{2} \rho S C_D \dot{x} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z} \\ -\dot{y} \end{pmatrix} l_{CP,CG} \quad (9)$$

Las ecuaciones resultantes son unas ecuaciones mucho más sencillas que las obtenidas directamente de la dinámica del movimiento del cohete. Cabe destacar que estas ecuaciones no se presentan acopladas, pues el movimiento en un eje no afecta para nada el movimiento en otros ejes; y esto se ha conseguido solo linealizando las ecuaciones. Esto significa que en el modelo no lineal los acoplamientos son muy débiles si los ángulos girados son pequeños.

Estas ecuaciones se pueden usar para buscar un controlador lineal pero estas ecuaciones aún molestan un poco porqué contienen términos no controlables. Es decir, la ecuación de momentos está formada por un término que depende del empuje y un segundo término que depende de la resistencia aerodinámica. Éste segundo término es molesto para calcular un regulador, pues es un término que aparece para armonizar las ecuaciones de fuerza con las de momento, pero es un término que no se puede controlar por sí solo. Hay otra razón para eliminar este término, la resistencia aerodinámica representada en este segundo término se puede tratar como una perturbación que ayuda a estabilizar el cohete. La función de la resistencia aerodinámica es ayudar pasivamente en el control de actitud. Si eliminamos este término de las ecuaciones estaremos obligando al controlador a ser lo suficientemente rápido y robusto como para controlar la actitud sin ayuda del *drag*. Es por esto que la segunda aproximación de la ecuación de momentos es precisamente eliminar el término aerodinámico.

$$\Sigma \bar{M} = \begin{pmatrix} I_x(t) \ddot{\theta} \\ I_y(t) \ddot{\psi} \\ I_z(t) \ddot{\phi} \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta_y \\ -\delta_z \end{pmatrix} l_{0,CG}(t) \quad (10)$$

Existe una tercera aproximación, la de usar parámetros constantes a lo largo del tiempo para obtener un controlador estático. Aunque esto no parezca una buena idea porque se carga mucha de la física del cohete, esta aproximación es de gran ayuda al empezar a diseñar u controlador. Luego se pueden cambiar términos en el controlador para que este

funcione correctamente con parámetros variables. Finalmente se presentan las ecuaciones del cohete en el dominio de Laplace:

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{S} \delta_x \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = -\frac{T l_{0,CG}}{I_t} \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} \quad (12)$$

La ecuación (12) presenta la función de transferencia de la inclinación lateral del cohete, representada por un doble integrador, una función muy difícil de controlar. Además, las ecuaciones no están acopladas con lo que se podrán controlar independientemente usando dos controladores SISO iguales. La ecuación (11) muestra la función de transferencia de la velocidad de giro axial del cohete, pues es más importante determinar una velocidad de giro axial nula que no determinar una posición concreta que no nos ofrece nada. Es importante limitar la velocidad de giro porque si ésta aumenta mucho, los actuadores que controlan la inclinación del cohete no serán capaces de seguir éste giro y no realizarán las deflexiones calculadas en los momentos idóneos y resultará en un empeoramiento de la inclinación.

### 1.3 MODELO DEL TVC (TOBERA)

Finalmente se precisa obtener un modelo adecuado de *Thrust Vector Control*. Esto es importante porqué existirá una relación entre la deflexión real del chorro de gases con el valor que pueda adquirir la variable que se puede manipular. Sin el ánimo de alargarse demasiado en este apartado, se presentan un par de ejemplos de mecanismos TVC.

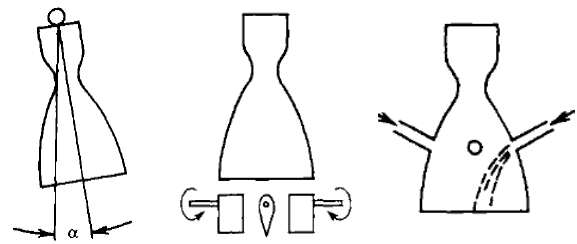


Figura 2: Mecanismos TVC: de iz. a dcha. tobera basculante, deflexión por aletas, deflexión por inyección

Por ejemplo, en una tobera basculante el ángulo desviado por la tobera no tiene que ser el mismo que se desvía el chorro de gases; con el uso de aletas la desviación del chorro tiene una relación con la posición y el giro de las aletas; y finalmente en la

inyección, la desviación del chorro dependerá del flujo inyectado y la posición de este. Se requiere un modelo que relacione estas variables.

