TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Axiomàtica dels nombres reals

Autora: Montserrat Aranda May

Director: Jaume Franch Bullich

Departament: Matemàtica Aplicada IV

Convocatòria: 2012/2013

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Als meus pares, per haver-me donat forces tots aquests anys.

Índex

Introducció

Durant els anys que he estat cursant matemàtiques, el resultat de la completesa (completesa de Cauchy o seqüencial) del conjunt de nombres reals ha estat utilitzat en nombroses ocasions. En moltes assignatures, un cop s'ha utilitzat el resultat, el professor ha afegit que tota successió convergent és de Cauchy, però que cal recordar que el recíproc no és sempre cert, donant l'exemple del conjunt de nombres racionals. També, des del primer curs, coneixem propietats addicionals d'aquest conjunt de nombres, recordem la propietat dels intervals encaixats, el conegut axioma del suprem, la propietat arquimediana, la propietat de Bolzano-Weierstrass, entre d'altres. I és que el conjunt de nombres reals té unes propietats molt destacables i que marquen la diferència respecte altres conjunts d'elements.

Durant aquest projecte tractarem totes aquestes propietats en un cos ordenat qualsevol, amb la finalitat d'estudiar sota quines condicions es poden donar totes elles quan no ens trobem en el cos de nombres reals. Més concretament, treballarem amb set formes de completesa diferents, deixant enrere l'ús del terme *complet* per només referir-nos a cossos ordenats on tota successió de Cauchy és convergent: *completesa de Cantor* (o, en el cas particular del conjunt de nombres reals, més coneguda per la propietat dels intervals encaixats), *completesa de Dedekind* (o, en el conjunt de nombres reals, més coneguda per l'axioma del suprem), *completesa de Cauchy o seqüencial*, *completesa de Bolzano-Weierstrass* (o propietat de Bolzano-Weierstrass si treballem amb el cos de nombres reals), *completesa de Bolzano*, *completesa monòtona* (equivalent a la propietat de convergència monòtona en el cas del conjunt de nombres reals) i *completesa de Hilbert*, totes elles definides a (2.1.1).

El conjunt de nombres reals resulta ser la motivació d'aquest projecte, per aquest motiu s'ha decidit començar amb una construcció d'aquest conjunt de nombres mitjançant classes d'equivalència de successions de Cauchy (s'ha pres [1] com a punt de referència). El primer capítol comença introduint la idea de cos ordenat, juntament amb moltes propietats relacionades que cal tenir compte. Posteriorment, es fa la construcció esmentada dels reals, verificant que aquesta construcció compleix cada un dels axiomes que defineix un conjunt de nombres reals.

Una vegada estudiat amb detall el conjunt de nombres reals, el segon capítol tracta dels diferents tipus de completesa comentats que es poden donar en els cossos ordenats, dividint l'estudi en dues parts: completesa en cossos ordenats arquimedians i completesa en cossos ordenats no arquimedians. L'objectiu principal d'aquest capítol és establir l'equivalència de les anteriors formes de completesa quan el cos ordenat té la propietat arquimediana (tal i com s'ha fet en altres treballs com [2]). Més endavant, s'estudiarà quines de les set formes de completesa presentades impliquen la propietat arquimediana del cos, deixant veure que, en un cos ordenat no arquimedià, les úniques possibles formes de completesa són la de Cantor, la seqüencial i la de Hilbert. Fàcilment es comprovarà que la completesa de Hilbert la tenen tots els cossos no arquimedians, i respecte a les altres dues es dedicarà una secció on es donaran possibles relacions. Acabarem el capítol presentant un exemple de cos ordenat, no arquimedià i seqüencialment complet, el qual ha estat elaborat a partir de la construcció vista en el primer capítol i amb l'ajuda de [7] i algunes lectures com [5] i [6].

En motiu del títol del projecte, hem decidit introduir la secció (2.4) dedicada a entendre l'axiomàtica dels nombres reals des de diferents punts de vista. Partint de veure el conjunt de nombres reals com un cos ordenat i Dedekind complet, i usant l'equivalència entre les diferents formes de completesa en el cas particular del cos de nombres reals, es donen altres definicions axiomàtiques equivalents per a aquest conjunt de nombres.

Finalment, vull expressar el meu agraïment al meu tutor Jaume Franch per les hores setmanals dedicades al projecte.

1
Construcció dels nombres reals

Començarem aquest capítol introduint la idea de *cos ordenat* i donant alguns resultats previs relacionats amb el concepte. Posteriorment, construirem els nombres reals a partir dels racionals, usant successions de Cauchy. Aquesta construcció dels reals es basarà en completar el conjunt $\mathbb{Q}$ vist com espai mètric, és a dir, voldrem un cos semblant al conjunt de nombres racionals, però on tota successió de Cauchy sigui convergent, fet que no passa a $\mathbb{Q}$. Més endavant, recordarem l'axiomàtica que defineix el conjunt de nombres reals i comprovarem que, efectivament, la construcció obtinguda compleix cada un dels axiomes.

1.1 El concepte de *cos ordenat*

1.1.1 Definició Un cos $\mathbb{K}$ és *ordenat* si existeix un subconjunt $\mathbb{K}_+$ de $\mathbb{K}$ tal que:

(i) $\mathbb{K}_+ \cap (-\mathbb{K}_+) = \emptyset$.

(ii) $\mathbb{K}_+ \cup \{0\} \cup (-\mathbb{K}_+) = \mathbb{K}$.

(iii) Si a, $b \in \mathbb{K}_+$, llavors $a + b \in \mathbb{K}_+$ i $ab \in \mathbb{K}_+$.

1.1.2 Exemple Si pensem en el cos ordenat de nombres racionals $\mathbb{Q}$, llavors $\mathbb{Q}_+$ és el conjunt de racionals positius.

1.1.3 Exemple El cos de nombres complexos $\mathbb{C}$ no és ordenat. Si fos ordenat, existiria un subconjunt $\mathbb{C}_+ \subset \mathbb{C}$ que compliria les propietats de (1.1.1). Per tant, es tindria que $i \in \mathbb{C}_+$ o bé $-i \in \mathbb{C}_+$. De tota manera, qualsevol dels casos possibles implicaria que $-1 = (\pm i)^2 \in \mathbb{C}_+$ i $1 = (-1)(-1) \in \mathbb{C}_+$. Per tant, $0 = 1 - 1 \in \mathbb{C}_+$, fet que contradiu el punt (ii) de la definició anterior. Així doncs, es conclou que $\mathbb{C}$ no és un cos ordenat.

1.1.4 Teorema *Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i $\mathbb{K}_+$ el conjunt esmentat en (1.1.1). Aleshores:*

(i) Si $a \in \mathbb{K}$ i $a \neq 0$, llavors $a^2 \in \mathbb{K}_+$. En particular, $1 \in \mathbb{K}_+$.

(ii) Si a, $b \in \mathbb{K}$, $ab \in \mathbb{K}_+$ i $a \in \mathbb{K}_+$, llavors $b \in \mathbb{K}_+$.

Demostració:

(i) Si $a \in \mathbb{K}_+$, llavors, per la propietat (iii) de la definició (1.1.1), $a^2 \in \mathbb{K}_+$. Altrament, si $a \notin \mathbb{K}_+$ i $a \neq 0$, per la propietat (ii) de (1.1.1), $a \in -\mathbb{K}_+$, és a dir, $-a \in \mathbb{K}_+$. De nou, per (1.1.1)(iii), tenim que $(-a)^2 \in \mathbb{K}_+$. En qualsevol anell la igualtat $(-a)(-b) = ab$ és certa, per tant, $a^2 = (-a)^2 \in \mathbb{K}_+$.

En particular, prenent $a = 1$, es té que $a^2 = 1^2 = 1$ i, usant el que acabem de veure, $1 \in \mathbb{K}_+$.

(ii) Farem aquesta prova per reducció a l'absurd: suposem que $b \notin \mathbb{K}_+$. Si $b = 0$, llavors $ab = 0 \notin \mathbb{K}_+$, fet que contradiu l'enunciat. D'altra banda, si $b \in (-\mathbb{K}_+)$, llavors $-b \in \mathbb{K}_+$ i

$$a(-b) = -(ab) \in \mathbb{K}_+.$$

Hem arribat a $ab \in (-\mathbb{K}_+)$, fet que contradiu una de les hipòtesis. Per tant, $b \in \mathbb{K}_+$. □

1.1.5 Definició Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Escriurem $a <_{\mathbb{K}} b$ o $b >_{\mathbb{K}} a$ si $b - a \in \mathbb{K}_+$. Així, direm que $\mathbb{K}$ té un ordre $\leq_{\mathbb{K}}$, i que $a \leq_{\mathbb{K}} b$ si $a <_{\mathbb{K}} b$ o $a = b$.

Habitualment, usarem $\leq$ en lloc de $\leq_{\mathbb{K}}$ i $<$ en lloc de $<_{\mathbb{K}}$.

Gràcies a la definició que acabem de donar, podem parlar d'elements ***positius*** i elements ***negatius*** d'un cos ordenat. Direm que $a \in \mathbb{K}$ és positiu si $a > 0$ o, equivalentment, $a \in \mathbb{K}_+$. De la mateixa manera, $a \in \mathbb{K}$ és negatiu si $a < 0$, és a dir, $a \in (-\mathbb{K}_+)$.

1.1.6 Teorema *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Per a tot a, $b \in \mathbb{K}$, tenim $a < b$ o $a = b$ o $a > b$, i només una d'aquestes relacions és certa.*

Demostració: Donats a, $b \in \mathbb{K}$ qualssevol, es diu que

- $b = a$ si, i només si, $b - a = 0$.
- $a < b$ si, i només si, $b - a \in \mathbb{K}_+$.
- $b < a$ si, i només si, $a - b \in \mathbb{K}_+$. Equivalentment, $b < a$ si, i només si, $b - a \in (-\mathbb{K}_+)$.

Com $b - a \in \mathbb{K}$, per la definició de $\mathbb{K}_+$, només una de les anteriors afirmacions ha de ser certa. □

1.1.7 Remarca El teorema anterior mostra que dos elements qualssevol d'un cos ordenat sempre són comparables.

Molts fets elementals sobre desigualtats són conseqüència dels axiomes d'ordre (1.1.1). A continuació es mostren alguns d'ells.

1.1.8 Teorema *Siguin* $\mathbb{K}$ *un cos ordenat i* a, b, c, $d \in \mathbb{K}$. *Si* $a < b$ *i* $c \leq d$, *llavors* $a + c < b + d$.

Demostració: Sabem, per la propietat associativa de la suma, que $(b+d)-(a+c) = (b-a)+(d-c)$. Tenim dues opcions:

- $c < d$, que implica que $d-c \in \mathbb{K}_+$. Llavors, com $b-a$ és de $\mathbb{K}_+$, $(b-a)+(d-c)$ també ha de ser-ho.
- $c = d$, que equival a $d - c = 0$. Tenim que el resultat és cert per ser $b - a$ de $\mathbb{K}_+$. □

1.1.9 Teorema *Siguin* $\mathbb{K}$ *un cos ordenat i* a, b, $c \in \mathbb{K}$. *Si* $a < b$ *i* $c > 0$, *llavors* $ac < bc$ *(Si* $c < 0$ *i les altres condicions no varien,* $ac > bc$*).*

Demostració: Si $a < b$, llavors $b - a \in \mathbb{K}_+$ i, com $c > 0$, tenim que $c(b-a) \in \mathbb{K}_+$. Per tant, $cb > ca$.

Altrament, si $c < 0$, es té que $-c \in \mathbb{K}_+$ i, per tant, $(-c)(b-a) \in \mathbb{K}_+$. Obtenim que $ac - bc \in \mathbb{K}_+$, és a dir, $ac > bc$. □

El resultat que segueix fa referència al comportament dels inversos dels elements positius d'un cos ordenat. Cal remarcar que per un element b diferent de zero, sovint escriurem el seu invers mulitplicatiu b^{-1} com $\frac{1}{b}$. A més, per un element a del cos, escriurem ab^{-1} com $\frac{a}{b}$.

1.1.10 Teorema *En qualsevol cos ordenat* $\mathbb{K}$ *la desigualtat* $0 < a < b$ *implica que* $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Demostració: Com $b\frac{1}{b} = 1 \in \mathbb{K}_+$ i $b \in \mathbb{K}_+$, pel teorema (1.1.4) sabem que $\frac{1}{b} \in \mathbb{K}_+$. Tenim, doncs, que $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$ i $b - a$ són elements de $\mathbb{K}_+$, del que es dedueix que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}\frac{1}{b}(b-a) \in \mathbb{K}_+.$$

Per tant,

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

□

L'ordre de què consta un cos ordenat permet definir una mètrica, la distància de qualsevol element del cos al zero.

1.1.11 Definició Donat un element a d'un cos ordenat $\mathbb{K}$, el *valor absolut* $|a|$ de a és

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0; \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

1.1.12 Teorema *Donats dos elements* a *i* b *d'un cos ordenat* $\mathbb{K}$, *tenim:*

(i) $|a| = |-a|$.

(ii) $|ab| = |a||b|$.

(iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

(iv) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

Demostració:

(i) Si $a = 0$, llavors $-a = 0$ i $|a| = |-a|$. Si $a > 0$, $|a| = a$ i $|-a| = -(-a) = a$. Altrament, si $a < 0$, $|a| = -a$ i $|-a| = -a$.

(ii) Si $a > 0$ i $b > 0$, tenim que $ab > 0$. Com a conseqüència, $|a| = a$ i $|b| = b$, per tant, $|ab| = |a||b|$.

El cas $a < 0$ i $b < 0$ es demostra de forma anàloga.

Suposem que $a > 0$ i $b < 0$, llavors $|a| = a$ i $|b| = -b$. Sabem que $ab = a(-(-b)) = -(a(-b))$ i, per ser $a(-b)$ de $\mathbb{K}_+$, $-(ab) \in \mathbb{K}_+$. Així, $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$.

El cas $a < 0$ i $b > 0$ és anàleg al cas anterior.

Si a o b és 0, $ab = 0$ i $|a||b| = 0$.

(iii) Si $a \geq 0$, es té que $|a| = a$. En canvi, si $a < 0$, es té que $|a| = -a > 0$. De tota manera, sempre és cert que

$$a \leq |a|,$$

$$b \leq |b|,$$

i, pel teorema (1.1.8),

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

Com $-a \leq |-a| = |a|$, també és cert que

$$-(a+b) \leq |a| + |b|.$$

Per tant,

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

(iv) Si $a > 0$ i $b > 0$, llavors $||a| - |b|| = |a - b|$.

Si $a > 0$ i $b < 0$, llavors $||a| - |b|| = |a - (-b)| = |a + b| \leq |a| + |b| = a + (-b) = |a + (-b)| = |a - b|$, on hem utilitzat la propietat (iii).

El cas $a < 0$ i $b > 0$ es prova de forma anàloga.

