PROJECTE TECNOLÒGIC

Llicenciatura en matemàtiques

Títol: Intersecció en homologia i teorema del punt fix de Lefschetz

Autor: Daniel Torres Moral

Director: Jaume Amorós

Departament: Matemàtica Aplicada I

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Projecte Tecnològic

Intersecció en homologia i teorema del punt fix de Lefschetz

Autor: Daniel Torres Moral
Director: Jaume Amorós

21 de Juny del 2013

Resum

Paraules clau: nombres d'intersecció; grups d'homologia; teorema del punt fix de Lefschetz; teorema de Poincaré-Hopf; dualitat de Poincaré.

MSC: 57N60, 57N65, 57N80, 32Q.

Estudiem el nombre d'intersecció de subvarietats diferenciables, aplicant-lo a demostrar els teoremes del punt fix de Lefschetz i de Poincaré-Hopf.

Estenem el nombre d'intersecció a cadenes singulars i classes d'homologia usant només la versió estratificada del teorema de transversalitat.

Amb aquesta intersecció en homologia, reenunciem el teorema del punt fix de Lefschetz i també indiquem com les dues versions habituals del teorema de Dualitat de Poincaré s'unifiquen en una versió usant intersecció en homologia.

Índex

1 Introducció

En el context de la matemàtica moderna tenim, per una banda, l'àmbit de la topologia diferencial, que s'ha dedicat a estudiar en profunditat la intersecció de varietats, donant lloc a importants resultats com el teorema de transversalitat i versions estratificades per poder definir transversalitat en símplexs C^∞. Com a exemple, tenim la referència [3].

Per altra banda, tenim l'àmbit de la topologia algebraica, on la intersecció de classes d'homologia s'amaga tot definint-la a partir del cup producte en cohomologia (veure [2]). D'aquesta manera, es perd informació donada per les interseccions transverses (el signe de la intersecció per subvarietats complexes, veure capítol 3).

L'objectiu d'aquest projecte és donar una definició d'intersecció en homologia de graus complementaris apta per a donar els dos resultats principals: el teorema del punt fix de Lefschetz i el teorema de Dualitat de Poincaré. En concret, volem mostrar com aquest darrer resultat que enllaça la topologia diferencial amb la topologia algebraica.

Hem aconseguit una altra definició d'interseccions de cadenes basada en la intersecció de símplexs C^∞ amb els resultats de transversalitat del capítol 3. També hem presentat i demostrat el teorema del punt fix de Lefschetz en la versió clàssica de la topologia algebraica per varietats comptant cicles, i en la seva versió d'intersecció, comptant punts d'intersecció. Aquest compte dels punts fixos és especialment eficient quan ens restringim a les aplicacions holomorfes entre varietats complexes, cas que estudiem amb més precisió.

Finalment, donem dues presentacions habituals de la Dualitat de Poincaré: com isomorfisme entre grups d'homologia i de cohomologia de grau complementari, i com no degeneració del cup producte entre els grups de cohomologia de graus complementaris. A més, indiquem com la intersecció en grups d'homologia $I(b,c)$ definida al capítol 4 més la relació natural entre grups d'homologia i de cohomologia discutida el en capítol 2 permet identificar tots dos enunciats, fent-los equivalents a l'enunciat original de Poincaré

$$\begin{array}{rccc} I\colon & H_p(X;G)\times H_{k-p}(X;G) & \longrightarrow & H_0(X;G) \\ & (b,c) & \mapsto & I(b,c) \end{array}$$

on I és la intersecció definida a partir de transversalitat al capítol 4.

Contingut de la Memòria

- **Capítol 2:** Cohomologia i la relació amb l'homologia en espais topològics i coeficients qualssevol. Destaquem el cas de coeficients en un cos de característica 0.

- **Capítol 3:** Intersecció de varietats via teoremes de transversalitat i algunes aplicacions com el teorema del punt fix de Lefschetz en la seva versió quantitativa i el cas de les varietats complexes. El teorema de Poincaré-Hopf.

- **Capítol 4:** Definició d'intersecció per cadenes singulars C^∞ i classes d'homologia aplicant els resultats d'intersecció de varietats del capítol 3 en la seva versió estratificada. Versió del teorema del punt fix de Lefschetz en intersecció en homologia. Els dos enunciats de la dualitat de Poincaré citats anteriorment i una indicació de la seva unificació via el producte d'intersecció en homologia.

2 Cohomologia

2.1 Grups abelians

Siguin A, B grups abelians, llavors $Hom(A, B)$ també és un grup abelià. Observem, doncs, que

$$\begin{array}{rccc} Hom(\cdot, B)\colon & \text{Grups Abelians} & \longrightarrow & \text{Grups Abelians} \\ & A & \mapsto & Hom(A, B) \end{array}$$

Observació. Sigui $f\colon A \longrightarrow A'$ un morfisme. Llavors f indueix

$$\begin{array}{rccl} Hom(f, B)\colon & Hom(A', B) & \longrightarrow & Hom(A, B) \\ & \phi & \mapsto & Hom(f, B)(\phi) = \phi \circ f \end{array}$$

Observació. Sigui $0\colon A \longrightarrow A'$ la funció zero. Llavors $Hom(0, B) = 0$.

Proposició 2.1. *$Hom(\cdot, B)$ és un functor contravariant.*

Demostració. És clar:

- Si $id_A\colon A \longrightarrow A$ llavors $Hom(id_A, B)\colon Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, B)$ aplica $Hom(id_A, B)(f) = f \circ id = f$. Per tant $Hom(id_A, B) = id_{Hom(A,B)}$.
- Si $f\colon A \longrightarrow A'$ i $g\colon A' \longrightarrow A''$ llavors $\forall \phi \in Hom(A'', B)$, $Hom(g \circ f, B)(\phi) = \phi \circ (g \circ f) = (\phi \circ g) \circ f = Hom(f, B) \circ Hom(g, B)(\phi)$. És a dir $Hom(g \circ f, B) = Hom(f, B) \circ Hom(g, B)$.

□

Proposició 2.2. *Sigui $f\colon A \longrightarrow A'$ isomorfisme. Llavors $Hom(f, B)$ és també un isomorfisme, amb invers $Hom(f^{-1}, B)$. Dit d'una altra manera: el functor $Hom(\cdot, B)$ envia isomorfismes a isomorfismes.*

Demostració.

$$Hom(f, B) \circ Hom(f^{-1}, B) = Hom(f^{-1} \circ f, B) = Hom(id_A, B) = id_{Hom(A,B)}$$

I de manera anàloga $Hom(f^{-1}, B) \circ Hom(f, B) = id_{Hom(A',B)}$. □

Proposició 2.3. *El functor $Hom(\cdot, B)$ és exacte per l'esquerra.*

Demostració. Sigui $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{0} 0$ una successió exacta en A. Aleshores demostrarem que la successió

$$Hom(A', B) \xleftarrow{Hom(f,B)} Hom(A, B) \xleftarrow{0} 0$$

és exacta en $Hom(A, B)$. Equivalentment demostrarem que el morfisme $Hom(f, B)$ és injectiu.

Siguin $\phi, \psi \in Hom(A, B)$, $\phi \neq \psi$. Equivalentment, $\exists a \in A$ tal que $\phi(a) \neq \psi(a)$. Com que f és exhaustiva, $\exists a' \in A'$ tal que $f(a') = a$. Per tant

$$Hom(\phi, B)(f)(a') = \phi \circ f(a') = \phi(a) \neq \psi(a) = \psi \circ f('a) = Hom(f, B)(\psi)(a')$$

i per tant $Hom(f,B)(\phi) \neq Hom(f,B)(\psi)$, com volíem per demostrar la injectivitat de $Hom(f,B)$. $\square$

Observació. En general, el functor $Hom(\cdot,B)$ no és exacte per la dreta.

Exemple 2.1. La successió $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ amb $f(a) = 2a$ és exacta a $\mathbb{Z}$, donat que f és injectiva; en canvi

$$0 \longleftarrow Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \overset{Hom(f,\mathbb{Z})}{\longleftarrow} Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$$

no ho és: si $\phi \in Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ amb $\phi(1) = 1$, llavors no existeix cap $\psi \in Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ tal que $\phi = Hom(f,\mathbb{Z})(\psi) = \psi \circ f = 2\psi$.

La següent verificació és immediata:

Proposició 2.4. *$Hom(A \oplus A', B) \simeq Hom(A,B) \oplus Hom(A',B)$.*

Proposició 2.5. *Sigui la successió $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A$ exacta en A' amb $A \simeq Im(f) \oplus A \big/ Im(f)$. Llavors, la successió*

$$0 \longleftarrow Hom(A',B) \overset{Hom(f,B)}{\longleftarrow} Hom(A,B)$$

és exacta a $Hom(A',B)$. És a dir, en aquest cas el functor és exacta per la dreta.

Demostració. Com $A \simeq Im(f) \oplus A \big/ Im(f)$ llavors $A = Im(f) \oplus K$ per a cert subgrup K.

Considerem la successió $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} Im(f)$ amb $f'(a) = f(a)$. Llavors, aquesta també és exacte a A' i f' és un isomorfisme. Així doncs, al aplicar el functor queda la cadena:

$$0 \longleftarrow Hom(A',B) \overset{Hom(f',B)}{\longleftarrow} Hom(Im(f),B)$$

on $Hom(f',B)$ és un isomorfisme.

Ara provarem l'exhaustivitat de $Hom(f,B)$. Per tot $\phi \in Hom(A',B)$ tenim $Hom(f',B)^{-1}(\phi) = Hom((f')^{-1},B)(\phi) = \psi \in Hom(Im(A),B)$. Llavors, com $\forall a \in A\ \exists! x \in Im(f)$ i $\exists! y \in K$ tal que $a = x + y$, podem estendre ψ a $\widetilde{\psi}(a) = \widetilde{\psi}(x+y) = \psi(x)$. Llavors:

$$Hom(f,B)(\widetilde{\psi}) = \widetilde{\psi} \circ f = \psi \circ f = Hom((f')^{-1},B)(\phi) \circ f = \phi \circ (f')^{-1} \circ f = \phi$$

$\square$

La condició d'escissió $A \simeq Im(f) \oplus A \big/ Im(f)$ es compleix sempre sobre espais vectorials. Així doncs:

Corol·lari. *Si la successió $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A$ és exacta i A i A' són espais vectorials i f morfisme, llavors*

$$0 \longleftarrow Hom(A',B) \overset{Hom(f,B)}{\longleftarrow} Hom(A,B)$$

és exacta a $Hom(A', B)$.

Proposició 2.6. *Sigui la successió exacta curta*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

amb $A \simeq Im(f) \oplus A \big/ Ker(g)$. Llavors la successió curta

$$0 \longleftarrow Hom(A', B) \xleftarrow{Hom(f,B)} Hom(A, B) \xleftarrow{Hom(g,B)} Hom(A'', B) \longleftarrow 0$$

és exacta.

Demostració. Per les proposicions anteriors tenim l'exactitud a $Hom(A', B)$ i a $Hom(A'', B)$.

Com $Hom(f, B) \circ Hom(g, B) = Hom(g \circ f, B) = Hom(0, B) = 0$ tenim la inclusió $Im(Hom(g, B)) \subset Ker(Hom(f, B))$.

Per veure la inclusió contrària, prenem $\phi \in Hom(A, B)$ tal que $Hom(f, B)(\phi) = 0$ i veiem que $\exists \psi \in Hom(A'', B)$ tal que $\phi = Hom(g, B)(\psi)$.

Observem que

$$0 = Hom(f, B)(\phi) = \phi \circ f \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(\phi) \Leftrightarrow Ker(g) \subset Ker(\phi).$$

Llavors podem definir el morfisme $\phi^* \colon A \big/ Ker(g) \longrightarrow B$ amb $\phi^*([a]) = \phi(a)$ i l'isomorfisme $g^* \colon A \big/ Ker(g) \longrightarrow A''$. Llavors escollim $\psi = \phi^* \circ (g^*)^{-1}$ que efectivament és un element de $Hom(A'', B)$.

I efectivament $Hom(g, B)(\psi) = Hom(g, B)(\phi^* \circ (g^*)^{-1}) = \phi^* \circ (g^*)^{-1} \circ g = \phi$ com volíem. □

Corol·lari. *Siguin $A'', A,$ i A' grups abelians finitament generats i A'' lliure. Llavors la proposició anterior es compleix.*

Demostració. Com

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

és exacta i A'' és lliure, A escindeix. □

2.2 Dualitat

2.2.1 Grups abelians finitament generats

En el context dels grups abelians finitament generats, podem veure els grups com a $\mathbb{Z}$-mòduls, i per tant definir el concepte de *dual* d'un grup abelià finitament generat A com $Hom(A, \mathbb{Z})$. Llavors el functor $Hom(\cdot, \mathbb{Z})$ es diu el functor del pas al dual.

D'ara endavant notarem:

- $A^\nu := Hom(A, \mathbb{Z})$.
- Si $f\colon A \longrightarrow A'$, notarem $f^\nu := Hom(f, \mathbb{Z})$.