Tras un estudio profundo sobre los distintos mecanismos de control TVC y con el soporte de otros estudios [7, 8, 9, 14 y 15] se concluye que el mejor mecanismo para realizar control TVC con un cohete de pequeñas dimensiones es el método de inyección GITVC (*Gas Injection Thrust Vector Control*). A continuación se presenta el gráfico que relaciona la deflexión del chorro con el flujo másico inyectado.

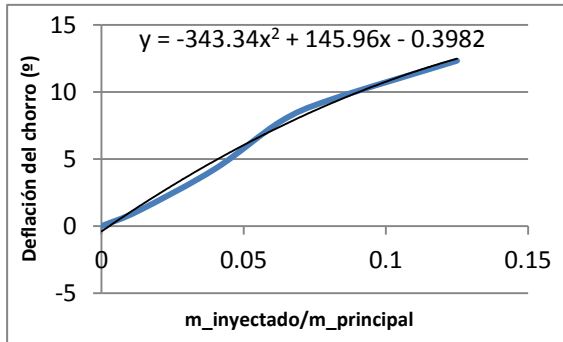


Figura 3: Relación entre la deflexión del chorro y el flujo másico inyectado

## 2 ESTRUCTURAS DE CONTROL

Una vez se tiene el modelo dinámico del cohete se procede a diseñar distintos modelos de control y a compararlos entre ellos para seleccionar el tipo que mejor se adapte a la solución requerida. Para ello se estudian los controles PID, MPC, *Gain Scheduling* y STR. Al final todo regulador deberá ser probado ante el modelo sin linealizar del cohete y de esta forma comprobar que el regulador funciona correctamente. Las especificaciones para el regulador son que la inclinación del cohete sea nula y la velocidad de giro axial también sea nula.

### 2.1 CONTROL PID

El control PID es el control más clásico y común en la industria. La forma como se ha diseñado el controlador sigue el siguiente esquema:

- 1 Controlador para una función de transferencia totalmente lineal
- 2 Modificar el controlador al añadir el término de la resistencia aerodinámica
- 3 Modificar el controlador al añadir los parámetros variables en el tiempo

- 4 Modificar el controlador al añadir dinámicas lineales simplificando así el modelo.

Siguiendo este esquema, inicialmente se diseña un controlador muy sencillo que poco a poco se va complicando a causa de las no linealidades.

Para el estudio de la controlabilidad del sistema se emplean principalmente dos tipos de perturbaciones. Una perturbación es lanzar el cohete con una inclinación inicial de 0.1 radianes. Esta situación es muy crítica porque en el momento del lanzamiento el controlador ve una planta formada únicamente por un doble integrador, pues la velocidad inicial es nula y no existe resistencia aerodinámica como una ayuda pasiva. Controlar una planta formada por un doble integrador es una situación comprometida porque el doble integrador es muy inestable. En este caso se elige una inclinación inicial de 0.1 radianes como un ángulo de lanzamiento extremo dentro de la normalidad, pero se ha comprobado que el controlador diseñado sea capaz que equilibrar el cohete con una inclinación inicial de 0.25 radianes, posición extrema por encima de la cual el controlador no tiene nada que hacer. Por otro lado, la segunda perturbación bastante estudiada es el uso de una perturbación en la aceleración angular del cohete de forma cuadrada de  $0.2rad/s^2$  y frecuencia de 0.25Hz. Se elige esta otra perturbación porque es una situación crítica con perturbaciones altamente cambiantes en el tiempo (lo que obliga al controlador ser muy rápido) y cuya amplitud se supone que nunca será sobrepasada en condiciones de operación normales.

Tras numerosas simulaciones del modelo con el control PID se concluye que:

- En el instante inicial el controlador no debe contener ningún parámetro integral. Esto se debe a que la planta es un doble integrador, una función de transferencia muy inestable. Si se usa un integrador, el sistema en lazo cerrado sería de tercer orden y aún sería más difícil de controlar
- El parámetro derivativo debe mantenerse bajo para evitar un excesivo ruido; pero este término ayuda a mejorar la velocidad del controlador.

- El término proporcional actúa como un relajador del control y se mantiene constante siempre a lo largo del tiempo.

Los valores de los términos proporcional, derivativo e integral se han calculado primeramente con sintonía analítica, la cual proporciona unos límites de estos tres parámetros; pero se termina usando la ley experimental de Ziegler-Nichols para determinar unos valores precisos para el controlador.