El cas $a = 0$ o $b = 0$ és trivial. □

Una vegada exposat aquest últim teorema, ens adonem que la funció

$$\begin{array}{rcl} d_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \text{ x } \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & |a-b| \end{array}$$

és una distància i, per tant, podem presentar el següent corol.lari.

1.1.13 Corol·lari *Tot cos ordenat* $(\mathbb{K}, \leq_{\mathbb{K}})$ *és un espai mètric* $(\mathbb{K}, d_{\mathbb{K}})$.

Demostració: Es dedueix directament de les propietats del valor absolut vistes en el teorema (1.1.12). □

1.1.14 Remarca S'observa que tot ordre permet definir una distància, però el recíproc no és cert: recordem l'exemple (1.1.3).

Acabarem aquesta introducció a les propietats dels cossos ordenats exposant un dels resultats previs més importants i que prendrà un paper més rellevant en posteriors arguments. Dit de forma col.loquial, el següent teorema ens assegura que el conjunt de nombres racionals és un subcos de qualsevol cos ordenat. Abans, però, cal donar una definició prèvia.

1.1.15 Definició Siguin $\mathbb{K}$ i $\mathbb{F}$ dos cossos ordenats, i $\tau : \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ un homomorfisme de cossos. Direm que τ és un *homomorfisme de cossos ordenats* si preserva l'ordre, és a dir,

$$a \leq b \Rightarrow \tau(a) \leq \tau(b), \text{ per a tot } a,\, b \in \mathbb{K}.$$

Les definicions de *isomorfisme de cossos ordenats* i *monomorfisme de cossos ordenats* són anàlogues.

1.1.16 Exemple Es veurà un exemple d'isomorfisme de cossos ordenats a través de la demostració del següent teorema, que es fa de forma constructiva.

1.1.17 Teorema *Tot cos ordenat* $\mathbb{K}$ *té un subcos isomorf al cos de nombres racionals. A més, es tracta d'un isomorfisme de cossos ordenats.*

Demostració: Per veure que $\mathbb{K}$ té un subcos isomorf a $\mathbb{Q}$, considerem l'aplicació τ, que identifica una part de $\mathbb{K}$ amb $\mathbb{Q}$, i estudiem quines propietats ha de complir per ser un isomorfisme. Per evitar una notació pesada, no farem distincions entre els zeros de $\mathbb{K}$ i $\mathbb{Q}$, ni entre les unitats de $\mathbb{K}$ i $\mathbb{Q}$, ja que pel context és fàcil d'interpretar.

Un subcos de $\mathbb{K}$ té sempre el 0 i l'1. És clar que $\tau(0) = 0$ i $\tau(1) = 1$.

Per ser un subcos, tots els elements de la forma $n1$[1], on $n \in \mathbb{N}$, han de pertànyer al subcos, igual que els seus corresponents inversos i oposats. Per tractar-se d'un cos ordenat, $n1 \in \mathbb{K}_+$, el que implica que el cos té característica 0. Per inducció és fàcil veure que $\tau(n1) = n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. A més, si τ és un homomorfisme de cossos, s'ha de complir que $\tau((n1)^{-1}) = \tau(n1)^{-1} = \frac{1}{n}$ i $\tau(-(n1)) = -\tau(n1) = -n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per la propietat que tenen els homomorfismes de preservar el producte entre dos elements del cos,

$$\tau((m1)(n1)^{-1}) = \tau(m1)\tau(n1)^{-1} = \frac{m}{n}$$

i

$$\tau((-(m1))(n1)^{-1}) = -\tau(m1)\tau(n1)^{-1} = -\frac{m}{n},$$

per a tot $m,\, n \in \mathbb{N}$.

[1]S'entén per $n1$ la suma de n vegades la unitat.

És rutinari veure que acabem de construir un isomorfisme de cossos

$$\tau\colon\ <1>\subseteq \mathbb{K} \quad\longrightarrow\quad \mathbb{Q}.$$

Per comprovar que τ preserva l'ordre, prenem dos elements $a, b \in <1>$ tals que $a < b$ i vegem, usant l'ordre habitual en $\mathbb{Q}$, que $\tau(a) < \tau(b)$. □

1.1.1 Breu introducció als cossos ordenats *arquimedians*

Donats dos elements qualssevol d'un cos ordenat, és lògic preguntar-se si successives repeticions de l'element petit superaran al gran, sense importar com de petits o grans són. En molts cossos aquest fet és possible, tot i que no en tots. Més endavant estudiarem els cossos ordenats amb aquesta propietat, i veurem que gràcies a això tenen característiques de gran interés.

1.1.18 Definició Un cos ordenat $\mathbb{K}$ és *arquimedià* si, per a tot $a \in \mathbb{K}$ i tot $b \in \mathbb{K}_+$, existeix un enter positiu n tal que $nb > a$[2].

1.1.19 Exemple El conjunt de nombres racionals $\mathbb{Q}$ és arquimedià.

Cal destacar que la propietat arquimediana d'un cos ordenat té una definició alternativa, l'ús de la qual depèn del context en el que ens trobem.

1.1.20 Proposició *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Són equivalents:*

(i) $\mathbb{K}$ *és arquimedià.*

(ii) Per a tot $a \in \mathbb{K}$ existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $|a| < n1$.

Demostració:

$(i) \Rightarrow (ii)$

Prenem un element $a \in \mathbb{K}$ qualsevol i l'element $1 \in \mathbb{K}_+$. Sabem que $|a| \in \mathbb{K}$. Llavors, per hipòtesi, existeix un enter positiu n tal que $|a| < n1$.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Siguin $a \in \mathbb{K}$ i $b \in \mathbb{K}_+$, i considerem l'element $\frac{a}{b} \in \mathbb{K}$. Llavors, per hipòtesi, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a}{b}\right| < n1$. És cert que

$$\frac{a}{b} \leq \left|\frac{a}{b}\right| < n1,$$

llavors, usant el teorema (1.1.9) i el fet que $b > 0$,

$$\frac{a}{b}b < (n1)b = (1 + \overset{(n)}{\cdots} + 1)b = nb.$$

Per tant,

$$a < nb.$$

□

[2] L'expressió nb indica la suma de n vegades l'element b del cos.

1.1.21 Remarca Donat un cos ordenat no arquimedià $\mathbb{K}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ és un subconjunt acotat (recordant que sempre existeix un subcos isomorf al conjunt de nombres racionals i que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$).

Així doncs, podem entendre la propietat arquimediana de dues maneres. Durant aquest capítol usarem la primera d'elles, però en la segona part del projecte es treballarà amb la segona.

1.1.22 Teorema *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat arquimedià, i siguin a, $b \in \mathbb{K}$ tals que $a < b$. Llavors existeix $\frac{m}{n} \in \mathbb{K}$, amb m i n enters, tal que $a < \frac{m}{n} < b$.*[3]

Demostració: Com $b - a > 0$, tenim que $(b-a)^{-1} > 0$. Per tant, com $\mathbb{K}$ és arquimedià i $1 > 0$, existeix un enter positiu n tal que

$$n1 > (b-a)^{-1} > 0.$$

Usant (1.1.10), tenim

$$0 < (n1)^{-1} < b - a,$$

que, usant la notació comentada anteriorment, equival a

$$0 < \frac{1}{n1} < b - a.$$

Sigui n qualsevol enter diferent de zero que satisfaci la desigualtat anterior, i sigui S el conjunt

$$S := \left\{ k : k \in \mathbb{Z}, k\frac{1}{n} > a \right\}.$$

Del fet que $\frac{1}{n} > 0$ i $\mathbb{K}$ és arquimedià, es dedueix que $S \neq \emptyset$. També, de nou per la propietat arquimediana del cos ordenat, existeix un enter positiu p tal que

$$p\frac{1}{n} > -a,$$

i, equivalentment,

$$(-p)\frac{1}{n} < a.$$

Podem concloure que $-p$, $-(p+1)$, $-(p+2)$, $\ldots$ no pertanyen a S. Llavors S és un conjunt d'enters, no buit i fitat inferiorment que, per tant, té mínim m. Com $m \in S$, es té $a < m\frac{1}{n}$.

Per definició d'element mínim, $m - 1 \notin S$. Per tant, $\frac{m-1}{n} \leq a$ i, així,

$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Amb això últim,

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

$\square$

[3] Amb l'expressió $\frac{m}{n}$ ens referim a $\frac{m1}{n1} \in \mathbb{K}$.

1.1.23 Remarca Pel teorema (1.1.22), afirmem que, entre dos elements d'un cos arquimedià $\mathbb{K}$, sempre hi ha un element de la forma $\frac{m1}{n1}$, on m i n són enters. Tal i com hem vist en el teorema (1.1.17), en un cos ordenat, un element de la forma $\frac{m1}{n1}$ s'identifica amb el racional $\frac{m}{n}$. Per tant, de forma informal, entre dos elements d'un cos arquimedià sempre hi ha un racional.

Aquest fet és conegut per *la densitat de* $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{K}$.

1.2 Successions de Cauchy d'un cos ordenat qualsevol

Un cop finalitzats els previs corresponents al concepte de cos ordenat, al llarg d'aquesta secció ens dedicarem a elaborar la construcció del conjunt de nombres reals, que és l'objectiu del capítol. Es tracta d'una construcció llarga i detallada que, per tal de fer el procediment més entendor, es dividirà en subseccions que marcaran els diferents passos a seguir.

1.2.1 Tres famílies de successions: $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{N}$

Primer de tot, recordem la definició de límit de successions, aquesta vegada sobre un cos ordenat qualsevol.

1.2.1 Definició Donada una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cos ordenat $\mathbb{K}$ i un element $b \in \mathbb{K}$, el *límit* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és b si, per a tot $\varepsilon \in \mathbb{K}$ amb $\varepsilon > 0$, existeix un enter positiu $L(\varepsilon)$ tal que $|x_n - b| < \varepsilon$ per a tot $n \geq L(\varepsilon)$.

La notació que usarem és:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \text{ o } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

1.2.2 Definició Una successió en un cos ordenat $\mathbb{K}$ és *convergent* si té límit en $\mathbb{K}$.

Seguidament, s'introdueixen tres tipus diferents de successions d'un cos ordenat.

1.2.3 Definició Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat.

(i) Una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'elements de $\mathbb{K}$ es diu que és *acotada* si existeix un element $b \in \mathbb{K}$ tal que $|x_n| \leq b$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es diu que és de *Cauchy* si, per a tot $\varepsilon \in \mathbb{K}$ tal que $\varepsilon > 0$, existeix un enter positiu $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ per a tot $n,\, m \geq N(\varepsilon)$.

(iii) Una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és *nul.la* si, per a tot $\varepsilon \in \mathbb{K}$ tal que $\varepsilon > 0$, existeix un enter positiu $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n| < \varepsilon$ per a tot $n \geq N(\varepsilon)$.

1.2.4 Remarca Per la definició (1.2.3), punt (iii), entenem que una successió nul.la en un cos ordenat $\mathbb{K}$ és aquella que té límit 0. Fixem-nos que només cal prendre $L(\varepsilon) = N(\varepsilon)$, per a tot ε positiu.

El resultat que es segueix fa referència al límit de les successions de Cauchy i, tot i que encara no l'utilitzarem, és necessari presentar-lo per utilitzar-lo en posteriors arguments.

1.2.5 Lema *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy i $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ és una subsuccessió amb límit b, llavors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ té límit b.*

Demostració: Sigui $\varepsilon > 0$ un element de $\mathbb{K}$. Si $k \geq L(\frac{1}{2}\varepsilon)$, llavors $|x_{n_k} - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Com (x_n) és una successió de Cauchy, tenim

$$|x_p - x_q| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

si p, $q \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Prenem una k fixa tal que $k \geq L(\frac{1}{2}\varepsilon)$ i $n_k \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Llavors, per $q \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, es té

$$|x_q - b| \leq |x_q - x_{n_k}| + |x_{n_k} - b| < \varepsilon.$$

□

1.2.6 Definició Un cos ordenat $\mathbb{K}$ és *complet* si tota successió de Cauchy en $\mathbb{K}$ és convergent.

1.2.7 Remarca És immediat veure que, en un cos ordenat, tota successió convergent és de Cauchy. El recíproc no és cert sempre i depèn del cos on ens trobem. En el següent capítol es donaran condicions que ha de satisfer un cos ordenat per tal de tenir l'equivalència entre successió de Cauchy i successió convergent.

D'ara en endavant, entendrem que $\mathbb{K}$ és un cos ordenat i, per tal d'evitar una notació complicada, escriurem (x_n) en lloc de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A més, denotarem per $\mathfrak{B}$ la família de successions acotades, per $\mathfrak{C}$ la de successions de Cauchy i per $\mathfrak{N}$ la de successions nul.les.

1.2.8 Teorema *Es donen les següents inclusions*

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}.$$

Demostració: Primer de tot, anem a veure que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$. Donada $(x_n) \in \mathfrak{C}$, llavors, per n, $m \geq N(1)$, tenim que $|x_n - x_m| < 1$. En particular,

$$|x_{N(1)+k} - x_{N(1)}| < 1 \text{ per } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Com

$$|x_{N(1)+k}| = |x_{N(1)+k} - x_{N(1)} + x_{N(1)}| \leq |x_{N(1)+k} - x_{N(1)}| + |x_{N(1)}| < 1 + |x_{N(1)}|,$$

definint $b = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N(1)-1}|, |x_{N(1)}| + 1\}$, assegurem que $|x_n| \leq b$ per $n = 1, 2, \ldots$. Es conclou, doncs, que $(x_n) \in \mathfrak{B}$.

A continuació, provem la inclusió $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{C}$. Si $(x_n) \in \mathfrak{N}$, aleshores, per qualsevol $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positiu,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n| + |x_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

per a tot n, $m \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Per tant, $(x_n) \in \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{C}$. □

1.2.2 El cos $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$

Un cop presentats els tres conjunts de successions exposats anteriorment, anem a estudiar una sèrie de resultats que seran la base de la construcció del conjunt de nombres reals.

1.2.9 Teorema *Per (x_n), $(y_n) \in \mathfrak{C}$, siguin $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ i $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$. Amb aquestes definicions de suma i producte, $\mathfrak{C}$ és un anell commutatiu amb unitat i $\mathfrak{N}$ és un ideal de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{N} \subsetneq \mathfrak{C}$.*

Demostració: Primer de tot, vegem que sumes i productes de successions de Cauchy són successions de Cauchy, és a dir, que les operacions estan ben definides. Siguin (x_n), $(y_n) \in \mathfrak{C}$ dues successions donades. Per un $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positiu, siguin $N(\varepsilon)$ i $M(\varepsilon)$ els enters positius associats a les successions de Cauchy (x_n) i (y_n), respectivament. Llavors, si n, $m \geq \max\{N(\frac{\varepsilon}{2}), M(\frac{\varepsilon}{2})\}$,

$$|x_n + y_n - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

i, per tant, $(x_n) + (y_n)$ és una successió de Cauchy.