Proposició 2.7. *Sigui $A = \mathbb{Z}^r \oplus Tor(A)$. Llavors $A^\nu \simeq \mathbb{Z}^r$*

Demostració. És clar que $\forall \varphi \in A^\nu$, $\forall x \in Tor(A)$ ocorre $\varphi(x) = 0$. És a dir, $Tor(A)^\nu = 0$. Per tant

$$A^\nu = (\mathbb{Z}^r \oplus Tor(A))^\nu \simeq (\mathbb{Z}^r)^\nu \oplus Tor(A)^\nu = (\mathbb{Z}^r)^\nu \simeq (\mathbb{Z}^\nu)^r .$$

I $\mathbb{Z}^\nu \simeq \mathbb{Z}$, donat que tot $\varphi \in \mathbb{Z}^\nu$ queda determinat per $\varphi(1)$. □

Proposició 2.8. *Sigui $E \simeq k^n$ un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos k. Si ara el pas al dual el definim com el functor $Hom(\cdot, k)$, llavors $E^\nu \simeq E$.*

Demostració. Sigui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E, és immediat veure que els elements del dual que projecten sobre cadascun dels elements de la base són base de E^ν. Llavors, ambdós són espais vectorials sobre el mateix cos amb la mateixa dimensió. □

2.2.2 Espais vectorials

Si ens restringim a la categoria dels espais vectorials ja tenim un concepte de dualitat donada pel functor $Hom(\cdot, k)$ on k és el cos de l'espai vectorial. Notarem aquesta noció de la mateixa manera que als $\mathbb{Z}$-mòduls. En aquesta secció, E i F seran espais vectorials (finits) sobre k qualsevol.

Observen que, com passa que si $f\colon E \longrightarrow F$ és un morfisme entre espais vectorials llavors $F \simeq Im(f) \oplus F \big/ Im(f)$, els resultats anteriors aplicats a espais vectorials queden principalment reduïts a:

Corol·lari. *El functor $Hom(\cdot, F)$ és exacte per la dreta i per l'esquerra. En concret, el functor de pas al dual, en aquest cas $Hom(\cdot, k)$, és exacte per la dreta i per l'esquerra.*

Corol·lari. *Sigui la successió exacta curta*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$$

d'espais vectorials. Llavors la successió curta

$$0 \longleftarrow Hom(E', F) \xleftarrow{Hom(f,F)} Hom(E, F) \xleftarrow{Hom(g,F)} Hom(E'', F) \longleftarrow 0$$

és exacta.

2.3 Cohomologia

Definició 2.1. Sigui (C_*, d) un complex de cadenes homològic a coeficients en grups finitament generats o bé en espais vectorials finits. Llavors definim:

- $C^k := (C_k)^\nu$
- $C^* := (C_*)^\nu$
- $\partial_k := (d_{k+1})^\nu$
- $\partial := d^\nu$

i anomenem al parell (C^*, d^ν) *complex de cocadenes.*

Observació. $(d^\nu)^2 = 0$, donat que $d^2 = 0$.

Definició 2.2. Definim també:

- El grup de *cocicles*: $Z^k := Ker(d_k^\nu)$.
- El grup de *covores*: $B^k := Im(d_k^\nu)$.
- El grup de *cohomologia*: $H^k := {Z^k}/{B^k}$.

Teorema 2.9 (Teorema de la successió exacta llarga de cohomologia)**.** *Siguin* $(C_*, d), (D_*, d), (E_*, d)$ *complexos de cadenes tals que la successió*

$$0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} E_* \longrightarrow 0$$

és exacta. Llavors existeix la successió exacta

$$\cdots \xleftarrow{\delta_k} H^k(C^k) \xleftarrow{f_k} H^k(D^k) \xleftarrow{g_k} H^k(E^k) \xleftarrow{\delta_{k-1}} \cdots$$

anomenada successió exacta llarga de cohomologia*, on δ és un morfisme de connexió.*

Demostració. Donat que la successió

$$0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} E_* \longrightarrow 0$$

és exacta i que el grup abelià E_* és lliure, llavors la successió

$$0 \longleftarrow C^* \xleftarrow{f^\nu} D^* \xleftarrow{g^\nu} E^* \longleftarrow 0$$

és exacta. A partir d'aquí la demostració és idèntica a la demostració del teorema de la successió exacta llarga d'homologia. □

2.4 Productes Cup i Cap

Per tal d'introduir els següents conceptes, suposarem d'ara endavant que el pas al dual és el functor $Hom(\cdot, R)$, on R és un anell qualsevol.

2.4.1 Producte Cup

Definició 2.3. Definim el *producte cup* com

$$\begin{array}{rccc} \cup\colon & C^k \oplus C^l & \to & C^{k+l} \\ & (\phi, \psi) & \mapsto & \phi \cup \psi \end{array}$$

tal que per tot σ $(k+l)$-símplex $\phi \cup \psi(\sigma) = \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k\ldots k+l]})$, i que s'estén a C_{k+l} per linealitat.

Observació. És immediat de la definició que el producte cup és bilineal, és a dir:

- $0 \cup \psi = \psi \cup 0 = 0$
- $(a\phi + b\phi') \cup (c\psi + d\psi') = a \cdot c \cdot (\phi \cup \psi) + a \cdot d \cdot (\phi \cup \psi') + b \cdot c \cdot (\phi' \cup \psi) + b \cdot d \cdot (\phi' \cup \psi')$.

Nota. En aquesta secció, el símbol ^ sobre un índex denota l'absència d'aquest.

Observació. Sigui ara σ un $(k+l+1)$-símplex, llavors

$$\partial(\phi \cup \psi) = (\phi \cup \psi)(d\sigma) = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i (\phi \cup \psi)(\sigma|_{[0\ldots\widehat{\imath}\ldots k+l+1]})$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots\widehat{\imath}\ldots k+1]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]}) + \sum_{i=k+1}^{l+k+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k\ldots\widehat{\imath}\ldots k+l+1]})$$

sumant i restant el terme $\phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]})$ obtenim

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots\widehat{\imath}\ldots k+1]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]}) + \sum_{i=k}^{l+k+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k\ldots\widehat{\imath}\ldots k+l+1]})$$

$$= \phi(d\,\sigma|_{[0\ldots k+1]}) \cdot \psi(\sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]}) + (-1)^k \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \psi(d\,\sigma|_{[k\ldots k+l+1]})$$

$$= (\partial\phi(\sigma|_{[0\ldots k+1]})) \cdot \psi(\sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]}) + (-1)^k \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot (\partial\psi(\sigma|_{[k\ldots k+l+1]}))$$

$$= (\partial\phi) \cup \psi(\sigma) + (-1)^k \phi \cup (\partial\psi)(\sigma).$$

Per tant, estenent per linealitat s'obté el següent resultat.

Proposició 2.10. *Si $\phi \in C^k$ i $\psi \in C^l$ llavors $\partial(\phi \cup \psi) = (\partial\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\partial\psi)$.*

Corol·lari. *Si $\phi \in Z^k$ i $\psi \in Z^l$ llavors $\phi \cup \psi \in Z^{k+l}$.*

Corol·lari. *Si $\phi \in Z^k$ i $\psi \in C^{l-1}$ llavors $\phi \cup (\partial\psi) = \partial((-1)^k \phi \cup \psi)$. Equivalentment, si $\phi \in Z^k$ i $\psi \in B^l$ llavors $\phi \cup \psi \in B^{k+l}$.*

Corol·lari. *Si $\phi \in C^{k-1}$ i $\psi \in Z^l$ llavors $(\partial\phi) \cup \psi = \partial(\phi \cup \psi)$. Equivalentment, si $\phi \in B^k$ i $\psi \in Z^l$ llavors $\phi \cup \psi \in B^{k+l}$.*

Corol·lari. *El producte cup es pot estendre a les classes de cohomologia.*

2.4.2 Producte Cap

Definició 2.4. Definim el *producte cap* com

$$\begin{array}{cccc} \cap\colon & C_{k+l} \oplus C^k & \to & C_l \\ & (c, \phi) & \mapsto & c \cap \phi \end{array}$$

tal que per tot σ $(k+l)$-símplex $\sigma \cap \phi = \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \sigma|_{[k\ldots k+l]}$, i que s'estén a C_{k+l} per linealitat.

Observació. És immediat de la definició que el producte cap és bilineal.

Observació. Sigui ara σ un $(k+l+1)-$símplex, llavors

$$(d\sigma) \cap \psi = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i (\sigma|_{[1\ldots\hat{i}\ldots k+l+1]} \cap \phi)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots\hat{i}\ldots k+1]}) \cdot \sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]} + \sum_{i=k+1}^{l+k+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \sigma|_{[k\ldots\hat{i}\ldots k+l+1]}$$

sumant i restant el terme $\phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]}$ obtenim

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots\hat{i}\ldots k+1]}) \cdot \sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]} + \sum_{i=k}^{l+k+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \sigma|_{[k\ldots\hat{i}\ldots k+l+1]}$$

$$= \phi(d\,\sigma|_{[0\ldots k+1]}) \cdot \sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]} + (-1)^k d(\phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \sigma|_{[k\ldots k+l+1]})$$

$$= \partial\phi(\sigma|_{[0\ldots k+1]}) \cdot \sigma|_{[k+1\ldots k+l+1]} + (-1)^k d(\phi(\sigma|_{[0\ldots k]}) \cdot \sigma|_{[k\ldots k+l+1]})$$

$$= (\partial\phi) \cap \sigma + (-1)^k d(\sigma \cup \phi).$$

Per tant, estenent per linealitat s'obté el següent resultat.

Proposició 2.11. *Si $\sigma \in C_{k+l}$ i $\phi \in C^k$ llavors $d(\sigma \cap \phi) = (-1)^k((d\sigma) \cap \phi - \sigma \cap (\partial\phi))$.*

Corol·lari. *Si $\sigma \in Z_{k+l}$ i $\phi \in Z^k$ llavors $\sigma \cap \phi \in Z_l$.*

Corol·lari. *Si $\sigma \in Z_{k+l}$ i $\phi \in C^{k-1}$ llavors $\sigma \cap (\partial\phi) = d((-1)^{k+1}\sigma \cap \phi)$. Equivalentment, si $\sigma \in Z_{k+l}$ i $\phi \in B^k$ llavors $\sigma \cap \phi \in B_l$.*

Corol·lari. *Si $\sigma \in C^{k+l+1}$ i $\phi \in Z^k$ llavors $(d\sigma) \cap \phi = d((-1)^k \sigma \cap \phi)$. Equivalentment, si $\sigma \in B_{k+l}$ i $\phi \in Z^k$ llavors $\sigma \cup \phi \in B_l$.*

Corol·lari. *El producte cap es pot estendre a les classes de homologia i cohomologia.*

3 Orientació i intersecció

3.1 Orientació

Definició 3.1. Sigui $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U obert, una aplicació diferenciable amb $D\phi(U) \neq 0$ $\forall x \in U$. Diem que ϕ *conserva l'orientació* sii $det(D\phi(U)) > 0$ $\forall x \in U$. Anàlogament, diem que ϕ *canvia o inverteix l'orientació* sii $det(D\phi(U)) < 0$ $\forall x \in U$.

Definició 3.2. Sigui X una varietat diferenciable. Diem que X és *orientable* sii existeix un atles on tots els canvis de cartes conserven l'orientació. Anomenem *varietat orientada* a l'atles maximal.

Observació. Si X és orientable i arcconnexa existeix una partició de les cartes de X en dues varietats orientades, $+X \cup -X$. Si parlem de varietats orientades notarem $X := +X$.

Notem $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$. Si X és una varietat amb vora, igualment podem estendre la definició dient que els canvis de cartes $\phi\colon U \cap H^n \to H^n$ conserven o canvien l'orientació sii $\phi|_{U \cap \mathring{H}^n} : U \cap \mathring{H}^n \to H^n$ conserva o canvia l'orientació.

Herència i inducció d'Orientabilitat. Una varietat pot rebre o induir orientabilitat a altres varietats o als seus propis espais tangents, com veurem a continuació.

Recordem que un espai vectorial finit sobre $\mathbb{R}$ té exactament dues orientacions, que és escollir una de les seves dues classes d'equivalència de les bases com a positiva. El significat de conservar o canviar l'orientació dels isomorfismes coincideix amb la definició 3.1. Si A, B, C són espais vectorials, A, B orientats, $C \neq \{0\}$, direm que $A \oplus B$ obté l'orientació suma escollint com a positiva aquella classe de bases que té com a representant qualsevol representant positiu de A seguit de qualsevol representant positiu de B. A més direm que la igualtat $B \oplus C = A$ orienta C escollint com a positiva la classe de les bases de C que fan coincidir l'orientació de $B \oplus C$ amb la de A. Si C és ara un espai vectorial orientat tal que A i B en són subespais i $A + B = C$, l'orientació de $A \cap B$ queda determinada escollint com a positiva aquella orientació que, si les igualtats $A' \oplus A \cap B = A$ i $A \cap B \oplus B' = B$ orienten A' i B', llavors $A' \oplus A \cap B \oplus B' = C$ tenen la mateixa orientació.