Muchos han sido los ensayos de controladores pero solo un controlador ha sido elegido. A diferencia de los controladores industriales, los parámetros de este controlador cambian en el tiempo para adaptarse al valor de la planta. Esto se debe a que la planta modifica sus parámetros siguiendo unas leyes que pueden expresarse en función del tiempo. De la misma forma, los parámetros del regulador también se pueden expresar en función del tiempo. Se ha diseñado un controlador adaptando los parámetros de control a cada instante de tiempo. Como disponemos del comportamiento del cohete en cada instante, resulta que se pueden definir los parámetros del regulador PID en función del tiempo. Estos parámetros se han aproximado a rectas para facilitar el cálculo de los parámetros en cada instante de tiempo. A continuación se presenta el regulador PID con parámetros variables a lo largo del tiempo:

$$k_p = -1$$

$$k_i = \begin{cases} -0.02t & \text{si } t < 5s \\ -0.24t + 1.1 & \text{si } 5 < t < 15s \\ -2.5 & \text{si } 15s < t \end{cases}$$

$$k_d = 0.005t - 0.24$$

En la figura 4 se muestra en verde la respuesta del controlador de parámetros variables con el tiempo si el cohete es lanzado con una inclinación inicial de 0.1 radianes. En azul se muestra un primer controlador realizado para el caso de un cohete donde los parámetros de masa, empuje e inercia fueren constantes, donde los parámetros del controlador son:

$$k_p = -1, k_i = -1.71, k_d = -1$$

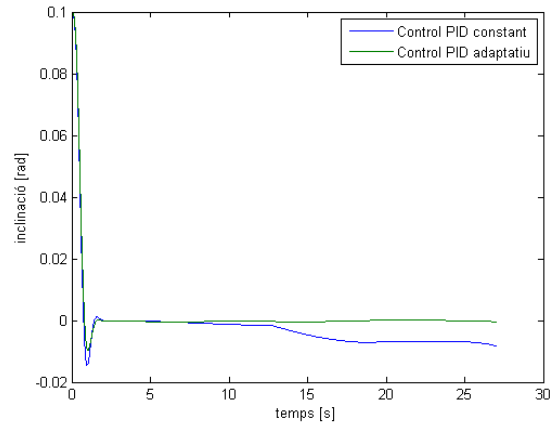


Figura 4: Comparación entre un PID constante (azul) y uno variable en el tiempo (verde)

Se observa como en el caso de usar un controlador con parámetros variables (representado en verde) la actitud del cohete se mantiene alrededor de cero. Por otro lado, el controlador de parámetros constantes (en azul) controla correctamente los instantes iniciales pero a partir de los 13 segundos la inclinación aumenta. La explicación de este fenómeno es que éste controlador solo está adaptado en un punto que ocurrirá en un instante. Alrededor de los 13 segundos, donde la inclinación del cohete es muy pequeña pero no es nula, el cohete pasa de un régimen subsónico a un régimen supersónico. Esto se traduce en que las fuerzas de resistencia aerodinámica, que nos ayudaban a estabilizar el cohete, disminuyen y recae mayor trabajo sobre el controlador. En cambio, si el controlador se va adaptando punto a punto al modelo a controlar, las inclinaciones resultantes de eventuales perturbaciones se ven muy reducidas.

El tercer movimiento a controlar es el del giro axial del cohete. No se pretende controlar la posición axial del cohete, pues no modifica para nada la actuación del cohete. La variable a controlar es la velocidad de giro, pues si esta velocidad es demasiado alta los actuadores de corrección de inclinación no responden correctamente. La perturbación de estudio de este caso es la reducción de la velocidad de giro si el cohete es lanzado con una velocidad inicial de giro de 0.1 rad/s, una velocidad que no es muy elevada pero que nos sirve para evaluar el comportamiento del regulador. La función de transferencia de este segundo proceso es un integrador, que es una función estable. Se proponen dos controladores para este proceso: un controlador PI y otro P.

Por un lado el controlador P reduce la velocidad de giro siguiendo una respuesta de primer orden. La figura 5 muestra la respuesta del giro del cohete usando reguladores de parámetros proporcionales distintos. Se observa que a medida que el término proporcional aumenta la velocidad de giro disminuye más rápidamente. No obstante, existe un límite en el control porque llega un momento donde los actuadores limitan la velocidad del control. Este punto límite se encuentra en torno  $k_p = 1$ .

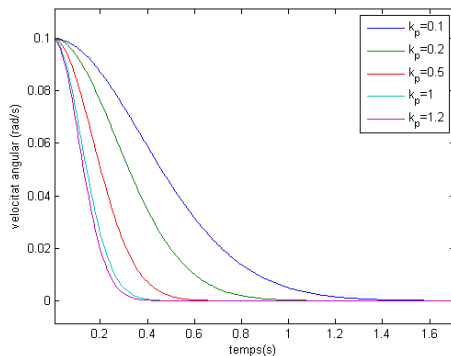


Figura 5: Control de giro por P

Por otro lado el controlador PI incluye un segundo integrador en lazo cerrado. Este regulador, aparte de controlar que la velocidad de giro se anule también provoca que la posición azimutal se mantenga como la inicial. La figura 6 muestra la velocidad en que el cohete resulta controlado. Se observa una respuesta de segundo orden. A medida que el término integral aumenta el sobre-pico en la velocidad de giro también aumenta, y a su vez el tiempo necesario para dejar el giro a velocidad nula aumenta. Por este motivo se tiende a dejar el control integral de lado para esta función de transferencia.

