



## Treball de fi de màster

Títol: Atenció a la Diversitat: Implantar l'Educació Multinivell a les Matemàtiques.

Cognoms: Díaz Pagan

Nom: Ona

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat,  
Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemàtiques

Director/a: Marta Ginovart

Data de lectura: 25/06/2012

# CONTINGUT

<b>I.</b>	<b>INTRODUCCIÓ: JUSTIFICACIÓ DE L'ESTUDI</b>	<b>4</b>
<b>II.</b>	<b>LA NECESSITAT DEL CANVI: "EDUCACIÓ MULTINIVELL"</b>	<b>6</b>
	<b>2.1. Què és l'Ensenyament Multinivell (EM)?</b>	<b>6</b>
	2.1.1. Les quatre fases de l'Ensenyament Multinivell	7
<b>III.</b>	<b>LA PROPOSTA AL CENTRE</b>	<b>9</b>
	<b>3.1. Característiques del centre i dels seus alumnes</b>	<b>9</b>
	<b>3.2. Les necessitats del centre i els seus antecedents</b>	<b>9</b>
	<b>3.3. La proposta al centre</b>	<b>10</b>
	3.3.1. Requeriments de l'Ensenyament Multinivell	10
	3.3.1.1. Organització de l'aula	10
	3.3.1.2. Distribució de la classe en grups	11
	3.3.1.3. El "rol" dels alumnes al grup	12
	<b>3.4. Desenvolupament de la proposta</b>	<b>12</b>
	3.4.1. Objectius de la Unitat Didàctica (UD)	12
	3.4.2. Competències Bàsiques treballades a la UD	13
	3.4.3. Continguts de la UD	13
	3.4.4. Temporalització de la UD	13
	3.4.5. Metodologia de la UD	14
	3.4.6. Avaluació de la UD	16
	3.4.7. Activitats i estructura de la UD	17
	3.4.7.1. SESSIÓ N <sup>o</sup> 1	17
	3.4.7.2. SESSIÓ N <sup>o</sup> 2	18
	3.4.7.3. SESSIÓ N <sup>o</sup> 3	22
	3.4.7.4. SESSIÓ N <sup>o</sup> 4	26
	3.4.7.5. SESSIÓ N <sup>o</sup> 5	32
	3.4.7.6. SESSIÓ N <sup>o</sup> 6	32
	3.4.7.7. SESSIÓ N <sup>o</sup> 7	34
	3.4.7.8. SESSIÓ N <sup>o</sup> 8	36
<b>IV.</b>	<b>CONCLUSIONS I REFLEXIONS FINALS</b>	<b>37</b>
<b>V.</b>	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>39</b>
<b>VI.</b>	<b>ANNEXOS</b>	<b>41</b>
	<b>6.1. Annex 1: Rúbrica valoració de la Carpeta d'Aprenentatge</b>	<b>41</b>
	<b>6.2. Annex 2: Elecció de l'activitat</b>	<b>42</b>
	<b>6.3. Annex 3: Diari de la UD</b>	<b>43</b>
	<b>6.4. Annex 4: Autoavaluació de la UD</b>	<b>44</b>
	<b>6.5. Annex 5: Avaluació individual i grupal</b>	<b>45</b>
	<b>6.6. Annex 6: Activitat 9L1 - L'Aprenentatge Cooperatiu</b>	<b>46</b>
	<b>6.7. Annex 7: Activitat 9P1 - Coneixement d'un mateix i del grup</b>	<b>48</b>

*“Por experiencia, sabemos que es posible incluir a todos los alumnos en las aulas siempre que los educadores hagan el esfuerzo de acogerles, fomentar las amistades, adaptar el currículo y graduar las prácticas. No obstante, la inclusión plena no siempre se desarrolla con suavidad. En consecuencia es vital que los adultos no opten por la vía fácil de excluir al niño, sino que busquen soluciones para lograr la inclusión social satisfactoria”.*

(Stainback y Stainback, 1999)

# I. INTRODUCCIÓ: JUSTIFICACIÓ DE L'ESTUDI

Un dels objectius del nostre sistema educatiu és aconseguir una educació de qualitat. Segons l'OCDE (1995) l'educació de qualitat és aquella que “assegura a tots els joves l'adquisició dels coneixements, capacitats, destreses i actituds necessàries per equipar-los per la vida adulta”.