Orientabilitat de l'espai tangent. Una varietat X orientada indueix una orientació a l'espai T_xX, per qualsevol $x \in X$, definint com a base positiva la canònica de qualsevol carta de X. A més, per l'observació anterior, si X és orientable i arcconnexa, T_xX indueix orientació a X.

Orientabilitat a la vora. La orientació de les varietats amb vora defineix una orientació sobre les vores de la manera següent:

Si X és una varietat diferenciable orientada, l'orientació de ∂X queda determinada per aquelles cartes tals que l'orientació que indueixin a $T_x\partial X$ coincideix amb l'orientació induïda per la igualtat $\langle n_x \rangle \oplus T_x\partial X = T_xX$, a tot

$x \in \partial X$, on $\langle n_x \rangle$ és l'espai corresponent a la direcció normal a H^n, orientat escollint com a positiu el sentit que "surt" de H^n.

Orientabilitat del producte de cartes. Si X, Y són dues varietats orientades, indueixen una orientació a $X \times Y$ pel producte de cartes.

Orientabilitat de l'antiimatge. Siguin X, Y, $Z \subset Y$ són varietats orientades, Z subvarietat i només X pot tenir vora. Si $f\colon X \to Y$ és tal que $f \pitchfork Z$ i $\partial f \pitchfork Z$, llavors $f^{-1}(Z)$ és una varietat que hereta l'orientació de la manera següent:

Per a cada component arcconnexa K de $f^{-1}(Z)$ escollim un $x \in K$. Definim $N_x \in T_x X$ tal que

$$N_x \oplus T_x f^{-1}(Z) = T_x X \overset{T_x f}{\Rightarrow} T_x f N_x + T_x f T_x f^{-1}(Z) = T_x f T_x X.$$

Per definició de transversalitat, tenim a més que

$$T_x f T_x X + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

Substituint s'obté

$$T_{f(x)} Y = T_x f N_x + T_x f T_x f^{-1}(Z) + T_{f(x)} Z = T_x f N_x + T_{f(x)} Z = T_x f N_x \oplus T_{f(x)} Z,$$

on l'última igualtat s'obté comptant dimensions. Llavors, tenint en compte si $T_x f \oplus Id$ conserva o canvia l'orientació, la segona igualtat orienta N_x. Com ara N_x i $T_x X$ són espais orientats, la primera igualtat orienta $T_x f^{-1}(Z)$ si $T_x f^{-1}(Z) \neq \{0\}$. En aquest cas, $T_x f^{-1}(Z)$ orienta tota la component arcconnexa de $f^{-1}(Z)$ a la que pertany x.

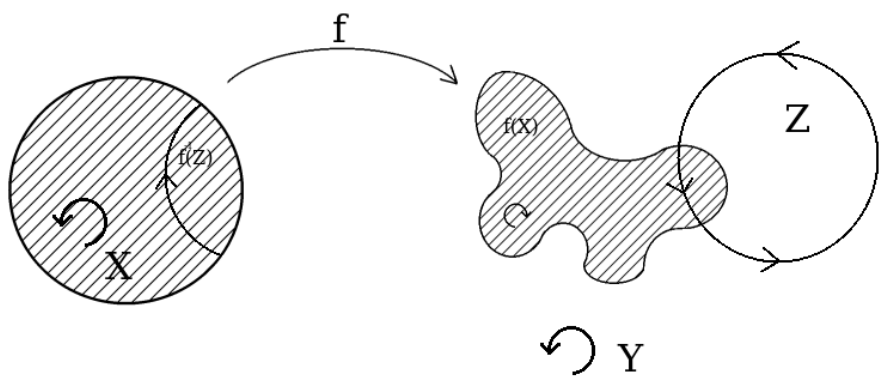

Figura 1: Orientació antiimatge

Si $T_x f^{-1}(Z) = \{0\}$, cada component arcconnexa de $f^{-1}(Z)$ és un punt aïllat, i a cada un d'aquests punts x, no podem orientar $T_x f^{-1}(Z)$, però $N_x = T_x X$ poden tenir la mateixa o diferent orientació.

Definició 3.3. Siguin les hipòtesis anteriors i a més $dim(X) + dim(Z) = dim(Y)$. Llavors $f^{-1}(Z)$ és un conjunt de punts aïllats i, per tant, per a tot $x \in f^{-1}(Z)$ tenim $T_x f^{-1}(Z) = \{0\}$. En aquest cas definim el *nombre d'intersecció transversal* com $I_x(f, Z)$ igual a $+1$ o -1 si $N_x = T_x X$ tenen la mateixa o diferent orientació respectivament.

3.2 Intersecció

Siguin X, Y varietats, $Z \subset Y$ subvarietat tancada, i sols X pot tenir vora. Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació diferenciable i tal que $f \pitchfork Z$ i $\partial f \pitchfork Z$. Si $dim(X) + dim(Z) = dim(Y)$, per dimensionalitat ha de ser que $f^{-1}(Z)$ és una varietat de dimensió zero. Si a més X és una varietat compacta, $f^{-1}(Z)$ és un conjunt finit de punts. Sota aquestes hipòtesis podem definir:

Definició 3.4. Sota les hipòtesis anteriors definim el *nombre d'intersecció* com

$$I(f, Z) = \sum_{x \in f^{-1}(Z)} I_x(f, Z)$$

Observació. Si $f\colon X \to Y$ i $-f\colon -X \to Y$, on $-X$ és X amb l'orientació inversa a cada component arcconnexa, llavors $I(f, Z) = -I(-f, Z)$. De fet, $(-f)^{-1}(Z) = -(f^{-1}(Z)) =: -f^{-1}(Z)$.

Proposició 3.1. *Si $X = \partial W$ amb W varietat diferenciable compacta i orientable, i $F\colon W \to Y$ una extensió de f tal que $F \pitchfork Z$, llavors*

$$\partial \left(F^{-1}(Z)\right) = (-1)^{codim(Z,Y)} \left(\partial F\right)^{-1}(Z) = (-1)^{codim(Z,Y)} f^{-1}(Z).$$

Demostració. Per a cada component arcconnexa escollim un punt $x \in \partial F^{-1}(Z) \subset F^{-1}(Z)$.

Llavors $F^{-1}(Z)$ a la component arcconnexa té l'orientació induïda per la igualtat $N_x \oplus T_x F^{-1}(Z) = T_x W$. Per tant $N_x \oplus \langle n_x \rangle \oplus T_x F^{-1}(Z) = \langle n_x \rangle \oplus T_x X$ tenen la mateixa orientació. Com que $dim(N_x) = codim(Z, Y)$, tenim que

$$\langle n_x \rangle \oplus N_x \oplus T_x F^{-1}(Z) = (-1)^{codim(Z,Y)} \left(\langle n_x \rangle \oplus T_x X\right) = \langle n_x \rangle \oplus (-1)^{codim(Z,Y)} T_x X$$

tenen la mateixa orientació. És immediat que

$$N_x \oplus T_x F^{-1}(Z) = (-1)^{codim(Z,Y)} T_x X$$

tenen la mateixa orientació.

Com que N_x és el mateix espai orientat que l'anàleg en el procés d'orientació de $(-1)^{codim(Z,Y)} f$, ha de ser que en aquesta component arcconnexa $\partial \left(F^{-1}(Z)\right) = (-1)^{codim(Z,Y)} \left(\partial F\right)^{-1}(Z)$.

Com que $codim(Z, Y)$ no depèn de la component arcconnexa, la igualtat és vàlida a tot $f^{-1}(Z)$. □

Proposició 3.2. *Sota les hipòtesis d'intersecció, si $X = \partial W$ amb W compacte i tal que f es pugui estendre a W. Llavors $I(f,Z) = 0$.*

Demostració. Pel lema d'extensió, podem trobar una extensió F tal que $F \pitchfork Z$. Aplicant el lema anterior tenim que

$$I(f,Z) = \sum_{x \in f^{-1}(Z)} I_x(f,Z) = \sum_{x \in f^{-1}(Z)} orientacio(x) = (-1)^{dim(X)} \sum_{x \in \partial F^{-1}(Z)} orientacio(x).$$

I aquest últim terme és zero, doncs $F^{-1}(Z)$ és una varietat compacte 1−dimensional, i totes les varietats compactes 1−dimensionals són unions disjuntes finites de S^1 i de $I = [0,1]$. La suma de les orientacions a la vora d'aquestes s'anul·la, i així resulta la igualtat.

□

Corol·lari. *El nombre d'intersecció és invariant per homotopia sobre varietats X sense vora.*

Demostració. Sigui $F\colon X \times I \to Y$ l'homotopia, aplicant el resultat anterior a la varietat $\partial(X \times I)$, ha de ser que la diferència del nombre d'intersecció de les dues funcions homòtopes ha de ser zero. □

Observació. Gràcies a aquest resultat podem estendre la definició de nombre d'intersecció a aplicacions homòtopes a aplicacions transversals, que pel teorema de l'homotopia transversal (veure apèndix), són totes. Així doncs, la definició s'estén a qualsevol aplicació regular.

Definició 3.5. Siguin X, Y $Z \subset Y$ varietats orientades sense vora i $g\colon X \to Y$ una funció no necessàriament transversal. Estenem la definició de *nombre d'intersecció* a $I(g,Z) := I(f,Z)$, on f és qualsevol funció homòtopa a g.

Proposició 3.3. *La definició anterior està ben definida.*

Demostració. El teorema de l'homotopia transversal ens assegura que existeix una f que compleix les hipòtesis de transversalitat i a més homòtopa a g, i el corol·lari anterior ens assegura que el resultat no depèn de la tria d'aquesta f. □

Definició 3.6. Siguin X, Y varietats sense vora, Y arcconexa i $dim(X) = dim(Y)$. Llavors definim el *grau* de l'aplicació

$$deg(f) := I(f, \{y\}) \text{ on } y \in Y \text{ és un punt qualsevol.}$$

Observació. La definició anterior està ben definida, donat que l'arcconexió de Y permet definir una homotopia de f de manera que y vagi a parar a qualsevol altre valor y'.

Observació. En el cas que $X \subset Y$ notarem $I(X,Z) := I(id_X, Z)$.

A més, en el cas que $X, Z \subset Y$ siguin ambdós compactes i tancats, podem definir també $I(Z,X)$. Observem que en aquest cas $I(X,Z) = (-1)^{dim(X)dim(Z)} I(Z,X)$.

Definició 3.7. Definim la *característica d'Euler* d'una varietat compacta orientable sense vora X com

$$\chi(X) = I(\Delta, \Delta) \text{ a } X \times X$$

on Δ és la diagonal de X.

Remarca. Amb els resultats que veurem més endavant és fàcil, encara que laboriós, veure que aquesta definició de la característica d'Euler coincideix amb la definició topològica. Tot i això, no veurem la prova perquè es surt de l'àmbit del projecte.

Observació. Com $dim(\Delta) = dim(X)$, per l'observació anterior tenim que si $dim(X)$ és senar, $\chi(X) = 0$.

Definició 3.8. Sigui X una varietat orientable i compacta i $f\colon X \to X$. Definim el *nombre de Lefschetz global* com $L(f) = I(\Delta, graph(f))$ a $X \times X$. A més, diem que una aplicació és Lefschetz sii $\Delta \pitchfork graph(f)$ a $X \times X$.

Definició 3.9. Si una aplicació $f\colon X \to X$ és Lefschetz, definim el *nombre de Lefschetz transversal* com $L_x(f) := I_x(id_\Delta, graph(f))$ a $x \in \Delta \cap graph(f)$.

Observació. Per definició, si f és Lefschetz, $L(f) = \sum_{x\in\Delta\cap graph(f)} L_x(f)$.

Teorema 3.4. (Teorema del punt fix de Lefschetz)
Sigui X una varietat orientable i compacta i $f\colon X \to X$ una aplicació diferenciable. Llavors, si $L(f) \neq 0$ f té algun punt fix.

Demostració. Si $0 \neq L(f) = \sum_{x\in\Delta\cup graph(f)} L_x(f)$ ha de ser que $\Delta\cap graph(f) \neq \emptyset$. □

Corol·lari. *Es compleix:*

i) Si $graph(f) \pitchfork \Delta$ i $|L(f)| = m \geq$, llavors f té almenys m punts fixos.

ii) Si f és homòtopa a la identitat, $L(f) = \chi(X)$. En concret, si $\chi(X) \neq 0$, f té algun punt fix.

3.3 Varietats complexes

Definició 3.10. Sigui un espai topològic M. Una *carta complexa k-dimensional* és un parell (U, ϕ) on $U \subset M$ és un obert i $\phi\colon U \to \phi(U)$ és un homeomorfisme.

Definició 3.11. Un *atles complex* es un conjunt de cartes complexes d'un espai topològic M $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ tal que $\forall x \in M$ $\exists\alpha \in I$ tal que $x \in U_\alpha$ i tal que $\forall\alpha, \beta \in I$ es té que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}\colon \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ és una funció holomorfa.