El control derivativo desestabiliza la planta y no se tiene en cuenta para este regulador concreto.

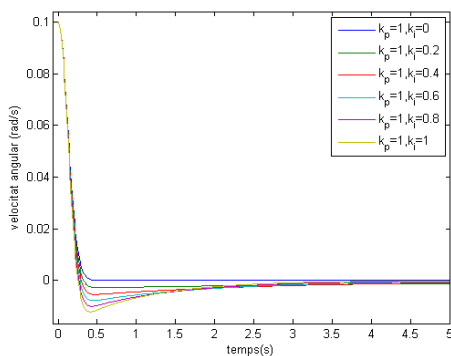


Figura 6: Control de giro por PI

## 2.2 CONTROL PREDICTIVO MPC

Otra estrategia de control empleada es el control predictivo descrito en [4]. Este consiste en calcular un error futuro y evitarlo con un adelantamiento de las acciones de control. Una de las primeras cuestiones que asaltan cuando se habla de control predictivo es como de grande deben ser los horizontes de control y de predicción. En procesos industriales donde las plantas son estables es común tener un horizonte de predicción de unos 20 intervalos y un control entre 5 y 10 intervalos. En cambio, cuando se habla de un proceso inestable como el que se trata en este artículo, éstos valores cambian y se deben recalcular. Para obtener los valores de estos dos parámetros se ha procedido de la siguiente forma:

1. Se mantienen todos los parámetros constantes y solo se varía uno.
2. Cuando la respuesta del sistema sea diferente (peor control) paramos el estudio.
3. Se elige el valor extremo del parámetro que hace que el control sea el óptimo.

Siguiendo este procedimiento y para una planta formada por un doble integrador, se encuentra que tanto el horizonte de predicción como el horizonte de control tienen el valor de 2. Es decir, el control predictivo calculará una previsión del error hasta dos intervalos de tiempo por delante del actual y diseñará una secuencia de control para reducir este error en dos intervalos de tiempo.

Otros parámetros importantes son las funciones de peso que calibran qué parte de la señal de control proviene de la previsión del error y qué parte proviene de las señales de control anteriores. Se ha observado que la función de peso del error desestabiliza mucho el cohete mientras que la respuesta ante las anteriores variables de control es casi uniforme. Por consiguiente se eligen las siguientes funciones de peso:

$$\delta = 0, \lambda = 1$$

Dónde  $\delta$  es la función de peso del error y  $\lambda$  es la función de peso de las anteriores variables de control.

Por otro lado, en el control MPC también es posible usar modelos de ruido y modelos de perturbación. Estos modelos permiten al controlador conocer la respuesta de la planta ante las perturbaciones. No obstante, el modelo de ruido no se debe emplear sobre el proceso real, pues lo desestabilizaría. Es

bueno saber cómo responde el modelo ante una perturbación para así mejorar la respuesta del controlador. No se debe tampoco abusar del modelo de ruido, pues se puede caer en el error de diseñar un control muy efectivo ante un tipo determinado de perturbaciones pero que no funciona bien ante cualquier otra perturbación.

A continuación la figura 7 muestra las respuestas de la inclinación del cohete cuando este se ha lanzado con una inclinación inicial de 0.1 radianes. En el caso de usar un control MPC (línea roja) la respuesta tiende más rápido hacia cero pero se queda un cierto tiempo oscilando alrededor del punto objetivo. Por el contrario, al usar un control PID (línea azul) el pendiente de aproximación a cero es menor que en el caso del MPC pero no realiza oscilaciones, tan solo existe un sobre-pico. Tanto para el caso del MPC como para el PID los tiempos de estabilización de la inclinación del cohete son similares.