Com $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{R}$, existeixen elements positius b_x i b_y de $\mathbb{K}$ tals que

$$|x_n| \leq b_x \text{ i } |y_n| \leq b_y,$$

per a tot $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si n, $m \geq \max\{N(\frac{\varepsilon}{2b_x}), M(\frac{\varepsilon}{2b_y})\}$, tenim

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m| \\ &\leq |x_n||y_n - y_m| + |y_m||x_n - x_m| \\ &< \frac{b_x \varepsilon}{2b_x} + \frac{b_y \varepsilon}{2b_y} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Com a conseqüència, $(x_n)(y_n)$ és una successió de Cauchy.

És obvi que $\mathfrak{C}$ és un grup abelià amb la suma, perquè l'operació suma està ben definida a $\mathfrak{C}$ pel que acabem de provar, la successió $(0_{(n)}) = (0, 0, \ldots)$[4] és el zero, l'element oposat d'una successió (x_n) és $(-x_n)$ [5] i les propietats associativa i commutativa es dedueixen de les propietats associativa i commutativa del cos ordenat $\mathbb{K}$. De forma similar, es veu que la multiplicació a $\mathfrak{C}$ és commutativa i associativa, i que $\mathfrak{C}$ té la unitat multiplicativa $(1, 1, \ldots)$, entenent per 1 el neutre del cos $\mathbb{K}$. La propietat distributiva de $\mathfrak{C}$ es torna a deduir immediatament de la distributiva de $\mathbb{K}$. Aleshores, tenim que $\mathfrak{C}$ és un anell commutatiu amb unitat.

Seguidament vegem que $\mathfrak{N}$ és un ideal propi de $\mathfrak{C}$. Si (x_n), $(y_n) \in \mathfrak{N}$, llavors és clar que $(x_n) - (y_n) \in \mathfrak{N}$; per tant, $\mathfrak{N}$ és un subgrup additiu de $\mathfrak{C}$, per ser $(0_{(n)})$ un element de $\mathfrak{N}$. Si $(x_n) \in \mathfrak{N}$ i $(y_n) \in \mathfrak{C}$ hem de veure que $(x_n y_n) \in \mathfrak{N}$. Sigui b un element positiu de $\mathbb{K}$ tal que

$$|y_n| \leq b,$$

[4] Donat un element $a \in \mathbb{K}$ entenem per $(a_{(n)})$ la successió constant $(a, a, \ldots)$. A més, aquesta successió és de Cauchy.

[5] Si (x_n) és una successió de Cauchy, es prova fàcilment que l'oposat per la suma $-(x_n) = (-x_n)$ també ho és.

per a $n = 1, 2, 3, \ldots$. Donat $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positiu, sabem que existeix un enter positiu $N(\frac{\varepsilon}{b})$ tal que, si $n \geq N(\frac{\varepsilon}{b})$,

$$|x_n| \leq \frac{\varepsilon}{b}.$$

Aleshores, si $n \geq N(\frac{\varepsilon}{b})$,

$$|x_n y_n| \leq |x_n| b < \frac{\varepsilon}{b} b = \varepsilon,$$

i, per tant, $(x_n y_n) \in \mathfrak{N}$. Acabem de veure que $\mathfrak{N}$ és un ideal, però cal comprovar que és propi. Com la successió constant $(1_{(n)})$ no té límit 0, $(1_{(n)}) \notin \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{C}$. □

1.2.10 Remarca Notem que $\mathfrak{C}$ no és un cos. Per exemple, la successió $(1, 0, 0, \ldots)$ no té invers multiplicatiu a $\mathfrak{C}$.

Donat l'anell commutatiu amb unitat $\mathfrak{C}$ i l'ideal $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{C}$, la relació d'equivalència natural $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow (x_n) - (y_n) \in \mathfrak{N}$ dóna el conjunt quocient $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$. Els elements de $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ són els conjunts $(x_n) + \mathfrak{N}$, on $(x_n) \in \mathfrak{C}$. Dit d'una altra manera, una classe d'equivalència de $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$, per exemple $[(x_n)]$, representa el conjunt de successions $\{(y_n) \in \mathfrak{C} : (x_n) - (y_n) \in \mathfrak{N}\}$ i, per tant, podem afirmar que tots els elements de $[(x_n)]$ varien de (x_n) per una successió de límit 0, que és equivalent a dir $[(x_n)] = (x_n) + \mathfrak{N}$. Com $\mathfrak{N}$ és un ideal propi de $\mathfrak{C}$, la relació d'equivalència mòdul $\mathfrak{N}$ és compatible amb la suma i el producte definits a $\mathfrak{C}$. Així, $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ és també un anell commutatiu amb unitat $(1, 1, \ldots) + \mathfrak{N}$ i amb dues operacions no ambigües que venen definides per

$$\begin{aligned} ((x_n) + \mathfrak{N}) + ((y_n) + \mathfrak{N}) &:= ((x_n) + (y_n)) + \mathfrak{N} = (x_n + y_n) + \mathfrak{N}, \\ ((x_n) + \mathfrak{N})((y_n) + \mathfrak{N}) &:= (x_n)(y_n) + \mathfrak{N} = (x_n y_n) + \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

No és directe veure que $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ és un cos.

1.2.11 Teorema *El conjunt $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ és un cos.*

Demostració: Per tal de veure que el conjunt esmentat és un cos, es prova que tot element diferent de zero de $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ té invers multiplicatiu. Sigui $(x_n) + \mathfrak{N} \neq \mathfrak{N}$[6], és a dir, $(x_n) \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}^c$ [7]. Volem trobar una successió $(y_n) \in \mathfrak{C}$ tal que

$$(x_n y_n) + \mathfrak{N} = (1_{(n)}) + \mathfrak{N},$$

és a dir, tal que

$$(x_n y_n - 1_{(n)}) \in \mathfrak{N}.$$

Com (x_n) no té límit 0, existeix un positiu $\varepsilon \in \mathbb{K}$ tal que, per a tot enter positiu r, existeix algun enter s amb $s > r$ i $|x_s| \geq \varepsilon$.

Per ser (x_n) una successió de Cauchy, per a tot n, $m \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, es té

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Sigui $s > N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ amb $|x_s| \geq \varepsilon$. Llavors, sempre que $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, tenim

$$\varepsilon \leq |x_s| = |x_s - x_n + x_n| \leq |x_s - x_n| + |x_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + |x_n|.$$

[6]L'element zero de $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ és $\mathfrak{N}$.
[7]$\mathfrak{N}^c$ fa referència al complementari de $\mathfrak{N}$ en l'espai de successions de $\mathbb{K}$.

Per tant, per a tot enter n tal que $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$,

$$|x_n| > \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Anem a definir (y_n). Reanomenem $N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ com q. Definim

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_{q-1} = 1,$$

i, si $n \geq q$,

$$y_n = \frac{1}{x_n}.$$

Tenim,

$$(y_n x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, 1, 1, \ldots),$$

i, aleshores,

$$(y_n x_n - 1_{(n)}) = (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_{q-1} - 1, 0, 0, \ldots).$$

Per tant, és obvi que $(y_n x_n - 1_{(n)}) \in \mathfrak{R}$. Per acabar la demostració, només queda veure que $(y_n) \in \mathfrak{C}$. Si n, $m \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, llavors

$$|y_n - y_m| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \left|\frac{1}{x_n}\right| \left|\frac{1}{x_m}\right| |x_n - x_m| \leq \frac{2}{\varepsilon}\frac{2}{\varepsilon}|x_n - x_m|.$$

Per qualsevol $\delta \in \mathbb{K}$, amb $\delta > 0$, si n, $m \geq \max\{N(\frac{1}{2}\varepsilon), N(\frac{\varepsilon^2\delta}{4})\}$, llavors

$$|y_n - y_m| < \delta.$$

Es conclou, doncs, que $(y_n) \in \mathfrak{C}$. □

Per evitar una notació pesada i per recordar que $\mathfrak{C}/\mathfrak{R}$ depèn de $\mathbb{K}$, el cos $\mathfrak{C}/\mathfrak{R}$ s'escriurà com $\overline{\mathbb{K}}$. També, a partir d'ara, els elements $(x_n) + \mathfrak{R}$ de $\mathfrak{C}/\mathfrak{R}$ els representarem amb lletres gregues: α, β, γ, ... De forma similar, l'element corresponent a la successió constant $(a_{(n)})$, $(a_{(n)}) + \mathfrak{R}$, serà escrit com $\overline{a}$.

1.2.3 L'extensió completa de $\mathbb{K}$

En la subsecció anterior s'ha presentat el cos $\mathfrak{C}/\mathfrak{R}$. Al llarg d'aquest apartat es vol caracteritzar més detalladament aquest cos, començant amb el seu ordre, seguint amb la seva possible arquimedianitat, i acabant amb la seva completesa.

1.2.12 Teorema *Considerem el subconjunt de* $\overline{\mathbb{K}}$,

$$\overline{\mathbb{K}}_+ = \{\alpha \in \overline{\mathbb{K}} : \alpha \neq \overline{0} \textit{ i existeix } (x_n) \in \alpha \textit{ tal que } x_n > 0 \textit{ per } n \in \mathbb{N}\}.$$

Amb aquest subconjunt, $\overline{\mathbb{K}}$ *és un cos ordenat en el sentit de (1.1.1).*

Demostració: Per tal de verificar la primera de les propietats que ha de complir un cos ordenat, és a dir, que $\overline{\mathbb{K}}_+ \cap (-\overline{\mathbb{K}}_+) = \emptyset$, suposem el contrari: existeix $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}_+ \cap (-\overline{\mathbb{K}}_+)$. Com $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}_+$, existeix $(x_n) \in \alpha$ tal que $x_n > 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. També, com $\alpha \in (-\overline{\mathbb{K}}_+)$, $(-\alpha) \in \overline{\mathbb{K}}_+$ i, per tant, existeix $(y_n) \in (-\alpha)$ tal que $y_n > 0$ per a tot n natural. Podem expressar $(y_n) = (-x_n) + (r_n)$, on (r_n) és una successió de $\mathfrak{R}$. Del fet que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ i $-x_n + r_n > 0$, es dedueix que

$$0 < x_n < r_n.$$

Per tenir (r_n) límit 0, (x_n) té límit 0 i, per tant, $\alpha = \overline{0}$. Per definició de $\overline{\mathbb{K}}_+$, $\overline{0} \notin \overline{\mathbb{K}}_+$, una contradicció.

La segona de les propietats que cal complir diu que $\overline{\mathbb{K}}_+ \cup \{\overline{0}\} \cup (-\overline{\mathbb{K}}_+) = \overline{\mathbb{K}}$. De fet, donada una classe d'equivalència $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ no nul.la, tenim que, per a tota successió (x_n) de α, existeix $\varepsilon > 0$ tal que, per a tot $r \in \mathbb{N}$, existeix un enter $s(r)$ amb $s(r) \geq r$ i $|x_{s(r)}| \geq \varepsilon$. Com (x_n) és de Cauchy, existeix $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_{s(N(\varepsilon))}| < \varepsilon \text{ si } n \geq N(\varepsilon).$$

De les dues afirmacions anteriors es dedueix que, si $x_{s(N(\varepsilon))} > 0$, llavors $x_n > 0$ sempre que $n \geq N(\varepsilon)$. Podem afirmar que sempre existeix una successió de límit 0 que, sumada a (x_n), rectifica els termes d'índex menor que $N(\varepsilon)$ i dóna una successió de termes sempre positius. Per tant, $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}_+$. Altrament, si $x_{s(N(\varepsilon))} < 0$, llavors $x_n < 0$ si $n \geq N(\varepsilon)$. Raonant de forma anàloga al cas anterior, es conclou que $\alpha \in (-\overline{\mathbb{K}}_+)$.

Finalment, el fet de ser $\overline{\mathbb{K}}_+$ tancat per la suma i el producte es dedueix de forma immediata. □

1.2.13 Remarca El fet de donar a $\overline{\mathbb{K}}$ un ordre, ens permet fer la identificació

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon \mathbb{K} & \longrightarrow & \pi(\mathbb{K}) \subset \overline{\mathbb{K}} \\ a & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

i veure que π és un isomorfisme de cossos ordenats. Dit d'una altra manera, podem entendre el cos $\overline{\mathbb{K}}$ com una extensió de $\mathbb{K}$.

1.2.14 Lema *Per a tot $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ positiu, existeix $e \in \mathbb{K}$, $e > 0$, tal que $\overline{0} < \overline{e} < \alpha$. A més, si $\mathbb{K}$ és arquimedià, $\overline{\mathbb{K}}$ també és arquimedià.*

Demostració: Com $\alpha > \overline{0}$, existeix $(x_n) \in \alpha$ tal que $x_n > 0$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $(x_n) \notin \mathfrak{R}$. Llavors, existeix $\varepsilon \in \mathbb{K}_+$ tal que, per a tot enter positiu r, existeix un enter s amb $s > r$ i $x_s = |x_s| \geq \varepsilon$. Per ser (x_n) de Cauchy,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

si n, $m \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Triem un s com abans i que compleixi $s \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Llavors, sempre que $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, es té

$$\varepsilon \leq x_s = x_s - x_n + x_n \leq |x_s - x_n| + |x_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + x_n,$$

és a dir, $\frac{1}{2}\varepsilon < x_n$. Com $x_n - \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ per $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, si $n < N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ no sabem què passa. En tot cas, sempre es pot sumar una successió amb límit 0 a $(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon_{(n)})$ per tal d'aconseguir una successió amb tots els termes positius, per exemple, una successió que valgui 0 si $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ i, si $n < N(\frac{1}{2}\varepsilon)$, valgui

$$\max_{n<N(\frac{1}{2}\varepsilon)} \left| x_n - \frac{1}{2}\varepsilon \right| + 1.$$

En conseqüència, $(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon_{(n)}) + \mathfrak{N} = \alpha - \overline{\frac{1}{2}\varepsilon} \geq \overline{0}$[8]. Tenim,

$$\alpha - \overline{\frac{1}{3}\varepsilon} > \alpha - \overline{\frac{1}{2}\varepsilon} \geq \overline{0},$$

i, per tant,

$$\alpha > \overline{\frac{1}{3}\varepsilon}.$$

Així, $e = \frac{1}{3}\varepsilon$ satisfà la primera part del teorema.

Pel que fa a la segona part del teorema, suposem que $\mathbb{K}$ és arquimedià. Siguin $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{K}}$ tals que

$$\overline{0} < \alpha \leq \beta.$$

Volem veure que existeix un enter positiu m tal que $m\alpha > \beta$ (recordar definició (1.1.18)). Per la primera part del teorema, existeix un element positiu $e \in \mathbb{K}$ tal que $\overline{e} < \alpha$. Com tota successió de Cauchy està acotada, existeix $d \in \mathbb{K}$ positiu tal que $\beta < \overline{d}$. Per hipòtesi, $\mathbb{K}$ és arquimedià, per tant existeix m enter positiu tal que $me > d$. Així,

$$m\alpha > m\overline{e} > \overline{d} > \beta,$$

i, per tant, $m\alpha > \beta$, que és el que volíem. □

1.2.15 Remarca En el cas del cos ordenat de nombres racionals $\mathbb{Q}$, podem afirmar que $\overline{\mathbb{Q}}$ és un cos ordenat i arquimedià.