Definició 3.12. Una *varietat complexa* és un atles complex maximal.

Proposició 3.5. *Tota varietat complexa k-dimensional es pot veure com una varietat llisa $2k-$dimensional real. Això és, si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ és un atles complex, $\{(U_\alpha, (\bigoplus_k \Psi) \circ \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ és un atles C^∞, on $\Psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ és*

$$\Psi(w) = (Re(w), Im(w)).$$

Demostració. Com els canvis $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ són holomorfs, $(\bigoplus_k \Psi) \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \circ (\bigoplus_k \Psi^{-1})$ és un difeomorfisme, donat que component a component tenim una funció $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ C^∞. □

Proposició 3.6. *Tota aplicació holomorfa entre varietats complexes es pot veure com una aplicació C^∞ entre les varietats reals corresponents.*

Demostració. Anàloga a la demostració anterior. □

Definició 3.13. L'*espai tangent real* a M en p $T_{\mathbb{R},p}(M)$ és l'espai tangent de M en p vist com a varietat $2k-$dimensional real.

Definició 3.14. L'aplicació tangent real de f en p $T_{\mathbb{R},p}f$ és l'aplicació tangent de f en p vista com aplicació tangent entre varietats reals.

Per continuar amb resultats sobre varietats complexes, hem de donar abans alguns resultats sobre teoria de cossos, i per això introduïm la següent secció.

3.3.1 Una mica d'àlgebra

Definició 3.15. Sigui E/k una extensió de Galois. Llavors definim la *norma de α en E sobre k* com

$$N_{E/k}(\alpha) = \prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \sigma(\alpha).$$

Proposició 3.7. *Sigui E/k extensió de Galois. Llavors $\forall \alpha \in E$ $N_{E/k}(\alpha) \in k$.*

Demostració. Per a tot $\tau \in Aut(E/k)$ es té que

$$\tau(N_{E/k}(\alpha)) = \tau\left(\prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \sigma(\alpha)\right) = \prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \tau \circ \sigma(\alpha) = \prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \sigma(\alpha) = N_{E/k}(\alpha).$$

I per tant, com l'extensió és de Galois, $N_{E/k}(\alpha) \in k$. □

Observació. Si l'extensió no és normal el resultat no és cert en general. Un exemple:

L'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ no és normal, donat que les arrels complexes del polinomi irreductible, $x^3 - 2$, no hi són al cos $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Per aquest motiu tenim que l'únic $k-$automorfisme possible és la identitat. Així doncs, $N_{E/k}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposició 3.8. *Sigui E/k una extensió de Galois. Si $\alpha \in k$, llavors*

$$N_{E/k}(\alpha) = \alpha^{[E:k]}.$$

Demostració.

$$N_{E/k}(\alpha) = \prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \sigma(\alpha) = \prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \alpha = \alpha^{\# Aut(E/k)} = \alpha^{[E:k]}.$$

□

Proposició 3.9. *Siguin $E/F/k$ extensions de Galois i $\alpha \in F$. Llavors*

$$N_{E/k}(\alpha) = N_{E/F} \circ N_{F/k}(\alpha) = N_{F/k}(\alpha)^{[E:F]}.$$

Demostració. La segona igualtat és directa amb les dues proposicions anteriors. Demostrem la primera:

Com les dues extensions són de Galois, tenim que $Aut(E/F) \triangleleft Aut(E/k)$. Sigui A un sistema de representants de les classes de $Aut(E/k) \big/ Aut(E/F)$. Llavors es compleix que:

i) $Aut(E/k) = Aut(E/F)A$. A més, cada element de $Aut(E/k)$ té una expressió única en aquesta forma.

ii) $\{\sigma|_F \,|\sigma \in A\} = Aut(F/k)$.

i) La inclusió $\supseteq$ és clara. La inclusió $\subseteq$ és deguda a que tot element està en alguna classe lateral per la dreta. La unicitat de expressió s'obté per cardinalitat.

ii) L'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \cdot|_F : A & \longrightarrow & Aut(F/k) \\ \sigma & \to & \sigma|_F \end{array}$$

és bijectiva.

injectivitat Si $[\sigma_1] \neq [\sigma_2]$, on $\sigma_1, \sigma_2 \in A$, es directe que $\exists \tau \notin Aut(E/F)$ tal que $\sigma_1 = \tau \circ \sigma_2$. Per tant $\sigma_1|_F \neq \sigma_2|_F$.

exhaustivitat Sigui $\sigma \in Aut(F/k)$. Llavors σ és una $K-$immersió en $\bar{F} = \bar{E}$. Llavors σ té una extensió $\widetilde{\sigma}$ a E. Per la normalitat de l'extensió E/k, tenim que $\widetilde{\sigma}|_E \in Aut(E/k)$. Sigui $\tau \in A$ el representant de la seva classe a $Aut(E/k) \big/ Aut(E/F)$, llavors $\tau|_F = \widetilde{\sigma}|_F = \sigma$.

Llavors, per i) i per ii) tenim que

$$N_{E/k}(\alpha) =$$

$$\prod_{\sigma \in Aut(E/k)} \sigma(\alpha) \overset{i)}{=} \prod_{\sigma \in Aut(E/F) \tau \in A} \sigma \circ \tau(\alpha) =$$

$$\prod_{\sigma \in Aut(E/F)} \sigma \left(\prod_{\tau \in A} \tau(\alpha) \right) \overset{ii)}{=} \prod_{\sigma \in Aut(E/F)} \sigma \left(\prod_{\tau \in Aut(F/k)} \tau(\alpha) \right) =$$

$$\prod_{\sigma \in Aut(E/F)} \sigma \left(N_{F/k}(\alpha) \right) = N_{E/F}(N_{F/k}(\alpha)),$$

demostrant així el resultat.

□

Proposició 3.10. *Sigui $k(\alpha)/k$ una extensió de Galois. Si $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ és el polinomi irreductible de α en k, llavors $N_{k(\alpha)/k} = (-1)^n a_0$.*

Demostració. Siguin $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les arrels del polinomi irreductible al cos de descomposició, llavors per la separabilitat són totes diferents i per la normalitat totes pertanyen a l'extensió. A més, el producte és exactament $(-1)^n a_0$. També per ser una extensió de Galois es té que

$$N_{k(\alpha)/k}(\alpha) = \prod_{\sigma \in Aut(k(\alpha)/k)} \sigma(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n a_0.$$

$\square$

Proposició 3.11. *Sigui E/k una extensió de Galois i $\alpha \in E$. Llavors l'aplicació $f_\alpha \colon E \to E$ amb $f_\alpha(\beta) = \alpha\beta$ és una aplicació $k-$lineal amb determinant $det_k(f_\alpha) = N_{E/k}(\alpha)$.*

Demostració. És clar que f_α és una aplicació $k-$lineal.

Sigui el cos intermig $k(\alpha)$, llavors $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ és una base. En aquesta base, l'aplicació restringida a aquest cos té matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

i per tant el determinant és $(-1)^n a_0$.

Sigui $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de E sobre $k(\alpha)$, on $m = [E : k(\alpha)]$. Llavors $\{v_1, \alpha v_1, \ldots, \alpha^{n-1} v_1, v_2, \alpha v_2, \ldots, \alpha^{n-1} v_2, \ldots, v_m, \alpha v_m, \ldots, \alpha^{n-1} v_m\}$ és una base de E sobre k. En aquesta base l'aplicació f_α té matriu

$$\begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix}$$

que té determinant $((-1)^n a_0)^m$. Per les proposicions anteriors tenim llavors que

$$det_k(f_\alpha) = ((-1)^n a_0)^{[E:k]} = N_{k(\alpha)/k}(\alpha)^{[E:k(\alpha)]} = N_{E/k}(\alpha).$$

$\square$

Proposició 3.12. *Sigui E/k una extensió de Galois i $A \colon E^n \to E^n$ una aplicació lineal diagonalitzable. Llavors A també és una aplicació lineal sobre $k^{n\cdot[E:k]}$ i $det_k(A) = N_{E/k}(Det_E(A))$.*

Demostració. Es veu clar que A és una aplicació lineal sobre $k^{n\cdot[E:k]}$ escollint una base de E^n i de k i comprovant la independència i com hi actua A.

Com A és diagonalitzable descompon en $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i$ sobre els espais $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Ker(A - \lambda_i Id)$, que són isomorfs a E. Per tant, el determinant descompon en producte de determinants, obtenint pel resultat anterior que

$$det_k(A) = \prod_{i=1}^{n} det_k(\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} N_{E/k}(\lambda_i) = N_{E/k}\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = N_{E/k}(Det_E(A)).$$

$\square$

Retornant als resultats de varietats complexes:

Proposició 3.13. *Sigui $A\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ una aplicació lineal. Llavors $det_{\mathbb{R}}(A) = \|det_{\mathbb{C}}(A)\|^2$.*

Demostració. Observem que $N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(x+iy) = x^2+y^2 = \|x+iy\|^2$. Llavors si A diagonalitza, tenim que

$$det_{\mathbb{R}}(A) = \|det_{\mathbb{C}}(A)\|^2.$$

Però a la topologia usual dels endomorfismes sobre $\mathbb{R}^{2k}$, els endomorfismes diagonalitzables formen un obert dens i l'operador

$$\|det_{\mathbb{C}}(\cdot)\|^2\colon \{(\bigoplus_k \Psi) \circ A \circ (\bigoplus_k \Psi^{-1}) | A \in L(\mathbb{C},\mathbb{C})\} \to \mathbb{R}$$

és un operador continu. Per tant, el conjunt $\{A | det_{\mathbb{R}}(A) = \|det_{\mathbb{C}}(A)\|\} \subset \{(\bigoplus_k \Psi) \circ A \circ (\bigoplus_k \Psi^{-1}) | A \in L(\mathbb{C},\mathbb{C})\}$ és un tancat que conté un obert dens.

Així doncs, ha de ser que $\{A | det_{\mathbb{R}}(A) = \|det_{\mathbb{C}}(A)\|\} = \{(\bigoplus_k \Psi) \circ A \circ (\bigoplus_k \Psi^{-1}) | A \in L(\mathbb{C},\mathbb{C})\}$, i per tant, per a qualsevol A tenim que

$$det_{\mathbb{R}}(A) = \|det_{\mathbb{C}}(A)\|^2.$$

□

Corol·lari. $det_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R},p}f) \geq 0$.

Corol·lari. *Tots els canvis de carta complexos vistos com a canvis de carta reals són positius. Per tant, una varietat complexa vista com una varietat real és orientable.*

Definició 3.16. Sigui M una varietat complexa $k-$dimensional. Llavors l'*orientació complexa* induïda sobre M vista com a varietat real $2k-$dimensional és aquella que defineix com a positiva les cartes reals $(\bigoplus_k \Psi) \circ \phi$, on ϕ és qualsevol carta complexa.

Definició 3.17. Sigui M una varietat complexa $K-$dimensional. Diem que $Z \in M$ és una *subvarietat complexa* $l-$dimensional sii per tot $x \in Z$ existeix una carta de M (U,ϕ) tal que $\phi|_Z (U \cap Z) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{C}^l \times \{0\}^{k-l}\right)$.

Proposició 3.14. *Sigui M una varietat complexa $k-$dimensional i $Z \subset M$ una subvarietat real C^r amb $r \geq 1$ de dimensió real $2l$. Si per tot $x \in Z$ T_xZ és un subespai complex de T_xM, llavors Z és una subvarietat complexa.*

Demostració. La prova es pot trobar a [1]. □

Corol·lari. *Siguin X, Y varietats complexes, $f\colon X \to Y$ una aplicació holomorfa i $Z \subset Y$ una subvarietat complexa. Si $f^{-1}(Z) \subset X$ és una subvarietat real (o equivalentment, $f \pitchfork Z$ en sentit real) llavors $f^{-1}(Z) \subset X$ és una subvarietat complexa.*

Demostració. Si $f^{-1}(Z)$ és una subvarietat, T_xZ ha de ser $\mathbb{C}$-lineal per a tot $x \in f^{-1}(Z)$. □

Proposició 3.15. *Siguin* X, Y *varietats complexes,* $f\colon X \to Y$ *una aplicació holomorfa i* $Z \subset Y$ *una subvarietat complexa. Sigui* $f \pitchfork Z$ *en sentit real. Llavors l'orientació induïda per l'antiimatge i l'orientació complexa de* $f^{-1}(Z)_{\mathbb{R}}$ *coincideixen.*

Demostració. L'orientació induïda per l'antiimatge és aquella que fa que la igualtat

$$T_{\mathbb{R},f(x)}Y = T_x f N_x \oplus T_{\mathbb{R},f(x)}Z$$

tingui la mateixa orientació, on N_x és l'espai tal que

$$T_{\mathbb{R},x}X = N_x \oplus T_{\mathbb{R},x}f^{-1}(Z).$$

Com tots aquests espais són de fet $\mathbb{C}-$lineals i com f manté l'orientació, prenent l'orientació complexa induïda de tots ells, ambdós igualtats mantenen l'orientació. $\square$

Corol·lari. *Siguin* X, Y *i* $Z \subset Y$ *varietats complexes amb* $f\colon X \to Y$ *holomorfa. Suposem, a més, que* $dim(X) + dim(Z) = dim(Y)$ *i que* $f \pitchfork Z$ *en sentit real. Llavors, des de el punt de vista real, per tot* $x \in f^{-1}(Z)$ *es té que* $I_x(f, Z) = 1$.