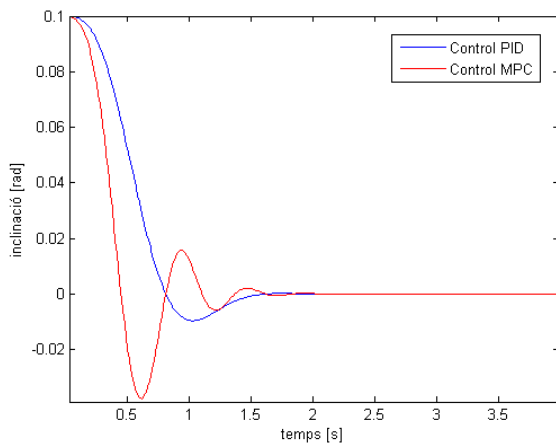


Figura 7: Comparación de control PID vs. MPC

En cuanto se refiere al control de la velocidad de giro entorno al eje axial del cohete, éste sigue una aproximación típica de una respuesta de primer orden, como en el caso del PID.

### 2.3 CONTROL CON PREVISIÓN DE GANANCIA (GAIN SCHEDULING)

El control con previsión de ganancia es un control que modifica su respuesta en función de la ganancia predicha de la planta. En el caso que nos ocupa la ganancia del cohete puede ser predicha gracias a que el empuje, la masa, la inercia y la distancia entre el centro de gravedad y un punto fijo en el cohete pueden ser representadas por funciones que dependen del tiempo (ecuaciones 3 a 7). El problema

encontrado al estudiar este controlador es que la función en lazo cerrado es una función de transferencia de tercer orden. Es necesario reducir el orden de esta función para poder diseñar un controlador cuya respuesta se asemeje a una respuesta de primer orden. La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{k}{(1 + \tau s)(1 + u\tau s)^2} \quad (13)$$

Eligiendo correctamente un valor de 'u' se puede hacer que la función de tercer orden se comporte como una de primer orden si existe un polo dominante y los otros dos son no dominantes. También se selecciona un valor para el tiempo de retraso, concretamente:

$$u=0.02 \text{ y } \tau = 10$$

Usando la ley de sintonía experimental de Ziegler-Nichols, los parámetros del controlador PID deben ser:

$$k_p = 26, k_i = 2.5, k_d = 10.1$$

La figura 8 muestra la respuesta del controlador PID con parámetros no constantes (rojo) y la del controlador PID con previsión de ganancia (azul). Este segundo controlador evita el sobre-pico que realiza el primer controlador, pero en cambio, en la senda de aproximación a cero padece oscilaciones de baja amplitud y baja frecuencia. Aunque estos no sean motivos de descarte del controlador, es necesario comentarlo.

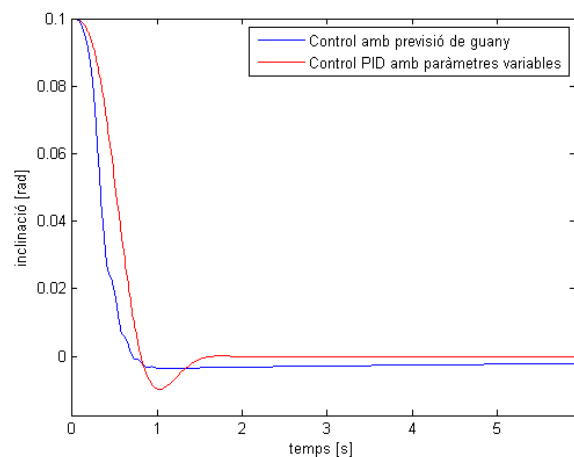


Figura 8: Comparación de controladores PID vs. Gain Scheduling

En la figura 9 se muestra la respuesta de ambos controladores cuando el cohete padece una

perturbación en su aceleración angular en su inclinación periódica cuadrada de  $0.2rad/s^2$  y frecuencia  $0.25Hz$  (señal verde).

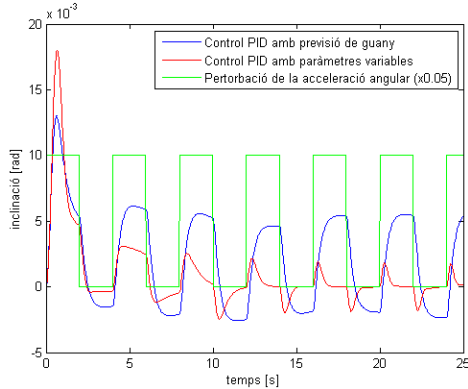


Figura 9: Comparación PID vs. *Gain Scheduling* a perturbaciones periódicas

Se puede observar que tanto la respuesta con previsión de ganancia (azul) y la del PID con parámetros variables (rojo) son estables; pero el PID padece de mayores perturbaciones en su amplitud y sigue un camino más rápido hacia cero.