1.2.16 Lema *Sigui $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ i $(x_n) \in \alpha$. Llavors,*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = \alpha.$$

Demostració: Per a tot $\varepsilon \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que $\varepsilon > \overline{0}$, sabem, pel lema anterior, que existeix $e \in \mathbb{K}$ positiu de manera que $\overline{0} < \overline{e} < \varepsilon$. Com (x_n) és una successió de Cauchy, sempre que n, $m \geq N(e)$,

$$|x_n - x_m| < e.$$

Fixem $p \geq N(e)$. Llavors, per $n \geq N(e)$, $-e < x_p - x_n < e$. Per tant,

$$x_p - x_n < e,$$

$$x_n - x_p < e.$$

[8] Hem raonat que l'element $(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon_{(n)}) + \mathfrak{N}$ conté una successió amb tots els termes positius, però això no implica que aquest conjunt sigui diferent al de les successions de límit 0, $\mathfrak{N}$. De tota manera, afirmem que, si aquest element no és $\overline{0}$, llavors, per la construcció de $\overline{\mathbb{K}}_+$, ha de ser positiu (la possibilitat de ser negatiu no es planteja, ja que $\overline{\mathbb{K}}$ és un cos ordenat i un element només pot ser $=$, $>$ o $<$ que l'element $\overline{0}$).

Amb un raonament anàleg a l'usat en la primera part de la prova del lema (1.2.14), es dedueix que,

$$\overline{x_p} - \alpha \leq \overline{e} < \varepsilon,$$
$$\alpha - \overline{x_p} \leq \overline{e} < \varepsilon,$$

és a dir,

$$|\alpha - \overline{x_p}| < \varepsilon \text{ si } p \geq N(e).$$

□

Seguidament, es prova el resultat principal sobre $\overline{\mathbb{K}}$.

1.2.17 Teorema *El cos* $\overline{\mathbb{K}}$ *és complet.*

Demostració: Per tal de provar que $\overline{\mathbb{K}}$ és complet, hem de veure que tota successió de Cauchy en $\overline{\mathbb{K}}$ és convergent.

Sigui (α_n) una successió de Cauchy en $\overline{\mathbb{K}}$. Tenim dos casos possibles:

- La cua de (α_n) és constant, és a dir, existeix $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = \alpha_{N_0}$ per a tot $n \geq N_0$. Com (α_n) és una successió en $\overline{\mathbb{K}}$, α_{N_0} és un element de $\overline{\mathbb{K}}$ i, per tant, la successió té límit $\alpha_{N_0} \in \overline{\mathbb{K}}$.
- Altrament, existeix una subsuccessió $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_{n_k} \neq \alpha_{n_{k+1}}$ per a tot $k = 1, 2, \ldots$. Per (1.2.5), és suficient veure que (α_{n_k}) té límit. Sense pèrdua de generalitat, es pot suposar que (α_n) és una successió tal que $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$ per a tot $n = 1, 2, \ldots$, i, per tant, és possible treballar directament amb (α_n). Per a tot $n \in \mathbb{N}$, escrivim $\overline{0} < |\alpha_n - \alpha_{n+1}| = \mu_n$.

  Per a tot $\varepsilon \in \overline{\mathbb{K}}$, amb $\varepsilon > \overline{0}$, existeix $N(\varepsilon)$ tal que

  $$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon \text{ si } n,\, m \geq N(\varepsilon),$$

  i, en particular,

  $$\mu_n < \varepsilon.$$

  Pel lema (1.2.16), sabem que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, existeix $x_n \in \mathbb{K}$ tal que $|\overline{x_n} - \alpha_n| < \mu_n$. Prenem $e \in \mathbb{K}$ positiu. Per $n,\, m \geq N\left(\frac{1}{3}\overline{e}\right)$

  $$\begin{aligned} |\overline{x_n} - \overline{x_m}| &\leq |\overline{x_n} - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - \overline{x_m}| \\ &< \mu_n + \frac{1}{3}\overline{e} + \mu_m < \frac{1}{3}\overline{e} + \frac{1}{3}\overline{e} + \frac{1}{3}\overline{e}. \end{aligned}$$

  Com l'homomorfisme π definit en (1.2.13) és un isomorfisme de cossos ordenats, l'aplicació preserva l'ordre. Per tant, $|x_n - x_m| < e$ si $n,\, m \geq N\left(\frac{1}{3}\overline{e}\right)$, fet que implica que $(x_n) \in \mathfrak{C}$. Definim β com $(x_n) + \mathfrak{R}$.

  A continuació veurem que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$ i, per tant, haurem acabat. Sigui qualsevol $\varepsilon \in \overline{\mathbb{K}}$ positiu. Per $n \geq N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$, tenim $|\overline{x_n} - \alpha_n| < \mu_n < \frac{1}{2}\varepsilon$. De nou, per (1.2.16), existeix un enter positiu $M(\frac{1}{2}\varepsilon)$ tal que $|\overline{x_n} - \beta| < \frac{1}{2}\varepsilon$ per a tot $n \geq M(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Llavors, si $n \geq \max\{N(\frac{1}{2}\varepsilon), M(\frac{1}{2}\varepsilon)\}$,

  $$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta| &\leq |\alpha_n - \overline{x_n}| + |\overline{x_n} - \beta| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

El resultat exposat té una gran importància, ja que l'única hipòtesi que recau sobre el cos $\mathbb{K}$ és que sigui ordenat, no necessita cap propietat extra. Fins aquí podem assegurar que, donat un cos ordenat $\mathbb{K}$, el seu corresponent $\overline{\mathbb{K}}$ és un cos ordenat i complet. A més, si $\mathbb{K}$ és arquimedià, aquest últim també ho és.

1.2.18 Remarca S'observa que $\overline{\mathbb{K}}$ és una extensió completa de $\mathbb{K}$.

1.2.4 El conjunt $\mathbb{R}$ de nombres reals

Acabem la secció de construcció amb aquest apartat, on es veuran els últims resultats necessaris per tal de poder presentar el conjunt de nombres reals.

1.2.19 Definició Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i $A \subset \mathbb{K}$ un subconjunt no buit de $\mathbb{K}$. Un element $b \in \mathbb{K}$ és una *cota superior* (o *inferior*) de A si, per a tot $x \in A$, $x \leq b$ (o $x \geq b$).

Una cota superior (o inferior) b es diu que és el *suprem* de A (o l'*ínfim* de A) si és menor que qualsevol altra cota superior de A (o major que qualsevol altra cota inferior de A).

La notació emprada per a representar el conjunt de cotes superiors d'un subconjunt no buit A és $\mathcal{UB}(A)$. La notació corresponent per a representar el suprem i l'ínfim d'un subconjunt no buit A de $\mathbb{K}$ és $\sup_{\mathbb{K}} A$ i $\inf_{\mathbb{K}} A$, respectivament. Si el context és clar, es parlarà de $\sup A$ i $\inf A$.

1.2.20 Lema *En qualsevol cos ordenat i arquimedià, la successió* $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *té límit* 0.

Demostració: Tenim que $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > n$, per tant, $2^{-n} < \frac{1}{n}$. Com $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ té límit 0, llavors (2^{-n}) també. □

1.2.21 Teorema *Siguin* $\mathbb{K}$ *un cos ordenat, complet i arquimedià, i* A *un subconjunt no buit de* $\mathbb{K}$ *que està fitat superiorment (o inferiorment). Llavors existeix* $\sup_{\mathbb{K}} A$ *(o* $\inf_{\mathbb{K}} A$*).*

Demostració: Sigui b qualsevol cota superior de A, i sigui $a \in A$. Existeixen enters positius M i $-m$ tals que $M > b$ i $-m > -a$, és a dir, $m < a \leq b < M$. Per a tot enter positiu p, sigui

$$S_p := \left\{ k : k \in \mathbb{Z} \text{ i } \frac{k}{2^p} \text{ és una cota superior de } A \right\}.$$

Si $k \leq 2^p m$, llavors k no és de S_p. Així, S_p està acotat inferiorment. Com $2^p M \in S_p$, S_p és no buit. A més, podem afirmar que S_p té mínim, diem-li k_p. Definim $x_p = \frac{k_p}{2^p}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$. Per la definició de k_p, $\frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p}$ és una cota superior de A i $\frac{2k_p - 2}{2^{p+1}} = \frac{k_p - 1}{2^p}$ no ho és. Aleshores tenim que

$$k_{p+1} = 2k_p \text{ o } k_{p+1} = 2k_p - 1,$$

per tant,

$$x_{p+1} = \frac{2k_p}{2^{p+1}} = x_p \text{ o } x_{p+1} = \frac{2k_p - 1}{2^{p+1}} = x_p - \frac{1}{2^{p+1}},$$

i, per tant,

$$x_{p+1} \leq x_p \text{ i } x_p - x_{p+1} \leq \frac{1}{2^{p+1}} \ (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si $q > p \geq 1$, llavors

$$\begin{aligned} 0 \leq x_p - x_q &= (x_p - x_{p+1}) + (x_{p+1} - x_{p+2}) + \cdots + (x_{q-1} - x_q) \\ &\leq \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{1}{2^q} \\ &= \frac{1}{2^{p+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{q-p-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{p+1}} \left(2 - \frac{1}{2^{q-p-1}}\right) < \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

Per tant tenim que $|x_p - x_q| = x_p - x_q < \frac{1}{2^p}$ sempre que $q > p \geq 1$. Del lema anterior es dedueix que (x_p) és una successió de Cauchy i, en conseqüència, el seu límit existeix, diem-li c. És evident que $x_p \geq c$.

A continuació volem veure que $\sup A = c$. Per a poder provar això, primer suposem que c no és una cota superior de A. Llavors existeix $x \in A$ tal que $x > c$ i, per tant, hi ha un enter positiu p tal que $x_p - c = |x_p - c| < x - c$, és a dir, $x_p < x$. Com x_p és una cota superior de A, l'última desigualtat no pot ser certa. Així, c és una cota superior de A. Seguidament, suposem que existeix una cota superior c' de A tal que $c' < c$, i triem un enter positiu p tal que $\frac{1}{2^p} < c - c'$. Tenim que

$$x_p - \frac{1}{2^p} \geq c - \frac{1}{2^p} > c + c' - c = c',$$

i, per tant, $x_p - \frac{1}{2^p}$ és una cota superior per A. De tota manera, $x_p - \frac{1}{2^p}$ és, per definició, $\frac{k_p - 1}{2^p}$, i $\frac{k_p - 1}{2^p}$ no és una cota superior per A. Es conclou que $c = \sup A$.

Per tal de veure que, si A està acotat inferiorment, $\inf A$ existeix, s'utilitza un raonament similar. □

1.2.22 Remarca Aplicant aquest últim resultat al cos ordenat $\overline{\mathbb{K}}$, podem dir que, si $\mathbb{K}$ és arquimedià, tot subconjunt no buit de $\overline{\mathbb{K}}$ fitat superiorment (o inferiorment) té suprem (o ínfim).

Observem que $\overline{\mathbb{Q}}$ és el conjunt de nombres reals, o més conegut per $\mathbb{R}$.

1.3 Axiomàtica dels nombres reals

En la secció anterior, hem fet un estudi enfocat a un cos ordenat general $\mathbb{K}$. Hem començat prenent el conjunt $\mathfrak{C}$ de successions de Cauchy en $\mathbb{K}$, el qual sabem que és un anell commutatiu amb unitat. Després, considerant l'ideal propi $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{C}$ format per les successions de límit zero, hem provat que $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ és un cos ordenat. Finalment, en funció de les característiques del cos ordenat $\mathbb{K}$, hem pogut observar diversos resultats referents al cos $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ que, per tal de recordar que aquesta estructura depèn de $\mathbb{K}$, l'hem reanomenat $\overline{\mathbb{K}}$:

- Si $\mathbb{K}$ és arquimedià, llavors $\overline{\mathbb{K}}$ és arquimedià.
- El cos $\overline{\mathbb{K}}$ és complet.
- Si $\overline{\mathbb{K}}$ és arquimedià, llavors tot subconjunt no buit i fitat superiorment (o inferiorment) de $\overline{\mathbb{K}}$ té suprem (o ínfim) (és a dir, $\overline{\mathbb{K}}$ és *Dedekind complet*).

En particular, si considerem el cos dels racionals $\mathbb{Q}$, obtenim que $\overline{\mathbb{Q}}$ és un cos ordenat, arquimedià, complet i Dedekind complet. En breu, recordant els axiomes que descriuen un conjunt de nombres reals, justificarem que aquesta construcció correspon al conjunt de nombres reals.

Recordem que, a classe, sempre ens han definit un conjunt de nombres reals de la següent manera:

1.3.1 Definició Donat un conjunt $\mathbb{R}$ dotat de dues operacions (que anomenarem suma i producte), direm que és *un conjunt de nombres reals*, si es compleix:

(i) El conjunt $\mathbb{R}$ amb la suma i el producte és un cos.

(ii) El cos $\mathbb{R}$ és ordenat (veure (1.1.1)).

(iii) $\mathbb{R}$ és Dedekind complet.

Amb això, podem concloure que $\overline{\mathbb{Q}}$ és un conjunt de nombres reals. De tota manera, no podem garantir que aquest sigui l'únic.

En el segon capítol, farem un estudi general de les propietats dels cossos ordenats. Entre molts altres resultats, veurem que, donats dos cossos ordenats i Dedekind complets qualssevol, es pot crear un isomorfisme que els identifiqui. Amb això últim, podem concloure que, llevat d'isomorfisme, existeix un únic cos ordenat i Dedekind complet, $\overline{\mathbb{Q}}$.

Acabem aquest capítol afirmant que el cos de nombres reals $\mathbb{R}$ és únic llevat d'isomorfisme, i ve donat per $\overline{\mathbb{Q}}$, la construcció per successions de Cauchy que hem estat elaborant al llarg de tot el capítol. Per tant, $\mathbb{R}$ és un cos ordenat, complet, arquimedià i Dedekind complet, que, per tractar-se d'un cos ordenat, conté a $\mathbb{Q}$. Tal i com hem comentat al principi del capítol, $\mathbb{R}$ és un cos semblant a $\mathbb{Q}$ (de fet, conté a $\mathbb{Q}$ i conserva la seva propietat arquimediana) amb una propietat addicional de completesa.

2
Completesa de cossos ordenats

Hem vist que els axiomes que defineixen el conjunt de nombres reals $\mathbb{R}$ demanen un cos ordenat i Dedekind complet. Un cop donada aquesta definició, el conjunt pot ser caracteritzat per ser arquimedià i complir altres propietats com la dels intervals encaixats, la de Bolzano-Weierstrass, la de convergència monòtona i la de completesa de Cauchy o seqüencial.