No obstant, la realitat és que dia a dia conviuen múltiples realitats socials i d'aprenentatge a les aules, pel que no és fàcil d'obtenir el màxim desenvolupament i aprenentatge per a tots i cadascun dels alumnes. Moltes de les vegades degut a què no sempre es compta amb les condicions més òptimes per poder-ho fer possible, ja sigui a nivell d'organització de centres, de disponibilitat de recursos, de plantejaments metodològics a l'aula, de presa de decisions, etc. En aquest sentit, un dels aspectes que en els darrers anys ha evidenciat un fort canvi han estat els processos de planificació i personalització del currículum, ja que ha esdevingut una eina de millora clau dels processos educatius a l'escola i, sobretot, de l'atenció rebuda a cada alumne.

La qüestió que ha sortit sovint a debat és el fet d'assolir les competències bàsiques de l'educació secundària mitjançant la separació dels alumnes per nivells o mètodes d'aprenentatge. Molts docents consideren que la diversitat a l'aula dificulta la seva intervenció. Per tant, l'ideal, segons aquesta forma de pensar, seria poder ensenyar individualment a cada alumne, però donat que no és possible, la solució es troba en agrupar els alumnes de forma homogènia.

Sovint trobem als centres de secundària la separació entre alumnes que “tenen capacitat” i els que “tenen dificultats” per aprendre. Una segregació un tant subjectiva per part del professorat, que provoca que més d'un alumne pugui ser atès, per error, en un grup diferent del que li correspondria pròpiament, de manera que el que inicialment sembla una petita equivocació pot acabar tenint conseqüències desafortunades per l'alumnat afectat. Donat que aquesta decisió pot afectar greument a l'alumnat, no sembla que sigui una solució coherent per tractar la diversitat a l'aula. De manera que, la solució sembla clara, però és difícil d'assolir. Es tracta de l'ensenyament en grups heterogenis.

Molts autors, com el Dr. Robert Ruiz i Bel (2008)- al seu llibre “*Plans múltiples i personalitzats per a l'aula inclusiva*”- consideren que per aconseguir una educació de qualitat per a tots els alumnes és necessari que els alumnes siguin atesos en un mateix centre i en una mateixa aula. Més que separar els alumnes segons les seves capacitats, cal ajustar el que s'ensenyava a les capacitats de cada un i proporcionar-les ajuts necessaris perquè cada un aprengui fins al màxim de les seves possibilitats. Així doncs, si la solució no consisteix a separar els alumnes, si se'ls ha d'agrupar en grups heterogenis, com és possible atendre, a la mateixa aula, alumnes tan diferents?

Aquesta qüestió suscita la necessitat de trobar algun mètode que creï el currículum segons la capacitat de cada alumne, desenvolupant diferents recursos didàctics que els permeti entendre'ls i així poder assolir les competències bàsiques.

Perquè aquest mètode sigui viable és necessari modificar l'estructura d'aprenentatge a les aules i focalitzar-lo a partir de tres línies: l'autoregulació de l'aprenentatge, la personalització de l'ensenyament i l'estructuració cooperativa de l'aprenentatge. D'aquesta manera, aquest mètode permetrà atendre de forma adequada la diversitat dels alumnes en una mateixa aula.

Autors, com Campbell, Collicott, Perner y Stone (1988) i Collicott (1991, 2000), aposten per l'Ensenyament Multinivell. Aquest tipus d'ensenyament es basa en la premissa que la programació d'una unitat didàctica s'ha de plantejar de manera que faciliti l'aprenentatge de tots els alumnes d'una classe, independentment de les necessitats educatives. Per tant, s'assumeix la personalització de l'ensenyament, la seva flexibilitat en funció de les característiques personals de cada alumne, s'elimina la necessitat de segregar alumnes perquè segueixin

programes diferenciats i es fa compatible els continguts que determina el programa individual d'un determinat alumne amb les activitats d'ensenyament dirigides a tot l'alumnat de la classe.

Aquest enfocament està vinculat, d'una banda, al plantejament global descrit per la UNESCO (2001) en el context d'un conjunt de pautes a seguir pels docents per aconseguir la inclusió de tots els alumnes a l'aula, i d'altra banda, a recomanacions de l'European Agency for Development in Special Needs Education (2003).