## 2.4 SELF-TUNING REGULATOR (STR)

En cuanto al control auto-sintonizado cabe comentar que realiza cambios en sus parámetros de forma automática según detecta cierta respuesta de la planta. La respuesta del controlador STR es de la forma:

$$R(s)u(t) = T(s)u_c(t) - S(s)y(t) \quad (14)$$

Dónde 'u' es la respuesta del controlador (acción de control), 'y' es la respuesta de la planta, 'u<sub>c</sub>' es la consigna y R, T y S son polinomios. En este caso la consigna es siempre cero porque se requiere una actitud completamente vertical. Así el polinomio T no se usa. Los otros dos polinomios son polinomios de primer grado (según el método de mínimos polos). De esta forma la ley de control resulta:

$$s^2 \cdot (s + r_0) + g \cdot (s_1 s + s_0) = (s + a_0) \cdot (s^2 + a_{1m} s + a_{2m}) \quad (15)$$

Donde  $(s^2 + a_{1m} s + a_{2m})$  representa la posición de los hipotéticos polos del controlador. Tras una serie de ensayos se determinan los siguientes valores:

$$a_{1m} = 20, a_{0m} = 100, a_0 = 100, r_0 = 120,$$

$$s_1 = \frac{220}{g}, s_0 = 10000/g.$$

Usando  $a_0 = 100$  se elimina la dinámica del polinomio observador. Se observa que los dos parámetros que acompañan al polinomio S están divididos por 'g', que es la ganancia de la función de transferencia. Esto quiere decir que aunque el sistema sea auto-sintonizado, parte de los parámetros tienen una condición exterior impuesta por el valor de la ganancia de la planta,  $g = T \cdot L_{cp,cg}/I_t$ , que depende del tiempo.

La figura 10 muestra la respuesta de la inclinación del cohete cuando este es lanzado con una inclinación inicial de 0.1 radianes. La respuesta del controlador SRT (en rojo) es muy similar a la del controlador de previsión de ganancia de la figura 8: la respuesta parece ser de primer grado porque no realiza sobre-picos, alcanza el estacionario en el mismo tiempo que el PID de parámetros constantes pero en su aproximación a cero padece una serie de oscilaciones.

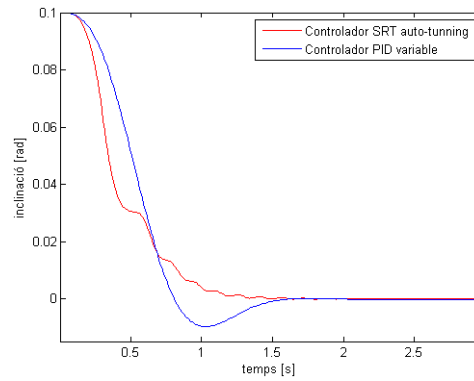


Figura 10: Comparación PID vs. STR

El hecho diferencial entre estos dos reguladores reside en la respuesta cuando el cohete está sometido a perturbaciones periódicas a lo largo del tiempo. Mientras que en la figura 10 solo se estudia la estabilidad del controlador en el momento del lanzamiento, el cual es un caso muy crítico, en la figura 11 muestra la respuesta del controlador a lo largo de todo el tiempo. La perturbación que se induce en el cohete es la misma que en el estudio anterior con el *gain scheduling*, una perturbación periódica cuadrada de amplitud  $0.2rad/s^2$  y frecuencia  $25Hz$ . Tal como se observa en la figura 11, la respuesta del cohete ante estas perturbaciones es más estable que en el caso del PID en los siguientes aspectos: cuando el cohete sufre una perturbación, en el momento inicial de ésta y para el regulador PID el cohete sufre una gran desviación



que poco a poco disminuye hasta valores alrededor de cero. En cambio, usando el regulador STR la inclinación sufrida es mucho menor (esto se nota sobre todo en el instante del lanzamiento, donde la función de transferencia es más crítica y la amplitud de la respuesta del cohete varía en un orden de magnitud según se use un PID o un STR); aunque usando el controlador STR el cohete tiende a cero muy lentamente. Para perturbaciones a alta frecuencia, como es el caso, casi no se nota como el regulador provoca que el cohete tienda a una actitud completamente vertical.