Corol·lari. *En concret, si f és Lefschetz, tots els nombres de Lefschetz transversals són positius, és a dir, són 1.*

Tots els resultats que hem introduït en aquesta subsecció estan destinats a obtenir de forma trivial el següent resultat i els corol·laris que se'n deriven. Aquest és un cas particular del teorema de Lefschetz: el cas sobre varietats i aplicacions complexes, que és el cas on el teorema té més força, arribant a determinar una cota superior dels punts fixos o fins i tot el nombre exacte en el cas de transversalitat.

Teorema 3.16. Teorema del punt fix Lefschetz en el cas complex. *Sigui* X *una varietat complexa compacta i* $f\colon X \to X$ *una funció holomorfa Lefschetz. Llavors* f *té punts fixos si, i només si,* $L_x(f) \neq 0$.

Corol·lari. *Sota les hipòtesis anteriors, es compleix:*

i) Si f *té exactament* $L(f)$ *punts fixos.*

ii) Si f *és homòtopa a la identitat* f *té exactament* $\chi(X)$ *punts fixos.*

3.4 Més resultats d'Intersecció

Tot el potencial de la teoria d'intersecció que ha fet immediat el teorema del punt fix Lefschetz no acaba ni molt menys aquí. Com a exemple, aquesta secció està dedicada a continuar-la fins arribar al teorema de Poincaré-Hopf.

Proposició 3.17. *Sigui x un punt fix aïllat i U un entorn que no contingui cap altre punt fix de $f\colon X \to X$. Llavors existeix una homotopia entre f i una funció g tal que $g = f$ fora d'algun compacte de U i g només tingui punts fixos transversals.*

Demostració. Prenent una carta de x qualsevol, el problema es trasllada a una aplicació $\widetilde{f}\colon \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Abusarem de notació i la mantindrem a les cartes.

Sigui $K \subset U$ compacte, existeix $\rho\colon \mathbb{R}^k \to [0,1]$ llisa tal que a un entorn obert $V \subset K$ de x valgui 1 i fora de K valgui zero.

Donat que $x \in V$ és l'únic punt fix a U, $\underset{x\in K-V}{min} \|f(x) - x\| > 0$. Prenem $0 < r < \underset{x\in K-V}{min} \|f(x) - x\| > 0$.

Pel teorema de Sard $f|_V - Id_V$ té valors regulars tan a prop com vulguem de X. Escollim un, diguem-li y, tal que $y \in B_r(x)$. Llavors definim l'homotopia

$$F(x,t) = f(x) + t\rho(x)(y - x) \text{ i } g(x) := F(x,1).$$

Llavors $F(x,t)$ no té punts fixos a $K - V$, donat que

$$\begin{array}{rcc} \forall x \in K - V & \|F(x,t) - x\| = & \|f(x) - t\rho(x)(y-x) - x\| \\ \geq & \|f(x) - x\| - t\rho(x)\|y - x\| \geq & \|f(x) - x\| - r \\ > & \|f(x) - x\| - \underset{x\in K-V}{min} \|f(x) - x\| & \geq 0 \end{array}$$

En concret, g no té punts fixos fora de $K - V$.

Llavors, com $Dg = Df$ a V i $\{x \in V | g(x) = x\} = \{x \in V | f(x) = y\}$ tots els punts fixos de g a U són transversals.

$\square$

Definició 3.18. Sigui $f\colon X \to X$ amb $x \in X$ un punt fix aïllat i g la funció de la proposició anterior per a qualsevol entorn U que no contingui cap altre punt fix. Llavors definim el *nombre de Lefschetz local* com

$$L_x(f) := \sum_{g|_U(z)=z} L_z(g|_U).$$

Definició 3.19. Sigui $f\colon X \to X$ i $x \in X$ un punt fix aïllat, redefinim el *nombre de Lefschetz local* com

$$L_x(f) = deg(F),$$

on, sigui ϕ una carta, B una bola oberta prou petita centrada en $\phi(x)$ que no contingui cap altre punt fix i $F\colon \partial B \to S^{k-1}$, amb $F(z) = \frac{\widetilde{f}(z)-z}{\|\widetilde{f}(z)-z\|}$ on $k = dim(X)$ i $\widetilde{f}$ l'aplicació a les cartes.

Proposició 3.18. *En la definició anterior:*

i) F està ben definida.

ii) $L_x(f)$ no depèn de l'elecció de la bola B.

iii) $L_x(f)$ no depèn de l'elecció de la carta ϕ.

Demostració. i) Com que x és un punt fix aïllat, en un entorn prou proper a $\phi(x)$ tenim que $\|\widetilde{f} - z\| > 0$, de manera que $F(z) = \frac{\widetilde{f}(z)-z}{\|\widetilde{f}(z)-z\|}$ està ben definida.

ii) Sigui B' una altra bola oberta prou petita centrada en $\phi(x)$ que no contingui cap altre punt fix. Suposem $B \subset B'$. Llavors $\partial\left(\overline{B}' - B\right) = \partial\overline{B'} - \partial\overline{B}$ i $F\colon \partial\overline{B'} - \partial\overline{B} \to S^{k-1}$ amb $F(z) = \frac{\widetilde{f}(z)-z}{\|\widetilde{f}(z)-z\|}$ es pot estendre a $B' - int(B)$.

Per la proposició 3.2, $I(F, \{y\}) = 0$ per a qualsevol $y \in S^{k-1}$. Llavors $I(F|_{\partial B'}, \{y\}) = I(F|_{\partial B}, \{y\})$, que per definició, equival a dir que $deg(F|_{\partial B'}) = deg(F|_{\partial B})$.

iii) Sigui A la matriu de canvi de base a l'espai tangent en x entre dues cartes amb la mateixa orientació. Llavors $AT_{\phi(x)}\widetilde{f}A^{-1} - Id = A(T_{\phi(x)}\widetilde{f} - Id)A^{-1}$ manté l'orientació. Com el valor de $deg(F)$ depèn únicament de $AT_{\phi(x)}\widetilde{f}A^{-1} - Id$ i de la seva orientació, aquest és invariant per cartes. □

Proposició 3.19. *Les dues definicions del nombre de Lefschetz local són equivalents en el cas d'un punt fix de Lefschetz.*

Demostració. Com les dues definicions són invariants per cartes locals, prendrem qualsevol carta tal que el punt fix sigui el zero, treballant així a $\mathbb{R}^k$. Per tant, f serà la funció en aquesta carta.

Segons la primera definició

$$L_0(f) := I_0(\Delta, graph(f)) = \pm 1$$

segons si $T_0 graph(Id) \oplus T_0 graph(f) = T_0(X \times X)$ manté o inverteix orientació. Prenent base canònica, la igualtat queda

$$\langle (e_i, e_i) \rangle_i \oplus \langle (e_i, T_0 f e_i) \rangle_i = \langle (e_i, 0) \rangle_i \oplus \langle (0, e_i) \rangle_i$$

que manté orientació sii

$$\langle (e_i, e_i) \rangle_i \oplus \langle (0, T_0 f e_i - e_i) \rangle_i = \langle (e_i, e_i) \rangle_i \oplus \langle (0, e_i) \rangle_i$$

o equivalentment

$$T_0(f - Id) = \langle T_0 f e_i - e_i \rangle_i \cong \langle (0, T_0 f e_i - e_i) \rangle_i = \langle (0, e_i) \rangle_i \cong T_0 X$$

manté orientació. Dit d'una altre manera

$$L_0(f) := I_0(\Delta, graph(f)) = \pm 1$$

segons si $T_0 f - Id$ conserva o canvia l'orientació.

Segons la segona definició:

$$L_0(f) = deg(F) = I_0(F, \{y\}) \text{ per a } y \in S^{k-1} \text{ qualsevol,}$$

on $F = \frac{f(z)-z}{\|f(z)-z\|}$ definida a la vora de qualsevol bola prou petita centrada a 0. Per altra banda, en un entorn del zero tenim que

$$f(z) - z = (T_0 f - Id)z + \xi \text{ amb } \frac{\xi}{\|z\|} \to 0 \text{ quan } z \to 0.$$

Llavors, en aquest entorn podem definir

$$F(x,t) = (T_0 f - Id)z + t\xi.$$

Sigui $c := \min\limits_{\|z\|=1} \|(T_0 f - Id)(z)\| > 0$, prenem r tal que $\forall z \in B_r(0)$ $c > \frac{\|\xi\|}{\|z\|}$. Llavors, $\forall t \in I = [0,1]$ tenim

$$\|F(x,t)\| = \|(T_0 f - Id)z + t\xi\| \geq c\|z\| - \|\xi\| > 0.$$

A continuació apliquem un resultat d'àlgebra lineal:

Proposició 3.20. *Sigui $GL(n, \mathbb{R})$ amb la topologia de $\mathbb{R}^{n^2}$. Llavors, $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) > 0\}$ i $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) < 0\}$ són les úniques components arcconnexes.*

Demostració. Provarem que si $A \in \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) > 0\}$ existeix un camí a la identitat i si $A \in \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) < 0\}$ existeix un camí cap a qualsevol reflexió.

En la base escaient, A és de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \text{ amb } \lambda_i \neq 0.$$

Llavors, en aquesta base, definim

$$F(z,t) = \begin{pmatrix} (1-t)\lambda_1 + t \cdot sgn(\lambda_1) & (1-t)a_{1,2} & \cdots & (1-t)a_{1,k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (1-t)a_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & (1-t)\lambda_k + t \cdot sgn(\lambda_k) \end{pmatrix} z$$

Com $(1-t)\lambda_i + t \cdot sgn(\lambda_i) \neq 0$ $\forall t \in I = [0,1]$, $F(z,t)$ és bijectiva, i per continuïtat, manté el signe del determinant. Queda

$$F(z,0) = A(z) \quad F(z,1) = \begin{pmatrix} sgn(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & sgn(\lambda_k) \end{pmatrix} z.$$

Ara, per cada parell i, j tal que $sgn(\lambda_i) = sgn(\lambda_j) = -1$ amb, per exemple, $i < j$, definim el gir

$$G(z,t) = \begin{pmatrix} sgn(\lambda_{l<i}) & & & & \\ & -cos(\pi t) & 0\dots 0 & -sin(\pi t) & \\ & & sgn(\lambda_{i<l<j}) & & \\ & -sin(\pi t) & 0\dots 0 & -cos(\pi t) & \\ & & & & sgn(\lambda_{l>j}) \end{pmatrix} z.$$

D'aquesta manera tenim que

$$F(z,1) = G(z,0), \quad G(z,1) = \begin{pmatrix} sgn(\lambda_{l<i}) & & & & \\ & -sgn(\lambda_i) & & & \\ & & sgn(\lambda_{i<l<j}) & & \\ & & & -sgn(\lambda_j) & \\ & & & & sgn(\lambda_{l>j}) \end{pmatrix} z.$$

On el determinant es manté per tot $t \in I = [0,1]$. Llavors podem composar F amb G de manera que obtenim una nova homotopia que no canvia el signe del determinant ni l'anul·la a cap t. Repetint el procés per a cada parell de -1's obtenim una homotopia amb la identitat (si n'hi ha un nombre parell) o amb alguna reflexió. En aquest segon cas podem repetir el gir i obtenir una homotopia amb la reflexió del primer eix.

Per tant, té com a molt dues components arcconnexes. Si existís un camí $\gamma\colon I \to GL(n,\mathbb{R})$ que les uneixi, llavors, per la continuïtat del determinant, existiria $t \in I$ tal que $\gamma(t) = 0$, contradient així la seva definició.

Per tant, $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) > 0\}$ i $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) < 0\}$ són les dues úniques components arcconnexes.