Aquest capítol té com a objectiu principal establir l'equivalència, en un cos ordenat i arquimedià qualsevol, de totes aquestes propietats, donant per coneguts tots els resultats sobre $\mathbb{R}$ que han estat obtinguts en el primer capítol. Per aquest motiu, es començarà amb una secció de definicions prèvies on s'exposaran alguns dels tipus de completesa que es poden donar en cossos ordenats. Més endavant, es voldrà veure quina importància té la propietat arquimediana, per aquesta raó s'estudiarà com queden afectades les equivalències comentades quan el cos no és arquimedià. Finalment, s'acabarà amb una secció dedicada a un exemple de cos ordenat, no arquimedià i amb completesa seqüencial, fet que ens permetrà afirmar que aquest tipus de completesa es pot trobar en cossos arquimedians i no arquimedians.

Durant aquest capítol es cometran abusos de notació per tal de facilitar la comprensió. Recordem que tot cos ordenat $\mathbb{K}$ té un subcos isomorf als racionals (i, per tant, també hi ha una correspondència amb els naturals), fet que anotarem com $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$, tenint en compte que la identificació s'ha fet via un isomorfisme de cossos ordenats. Aquest resultat s'usarà de forma rutinària al llarg del capítol.

2.1 Definicions i consideracions inicials

Comencem aquest capítol amb una secció dedicada a conceptes previs. A continuació es segueixen unes definicions referents a les diferents formes de completesa que es poden donar en un cos ordenat, algunes d'elles ja esmentades en el primer capítol.

En el que segueix, la convergència s'entén en referència a l'orde de cada cos $\mathbb{K}$.

2.1.1 Definició Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat.

(i) $\mathbb{K}$ és *Cantor complet* si tota família $\{[a_i, b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ numerable d'intervals tancats i fitats de $\mathbb{K}$ amb la propietat de la intersecció finita té intersecció no buida, $\bigcap_{i\geq 0}[a_i, b_i] \neq \emptyset$.

(ii) $\mathbb{K}$ és *Dedekind complet* si tot subconjunt no buit de $\mathbb{K}$ i fitat superiorment (o inferiorment) té suprem (o ínfim).

(iii) $\mathbb{K}$ és *seqüencialment complet* si tota successió de Cauchy en $\mathbb{K}$ és convergent.

(iv) $\mathbb{K}$ és *Bolzano-Weierstrass complet* si tota successió fitada té una subsuccessió convergent.

(v) $\mathbb{K}$ és *Bolzano complet* si tot conjunt infinit i fitat de $\mathbb{K}$ té un punt d'acumulació.

(vi) $\mathbb{K}$ és *monòton complet* si tota successió monòtona i fitada és convergent.

(vii) $\mathbb{K}$ és *Hilbert complet* si no té extensions pròpies de cossos ordenats i arquimedians.

2.1.2 Remarca Per la definició (2.1.1), si $\mathbb{K}$ és Cantor complet i els intervals són tancats i fitats, llavors tota successió d'intervals encaixats de $\mathbb{K}$ té intersecció no buida. Per tant, la completesa en el sentit de Cantor implica la coneguda propietat dels intervals encaixats.

2.1.3 Remarca Durant aquest capítol es volen tractar diferents formes de completesa que pot tenir un cos ordenat, per aquest motiu i per evitar confusions entendrem per cos seqüencialment complet el que durant el primer capítol hem entès per cos complet.

2.2 Completesa de cossos arquimedians

Una propietat addicional que poden tenir els cossos ordenats és la propietat arquimediana. Els cossos amb aquesta propietat s'anomenen *cossos arquimedians* i tenen moltes característiques que els fa ser objecte d'estudi. Durant aquesta secció provarem que, si el cos és ordenat i arquimedià, les formes de completesa exposades en la definició (2.1.1) són equivalents. D'aquesta manera, podrem argumentar per què en el cos dels nombres reals $\mathbb{R}$ es compleixen les propietats esmentades al prinicipi d'aquest capítol, les quals sempre han estat usades a classe sense plasmar-les en un cos ordenat qualsevol.

Comencem aquesta secció amb un tipus de completesa ja mencionat en el primer capítol: la completesa en el sentit Dedekind.

2.2.1 Teorema *Existeix un cos Dedekind complet.*

Demostració: Per aquesta prova fem referència a la construcció de $\mathbb{R}$ usant classes d'equivalència de successions de Cauchy vista durant el primer capítol. S'ha demostrat que el cos dels reals $\mathbb{R}$ és un cos ordenat, arquimedià, seqüencialment complet i Dedekind complet. Per tant, queda provada l'existència d'un cos Dedekind complet.

$\square$

2.2.2 Proposició *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i Dedekind complet, aleshores $\mathbb{K}$ és arquimedià.*

Demostració: Farem la prova per reducció a l'absurd, suposant que $\mathbb{K}$ no és arquimedià[9]. Com $\mathbb{K}$ no és arquimedià, existeix $x \in \mathbb{K}$ tal que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $n < x$. Podem concloure, doncs, que $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ està fitat superiorment. Sigui $\alpha \in \mathbb{K}$ el suprem de $\mathbb{N}$, que existeix per hipòtesi. Per definició de suprem, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < n$, d'on es dedueix que $\alpha < n + 1$, una contradicció perquè $n + 1$ és de $\mathbb{N}$. □

Seguidament es vol provar que existeix un únic cos Dedekind complet. L'existència ja ha estat vista, per tant, ens queda tractar la unicitat. Cal remarcar que aquesta prova correspon a la justificació esmentada en el primer capítol per tal d'argumentar la unicitat del conjunt de nombres reals.

2.2.3 Lema *Sigui $\mathbb{A}$ un cos arquimedià i $\mathbb{K}$ un cos Dedekind complet. Definim $C_\alpha := \{q \in \mathbb{Q} : q < \alpha\}$ per $\alpha \in \mathbb{A}$. Llavors*

(i) Per a tot α, $\beta \in \mathbb{A}$ tenim $\sup_{\mathbb{K}}(C_{\alpha+\beta}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha) + \sup_{\mathbb{K}}(C_\beta)$.

(ii) Per a tot α, $\beta \in \mathbb{A}$ tenim $\sup_{\mathbb{K}}(C_{\alpha\beta}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)\sup_{\mathbb{K}}(C_\beta)$.

Demostració: Notem que, com $\mathbb{A}$ i $\mathbb{K}$ són cossos ordenats, cada un d'ells conté una còpia de $\mathbb{Q}$.

(i) Començarem la prova veient que $C_{\alpha+\beta} = C_\alpha + C_\beta$, on $C_\alpha + C_\beta := \{q + p : q \in C_\alpha, p \in C_\beta\}$. La inclusió $C_\alpha + C_\beta \subseteq C_{\alpha+\beta}$ és clara, per tant prenem $p \in C_{\alpha+\beta}$ i comprovem que $p \in C_\alpha + C_\beta$. Com $p \in C_{\alpha+\beta}$, tenim que $0 < \alpha + \beta - p$ i, per la densitat de $\mathbb{Q}$ dins $\mathbb{A}$, existeixen $r \in \mathbb{Q}_+$ i $u \in \mathbb{Q}$ tals que $0 < r < \alpha + \beta - p$ i $\alpha - r < u < \alpha$. Llavors $p - u < p + r - \alpha < \beta$ i, com $p, u \in \mathbb{Q}$, sabem que $p - u \in \mathbb{Q}$. Per tant, si definim $v := p - u$, tindrem que $u \in C_\alpha$, $v \in C_\beta$ i $u + v = p$, fet que demostra la inclusió $C_{\alpha+\beta} \subseteq C_\alpha + C_\beta$. Finalment, per les propietats del suprem, es dóna que $\sup_{\mathbb{K}}(C_{\alpha+\beta}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha) + \sup_{\mathbb{K}}(C_\beta)$.

(ii) Provarem primer el cas de α i β positius. Sigui $P_\gamma := C_\gamma \cap \mathbb{Q}_+$ amb $\gamma \in \mathbb{A}$. Llavors, com α i β són positius, $\sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha) = \sup_{\mathbb{K}}(P_\alpha)$ i $\sup_{\mathbb{K}}(C_\beta) = \sup_{\mathbb{K}}(P_\beta)$. Igual que hem fet en (i), mostrarem que $P_{\alpha\beta} = P_\alpha \cdot P_\beta := \{qp : q \in P_\alpha, p \in P_\beta\}$ i, per les propietats del suprem, tindrem el que volíem. La inclusió $P_\alpha \cdot P_\beta \subseteq P_{\alpha\beta}$ és clara. Prenem $p \in P_{\alpha\beta}$, i sigui $u \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{\beta} < u < \alpha$, que sabem que existeix per la densitat de $\mathbb{Q}$ en qualsevol cos arquimedià. Definim $v := \frac{p}{u}$. Llavors $v < \frac{p}{\frac{p}{\beta}} = \beta$ i, per tant, $u \in P_\alpha$, $v \in P_\beta$ i $uv = p$. Tenim que $p \in P_\alpha \cdot P_\beta$, fet que demostra la segona inclusió. Aleshores $\sup_{\mathbb{K}}(C_{\alpha\beta}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)\sup_{\mathbb{K}}(C_\beta)$.

Pels casos restants, notem primer que si $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < \alpha$ (o $q \in C_\alpha$), llavors $-\alpha < -q$ i, per tant, $\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\alpha}) < -q$, que és equivalent a dir que $q < -\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\alpha})$. Amb això últim s'observa que $\sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha) \leq -\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\alpha})$. Per tant, per simetria, $\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\alpha}) = -\sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)$. Si α o β són zero, el que volíem provar es compleix, ja que $\sup_{\mathbb{K}}(C_0) = -\sup_{\mathbb{K}}(C_0)$ i, per tant, $\sup_{\mathbb{K}}(C_0) = 0$. D'altra banda, si α i β són negatius els dos, llavors tenim que $\sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)\sup_{\mathbb{K}}(C_\beta)$ $= \sup_{\mathbb{K}}(C_{-\alpha})\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\beta}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_{(-\alpha)(-\beta)}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_{\alpha\beta})$ i el resultat és cert. Per últim, si $\alpha\beta < 0$, podem assumir sense pèrdua de generalitat que $\alpha > 0$ i $\beta < 0$. Tenim, doncs, $\sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)\sup_{\mathbb{K}}(C_\beta) = -\sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\beta}) = -\sup_{\mathbb{K}}(C_{-\alpha\beta}) = \sup_{\mathbb{K}}(C_{\alpha\beta})$. □

[9] Al llarg d'aquest capítol usarem la definició (1.1.20)(ii) de cos ordenat arquimedià.

2.2.4 Teorema *Siguin $\mathbb{A}$ i $\mathbb{K}$ dos cossos ordenats, amb $\mathbb{A}$ arquimedià i $\mathbb{K}$ Dedekind complet. Llavors l'aplicació $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ donada per $\sigma(\alpha) := \sup_{\mathbb{K}}(C_\alpha)$, on $C_\alpha := \{q \in \mathbb{Q} : q < \alpha\}$, és un monomorfisme de cossos ordenats.*

Demostració: Com $\mathbb{A}$ i $\mathbb{K}$ són cossos ordenats, cada un d'ells conté una còpia de $\mathbb{Q}$.

Notem que donat $\alpha \in \mathbb{A}$, per la relació d'ordre del cos, s'ha de complir que $0 < \alpha$, $0 > \alpha$ o bé $0 = \alpha$. Si $0 < \alpha$, per la densitat de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{A}$, existeix $q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q < \alpha$. Per la propietat arquimediana, existeix $p \in \mathbb{N}$ (per tant, $p \in \mathbb{Q}$) tal que $\alpha < p$. Els altres dos casos es raonen de forma anàloga. En qualsevol cas, podem afirmar que, donat $\alpha \in \mathbb{A}$, existeixen q, $p \in \mathbb{Q}$ tals que $q < \alpha < p$. Per aquest motiu i per ser q i p elements de $\mathbb{A}$ i $\mathbb{K}$, C_α és no buit i fitat superiorment en $\mathbb{A}$ i $\mathbb{K}$. Hem vist, doncs, que l'aplicació σ està ben definida.

Siguin α i $\beta \in \mathbb{A}$. Per veure que σ preserva l'ordre, suposem $\alpha < \beta$ i comprovem que $\sigma(\alpha) < \sigma(\beta)$. Per ser $\alpha < \beta$, $C_\alpha \subseteq C_\beta$ i, per la densitat de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{A}$, afirmem que $C_\alpha \neq C_\beta$, d'on es dedueix que $\sigma(\alpha) < \sigma(\beta)$.

La injectivitat de σ és conseqüència del fet que preserva l'ordre, per tant, elements diferents de $\mathbb{A}$ s'identifiquen amb elements diferents de $\mathbb{K}$.

Finalment, el fet que σ sigui un homomorfisme de cossos, i per tant preservi les operacions, és resultat del lema (2.2.3). □

2.2.5 Corol·lari *Entre dos cossos Dedekind complets existeix un isomorfisme de cossos ordenats. En conseqüència, tots els cossos Dedekind complets tenen el mateix cardinal, $\mathbf{c}$.*

Demostració: Siguin $\mathbb{K}$ i $\mathbb{F}$ dos cossos Dedekind complets. Per la proposició (2.2.2) sabem que $\mathbb{K}$ i $\mathbb{F}$ són arquimedians. Usant el teorema anterior, existeix un monomorfisme de cossos ordenats entre $\mathbb{K}$ i $\mathbb{F}$, per tant, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$. Però com $\mathbb{F}$ també és arquimedià, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$. Per tant, $\mathbb{K} = \mathbb{F}$ i $\text{card}(\mathbb{K}) = \text{card}(\mathbb{F})$.

Sabem que $\mathbb{R}$ és Dedekind complet i té cardinal $\mathbf{c}$. Pel que acabem de veure, tot cos Dedekind complet serà isomorf a $\mathbb{R}$ i, per tant, tindrà el mateix cardinal. □

Amb aquest últim raonament obtenim que tot cos Dedekind complet és isomorf al cos de nombres reals. Així, llevat d'isomorfisme, $\mathbb{R}$ és l'únic cos ordenat amb aquest tipus de completesa.

2.2.6 Corol·lari *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i arquimedià. Llavors,* $\text{card}(\mathbb{K}) \leq \mathbf{c}$.

Demostració: Pel teorema (2.2.4), $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ i, en conseqüència, $\text{card}(\mathbb{K}) \leq \text{card}(\mathbb{R}) = \mathbf{c}$. □

Un cop acabats els resultats sobre cossos Dedekind complets, tenim suficients eines per a poder provar l'equivalència de les diferents formes de completesa presentades al principi del capítol, recalcant que el cos ha d'estar sota la hipòtesi d'arquimedianitat.