Aquestes dues institucions internacionals han aportat orientacions generals per establir pràctiques inclusives i formes de planificació de l'atenció a la diversitat, basades en estudis sobre inclusió escolar en diferents sistemes educatius de diferents països. La generalització de les orientacions donades permeten que siguin utilitzades i dutes a la pràctica en el nostre sistema educatiu.

La importància de dur a terme l'Ensenyament Multinivell a les aules ordinàries rau en el fet que, com exposa la UNESCO a les nou regles d'or de la inclusió, concretament a la regla número 4, les aules inclusives es caracteritzen pel fet de "*planificar les lliçons de manera que resultin més efectives per a tots*", característica principal de l'Ensenyament Multinivell.

Així doncs, aquest treball pretén reflexionar sobre alguns aspectes relacionats amb la qualitat de l'educació i l'atenció a la diversitat. Es pretén mostrar que és possible atendre la diversitat dels alumnes en una mateixa classe i que existeixen vies que faciliten la implantació d'una escola per tots, en la qual puguin aprendre junts alumnes diferents.

A més, una vegada explicada la necessitat de realitzar un canvi en el treball per atendre la diversitat als centres educatius i proposar el mètode de l'Ensenyament Multinivell com a una possible alternativa per solucionar aquesta necessitat, aquest treball té l'objectiu de mostrar i facilitar al lector les eines i el tipus d'activitats a utilitzar en la implantació a l'aula de l'Ensenyament Multinivell. Per tal d'explicar-lo es farà servir l'assignatura de matemàtiques i, més concretament, es pretén planificar la Unitat Didàctica de "Probabilitat" a 3er d'ESO en un centre públic de Castelldefels utilitzant aquest mètode.

La raó de contextualitzar el treball en un centre públic de Castelldefels és perquè la comissió d'atenció a la diversitat d'aquest centre en qüestió està buscant alternatives per substituir l'enfocament que està fent servir actualment el centre per atendre als diferents alumnes. D'aquesta manera, la seva coordinadora pedagògica està força interessada en estudiar la implementació del mètode d'Ensenyament Multinivell a l'aula.

Donat que conviuen multitud de personalitats, maneres d'aprendre i habilitats dins l'aula, l'Ensenyament Multinivell esdevé una alternativa molt interessant per abordar la diversitat a l'aula sense haver de seleccionar prèviament als alumnes per alguna característica o habilitat. El fonament principal d'aquest mètode rau en el fet d'ensenyar un mateix temari a tots els alumnes, és a dir, totes les alumnes han d'assolir els mateixos continguts mínims, no obstant, té una particularitat, i és que aquest temari s'adequarà als alumnes depenent de la seva manera d'aprendre. És a dir, per exemple, els alumnes menys avançats o amb dificultats d'aprenentatge solen ser més visuals, pel que s'han adequat els exercicis, sent aquest més dirigits i fins i tot, incloent-hi dibuixos i diagrames per a una millor comprensió. En canvi, els alumnes més avançats se'ls ha de plantejar problemes dels que per si sols hagin d'extreure la solució de l'enunciat i presentar els problemes amb preguntes obertes que els faci raonar.

Així doncs, és un estudi molt interessant del que s'espera que els resultats siguin el començament d'una transició cap a la inclusió de l'aula de tots els alumnes mantenint, i fins i tot, augmentant la qualitat de l'educació en aquest centre educatiu.

## II. LA NECESSITAT DEL CANVI: “EDUCACIÓ MULTINIVELL”

---

Si descartem l'agrupació homogènia permanent dels alumnes, només es podrà atendre la seva diversitat a l'aula en grups heterogenis. No obstant, per dur a terme aquesta alternativa, cal que els docents introdueixin canvis en la programació curricular que seguiran i en la manera que ensenyaran.

És evident que si optem per agrupar als alumnes de forma heterogènia no podem tractar-los com si tots fossin iguals. S'ha de tenir en compte les característiques pròpies de cada alumne, és a dir, la seva personalització, les seves habilitats i les seves competències. Aquesta és la primera condició que s'ha de donar si acceptem l'enfocament inclusiu de l'educació, com a premissa fonamental. No obstant, cal matisar que molts autors diferencien els termes de “personalització” i “individualització”, i consideren que l'educació ha de buscar la personalització. Ja que la individualització és el fet d'atendre individualment als alumnes, cosa que amb el sistema educatiu actual és molt difícil de garantir.