$\square$

Corol·lari. *Sigui $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Si A conserva l'orientació, és homòtopa a la identitat, i si la inverteix, és homòtopa a qualsevol reflexió.*

Aplicant aquest resultat a $T_0 f - Id$, obtenim una homotopia d'aquesta aplicació a la identitat, en el cas que conservi l'orientació, i a una reflexió qualsevol en el cas de que la inverteixi. Si anomenen $G(z,t)$ a la composició suau de l'homotopia anterior amb aquesta. Llavors:

$$G(z,0) = f(z) - z \quad G(z,1) = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} z$$

i a més $G(z,t) \neq 0 \; \forall z \in B_r(0)$, $z \neq 0$ i $\forall t \in I = [0,1]$. Diguem R a la matriu del gir o reflexió de $G(\cdot,1)$. Llavors, podem definir

$$H(z,t) = \frac{G(z,t)}{\|G(z,t)\|} \text{ restringida a } \partial\overline{B}_{r/2}(0).$$

D'aquesta manera

$$H(z,0) = \tfrac{f(z)-z}{\|f(z)-z\|} \quad H(z,1) = \tfrac{R\cdot z}{\|R\cdot z\|} = R\tfrac{z}{\|z\|} = R\tfrac{z}{r/2}.$$

Com que la matriu R conserva o inverteix l'orientació sii $T_0 f - Id$ conserva o canvia l'orientació, i $H(z,1)$ és una aplicació lineal bijectiva, $deg(H(\cdot,1))$ és exactament 1 o -1 segons si $T_0 f - Id$ conserva o canvia l'orientació. Com el grau es conserva per homotopia, tenim que

$$L_0(f) := deg(\frac{f(z)-z}{\|f(z)-z\|}) = \pm 1$$

segons si $T_0 f - Id$ conserva o canvia l'orientació.

D'aquesta manera hem demostrat el resultat.

□

Proposició 3.21. *Les dues definicions de nombre de Lefschetz local són equivalents en el cas d'un punt fix aïllat.*

Demostració. Hem vist en la proposició anterior el cas on el punt fix és Lefschetz. Provem ara el cas general:

Sigui g una aplicació homòtopa a f que només contingui punts fixos a un entorn qualsevol de x i que fora d'algun compacte d'aquest entorn $f = g$. Llavors, per la primera definició:

$$L_x(f) = \sum_{g(y)=y} L_y(g) \text{ en aquest entorn.}$$

Com que sabem que $L_y(g) := I_y(\Delta, graph(y)) = deg(F) =: L_y(g)$, provant que, amb aquesta segona definició:

$$L_x(f) = \sum_{g(y)=y} L_y(g) \text{ en aquest entorn,}$$

ja haurem demostrat el resultat.

Com que les dues definicions són invariants per cartes locals, prendrem qualsevol carta tal que el punt fix sigui el zero, treballant així a $\mathbb{R}^k$. Per tant, f i g seran les funcions en aquesta carta.

Sigui $L_0(f) := deg(F)$ definida sobre la vora d'una bola $\overline{B}_r(0)$. Sigui g una funció homòtopa de f tal que fora d'algun compacte de $B_r(0)$ sigui $g = f$. Per aquesta raó ha de ser que $L_0(f) = L_0(g)$.

Siguin $y_1, \ldots, y_n$ els punts fixos transversals de $B_r(0)$ i $B_1, \ldots, B_n$ boles obertes centrades en aquests punts prou petites per tal de que les seves vores no s'intersequin entre elles ni amb $\partial\overline{B_r(0)}$. Llavors $F = \frac{g(z)-z}{\|g(z)-z\|}$ està ben definida sobre $\partial\overline{B}_r(0) - \cup_{i=1}^n \partial\overline{B}_i$ i es pot estendre a $\overline{B}_r(0) - \cup_{i=1}^n B_i$. Per tant, per a $z \in S^{k-1}$ qualsevol, ha de ser

$$\begin{aligned}
I(F|_{\partial\overline{B}_r(0)-\cup_{i=1}^n\partial\overline{B}_i}, \{z\}) &= 0\\
I(F|_{\partial\overline{B}_r(0)}, \{z\}) + I(-F|_{\cup_{i=1}^n\partial\overline{B}_i}, \{z\}) &= 0\\
I(F|_{\partial\overline{B}_r(0)}, \{z\}) - I(F|_{\cup_{i=1}^n\partial\overline{B}_i}, \{z\}) &= 0\\
I(F|_{\partial\overline{B}_r(0)}, \{z\}) &= I(F|_{\cup_{i=1}^n\partial\overline{B}_i}, \{z\})\\
I(F|_{\partial\overline{B}_r(0)}, \{z\}) &= \sum_{i=1}^n I(F|_{\partial\overline{B}_i}, \{z\})
\end{aligned}$$

que per definició és

$$L_0(f) = L_0(g) := deg(F|_{\partial \overline{B}_r(0)}) = \sum_{i=1}^{n} deg(F|_{\partial \overline{B}_i}) = \sum_{i=1}^{n} L_{y_i}(g),$$

demostrant així el resultat.

□

3.5 Camps vectorials

Donat un camp vectorial V sobre una varietat X, si aquest és regular, sempre podem integrar-lo localment, obtenint així un flux $\phi_t(p)$ definit en un conjunt $\{(t,x) \,|\, x \in X,\, t \in (a_x, b_x)\}$, que sabem que és un obert. Quan aquest conjunt és $\mathbb{R} \times X$ diem que el camp és complet. Com el flux ha d'escapar-se de tot compacte a mesura que t arriba als extrems on el flux està definit, tots els camps (regulars) definits en varietats compactes són complets.

Definició 3.20. Sigui V un camp vectorial sobre X i $x \in X$ un zero de V aïllat. Llavors definim l'*índex* de x a V com

$$ind_x(V) = deg(F),$$

on ϕ és qualsevol carta de x, B una bola centrada a $\phi(x)$ prou petita i $F\colon \partial\overline{B} \to S^{k-1}$ amb $F(z) = \frac{\widetilde{V}(z)}{\|\widetilde{V}(z)\|}$ on $\widetilde{V}$ és l'expressió del camp a la carta i $k = dim(X)$.

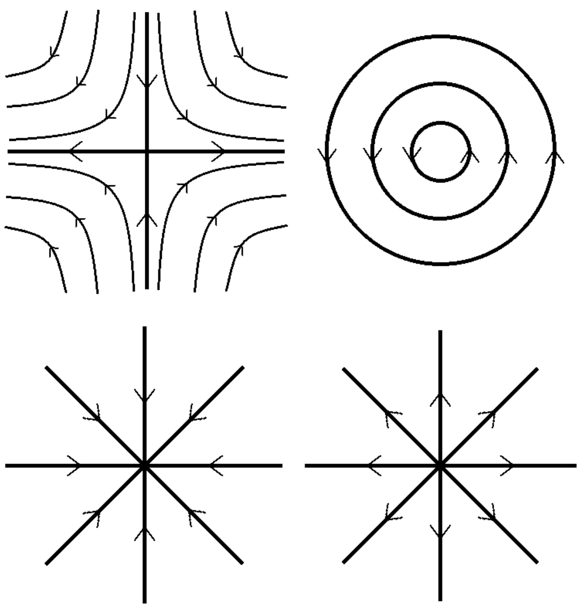

Figura 2: Quatre exemples de zeros aïllats. El de dalt a l'esquerra té índex -1, i els altres índex 1.

Proposició 3.22. *En la definició anterior:*

i) *F està ben definida.*

ii) *$ind_x(V)$ no depèn de l'elecció de la bola B.*

iii) *$ind_x(V)$ no depèn de l'elecció de la carta ϕ.*

Demostració. La demostració és anàloga a la del resultat 3.18:

i) Com V és un zero aïllat, si B és prou petita $V(z) \neq 0 \; \forall z \in \partial\overline{B}$ i per tant $F(z)$ està ben definida.

ii) Siguin B i B' dues boles prou petites diferents centrades a $\phi(x)$. Suposem sense pèrdua de generalitat que $B \subset B'$. Llavors $F(z) = \frac{\widetilde{V}(z)}{\|\widetilde{V}(z)\|}$ definida sobre $\partial\overline{B'} - \partial\overline{B}$ es pot estendre a $\overline{B'} - B$. Per tant, per qualsevol $y \in S^{k-1}$, $I(F, \{y\}) = 0$. Com

$$0 = I(F, \{y\}) = \sum_{F(z)=y} I_z(F, \{y\}) = \sum_{F(z)=y} I_z(F|_{\partial\overline{B'}}, \{y\}) - \sum_{F(z)=y} I_z(F|_{\partial\overline{B}}, \{y\})$$

tenim que per definició

$$deg(F|_{\partial\overline{B'}}) = deg(F|_{\partial\overline{B}}).$$

iii) Siguin ϕ i ψ dues cartes de x amb la mateixa orientació. Com el canvi de cartes és un homeomorfisme, si B' és una bola oberta centrada en $\phi(x)$, existeix una bola oberta B centrada en $\psi(x)$ tal que $B \subset \psi^{-1} \circ \phi(B')$. Aplicant un raonament anàleg al de *ii*), com que el canvi de cartes conserva l'orientació, el canvi en l'espai d'arribada del camp conserva també l'orientació. S'obté que

$$deg(F|_{\partial\overline{B'}}) = deg(F|_{\partial\overline{B'}}),$$

demostrant així la independència de les cartes.

□

Proposició 3.23. *Sigui X una varietat orientada i V un camp vectorial. Sigui $x \in X$ un zero aïllat de V. Sigui $F\colon U \times I \subset X \times I \to X$ amb U obert que conté x, una aplicació llisa tal que:*

i) $F(z, 0) = z \; \forall z \in U$

ii) $F(z, t) \neq z \Leftrightarrow z \neq x, \; \forall t > 0$

iii) $\frac{\partial}{\partial t} F(z, 0) = V(z)$

llavors, existeix un $t_x > 0$, tal que

$$ind_x(V) = L_x F(\cdot, t) \textit{per tot } t \in (0, t_x).$$

Demostració. Com les dues definicions són locals i invariants per les cartes, prenem una carta tal que $\phi(x) = 0$ i treballarem a $\mathbb{R}^k$.

Per ser F llisa, tenim que

$$F(z,t) = F(z,0) + \frac{\partial}{\partial t} F(z,0) \cdot t + \xi(z,t),$$

amb $\xi(z,t) \in O(t^2)$ definida a $U \times [0, t_z)$ amb $t_z > 0$ continua respecte de z. Prenent un compacte K que contingui algun obert W que contingui el zero. Tenim que $\exists \min_{z \in k} \{t_z\} > 0$ i definim llavors $t_x = \min_{z \in K} \{t_z\}$. Llavors, en $W \times [0, t_x)$, per $i)$ i $iii)$ tenim

$$F(z,t) - z = t \left(V(z) + \frac{\xi(z,t)}{t} \right).$$

Per $ii)$, a $t > 0$, $F(z,t) - z \neq 0$ a $z \in \partial \overline{B}$ on B és una petita bola centrada a zero i continguda a W. Llavors

$$\frac{F(z,t) - z}{\|F(z,t) - z\|} = \frac{V(z) + \frac{\xi(z,t)}{t}}{\|V(z) + \frac{\xi(z,t)}{t}\|}$$

està ben definida a $\partial \overline{B} \times (0, t_x)$. Tenim llavors que

$$L_0(F(\cdot, t) = deg(\frac{V(z) + \frac{\xi(z,t)}{t}}{\|V(z) + \frac{\xi(z,t)}{t}\|}).$$

Però com per hipòtesis $V(z) \neq 0$ i com $\xi(z,t) \in O(t^2)$, el límit existeix i podem construir una homotopia amb $\frac{V(z)}{\|V(z)\|}$. D'aquesta manera

$$L_0(F(\cdot, t)) = deg(\frac{V(z)}{\|V(z)\|}) =: ind_0(V).$$

□

Teorema 3.24 (Poincaré - Hopf)**.** *Sigui X una varietat compacta i orientable i sigui V un camp vectorial on tots els zeros són aïllats. Llavors*

$$\chi(X) = \sum_{V(x)=0} ind_x(V).$$

Demostració. És clar que, al ser X compacte i els zeros de V aïllats, només n'hi ha una quantitat finita. Anomenem-los $x_1, \ldots, x_n$. Llavors, construint una funció $F(z,t)$ com la de la proposició anterior, tindrem que, en concret

$$L(F(\cdot, 1/2 \cdot min\{t_{x_1}, \ldots, t_{x_n}\})) = \sum_{V(x)=0} ind_x(V)$$

i, com que $F(\cdot, 1/2 \cdot \min\{t_{x_1}, \ldots, t_{x_n}\})$ és homòtopa a la identitat (per construcció), ja haurem acabat.

Pel teorema de Whitney, X és pot embeddir en $\mathbb{R}^M$ per a M prou gran. Llavors l'espai tangent en un punt $z \in X$ és isomorf a la varietat $k-$lineal tangent en el punt z. Diguem Ψ a aquest isomorfisme. Pel teorema de l'entorn tubular, tenim que existeix un obert $X^\epsilon \subset \mathbb{R}^M$ tal que tot punt $z \in X^\epsilon$ té un únic punt més proper de X. Sigui $\pi\colon X^\epsilon \to X$ l'aplicació que assigna aquest punt. Per la compacitat de X $\exists \rho > 0$ tal que $\Psi(\rho V(p)) \subset X^\epsilon$. Llavors definim

$$F(x,t) = \pi((1-t)x + t\Psi(\rho V(p)).$$

Llavors, F compleix:

i) $F(z,0) = z$.

ii) Si $V(x) = 0$ llavors $F(x,t) = 0$. A més, si $V(x) \neq 0$, com π és la projecció sobre l'espai normal $F(x,t) \neq x$ per $t > 0$.

iii) $\frac{\partial}{\partial t} F(z,0) = V(z)$.