2.2.7 Teorema *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i arquimedià. Aleshores són equivalents:*

(i) $\mathbb{K}$ *és monòton complet.*

(ii) $\mathbb{K}$ *és Cantor complet.*

(iii) $\mathbb{K}$ *és Bolzano-Weierstrass complet.*

(iv) $\mathbb{K}$ *és Bolzano complet.*

(v) $\mathbb{K}$ *és seqüencialment complet.*

(vi) $\mathbb{K}$ *és Dedekind complet.*

(vii) $\mathbb{K}$ *és Hilbert complet.*

Demostració:

$(i) \Rightarrow (ii)$

Suposem que $\{[a_i, b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisfà la propietat de la intersecció finita. Sigui $\Gamma_n := \bigcap_{i=0}^{n}[a_i, b_i]$ i observem que $\Gamma_n = [\alpha_n, \beta_n]$, on $\alpha_n = \max_{i\leq n} a_i$ i $\beta_n = \min_{i\leq n} b_i$. Tenim que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreixent. Del fet que $\{[a_i, b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ compleix la propietat de la intersecció finita es dedueix que $\alpha_n \leq \beta_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i, per tant, les dues successions estan acotades, $\alpha_0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_0$. Per hipòtesi existeixen $\alpha := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ i $\beta := \lim_{n\to\infty} \beta_n$. Si $\beta < \alpha$, llavors per algun n tindrem que $\beta_n < \alpha_n$, una contradicció; per tant, $\alpha \leq \beta$. Aleshores, $\bigcap_{i=0}^{\infty}[a_i, b_i] = [\alpha, \beta] \neq \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió fitada en $\mathbb{K}$, llavors existeixen a, $b \in \mathbb{K}$ tals que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$. Siguin $\Gamma_1 := [a, b]$ i $n_1 := 1$, i es divideix Γ_1 en dos subintervals d'igual longitud $\Gamma_1^{'}$ i $\Gamma_1^{''}$. Siguin $A_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in \Gamma_1^{'}\}$ i $B_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in \Gamma_1^{''}\}$. Si A_1 és infinit, llavors es pren $\Gamma_2 := \Gamma_1^{'}$ i $n_2 := \min A_1$; altrament, B_1 és infinit i es pren $\Gamma_2 := \Gamma_1^{''}$ i $n_2 := \min B_1$. Continuant d'aquesta manera, s'obté una successió $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervals encaixats i una subsuccessió $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) tal que $x_{n_k} \in \Gamma_k$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. S'observa que la longitud de l'interval Γ_k és $\frac{b-a}{2^{k-1}}$. Com $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ és no buit per hipòtesi, existeix $L \in \mathbb{K}$ tal que $L \in \Gamma_k$ per a tot $k \in \mathbb{N}$; així $|x_{n_k} - L| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}}$. Aleshores, com $\left(\frac{b-a}{2^{k-1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix a 0 (veure (1.2.20)), (x_{n_k}) convergeix a L.

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Sigui $A \subset \mathbb{K}$ un conjunt infinit i acotat, volem veure que té un punt d'acumulació. Com A és infinit, existeix un element $x_1 \in A$. Considerem ara el conjunt $A \setminus \{x_1\}$, que també és infinit per ser el resultat d'eliminar un nombre finit d'elements d'un conjunt de cardinal infinit. Per tant, existeix $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Suposem que tenim $x_1, \dots, x_{n-1}$ elements de A, llavors, com $A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ té cardinal infinit, existeix un element $x_n \in A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Hem construït, doncs, un subconjunt numerable de A de forma inductiva, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Com A és fitat, sabem, per hipòtesi, que (x_n) té una parcial $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convergeix a un punt x de $\mathbb{K}$. Aleshores x ha de ser un punt d'acumulació de A, perquè els elements de (x_{n_k}) són tots diferents per construcció i la successió no acaba sent constant.

$(iv) \Rightarrow (v)$

Donada una successió de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$, volem veure que és convergent. La successió (x_n) està acotada, ja que existeix $N(1) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N(1)$, aleshores $|x_{N(1)} - x_n| < 1$, d'on es dedueix que $|x_n| \leq |x_{N(1)}| + 1$ i, per tant, (x_n) està fitada per $\max\{|x_1|, \ldots, |x_{N(1)-1}|, |x_{N(1)}| + 1\}$. Es pot dir, doncs, que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ és un conjunt acotat. Si el conjunt és finit, és a dir, si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$, la successió (x_n) serà constant a partir d'un punt (i per tant convergent), perquè, per ser (x_n) de Cauchy, per n, $m \in \mathbb{N}$ prou grans, tenim que $|x_n - x_m| < \min_{p\neq q} |x_{n_p} - x_{n_q}|$, on p i q es troben entre 1 i k. Altrament, per hipòtesi sabem que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ha de tenir un punt d'acumulació L. Per veure que $(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$, prenem $\varepsilon \in \mathbb{K}_+$ i $N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ tals que $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ si n, $m \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. Observem que el conjunt $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ és infinit perquè L és un punt d'acumulació, per tant $A := \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcap \{n \in \mathbb{N} : n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})\}$ és no buit. Sigui $M := \min A$. Llavors, per $n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$, tenim $|x_n - L| \leq |x_n - x_M| + |x_M - L| < \varepsilon$, fet que demostra que la successió és convergent.

$(v) \Rightarrow (vi)$

Veure teorema (1.2.21).

$(vi) \Rightarrow (vii)$

Suposem que $\mathbb{K}$ és Dedekind complet i que $\mathbb{A}$ és un cos ordenat i arquimedià que és extensió pròpia de $\mathbb{K}$, és a dir, $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}$. Com $\mathbb{A}$ és arquimedià, $\mathbb{Q}$ és dens dins $\mathbb{A}$ i el conjunt $\{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$ és no buit i fitat superiorment en $\mathbb{K}$ per a tot $a \in \mathbb{K}$. Definim l'aplicació $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ com

$$\sigma(a) := \sup_{\mathbb{K}}\{q \in \mathbb{Q} : q < a\}.$$

Per la propietat de Dedekind complet del cos $\mathbb{K}$, l'aplicació està ben definida. Per a comprovar que $\mathbb{A} = \mathbb{K}$ veurem que σ és l'aplicació identitat. Notem que σ deixa fix $\mathbb{K}$. Per arribar a una contradicció, suposem que $\mathbb{A} \neq \mathbb{K}$ i prenem $a \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{K}$. Llavors $\sigma(a) \neq a$ perquè a no és de $\mathbb{K}$ i, per tant, $\sigma(a) > a$ o $\sigma(a) < a$. Si $\sigma(a) > a$, per la densitat de $\mathbb{Q}$ dins $\mathbb{A}$, existeix $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < \sigma(a)$, que és una contradicció. D'altra banda, pel mateix raonament que abans, si $\sigma(a) < a$ existeix $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sigma(a) < q < a$, i de nou tenim contradicció. Per tant $\mathbb{A} \setminus \mathbb{K}$ és buit i podem concloure que $\mathbb{A} = \mathbb{K}$ i que $\mathbb{K}$ no té extensions arquimedianes pròpies.

$(vii) \Rightarrow (vi)$

Suposem que $\mathbb{K}$ és Hilbert complet, volem veure que $\mathbb{K}$ és Dedekind complet. Sabem que $\mathbb{K}$ és un cos ordenat i arquimedià, per tant existeix un monomorfisme de cossos ordenats $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{R}$ que ens permet identificar els elements de $\mathbb{K}$ amb elements de $\mathbb{R}$. Recordem que $\mathbb{R}$ és un cos ordenat, arquimedià i Dedekind complet. Com $\mathbb{K}$ és Hilbert complet, $\mathbb{R}$ no pot ser una extensió arquimediana pròpia de $\mathbb{K}$, per tant el cas $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ no es pot donar. Així doncs, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i, com a conseqüència, $\mathbb{K}$ és Dedekind complet.

$(vi) \Rightarrow (i)$

Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió monòtona i acotada en $\mathbb{K}$. Volem veure que (x_n) convergeix. Com la successió és monòtona, podem tenir dos casos: successió monòtona creixent o successió monòtona decreixent. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que la successió és monòtona creixent. Considerem el conjunt acotat $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ i sigui x el seu suprem, que sabem que existeix per hipòtesi. Per provar que el límit de (x_n) és x, prenem $\varepsilon \in \mathbb{K}_+$ i un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_N$, que sabem que existeix per definició de suprem d'un conjunt. Com la successió és monòtona creixent, afirmem que $x - \varepsilon < x_n$ per a tot $n \geq N$. Per tant, $x - x_n < \varepsilon$ si $n \geq N$ i, com a conseqüència, el límit de (x_n) és x. El cas de successió monòtona decreixent es prova de forma anàloga. $\square$

2.2.8 Exemple Sabem que el conjunt de nombres racionals $\mathbb{Q}$ és arquimedià, però no seqüencialment complet. Per les equivalències vistes anteriorment, aquest cos no pot tenir cap dels tipus de completesa esmentats.

2.3 Relació completesa-arquimedianitat

En el teorema (2.2.7) hem vist que les set propietats descrites anteriorment són equivalents sota la hipòtesi de $\mathbb{K}$ arquimedià. De tota manera, com ja hem vist en la proposició (2.2.2), la hipòtesi d'arquimedianitat no és necessària per algunes de les propietats. Al llarg d'aquesta secció mostrarem que les propietats (i), (iii) i (iv) del teorema impliquen la propietat arquimediana, recordant que ja ho hem vist per la propietat (vi).

2.3.1 Proposició *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i Bolzano complet, llavors $\mathbb{K}$ és arquimedià.*

Demostració: De forma contrària, suposem que $\mathbb{K}$ no és arquimedià. Llavors tenim que $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ està fitat superiorment i, per hipòtesi, això implica que el subconjunt té un punt d'acumulació $L \in \mathbb{K}$. Anem a veure que $A := \{n \in \mathbb{N} : |L - n| < \frac{1}{2}, n \neq L\}$ és no buit. Si A conté només un element $m \in \mathbb{N}$, llavors el conjunt $\{n \in \mathbb{N} : |L-n| < |L-m|\}$ ha de ser buit, fet que contradiu que L sigui un punt d'acumulació de $\mathbb{N}$. D'altra banda, si A conté dos elements diferents p, $q \in \mathbb{N}$, llavors $|p-q| \leq |p-L|+|q-L| < 1$, però p, $q \in \mathbb{N}$, i això implica que $p = q$, una contradicció. $\square$

De cara a la següent proposició anem a introduir tres conceptes nous:

2.3.2 Definició Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Definim

1) $\mathfrak{I}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K} : \forall n \in \mathbb{N}, |x| < \frac{1}{n})\}$
2) $\mathfrak{F}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ amb } |x| < \frac{1}{n})\}$
3) $\mathfrak{L}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K} : \forall n \in \mathbb{N}, n < |x|\}$

Els conjunts $\mathfrak{I}(\mathbb{K})$, $\mathfrak{F}(\mathbb{K})$ i $\mathfrak{L}(\mathbb{K})$ fan referència als conjunts de *infinitament petits*, *finits* i *infinitament grans*, respectivament. De vegades s'escriu $x \approx 0$ si $x \in \mathfrak{I}(\mathbb{K})$ i $x \approx y$ si $x - y \approx 0$, en aquest cas direm que x és *infinitesimalment proper* a y.

2.3.3 Proposició *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Si $\mathbb{K}$ és Bolzano-Weierstrass complet o monòton complet, llavors $\mathbb{K}$ és arquimedià.*

Demostració: Provarem que la completesa Bolzano-Weierstrass implica la completesa monòtona, i després veurem que la completesa monòtona implica la propietat arquimediana.

Suposem que $\mathbb{K}$ és Bolzano-Weierstrass complet. Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió monòtona i acotada. Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que (x_n) és creixent. Llavors, per hipòtesi, (x_n) té una subsuccessió $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convergeix a algun punt $L \in \mathbb{K}$. Del fet que (x_n) és creixent, es dedueix que (x_{n_k}) també ho és i que L és una cota superior del conjunt $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Donat $\varepsilon \in \mathbb{K}_+$, sabem que existeix $L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $k \geq L(\varepsilon)$, $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$. Però també sabem que, per a tot $m \geq n_{L(\varepsilon)}$, tenim $x_{n_{L(\varepsilon)}} \leq x_m \leq L$. Podem concloure que (x_n) convergeix a L i, en conseqüència, $\mathbb{K}$ és monòton complet.

Suposem ara que $\mathbb{K}$ és monòton complet. Per tal d'arribar a una contradicció, suposem que $\mathbb{K}$ no és arquimedià. D'aquest fet es dedueix que la successió $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ està acotada superiorment i, per hipòtesi, això implica que la successió convergeix a algun punt L. És clar que $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{K})$. També tenim que $L - n \in \mathfrak{L}(\mathbb{K})$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ (perquè si no fos així, $L - n \notin \mathfrak{L}(\mathbb{K})$ implicaria que $L < m + n \in \mathbb{N}$, per algun $m \in \mathbb{N}$, que contradiu el fet de ser L una cota superior de la successió). De tota manera, aquesta última condició contradiu la convergència de (n), perquè la diferència entre la successió i el punt L serà sempre infinitament gran. Per tant, $\mathbb{K}$ ha de ser arquimedià. $\square$

Un cop provats aquests dos resultats, observem que un cos no arquimedià només pot tenir tres possibles tipus de completesa:

1) Completesa de Cantor.
2) Completesa seqüencial.
3) Completesa de Hilbert.

De fet, és clar que un cos no arquimedià sempre és Hilbert complet. Per tant, només restarà veure sota quines condicions es donen les altres dues formes de completesa. Més endavant veurem l'existència d'un cos ordenat, no arquimedià i seqüencialment complet, però no es tractarà l'existència d'un cos ordenat, no arquimedià i Cantor complet (veure els exemples de la secció 9 de [2]).

2.4 Retorn a l'axiomàtica dels nombres reals

Si ens tornem a centrar en el cos ordenat de nombres reals, que per la construcció vista en el primer capítol sabem que és arquimedià, les equivalències que dóna el teorema (2.2.7) són vàlides. De fet, la construcció mitjançant classes d'equivalència de successions de Cauchy en $\mathbb{Q}$ ens ha donat un cos que és Dedekind complet i seqüencialment complet. El que no sabíem durant el primer capítol és que aquests dos tipus de completesa, en $\mathbb{R}$, són equivalents. De fet, el que assegura el teorema és que aquest cos és monòton complet, Cantor complet, Bolzano-Weierstrass complet, Bolzano complet, seqüencialment complet, Dedekind complet i Hilbert complet, i que aquests tipus de completesa són equivalents. Anant una mica més enllà, assegurem que aquest és l'únic cos amb totes aquestes propietats, ja que si n'hi hagués un altre, aquest seria Dedekind complet i, pel corol.lari (2.2.5), hauria de ser isomorf a $\mathbb{R}$. No és un fet d'estranyar si recordem el resultat donat pel teorema (2.2.4):

Tot cos arquimedià és isomorf a un subcos de $\mathbb{R}$.