No obstant, aquests canvis afecten substancialment els continguts i la metodologia emprada a l'aula, a més dels objectius que es marquen i l'organització a l'aula.

Primerament, és necessari adequar els continguts segons els objectius als que es volen arribar i dissenyar les activitats de tal manera que el grup classe se senti motivat i capaç d'afrontar-les. Donat que no tots els alumnes són iguals, és imprescindible prendre en consideració les seves diferències.

També cal ajudar els alumnes a regular el seu propi aprenentatge, ensenyar estratègies d'autoregulació de l'aprenentatge. S'ha d'aconseguir que els alumnes siguin més autònoms a l'hora d'aprendre.

I, finalment, es tracta de fomentar cooperació entre els alumnes, la interacció entre els alumnes perquè s'ensenyin entre ells.

Un d'aquests mètodes per tractar l'heterogeneïtat sense negar-la, com s'ha mencionat a la introducció, és el que els impulsors de l'Escola Inclusiva denominen Ensenyament Multinivell. Aquest suposa l'adequació del currículum a les característiques personals dels alumnes. El que pretén és planificar les activitats a l'aula de tal manera que tots els alumnes assoleixin els objectius marcats del currículum no havent estat prèviament seleccionats per cap criteri de competència, habilitat ni característica personal.

### 2.1. Què és l'Ensenyament Multinivell (EM)?

Segons diversos estudis, entre els quals Collicott (1991, 2000) i Ruiz (2008), expliquen que l'EM parteix de la premissa que s'ha d'ensenyar una única lliçó a tota la classe. És una forma de planificar que condueix a personalitzar l'ensenyament i a flexibilitzar-lo per incloure a tots els alumnes a l'aula amb independència de les seves habilitats, treballant així, amb grups heterogenis. Planteja uns pilars clau, tal com plantejar als alumnes diverses activitats d'aprenentatge i diferents instruments d'avaluació per al desenvolupament de les competències i la construcció d'un coneixement significatiu.

D'aquesta manera, el professor planifica per a tots els alumnes en cada unitat didàctica i combina objectius individuals dins del currículum general i a través d'estratègies d'aprenentatge. Així, disminueix la necessitat de recórrer a programes diferenciats.

Per assolir aquesta fita el professor ha d'arribar a comprendre totalment les estratègies d'ensenyament de l'EM. Hi ha tres conceptes clau en el procediment d'aquest tipus d'ensenyament. El primer és el de la participació parcial, basat en el fet que existeix la possibilitat que l'alumne realitzi únicament un seguit d'activitats basades en el seu nivell d'habilitat. Un bon exemple és assignar a un grup de treball -denominat més endavant en aquest treball com *Grup COLOR*- unes activitats diferents als altres grup, tenint en compte, així, la taxonomia de Bloom (Collicott, 2000).

La taxonomia de Bloom (Benjamin Bloom (1954, 2000)) és útil per la preparació de preguntes i tasques segons el nivell dels alumnes. Una estructura com la taxonomia de Bloom indica els nivells de raonament. D'aquesta manera els alumnes participen en la lliçó si es plantegen preguntes apropiades que facilitin la seva participació. La taxonomia de Bloom indica els tipus de paraules i verbs que s'han d'utilitzar en cada nivell d'aprenentatge per a què els alumnes sentin el desig de participar en les tasques proposades<sup>1</sup>.

El segon és el model d'intel·ligències múltiples de Howard Gardner (Collicott, 2000), que disposa que cada individu té una manera cognitiva d'aprendre, sigui visual, auditiva, etc. I el tercer és l'aprenentatge cooperatiu (Collicott, 2000), on els alumnes aprenen entre ells.

Per tant, per desenvolupar una lliçó que reuneixi aquests punts clau, els professors podrien utilitzar els següents quatre passos com a guia:

1. Identificar els continguts més importants.
2. Estratègies de presentació de les tasques per part del professor.
3. Diferents pràctiques per a l'alumnat.
4. Diferents estratègies d'avaluació.