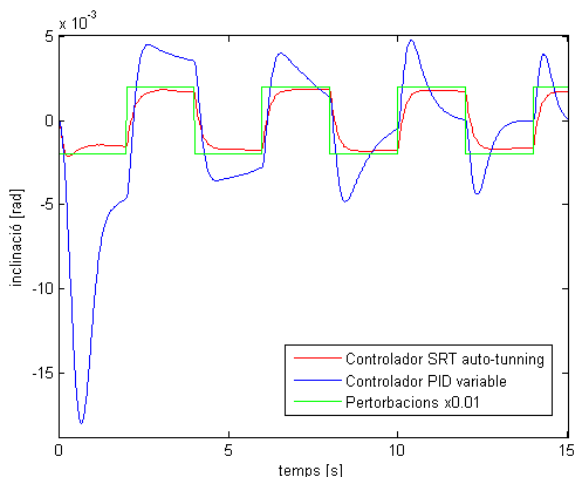


Figura 11: Comparación PID vs. STR con perturbaciones periódicas

En la figura 12 puede observarse el comportamiento del cohete ante una perturbación constante de  $0.2\text{rad}/s^2$  en su aceleración angular-

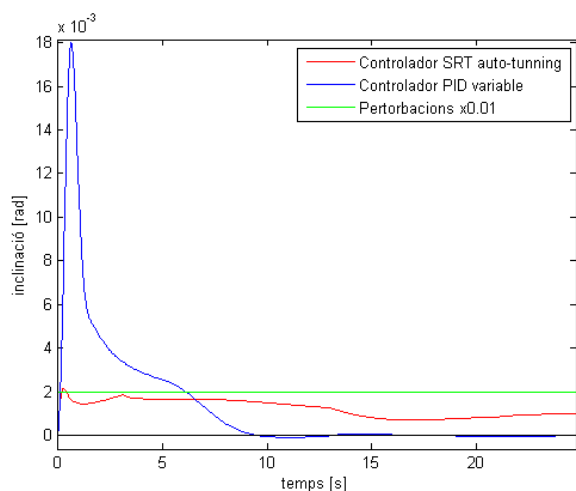


Figura 12: Comparación PID vs. STR con perturbación constante

En este caso la perturbación se mantiene durante mayor tiempo y puede observarse como el regulador STR tiende a estabilizar el cohete entorno a la vertical, pero lo hace muy lentamente. También se nota como en el instante inicial la amplitud de la perturbación es mucho mayor en el caso del PID que en el caso del STR porque el controlador STR es más agresivo.

El otro movimiento a controlar es la velocidad de giro. En este caso la función de transferencia es un integrador y la ley de control usando el método de mínima graduación, es:

$$s \cdot r_0 + k \cdot s_0 = a_0 \cdot (s + a_x)$$

Es decir, los polinomios S y R son de primer grado. T es inexistente porque la consigna de velocidad de giro siempre es nula. Tras estudiar distintos valores para los parámetros del regulador, éste queda como:

$$u(t) = -\frac{0.1}{I_x} y(t - 1)$$

La figura 13 muestra la velocidad de giro del cohete si se aplica una aceleración periódica cuadrada de  $0.2\text{rad}/s^2$  en su aceleración angular axial. Ambos reguladores permiten comportamientos similares pero el controlador STR, al ser más agresivo, reduce mejor la velocidad del giro.

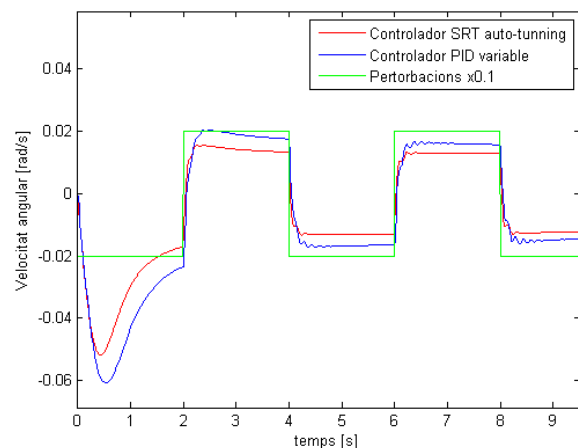


Figura 13: Control de giro, comparación PID vs. STR

## 2.5 COMPARACIÓN DE REGULADORES

Se han presentado hasta cuatro modelos distintos de control y se ha estudiado su comportamiento ante las mismas perturbaciones. Ahora es momento de seleccionar uno. Para ello se usará el sistema de selección basado en la ponderación del valor técnico de cada solución. Para referenciar los resultados se toma como valores nominales los ofrecidos por el regulador PID; el resto de valores serán mejores o peores en referencia a éste.

La tabla 2 muestra los valores técnicos calculados para los distintos controladores presentados. El regulador predictivo MPC obtiene una baja puntuación porque este regulador funciona bien para plantas estables y perturbaciones conocidas, pero no es aconsejable para plantas inestables. Los otros tres reguladores obtienen puntuaciones muy similares.