Si tenim un cos arquimedià $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, llavors $\mathbb{A}$ no pot tenir cap dels tipus de completesa esmentats, ja que si no fos així, automàticament seria Hilbert complet, una contradicció per ser $\mathbb{R}$ una extensió arquimediana pròpia de $\mathbb{A}$. Així doncs, l'única opció possible de cos arquimedià en el que es poden donar totes les equivalències és $\mathbb{R}$, llevat d'isomorfisme.

2.4.1 Axiomes alternatius

En el punt (1.3) del primer capítol, hem recordat l'axiomàtica que defineix un conjunt de nombres reals. Tal i com hem comentat, es demana que el conjunt sigui un cos ordenat i Dedekind complet. Tot i així, el resultat del teorema (2.2.7) presenta múltiples opcions per a una definició axiomàtica de $\mathbb{R}$. Seguidament, es mostraran diferents definicions axiomàtiques del conjunt de nombres reals: la primera està basada en la completesa de Cantor, les tres següents són punts de vista seqüencials, la cinquena i la sisena estan basades en propietats de subconjunts i l'última és una caracterització algebraica.

- **Axiomes basats en la completesa de Cantor**

  C1. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

  1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat i arquimedià.
  2) $\mathbb{R}$ és Cantor complet.

- **Axiomes seqüencials**

  S1. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

  1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat.
  2) $\mathbb{R}$ és Bolzano-Weierstrass complet.

  S2. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

  1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat.
  2) $\mathbb{R}$ és monòton complet.

  S3. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

  1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat i arquimedià.
  2) $\mathbb{R}$ és seqüencialment complet.

- **Axiomes basats en subconjunts**

  B1. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

  1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat.
  2) $\mathbb{R}$ és Bolzano complet.

B2. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat.
2) $\mathbb{R}$ és Dedekind complet.

- **Axiomes algebraics**

A1. $\mathbb{R}$ és el conjunt que satisfà els següents axiomes:

1) $\mathbb{R}$ és un cos ordenat i arquimedià.
2) $\mathbb{R}$ és Hilbert complet.

Notem que **C1**, **S3** i **A1** demanen explícitament que $\mathbb{R}$ sigui un cos arquimedià. De la secció anterior sabem que les propietats de les definicions restants són suficients per a establir la propietat arquimediana, però hem de tenir clar que la completesa en el sentit de Cantor i la completesa seqüencial poden donar-se en cossos no arquimedians, remarcant que tot cos no arquimedià sempre és Hilbert complet.

2.5 Completesa de cossos no arquimedians

En aquesta secció es presenten alguns resultats referents a la completesa de cossos no arquimedians. Pel que hem vist en la secció (2.3), està clar que els resultats que presentarem donaran possibles relacions entre les propietats de Cantor complet i seqüencialment complet en un cos ordenat i no arquimedià.

Per tal de poder elaborar aquest apartat, és necessari introduir un nou tipus de completesa.

2.5.1 Definició Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i κ un cardinal infinit. Direm que $\mathbb{K}$ és *Cantor κ-complet* si tota família $\{[a_\gamma, b_\gamma]\}_{\gamma\in\Gamma}$ de cardinal menor que κ d'intervals tancats i fitats de $\mathbb{K}$ amb la propietat de la intersecció finita té intersecció no buida, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}[a_\gamma, b_\gamma] \neq \emptyset$.

Entendrem per κ^+ el cardinal successor de κ. Per exemple, si $\kappa = \aleph_0$, llavors $\kappa^+ = \aleph_0^+ = \aleph_1$.

2.5.2 Remarca Observem que per $\kappa = \aleph_1 = \aleph_0^+$ obtenim la definició (2.1.1)(i). Per tant, per un cardinal infinit κ major o igual a $\aleph_1$, que el cos ordenat sigui Cantor κ-complet implica que, en particular, també és Cantor complet.

Vam decidir no estudiar amb profunditat aquest tipus de completesa perquè ens interessava plasmar les propietats més conegudes del conjunt de nombres reals a un cos ordenat qualsevol. D'aquesta manera, es va creure que la completesa de Cantor era suficient per estudiar, de forma més general, la coneguda propietat dels intervals encaixats. Tot i així, per donar uns resultats més forts pel que fa a cossos no arquimedians, la completesa de Cantor no era suficient. Per aquest motiu es decideix incloure aquest nou tipus de completesa, que ens permetrà arribar a relacions interessants. Tot i que la κ-completesa de Cantor no ha estat estudiada anteriorment, cal comentar que el concepte és equivalent, en un cos ordenat i arquimedià, a qualsevol altre dels tipus de completesa tractats en el teorema (2.2.7). El següent resultat dóna condicions per tal que aquest nou tipus de completesa asseguri l'arquimedianitat del cos.

2.5.3 Lema *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Si $\mathbb{K}$ és Cantor κ-complet amb $\kappa = \text{card}(\mathbb{K})^+$, llavors $\mathbb{K}$ és arquimedià. Com a conseqüència, si $\mathbb{K}$ és Cantor κ-complet per a tot cardinal κ, llavors $\mathbb{K}$ és arquimedià.*

Demostració: Siguin $S \subset \mathbb{K}$ un subconjunt fitat superiorment i $\Gamma := \{[a,b] : a \in S, b \in \mathcal{UB}(S)\}$. Observem que Γ satisfà la propietat de la intersecció finita, perquè per a tot subconjunt finit $\{[a_{\gamma_i}, b_{\gamma_i}]\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subset \Gamma$ tenim que $a_{\gamma_j} \leq b_{\gamma_i}$, per a tot i, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Per tant,

$$\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} [a_{\gamma_i}, b_{\gamma_i}] = \left[\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{\gamma_i}, \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} b_{\gamma_i}\right] \neq \emptyset.$$

S'observa també que $\text{card}(\Gamma) \leq \text{card}(\mathbb{K})$ x $\text{card}(\mathbb{K}) = \text{card}(\mathbb{K})$. Així, per la hipòtesi de Cantor $\text{card}(\mathbb{K})^+$-complet, existeix $\sigma \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma$. És clar que, per a tot $a \in S$, $a \leq \sigma$ i, com a conseqüència, $\sigma \in \mathcal{UB}(S)$. Per altra banda també tenim que, per a tot $b \in \mathcal{UB}(S)$, $\sigma \leq b$. Llavors, $\sigma = \sup(S)$. Usant el resultat (2.2.2), podem concloure que, per ser $\mathbb{K}$ un cos Dedekind complet, llavors és arquimedià.

La segona part del teorema és evident per ser, en particular, un cos Cantor $\text{card}(\mathbb{K})^+$-complet. □

2.5.4 Corol·lari *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat de cardinal $\aleph_0$. Si $\mathbb{K}$ és Cantor complet, llavors $\mathbb{K}$ és arquimedià.*

Demostració: Es dedueix directament del lema anterior. □

Aquest últim corol.lari ens indica que no és possible parlar de no arquimedianitat quan el cos té cardinal $\aleph_0$ i és Cantor complet.

2.5.5 Teorema *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Si $\mathbb{K}$ no és arquimedià i és Cantor κ-complet, llavors $\kappa \leq \text{card}(\mathbb{K})$.*

Demostració: Suposem el contrari, $\kappa > \text{card}(\mathbb{K})$. Llavors, en particular, $\mathbb{K}$ serà Cantor $\text{card}(\mathbb{K})^+$-complet. Del lema (2.5.5) es segueix que $\mathbb{K}$ és arquimedià, una contradicció. □

A continuació s'introdueix el concepte de saturació algebraica, molt similar al de κ - completesa de Cantor.

2.5.6 Definició Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i κ un cardinal infinit. Un cos ordenat $\mathbb{K}$ és *algebraicament κ-saturat* si tota família $\{(a_\gamma, b_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ de cardinal menor que κ d'intervals oberts de $\mathbb{K}$ amb la propietat de la intersecció finita té intersecció no buida, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma, b_\gamma) \neq \emptyset$.

Si un cos ordenat $\mathbb{K}$ és algebraicament $\aleph_1$-saturat (és a dir, tota successió d'intervals oberts amb la propietat de la intersecció finita té intersecció no buida), llavors direm que $\mathbb{K}$ és simplement *algebraicament saturat.*

2.5.7 Definició Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i κ un cardinal infinit. Direm que $\mathbb{K}$ és *algebraicament κ-saturat a l'infinit* si tota família de cardinal menor que κ d'elements de $\mathbb{K}$ està acotada.

De nou, direm que $\mathbb{K}$ és *algebraicament saturat a l'infinit* si és algebraicament $\aleph_1$-saturat a l'infinit (és a dir, tot subconjunt numerable de $\mathbb{K}$ està acotat).

Observem que tot cos ordenat és algebraicament $\aleph_0$-saturat i $\aleph_0$-saturat a l'infinit.

2.5.8 Teorema *Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i κ un cardinal infinit. Aleshores són equivalents:*

(i) $\mathbb{K}$ *és algebraicament κ-saturat.*

(ii) $\mathbb{K}$ *és Cantor κ-complet i algebraicament κ-saturat a l'infinit.*

Demostració:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*

Siguin $\mathcal{C} := \{[a_\gamma, b_\gamma]\}_{\gamma\in\Gamma}$ i $\mathcal{O} := \{(a_\gamma, b_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ dues famílies de menys de κ intervals, tancats i fitats a $\mathcal{C}$, i oberts a $\mathcal{O}$, complint $\mathcal{C}$ la propietat de la intersecció finita. Si $a_k = b_p$ per alguns k, $p \in \Gamma$, llavors, per la propietat de la intersecció finita de $\mathcal{C}$, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}[a_\gamma, b_\gamma] = \{a_k\}$. Altrament, $\mathcal{O}$ té la propietat de la intersecció finita i, per la κ-saturació algebraica, existeix $\alpha \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma, b_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma}[a_\gamma, b_\gamma]$. Per tant, $\mathbb{K}$ és Cantor κ-complet.

Per veure que $\mathbb{K}$ és algebraicament κ-saturat a l'infinit, considerem $A \subset \mathbb{K}$ un conjunt amb $\mathrm{card}(A) < \kappa$. Llavors, per la κ-saturació algebraica, $\bigcap_{a\in A}(a, \infty) \neq \emptyset$. Podem concloure que existeix un element α tal que, per a tot $a \in A$, $a < \alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*

Sigui $\{(a_\gamma, b_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ una família de cardinal menor que κ amb la propietat de la intersecció finita. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que cada interval està acotat. Com $\mathbb{K}$ és algebraicament κ-saturat a l'infinit, el conjunt $\left\{\frac{1}{b_l - a_k} : l, k \in \Gamma\right\}$ està acotat i, per tant, existeix $\frac{1}{\rho} \in \mathcal{UB}\left(\left\{\frac{1}{b_l - a_k} : l, k \in \Gamma\right\}\right)$, és a dir, $\frac{1}{b_l - a_k} \leq \frac{1}{\rho}$ per a tot l, $k \in \Gamma$. L'última afirmació implica que $\rho > 0$ i que ρ és una cota inferior de $\{b_l - a_k : l, k \in \Gamma\}$. A continuació, anem a veure que la família $\{[a_\gamma + \frac{\rho}{2}, b_\gamma - \frac{\rho}{2}]\}_{\gamma\in\Gamma}$ satisfà la propietat de la intersecció finita. Siguin $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ i $\zeta := \max_{k\leq n}\{a_{\gamma_k} + \frac{\rho}{2}\}$. Llavors, de la definició de ρ es dedueix que, per a tot $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$,

$$a_{\gamma_m} + \frac{\rho}{2} \leq \zeta \leq b_{\gamma_m} - \frac{\rho}{2}.$$

Per tant, per a tot $m \leq n$, $\zeta \in [a_{\gamma_m} + \frac{\rho}{2}, b_{\gamma_m} - \frac{\rho}{2}]$. Per la Cantor κ-completesa, existeix $\alpha \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma}[a_\gamma + \frac{\rho}{2}, b_\gamma - \frac{\rho}{2}] \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma, b_\gamma)$. □

2.5.9 Corol·lari *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Si $\mathbb{K}$ és algebraicament saturat, llavors tota successió convergent acaba sent constant. Com a conseqüència, $\mathbb{K}$ és seqüencialment complet.*

Demostració: Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió amb límit $L \in \mathbb{K}$. Suposem que (x_n) no acaba sent constant. Si la successió no acaba sent constant, i té límit L, vol dir que no existeix un punt a partir del que els termes de la successió sempre són iguals a L. Per tant, existeix una subsuccessió $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\delta_k := |x_{n_k} - L| > 0$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Així, per hipòtesi, existeix $\alpha \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(0, \delta_k)$. Aleshores, per a tot $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < \delta_k$, que contradiu que $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tingui límit 0. Per tant, (x_{n_k}) no té límit L, una contradicció per tractar-se d'una parcial d'una successió amb límit L.

Finalment, suposem que (x_n) és una successió de Cauchy i, per tant, $|x_{n+1} - x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Llavors, pel que acabem de provar, $|x_{n+1} - x_n| = 0$ per $n \in \mathbb{N}$ prou gran. Per tant, (x_n) acaba sent constant i, com a conseqüència, és convergent. Com acabem de veure que tota successió de Cauchy és convergent, aleshores $\mathbb{K}$ és seqüencialment complet, que és el que volíem provar. $\square$

2.5.10 Corol·lari *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Si $\mathbb{K}$ és Cantor complet, però no algebraicament saturat, llavors:*

(i) *$\mathbb{K}$ té una successió creixent i no acotada.*

(ii) *$\mathbb{K}$ és seqüencialment complet.*

Demostració:

(i) Pel teorema (2.5.8) sabem que $\mathbb{K}$ té un subconjunt $A \subset \mathbb{K}$ de cardinal $\aleph_0$ i no acotat. Sigui $x_1 \in A$ un element arbitrari d'aquest conjunt. Suposem que x_n ha estat definit, llavors, per tractar-se d'un subconjunt no acotat, existeix $c \in A$ tal que $x_n < c$; definim $x_{n+1} := c$. Definint la successió de forma inductiva, tenim que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent i no acotada en $\mathbb{K}$.