### 2.1.1. Les quatre fases de l'Ensenyament Multinivell

Per desenvolupar una Unitat Didàctica des de la perspectiva de l'EM, implica seguir les quatre fases, que es descriuen a continuació.

#### **1<sup>a</sup> Fase: Identificació dels continguts més importants**

El primer pas per elaborar una Unitat Didàctica basada en la EM consisteix a identificar quins són els continguts més importants que es pretén que els alumnes aprenguin. D'altra banda, els objectius que es vol que els alumnes assolixin amb relació a aquests continguts no necessàriament han de ser idèntics per a tots els alumnes (personalització).

#### **2<sup>a</sup> Fase: Estratègies de presentació de les tasques per part del professor**

Un cop identificats els continguts fonamentals cal determinar les diferents formes a través de les quals el professor presentarà als alumnes la informació i les activitats d'ensenyament i aprenentatge. Aquestes formes hauran de ser diferents en la mesura que els alumnes presenten diferències en els seus coneixements previs i en la seva forma personal d'aprendre.

D'aquesta manera, es dissenyaran tasques d'aprenentatge adequades als diferents nivells que presenten els alumnes. Així, cada alumne podrà abordar tasques properes al seu nivell de competències i es podrà animar-lo a progressar cap a metes de major complexitat.

---

<sup>1</sup> Veure amb més detall Collicott, J. *Posar en practica l'ensenyament multinivell: estratègies per als mestres*.(pàg. 90)

### **3<sup>a</sup> Fase: Diferents pràctiques per a l'alumnat**

Aquesta fase consisteix a determinar els mètodes o tipus de pràctica que l'alumne utilitzarà en cada Unitat Didàctica per assolir els objectius previstos. Si en la fase anterior es tractava de buscar diferents estratègies d'ensenyament per part del professor, en aquesta es tracta de buscar diferents estratègies d'aprenentatge per part de l'alumne, tenint sempre en compte les seves diferents canals d'expressió oral i escrita. Així doncs, el professor ha d'utilitzar diferents mitjans per comunicar amb els seus alumnes amb la finalitat que cap alumne quedi exclòs en la realització de les tasques proposades. No obstant, no només cal presentar de diferents formes les tasques als alumnes, sinó que cal proposar diferents tasques amb una graduació de competències, de menys a més complexes, sobre els continguts seleccionats, de manera que tots els alumnes puguin progressar en el seu aprenentatge.

### **4<sup>a</sup> Fase: Diferents estratègies d'avaluació**

En aquesta quarta i última fase s'ha de seguir un procés similar al que s'ha citat en les fases anteriors: cada alumne ha de ser avaluat a partir d'activitats com les que s'han utilitzat per facilitar el seu aprenentatge i tenint en compte, evidentment, el seu nivell individual d'aprenentatge. Això significa que, tots els alumnes assoliran uns objectius generals fixats, a més de ser avaluats tenint en compte la seva capacitat.



## III. LA PROPOSTA AL CENTRE

### 3.1. Característiques del centre i dels seus alumnes

Tal i com s'ha esmentat a la introducció, per tal de contextualitzar la proposta d'implantació de l'EM a les matemàtiques de 3er d'ESO, concretament la Unitat Didàctica de Probabilitat, s'ha tingut en compte les circumstàncies que esdevenen a un centre públic situat al municipi de Castelldefels.

Aquest centre en qüestió va néixer a final dels anys noranta per la necessitat d'acollir al número creixent d'alumnes que hi havia a la població. Va néixer amb poc més d'un centenar d'alumnes i actualment, alberga quasi bé un miler d'alumnes cada any educatiu, dels quals aproximadament el 60% estan cursant l'Educació Secundària Obligatòria.

L'entorn familiar dels alumnes és molt variat. Hi ha pares amb estudis universitaris i d'altres sense aquests coneixements però que desitgen que puguin ser assolits pels seus fills. Socialment, predomina la classe social mitjana o mitjana-baixa, tot i que, cada any augmenta la diversitat social.

Tenint en compte la realitat socioeconòmica del país i la del nostre sistema educatiu, el centre atén a un número relativament important d'alumnes amb necessitats educatives especials, amb necessitats socials i amb problemes de retard d'aprenentatge.

La creixent diversitat del fenomen migratori (amb presència d'alumnat xinès, de l'est d'Europa, hispanoamericà, magrebí, etc.)<sup>2</sup> representa un repte a l'hora d'atendre la integració social i educativa d'aquests adolescents.