Los reguladores PID de parámetros variables y el STR obtienen la misma puntuación. El regulador PID proporciona una corrección del error rápida con pocas oscilaciones mientras que el regulador STR impide picos de error iniciales pero es lento cuando se trata de minimizar el error estático. Aunque el controlador sea muy estable y no produzca oscilaciones, si en algún momento la inclinación pasa de cierto valor nada podrá hacer el regulador para estabilizar el cohete. El motivo principal para elegir el regulador STR es que, comparando las inclinaciones máximas que permiten estos tres reguladores, la regulador STR obtiene menor inclinación que los otros dos; por otro lado, el motivo para elegir el regulador PID es que es menos oscilatorio y permite el control del error en estático de una mejor forma que otros reguladores.

Tabla 2: Valor técnico de los distintos controladores

Parámetro	Peso	PID		MPC		GS		STR	
		V	VT	V	VT	V	VT	V	VT
Velocidad	3	10	30	10	30	10	30	10	30
Error en estático	-0.5	10	-5	15	-7.5	8	-4	20	-10
Oscilaciones	-0.5	10	-5	20	-10	17	-8.5	20	-10
Pico inicial	-1	10	-10	5	-5	8	-8	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>1</b>		<b>10</b>		<b>7.5</b>		<b>9.5</b>		<b>10</b>

## Referencias

- [1] **Aström Karl Johan y Wittenmark Björn** Adaptive Control [Informe]. - USA : Addison Wesley Longman, 1995.
- [2] **Bahrami M., Roshanian J. y Ebrahimi B.** Robust Integral Sliding-Mode Control of an Aerospace Launch Vehicle [Publicación periódica]// Journal of aerospace science and technology. - 2006. - 3 : Vol. 3. - págs. 143-149.
- [3] **Barrowman James S. y Barrowman Judith A.** The theoretical prediction of the center of pressure [Informe]. - [s.l.] : Project NARAM-8, 1966.
- [4] **Camacho E.F. y Bordons C.** Control predictivo: pasado, presente y futuro [Publicación periódica]// Revista Iberoamericana de Automatica e Informática. - Octubre de 2004. - 3 : Vol. 1.
- [5] **Camacho E.F. y Bordons C.** Model Predictive Control [Libro]. - London : Springer\_Verlag, 2004.
- [6] **Carreras Ramon** Actuacions coet// Motors coet. - Terrassa : [s.n.], 15 de 09 de 2012.
- [7] **Deere K. [y otros]** A Computational Study of a New Dual Throat Fluidic Thrust Vectoring Nozzle Concept [Informe]. - Hampton : AIAA, 2003.
- [8] **Deere K. [y otros]** Computacional study of fluidic thrust vectoring using separation control in a nozzle [Informe]. - Orlando : AIAA, 2003.
- [9] **Deere K. [y otros]** Experimental Study of an Axisymmetric Dual Throat Fluidic Thrust Vectoring Nozzle for Supersonic Aircraft Application [Informe]. - Hampton : AIAA, 2003.

- [10] **Espìnosa Jairo** Control Lineal de sistemas variables [Libro]. - Medellin : Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [11] **Garcia-Almiñana David** Lecture 5, Avaluation of alternatives, Projects [Informe]. - Terrassa : UPC, 2011.
- [12] **Manent Bistué Pau** Control de actitud de un cohete de sondeo atmosférico. Master's Thesis. [Libro]. - Terrassa : [s.n.], 2013.
- [13] **Martin C.L. y Powers L.B.** Feasibility study of LITVC for shuttle SBR [Informe]. - Alabama : NASA, 1981.
- [14] **Martins C.L. y Powers B.** Feasibility Study of LITVC for Shuttle SRB. - [s.l.] : NASA technical reports, Setiembre de 1981.
- [15] **Mockenhaupt J.D.** Performance characteristics and analysis of liquid-injection thrust-vector control [Informe]. - Sacramento, California : Aeroget General Corporation, 1965.
- [16] **Ogata K.** Ingeniería de control moderna [Libro]. - Madrid : Pearson, 2010.
- [17] **Recuenco J.M.** Modelismo espacial [Libro]. - 2008.
- [18] **Roger Alejandro y Ferret Oriol** Rocklab2, appendix F [Informe]. - Terrassa : [s.n.], 2011.
- [19] **Sargsyan Tigran** Rocklab2, appendix A [Informe]. - Terrassa : [s.n.], 2011.
- [20] **Subias Laura** Rocklab2, appendix B [Libro]. - 2011.
- [21] **Sutton George P.** Rocket propulsion elements [Libro]. - USA : John Wiley & Sons, 2001.
- [22] **Wing David y Giuliano Victor** Fluidic thrust vectoring of an axisymmetric exhaust nozzle at static conditions [Informe]. - USA : ASME, 1997.