(ii) Pel punt (i) d'aquest corol.lari, sabem que existeix una successió creixent i no acotada $\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. S'observa que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent amb límit 0, però que mai esdevé igual a 0. Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de Cauchy en $\mathbb{K}$. Per a tot $n \in \mathbb{N}$, definim $S_n := [x_{m_n} - \varepsilon_n, x_{m_n} + \varepsilon_n]$, on

$$m_n := \min\{k \in \mathbb{N} : \forall l, j \in \mathbb{N}, \text{ si } k \leq l, j, \text{ llavors } |x_l - x_j| < \varepsilon_n\}.$$

S'observa que, com (x_n) és una successió de Cauchy, aquest mínim existeix. Per tal de veure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfà la propietat de la intersecció finita, considerem $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunt finit i $\rho := \max(A)$. Llavors s'observa que, com $m_k \leq m_\rho$, $x_{m_\rho} \in S_k$ per a tot $k \in A$. Aleshores, per la completesa de Cantor, existeix $L \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$. Per tal de veure que (x_n) convergeix a L, observem primer que, donat qualsevol $\delta \in \mathbb{K}_+$ i degut a que (ε_n) té límit 0, podem trobar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $2\varepsilon_n < \delta$. Notem també que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $L \in S_n$ i la longitud de S_n és $2\varepsilon_n$. Com per a tot $l \in \mathbb{N}$ tal que $m_n \leq l$ es té que $x_l \in S_n$, tenim que, per a tot $l \in \mathbb{N}$ tal que $m_n \leq l$, $|L - x_l| < 2\varepsilon_n < \delta$. Hem vist, doncs, que la successió és convergent.

$\square$

Els dos corol.laris anteriors poden ser sintetitzats en el següent resultat.

2.5.11 Corol·lari *Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat, llavors es tenen les següents implicacions.*

$$\mathbb{K} \textit{ algebraicament } \kappa\textit{-saturat} \Rightarrow \mathbb{K} \textit{ Cantor } \kappa\textit{-complet} \Rightarrow \mathbb{K} \textit{ seqüencialment complet}$$

Demostració: La primera de les implicacions és conseqüència directa del teorema (2.5.8). Pel que fa a la segona implicació, tenim dos casos possibles:

- $\mathbb{K}$ és algebraicament saturat. Usant el corol.lari (2.5.9) obtenim que $\mathbb{K}$ és seqüencialment complet.
- $\mathbb{K}$ no és algebraicament saturat. Usant el corol.lari (2.5.10) tenim que $\mathbb{K}$ és seqüencialment complet.

□

Una vegada obtingut el resultat anterior, podem restringir-lo al cas particular de la completesa de Cantor, és a dir, restringir-lo a la $\aleph_1$-completesa de Cantor. Així, tenim que, en tot cos ordenat, la completesa de Cantor implica la completesa seqüencial. De fet, en la secció (2.2) dedicada a la completesa de cossos arquimedians, ja hem vist que hi ha una equivalència entre aquests dos tipus de completesa quan el cos està sota la hipòtesi d'arquimedianitat. Durant aquesta secció, hem provat uns resultats generals prescindint d'utilitzar la propietat arquimediana del cos, per aquest motiu els resultats són aplicables a qualsevol cos ordenat. Així, si tenim un cos ordenat, no arquimedià i Cantor complet, llavors també és seqüencialment complet i el seu cardinal és major o igual a $\aleph_1$.

Degut a que el conjunt de nombres reals resulta ser un bon exemple de cos arquimedià on poder veure aplicat el resultat del teorema (2.2.4), hem decidit dedicar la següent secció a un exemple de cos ordenat, no arquimedià i amb un dels tipus de completesa que anteriorment hem dit que pot arribar a donar-se en aquest tipus de cossos: la completesa seqüencial. L'exemple ens servirà per afirmar que realment existeix un cos ordenat d'aquestes característiques.

2.6 Exemple de cos ordenat, no arquimedià i seqüencialment complet

En seccions anteriors hem deduit que un dels tipus de completesa que podem discutir en un cos ordenat no arquimedià és la completesa seqüencial. Gràcies a l'exemple que presentarem a continuació, podrem afirmar que aquest tipus de completesa es pot donar tant en cossos arquimedians com en no arquimedians.

2.6.1 El cos de funcions racionals

Sigui f un polinomi de $\mathbb{R}[x]$ de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ amb } a_k \in \mathbb{R}, \text{ per a tot } k = 0, 1, \ldots, n,$$

i g un altre polinomi de $\mathbb{R}[x]$ diferent de zero (és a dir, $g(x)$ no és idènticament zero). Considerem la funció racional $\frac{f}{g}$ amb domini tots els nombres reals pels quals $g(x) \neq 0$. Entendrem per $\mathcal{H}$ el conjunt de funcions racionals $\frac{f}{g}$ reduïdes (és a dir, els únics factors polinomials comuns de f i g són constants), amb l'addició i multiplicació definides per

$$\frac{f}{g} + \frac{r}{s} := \frac{fs + gr}{gs}, \ \frac{f}{g}\frac{r}{s} := \frac{fr}{gs},$$

on la part dreta de la igualtat també està reduïda. És rutinari veure que $\mathcal{H}$ és un cos amb les operacions esmentades.

2.6.1 Lema *El cos* $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ *és ordenat.*

Demostració: Prenem el subconjunt de $\mathcal{H}$ format per totes les funcions racionals $\frac{f}{g}$ diferents de zero (és a dir, diferents de la funció racional idènticament zero) i tals que els coeficients dels termes de grau més alt de f i g tenen el mateix signe (recordem que aquests coeficients són elements de $\mathbb{R}$ i, per tractar-se d'un cos ordenat, aquests són comparables). Anotarem aquest subconjunt per $\mathcal{H}_+$.

$\mathcal{H}_+$ compleix clarament les propietats de (1.1.1), només cal tenir en compte que, si tenim $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}_+$, llavors $-\frac{f}{g} = \frac{-f}{g}$ ($f \in \mathbb{R}[x]$ i s'entén per $-f$ l'element oposat de f en aquest anell commutatiu de polinomis) és una funció racional amb els coeficients de grau major de f i g de signes diferents. Per tant, $-\frac{f}{g} \notin \mathcal{H}_+$ i és diferent de zero. El fet de ser $\mathcal{H}_+$ tancat per l'addició i la multiplicació és immediat. $\square$

2.6.2 Lema *El cos ordenat* $\mathcal{H}$ *no és arquimedià.*

Demostració: Per tractar-se d'un cos ordenat, afirmem que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{H}$ i, per tant, també es compleix que $\mathbb{N} \subset \mathcal{H}$. Aquesta última identificació la podem fer via el següent monomorfisme d'anells commutatius:

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ n & \mapsto & \frac{n}{1} \end{array}$$

S'observa que tota funció racional de la forma $\frac{f}{1}$, on f és un polinomi no constant amb coeficient de grau màxim positiu, és una cota superior del conjunt de naturals $\mathbb{N}$ de $\mathcal{H}$. Per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f}{1} > \frac{n}{1} \Leftrightarrow \frac{f}{1} - \frac{n}{1} > 0 \Leftrightarrow \frac{f-n}{1} > 0,$$

i, com $\deg(f) \geq 1$ i el coeficient de grau màxim de f és positiu, $\frac{f-n}{1} > 0$ (o, el que és equivalent, $\frac{f-n}{1} \in \mathcal{H}_+$). Així, tenim que el conjunt de nombres naturals està acotat superiorment i, per la remarca (1.1.21), $\mathcal{H}$ no és un cos ordenat arquimedià. $\square$

2.6.3 Teorema *El cos ordenat* $\overline{\mathcal{H}}$ *és no arquimedià i seqüencialment complet*[10].

[10] $\overline{\mathcal{H}}$ fa referència a la completesa de $\mathcal{H}$ elaborada durant el primer capítol (secció (1.2.2)).

Demostració: Considerem el següent monomorfisme de cossos ordenats

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon \mathcal{H} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}} \\ a & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

Vegem que, efectivament, π preserva l'ordre. Donats dos elements a, $b \in \mathcal{H}$ tals que $a < b$, llavors $\pi(a) < \pi(b)$, ja que $\overline{b-a} > 0$ per ser la successió constant $(b - a_{(n)})$ sempre positiva[11].

Com π preserva l'ordre, també preserva la no arquimedianitat. Es conclou, doncs, que $\overline{\mathcal{H}}$ no és arquimedià.

La propietat de completesa seqüencial ve donada pel teorema (1.2.17). □

2.6.2 Comentaris

Recordem que tenim el cos ordenat de nombres reals, un cos arquimedià i seqüencialment complet. Tot i així, la completesa seqüencial no depèn de la propietat arquimediana del cos, ja que acabem de mostrar un cos ordenat i seqüencialment complet, però no arquimedià. Així doncs, podem afirmar que aquest tipus de completesa no implica la propietat arquimediana del cos, a diferència del que passava amb la majoria dels altres tipus de completesa.

Tot i no tractar-se d'un cos ordenat, el cos de nombres p-àdics és no arquimedià i seqüencialment complet. En aquest cas, la propietat arquimediana usada fa referència a la definició alternativa (1.1.20)(ii), que només requereix que el cos tingui definida una distància.

[11] La successió $(b - a_{(n)})$ és sempre positiva amb l'ordre definit a $\mathcal{H}$.

3
Conclusions

Començar el projecte amb la construcció del conjunt de nombres reals, ens ha permès estudiar l'extensió completa (o seqüencialment completa) d'un cos ordenat general. En el cas del cos de nombres racionals $\mathbb{Q}$, hem estat capaços de trobar una estructura que *extén* $\mathbb{Q}$ i conserva moltes de les seves propietats, però amb una propietat addicional de completesa: $\mathbb{R}$. Tot i que durant el primer capítol hem vist que el conjunt de nombres reals és un cos ordenat, arquimedià, seqüencialment complet i Dedekind complet, les relacions més interessants les hem trobat al llarg del segon capítol.

Tots sabem que el conjunt de nombres racionals és un subcos del cos de nombres reals, és a dir, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. De fet, hem vist que tot cos ordenat conté una còpia de $\mathbb{Q}$, fent aquesta identificació a través d'un monomorfisme de cossos ordenats. La part interessant de $\mathbb{Q}$ és la seva densitat en cossos ordenats i arquimedians. Al llarg del segon capítol hem observat propietats bastant restrictives pel que fa a aquest tipus de cossos: entre un cos ordenat arquimedià i un cos ordenat Dedekind complet, existeix un monomorfisme de cossos ordenats. En altres paraules, un cos ordenat arquimedià pot ser identificat amb un subcos d'un cos Dedekind complet. Per l'existència i unicitat, llevat d'isomorfisme, de cos ordenat Dedekind complet, es pot concloure que tot cos ordenat arquimedià és un subcos de $\mathbb{R}$. Així, el conjunt de nombres reals és el cos arquimedià *més gran*. Podem afegir, doncs, que la propietat arquimediana limita la mida del cos ordenat (és a dir, $\text{card}(\mathbb{K}) \leq \mathbf{c}$, on $\mathbb{K}$ és el cos ordenat arquimedià i $\mathbf{c}$ el cardinal dels reals).

Des del principi, i tal i com s'ha comentat en la introducció, ens preguntàvem sota quines condicions es podien donar les propietats conegudes del conjunt de nombres reals en un cos ordenat qualsevol. Les set formes de completesa estudiades han resultat ser equivalents en cossos arquimedians, per aquest motiu hem pogut concloure que, llevat d'isomorfisme, l'únic cos ordenat i arquimedià amb algun d'aquests tipus de completesa és $\mathbb{R}$. Pel que fa a cossos no arquimedians, i gràcies a l'estudi de la relació completesa-arquimedianitat exposat en la secció (2.3), hem vist que els únics tipus de completesa que es poden donar en cossos ordenats no arquimedians són la de Cantor, la seqüencial i la de Hilbert, essent aquesta última sempre certa en cossos d'aquestes característiques. Introduint el concepte de saturació algebraica i prescindint de la propietat arquimediana del cos, hem provat una relació entre la completesa de Cantor i la completesa seqüencial en un cos ordenat qualsevol: la primera implica la segona. Aquest resultat pot ser usat en cossos no arquimedians, però la no arquimedianitat fa que la completesa de Cantor només sigui possible si el cardinal del cos és major o igual a $\aleph_1$, ja que si no és així el cos ordenat és arquimedià.

Per tal de garantir l'existència d'un cos ordenat, no arquimedià i seqüencialment complet, s'ha usat la construcció vista durant el primer capítol. Donat un cos no arquimedià, sabem que la seva corresponent extensió completa explicada a (1.2.3) serà no arquimediana i tindrà la propietat de completesa seqüencial. Per tant, la tasca s'ha reduit a trobar un cos ordenat i no arquimedià: $(\mathcal{H}, +, \cdot)$.

L'elaboració d'un exemple de cos ordenat, no arquimedià i seqüencialment complet no ha estat fàcil. Són poques les fonts d'informació sobre aquest tipus d'anàlisi, per aquest motiu els articles usats per a l'estudi d'un cos amb aquestes característiques són diversos, sense tenir una procedència del tot clara. De tota manera, el llibre *Counterexamples in Analysis*[7] m'ha estat de gran ajuda, perquè amb els seus contraexemples breus sobre diferents branques de l'anàlisi m'he pogut guiar fins a arribar a l'exemple que buscava. Cal comentar que també he comès algun error, motiu pel qual en la secció (2.6.2) es parla breument del cos de nombres p-àdics, un cos no arquimedià i seqüencialment complet, però que no disposa d'un ordre. Abans de trobar l'exemple adequat per presentar en aquesta memòria, he estat estudiant el cos de nombres p-àdics, que compleix les propietats que m'interessaven, però que trenca la base de cos que ha estat plantejada des de l'inici del projecte: el cos de nombres p-àdics no és ordenat. Sabem que aquest cos disposa d'una mètrica, i aquesta el permet ordenar només *parcialment*.

Des del meu punt de vista, penso que ha estat interessant estudiar tots aquests tipus de completesa en cossos ordenats qualssevol. Tot aquest estudi ajuda a entendre què és el que fa diferent el cos de nombres reals respecte altres cossos ordenats. De fet, aquest conjunt de nombres ha resultat ser la motivació del meu treball, i un punt de referència que s'ha tingut en compte quasi en cada secció. Crec que començar aquest projecte amb el capítol de construcció del conjunt de nombres reals ha estat encertat, així el desenvolupament del treball ha seguit un ordre lògic.

Bibliografia

[1] E.Hewitt i K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer, primera edició, 1965.

[2] James F. Hall. *Completeness of Ordered Fields.* Mathematics Department. California Polytechnic State University San Luis Obispo. California, december 2010.

[3] James F. Hall i Todor D. Todorov. *Completeness of the Leibniz Field and Rigorousness of Infinitesimal Calculus.* Mathematics Department. California Polytechnic State University San Luis Obispo. California.

[4] Abdó Roig. *Dels nombres naturals als nombres complexos.* 4 de març de 2005.

[5] B. Banaschewski. *On Proving the Existence of Complete Ordered Fields.* The American Mathematical Monthly, Vol. 105, No. 6 (Juny-Juliol, 1998), p. 548-551.

[6] Abraham Robinson. *Function Theory on some Non archimedean Fields.* The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 6, Part 2. Papers in the Foundation of Mathematics (Juny-Juliol, 1973), p. 87-109.

[7] Bernard R. Gelbaum i John M.H.Olmsted. *Counterexamples in Analysis.* Dover publications. New York, 2003.

[8] Jordi Quer. *Apunts de Teoria de Nombres. Nombres p-àdics.* 30 d'abril de 2013.