Així doncs, per la proposició anterior, el teorema queda demostrat.

$\square$

4 Intersecció en Homologia

4.1 Alguns comentaris i definicions

L'objectiu d'aquesta secció és ampliar les definicions ja conegudes d'interseccions sobre varietats a cadenes. Podem veure les cadenes com combinacions lineals d'aplicacions de símplexs en una varietat, de manera que intuïtivament podem relacionar aquestes aplicacions amb la funció f llisa entre les varietats llises X i Y que utilitzàvem en tota la secció anterior. Però hi ha bàsicament dos problemes que no permeten una ampliació directa de conceptes: la regularitat de X, donat que els símplexs són varietats contínues però no derivables, i la regularitat de f, donat que als símplexs singulars només se'ls demana continuïtat.

Per salvar el primer d'aquest problemes, s'allarga la relació convertint la teoria directa i clara de la secció anterior a una teoria inductiva sobre la dimensió de l'interior de les cares. Aquesta noció d'inducció se la denota amb el terme *estratificació*.

L'estratificació soluciona la regularitat de X però no la de f. Per a solucionar aquest segon problema ens restringim a l'estudi d'aplicacions regulars, és a dir, simplement demanem que les cadenes singulars siguin regulars.

La part potser més bonica de la teoria ve quan observem que aquestes nocions que hem pogut estendre a un subconjunt de les cadenes es poden estendre a les classes d'homologia i, al fer aquest pas, la restricció feta sobre les cadenes desapareix. D'aquesta manera s'aconsegueix ampliar la teoria d'intersecció a les classes d'homologia singular.

Definició 4.1. *(Inductiva)* Sigui $\sigma\colon \Delta^p \to X$ un p-símplex d'una varietat llisa X. Llavors diem que σ és C^∞ sii o bé $p = 0$ o bé $\sigma|_{\mathring{\Delta}^p}$ és C^∞ com a funció entre varietats i totes les seves cares són símplexs C^∞.

Diem que una p-cadena és C^∞ sii tots els seus símplexs ho són.

Notem el grup abelià de les cadenes de X amb coeficients al grup abelià G de la manera: C^∞ per $C_p^\infty(X; G) \subset C_p(X; G)$. És laboriós comprovar que de fet l'homologia induïda per les cadenes C^∞ és l'homologia singular. Una manera de fer-ho és comprovar que l'homologia C^∞ compleix els axiomes de Eilenberg-Steendrod, que es poden trobar a [4]. Llavors, tota teoria homològica que compleixi aquests axiomes és isomorfa a l'homologia simplicial.

4.2 Intersecció en homologia

En aquesta secció lligarem les nocions d'intersecció a les classes d'homologia de varietats compactes sense vora. D'ara endavant usarem que X és una varietat compacta sense vora $k-$dimensional i que els símplexs $\Delta^p \to X$ són C^∞ amb coeficients a un grup abelià G. A més, si σ és un símplex, notarem per $\mathring{\sigma}$ l'aplicació restringida a l'interior de Δ^p.

Definició 4.2. *(Inductiva)* Siguin σ,τ símplexs de X. Diem que σ i τ són transversals sii:

1. Els seus interiors ho són.
2. Les seves cares ho són.

Diem que dues cadenes són transversals sii els seus símplexs ho són dos a dos. En tots els casos ho notarem per mitjà del símbol $\pitchfork$, igual que en el cas de les varietats.

Proposició 4.1. *Si dos símplex tenen dimensió complementària, es tallen en un nombre finit de punts a l'interior.*

Demostració. Per dimensionalitat, si els símplexs són transversals només es tallen els seus interiors, que són varietats C^∞ sense vora. Per tant, es tallen en punts aïllats. Com que la intersecció de símplexs és compacta, els punts d'acumulació hi pertanyen. Llavors, els punts d'acumulació han de ser a la frontera, però la frontera són les cares de dimensió inferior. Per tant, n'hi ha d'haver un nombre finit. $\square$

Definició 4.3. Definim el *nombre d'intersecció* de dos símplexs transversals σ i τ de dimensió complementaria com

$$I(\sigma,\tau) := \sum_{p\in im(\sigma)\cap im(\tau)} I_p(\mathring{\sigma},\mathring{\tau}).$$

Estenem la definició a les cadenes per bilinealitat.

Observació. Si c és una p-cadena i c' és una $(k-p)-$cadena, llavors

$$I(c,c') = (-1)^{p(k-p)} I(c',c).$$

En concret si k és senar $I(c,c') = I(c',c)$.

Nota. Sigui $p \geq 1$. Per tot $\epsilon > 0$ prou petit, existeix un subconjunt de $\Delta^p_\epsilon \subset \Delta^p$ que conté el conjunt $\{x \in \Delta^p \mid dist(\{x\}, \{\text{cares de codimensió}\geq 2\}) > \epsilon\}$ i que és una varietat amb vora tancada. Aquest conjunt ens serveix per regularitzar símplexs sense afectar als punts que disten en més de ϵ de les cares de codimensió 2.

A més, si σ és un p-símplex C^∞, l'aplicació $\sigma|_{\Delta^p_\epsilon}$ és una aplicació entre varietats C^∞, per continuïtat a tot σ i ser C^∞ l'interior i a la vora.

A partir d'ara, si σ és un p-símplex notarem per $\widetilde{\sigma} := \sigma|_{\Delta^p_\epsilon}$.

Proposició 4.2. *Siguin σ i τ dos símplexs transversals amb suma de dimensions $k+1$. Llavors $\sigma^{-1}(im(\sigma)\cap im(\tau))$ és la unió disjunta de varietats compactes de dimensió 1.*

Demostració. Sigui $A = \{\text{cares de codimensió } \geq 2 \text{ de } \sigma\}$. Per transversalitat i dimensionalitat és clar que

$$A \cap (im(\sigma)\cap im(\tau)) = \emptyset.$$

Com els dos conjunts són compactes, és té que

$$dist(A, im(\sigma)\cap im(\tau)) = 2\epsilon > 0,$$

i per tant, $\widetilde{\sigma}^{-1}(im(\sigma)\cap im(\tau)) = \sigma^{-1}(im(\sigma)\cap im(\tau))$. Fent un raonament anàleg amb τ, s'arriba al cas $\sigma^{-1}(im(\sigma)\cap im(\tau)) = \widetilde{\sigma}^{-1}(im(\widetilde{\sigma})\cap im(\widetilde{\tau}))$.

Donat que la transversalitat és una propietat local tenim que $\widetilde{\sigma} \pitchfork \widetilde{\tau}$, que és el cas d'intersecció entre varietats compactes C^∞ amb vora. Així doncs, $\sigma^{-1}(im(\sigma)\cap im(\tau))$ és unió disjunta de varietats de dimensió 1.

$\square$

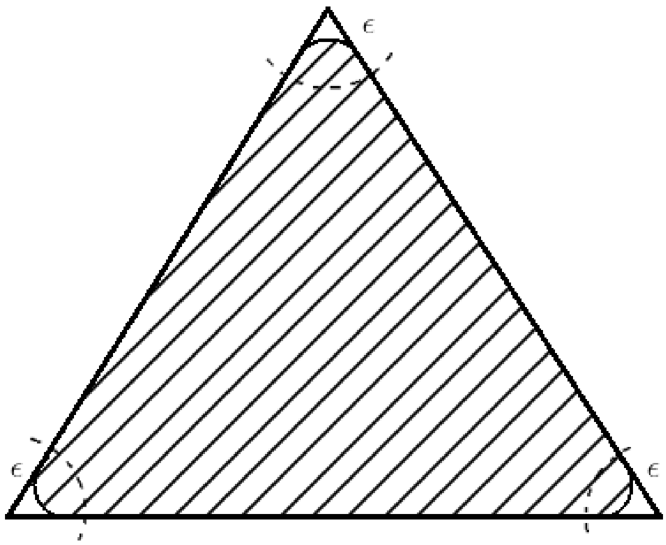

Figura 3: Regió C^∞ dins Δ^p.

Proposició 4.3. *Siguin c i b respectivament un cicle i una vora transversals de dimensió complementària. Llavors $I(b, c) = 0$.*

Demostració. Per bilinealitat, podem suposar, sense perdre generalitat, que b és vora d'un únic símplex σ. Pel teorema d'extensió, podem escollir-lo tal que sigui transversal a un símplex de c. De fet, en la prova del teorema d'extensió s'utilitza la nul·litat de la mesura d'extensions no transversals per assegurar l'existència, així que de fet podem assegurar-ne l'existència d'una extensió transversal a una quantitat finita de símplexs. Per tant, podem suposar que σ és transversal a c.

També podem suposar que per cada cara de codimensió 1 de c hi ha exactament dos símplexs de dimensió superior (amb orientacions oposades) que la contenen. Sigui $dim(b) = p$.

Si $dim(b) \geq 1$ i $dim(c) \geq 1$, per cada símplex de dimensió superior τ de c tenim, per la proposició anterior, que $\sigma^{-1}(im(\sigma) \cap im(\tau))$ són varietats compactes de dimensió 1. Llavors, la suma d'orientacions a les vores d'aquestes varietats s'anul·la. Llavors, la suma d'orientacions de les vores de totes les varietats de dimensió 1 de tots els símplexs τ de c també s'anul·la.

La vora d'aquestes varietats correspon a punts de dos tipus punts: la intersecció de cares de codimensió 1 de c amb l'interior de σ i l'interior dels símplex maximals de c amb les cares de codimensió 1 de σ.

Com c és un cicle, la suma de les orientacions dels punts del primer tipus s'anul·len dos a dos, donat que les cares de codimensió 1 de c compartien símplexs maximals amb orientació oposada. Llavors, com

$$0 = \sum \begin{array}{c}\text{orientacions}\\ \text{a les vores}\end{array} = \sum \begin{array}{c}\text{orientacions a}\\ \text{punts tipus 1}\end{array} + \sum \begin{array}{c}\text{orientacions a}\\ \text{punts tipus 2}\end{array}$$

ha de ser que la suma de les orientacions de les vores del segon tipus també s'anul·len. I aquesta suma és precisament el nombre $I(b, c)$. $\square$

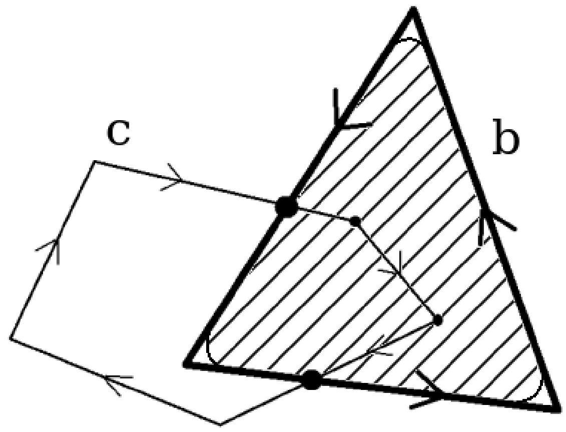

Figura 4: Els punts fins corresponen a vores tipus 1 i els grossos a tipus 2

El següent resultat és prou conegut i fer-ne una demostració implicaria introduir tota una teoria que no té cabuda en l'àmbit del projecte. Per tant, no el demostrarem.

Teorema 4.4. (Teorema de transversalitat estratificat)
Sigui K un poliedre i M una varietat diferenciable. Siguin $f, g\colon K \to M$ aplicacions C^∞ (és a dir, globalment contínues i C^∞ al restringir-se sobre cada cara de K). Llavors existeix una petita deformació $\widetilde{f}\colon K \to M$ C^∞ homòtopa a f i tan propera a f com vulguem tal que $\widetilde{f} \pitchfork g$.

Nota. Com a cas particular de poliedres, podem agafar una reunió finita de símplexs. D'aquesta manera aquest resultat assegura que per a qualssevol dos cadenes, podem deformar una de elles de manera "tan petita" con vulguem i tal que ambdós símplexs siguin transversals.

Observació. Si σ i τ són cadenes homòtopes, llavors són homòlogues.

Corol·lari. *Podem estendre la definició de nombre d'intersecció a tot parell de cadenes. És a dir:*

Definició 4.4. Siguin b i c dues cadenes de dimensió complementària. Llavors definim: $I(b, c) = I(\widetilde{b}, \widetilde{c})$, on $\widetilde{c}$ i $\widetilde{b}$ són petites deformacions homòtopes de c i b transversals entre elles.

Demostració. Per la proposició i l'observació anterior, aquest nombre no depèn de quina deformació triem. □

Observació. Podem pensar que la intersecció pren valor en $C_0(X; G)$ en comptes de en G de manera natural. Llavors:

Proposició 4.5. *Siguin c i b respectivament un cicle i una vora transversals de dimensió complementària. Llavors $I(b, c) \in B_0(X; G)$.*

Demostració. El resultat anterior equivalent diu que la suma dels coeficients del $0-$cicle de la intersecció s'anul·la. Llavors podem descompondre b en diferents vores de símplexs, i component a component els coeficients també s'anul·len. Com els símplexs són connexos sempre podem trobar camins C^∞ que uneixin dos a dos els punts amb orientació oposada en el sentit induït. Si cal, els camins es poden creuar i trencar en dos en aquests punts de tall. Llavors, per construcció, aquests camins són $1-$cadenes que tenen com a vora exactament $I(b, c)$. □

Corol·lari. *La intersecció de cadenes* $I\colon C_d(K; G) \otimes C_{k-d}(X; G) \longrightarrow C_0(X; G)$ *indueix una operació d'intersecció en homologia* $I\colon H_d(X; G) \otimes H_{k-d}(X; G) \longrightarrow H_0(X; G)$.

Demostració. Siguin $[b]$ i $[c]$ dues classes d'homologia de dimensió complementària. Si triem dos representants homòlegs c i $\widetilde{c}$ qualssevol, $I(b, c - \widetilde{c}) = 0$ en $H_0(X; G)$, donat que $c - \widetilde{c}$ és vora. El cas simètric és anàleg. □

Aquest nou punt de vista del producte intersecció ens permet una reinterpretació del teorema del punt fix de Lefschetz:

Observació. Sigui X varietat sense vora, compacta i orientable, i $f\colon X \to X$ una aplicació llisa. Llavors:

- $X \times X$ és una varietat sense vora, compacta i orientable.
- La diagonal $\Delta \subset X \times X$ és una varietat sense vora, compacta i orientable. Per tant, té classe fonamental $\Gamma_\Delta \in C_k(X; G) \subset C_k(X \times X; G)$.
- *graph*$(f) \subset X \times X$ és una varietat sense vora, compacta i orientable. Per tant, té classe fonamental $\Gamma_f \in C_k(X \times X; G)$.

Teorema 4.6. (Teorema del punt fix de Lefschetz, versió homològica)
Sigui X una varietat sense vora, compacta i orientable. Llavors, mantenint les notacions de l'observació anterior, si $I(\Gamma_\Delta, \Gamma_f) \in H_0(X; G)$ no s'anul·la, llavors f té punts fixos pertanyents a les classes $I(\Gamma_\Delta, \Gamma_f)$.

Demostració. La demostració és immediata a partir de tota la teoria introduïda. □

4.3 Dualitat de Poincaré

Hem acabat l'apartat anterior definint la intersecció sobre les classes d'homologia d'una varietat llisa X compacta, connexa i sense vora. Com $H_0(X; G) \simeq G$, la intersecció sobre les classes d'homologia és de fet un producte

$$\begin{array}{rccc} I\colon & H_p(X; G) \times H_{k-p}(X; G) & \longrightarrow & G \\ & (c, c') & \mapsto & I(c, c') \end{array}$$

on G és un grup abelià. Així doncs, gràcies a la teoria anteriorment definida, els següents resultats són immediats:

Corol·lari. *Sigui $c \in H_p(X; G)$, llavors*

$$\begin{array}{rccc} I(c)\colon & H_{k-p}(X; G) & \longrightarrow & G \\ & c' & \mapsto & I(c, c') \end{array}$$

és un morfisme. Equivalentment, $I(c) \in Hom(H_{k-p}(X; G), G)$.

Observació. Tenim un isomorfisme canònic $Hom(H_{k-p}(X;G),G) \hookrightarrow H^{k-p}(X;G)$ que, en el cas de que G sigui un cos de característica 0, hem vist que és un isomorfisme. Aplicant aquest morfisme s'obté:

Corol·lari. *Sigui I el producte intersecció. Llavors*

$$\begin{array}{rccc} I\colon & H_k(X;G) & \longrightarrow & H^{k-p}(X;G) \\ & c & \mapsto & I(c) \end{array}$$

és un morfisme.

D'aquesta manera, el producte I es vist com un morfisme entre classes d'homologia i el seu dual. El següent pas natural es preguntar-se quin tipus de morfisme és.

Teorema 4.7. (Teorema de Dualitat de Poincaré)
Sigui X una varietat compacta i connexa. Llavors existeix un isomorfisme $PD\colon H_k(X;G) \longrightarrow H^{k-p}(X;G)$.

La prova rigorosa d'aquest teorema necessita d'algunes comprovacions extenses. Donarem només la idea principal de la demostració. Demostracions completes es poden trobar a [5] i a [4]. En el nostre esquema intentarem mantenir la notació que es fa servir a [5].

Esquema de la demostració. Per ser X una varietat compacta, admet una triangulació simplicial finita K. Sigui $sd(K)$ la triangulació baricèntrica. Llavors construïm inductivament el següent complex cel·lular:

- Per a cada $0-$símplex $\sigma^0 \in K$ definim la $k-$cel·la

$$*\sigma^0 = \bigcup_{\sigma^0 \in \tau^k \in sd(k)} |\tau^k|$$

  on el superíndex de τ indica la dimensió de la cara. És a dir, la unió és sols de $k-$símplexs.

- Per a cada $p-$símplex $\sigma^p \in K$ definim la $(k-p)-$cel·la

$$*\sigma^p = \bigcap_{\tau^{p-1} \in \sigma^p} *\tau^{p-1}$$

  on altre cop el superíndex de les τ's indiquen la seva dimensió.

Es comprova que realment són cel·les, encara sense orientar. També es comprova que, com a conjunts, cada σ^p és transversal a $*\sigma^p$ i talla en un únic punt. A més, cada σ^p només s'interseca amb el seu $*\sigma^p$. Per tant, l'operador * és de fet un isomorfisme. Orientem les cel·les de manera que $I(\sigma^p, *\sigma^p) = +1$ en aquest únic punt.

Llavors, hem construït un complex cel·lular de X. Dualitzant-lo, obtenim el que s'anomena *complex cel·lular dual* de K. Notem $\Delta^p := (*\sigma^p)^\nu$. Llavors, per la seva pròpia definició es comprova que, orientant adequadament les cel·les, es té

$$\delta\Delta^p = (-1)^{k-p}(*(d\sigma^p))^\nu.$$

Amb això tenim que el diagrama

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{p+2}} & C_{p+1}(X;G) & \xrightarrow{d_{p+1}} & C_p(X;G) & \xrightarrow{d_p} & C_{p-1}(X;G) & \xrightarrow{d_{p-1}} & \cdots \\
 & & (-1)^{k-p}* \downarrow & & (-1)^{k-p}* \downarrow & & (-1)^{k-p}* \downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta_{k-p-2}} & C^{k-p-1}(X;G) & \xrightarrow{\delta_{k-p-1}} & C^{k-p}(X;G) & \xrightarrow{\delta_{k-p}} & C^{k-p+1}(X;G) & \xrightarrow{\delta_{k-p+1}} & \cdots
\end{array}
$$

és commutatiu. D'aquí s'extreu que $H_p(X;G) \simeq H^{k-p}(X;G)$.

□

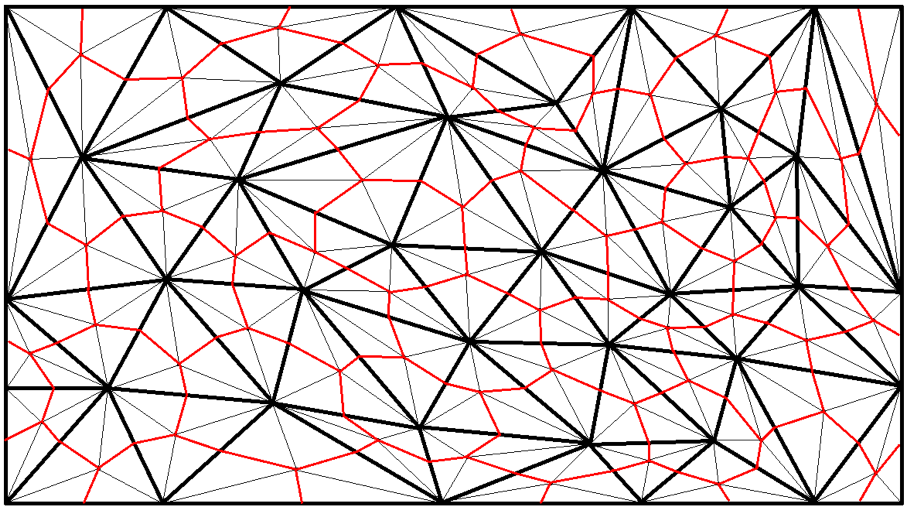

Figura 5: Procés de construcció del complex cel·lular d'una triangulació d'un tor

La Dualitat de Poincaré també es pot enunciar en termes d'interseccions: l'isomorfisme de cocadenes $Hom(C_{k-p}(X;G),G) \simeq C^p(X;G)$ dóna lloc al morfisme natural $Hom(H_p(X;G),G) \longrightarrow H^p(X;G)$, que és un isomorfisme en el cas de que G sigui un cos de característica 0.

Aleshores es té una altra versió del teorema Dualitat de Poincaré, que es pot trobar a [6] i [2]:

Teorema 4.8. (Dualitat de Poincaré) *L'aparellament*

$$H^p(X;G) \otimes H^{k-p}(X;G) \quad \xrightarrow{\cup} \quad H^k(X;G) \simeq G$$

és no degenerat.

La nostra definició d'intersecció I en grups d'homologia de grau complementari permet relacionar les dues versions de la Dualitat de Poincaré: Com Δ^p és l'única $(k-p)-$cel·la de la descomposició dual que talla al $p-$símplex σ^p, tenim que

$$(\Delta^p)^\nu(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \neq \sigma^p \\ 1 & \text{si } \tau = \sigma^p \end{cases}$$

coincideix amb la intersecció

$$I(\tau, *\sigma^p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \neq \sigma^p \\ 1 & \text{si } \tau = \sigma^p \end{cases}$$

Així doncs, l'isomorfisme del teorema 4.8, si li apliquem els isomorfismes $H_p(X;G) \simeq H^{k-p}(X;G)$ del teorema 4.7, ens dóna un aparellament no degenerat

$$H_{k-p}(X;G) \oplus H_p(X;G) \quad \longrightarrow \quad H_0(X;G)$$

que és el nostre producte d'intersecció I.

5 Apèndix

5.1 Teoremes assumits

A continuació enunciem els teoremes que hem decidit assumir des de el principi del projecte. Tots ells estan extrets directament del llibre [3].

Teorema de Whitney

Teorema 5.1. *Tota varietat $k-$dimensional té un embedding a $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Teorema de ϵ-entorn o entorn tubular

Teorema 5.2. *Per a tota varietat Y a $\mathbb{R}^M$ existeix un entorn Y^ϵ obert de Y a $\mathbb{R}^M$ tal que per a tot punt w d'aquest entorn existeix un únic punt més proper de Y denotat $\pi(w)$. A més, $\pi\colon Y^\epsilon \to Y$ és una submersió.*

Corol·lari. *Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació llisa, amb Y sense vora. Llavors existeix una bola d'algun espai Euclidià i un aplicació llisa $F\colon X \times S \to Y$ tal que $F(x,0) = f(0)$ i que fixant $x \in X$, $F(x,\cdot)\colon S \to Y$ és una submersió.*

Teorema de Sard

Teorema 5.3. *Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació llisa entre varietats. Llavors quasi tot punt de Y és un valor regular.*

Teorema de Transversalitat

Teorema 5.4. *Sigui $F\colon X \times S \to Y$ una aplicació llisa entre varietats on sols X pot tenir vora. Sigui $Z \subset Y$ una subvarietat sense vora. Llavors, si $\partial F \pitchfork Z$ i $F \pitchfork Z$, per quasi tot punt $s \in S$ $F(\cdot,s)$ i $\partial F(\cdot,s)$ són transversals a F.*

Teorema de l'homotopia transversal

Teorema 5.5. *Per a qualsevol aplicació $f\colon X \to Y$ amb Y sense vora i $Z \subset Y$ subvarietat sense vora existeix una aplicació homòtopa g tal que $g \pitchfork Z$ i $\partial g \pitchfork Z$.*

Teorema d'extensió

Teorema 5.6. *Sigui Z una subvarietat tancada de Y, ambdues sense vora, i C un subconjunt tancat de X. Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació llisa amb f i ∂f transversal a Z en C. Llavors existeix una aplicació homòtopa g tal que $g \pitchfork Z$ i $\partial g \pitchfork Z$ i tal que en un entorn de C $g = f$.*

I la relació entre aquests resultats és la següent:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{th. Whitney} & \Rightarrow & \epsilon\text{-entorn i corolari} \\ \text{th. Sard} & \Rightarrow & \text{Teorema de transversalitat} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Th. de L'Homotopia transversal}$$

th. d'Extensió

Bibliografia

[1] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analityc and Differential Geometry*. 1997.

[2] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. 1980.

[3] Pollack A. Guillemin V. *Differential Topology*. 1974.

[4] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. 1984.

[5] Joseph Harris Phillip Griffiths. *Principles of Algebraic Geometry*. 1978.

[6] Loring W. Tu Raoul Bott. *Differential Forms in Algebraic Topology*. 1982.