Per tal d'atendre adequadament a aquesta diversitat d'alumnes, el centre ha optat pels desdoblaments. Els cursos de l'ESO presenten sis grups per cada nivell. Hi ha quatre grups, anomenats A1, A2, A3, A4, que són ordinaris, és a dir, són alumnes diversos amb el grau d'autonomia suficient per a l'aprenentatge i desenvolupament de les seves capacitats. I dos grups, B1 i B2, en els quals trobem alumnes amb molta més necessitat d'atenció individual per part del professorat per tal d'assolir els aprenentatges i desenvolupar les competències bàsiques. Solen treballar continguts i metodologia adaptada. L'objectiu és acompanyar-los per assegurar el màxim rendiment acadèmic possible i afavorir el seu desenvolupament personal.

La distribució de l'alumnat en els diferents grups la proposa l'equip docent, seguint els criteris establerts (els informes dels tutors dels centres d'educació primària, per exemple) i s'informa a les famílies dels alumnes. No obstant, també hi ha possibilitat de reassignar a un alumne a un altre grup, atesa la valoració que faci l'equip docent de les necessitats de l'alumnat.

### 3.2. Les necessitats del centre i els seus antecedents

L'equip directiu del centre, preocupat per l'aprenentatge dels seus alumnes, i conscient dels possibles efectes negatius que pot causar la separació per nivells en l'aprenentatge i desenvolupament personal dels alumnes, ha proposat l'estudi de la implantació de l'EM en l'assignatura de matemàtiques, com a alternativa en el tractament de la diversitat al centre.

Són alguns els centres de Catalunya que ja han implantat aquest mètode de treball per tractar la diversitat. Vaig tenir l'oportunitat d'assistir a la conferència sobre l'EM al març del 2012 al Servei d'Educació de Castelldefels (Educació Multinivell) en la que un institut de Molins de Rei va exposar als assistents la seva posada en pràctica de l'EM a l'aula en l'assignatura de

<sup>2</sup> Font: Padró municipal d'habitants a 1 de gener de 2011. [www.castelldefels.es](http://www.castelldefels.es)

ciències naturals de 1er d'ESO. Portaven quatre anys duent a terme aquest mètode i la seva valoració va ser molt positiva, ja que l'adhesió i l'acceptació dels alumnes al nou mètode va ser molt bona.

Les característiques d'aquest institut són prou semblants a les del centre de Castelldefels en qüestió, per tant, considero que el punt del qual partim és idoni. No obstant, en aquest centre només s'ha implantat l'EM en l'assignatura de ciències naturals, de manera que, es presenta com un repte aconseguir implantar aquest mètode en l'assignatura de matemàtiques.

### 3.3. La proposta al centre

Com s'ha comentat a la introducció, l'objectiu d'aquest treball és aconseguir dissenyar la Unitat Didàctica de Probabilitat de 3er d'ESO utilitzant el mètode de l'EM. Hem puntualitzat que els objectius principals d'aquest mètode són la inclusió de tots els alumnes de l'aula i adequar els continguts a les possibilitats de cada alumne.

Per tal d'instaurar aquest mètode a l'aula, és necessari primerament que la mentalitat i la predisposició del centre a dur a terme aquest canvi siguin les òptimes. De la mateixa manera, demana una dosi important de compromís i de planificació per part dels professors. No requereix una formació exhaustiva, però sí demana que els professors repensin prèviament el material que volen ensenyar. Això fa necessari que un professor abandoni la manera tradicional d'ensenyar, ja que l'EM deixa enrere les aules controlades i dirigides pel professor i aposta cap a l'elecció i autonomia dels alumnes. Esdevé un mitjà per satisfer les necessitats dels alumnes en cadascun dels seus nivells i també les necessitats dels currículum.

#### 3.3.1. Requeriments de l'Ensenyament Multinivell

Per implantar de l'EM a l'aula es requereix un gran esforç per part del professorat. L'EM posa en relleu la cooperació entre els alumnes, evitant la formació de grups d'alumnes permanents, i permet que els alumnes participin en el seu propi aprenentatge, pel que aquest mètode respon tant a les seves necessitats socials i emocionals, com a les necessitats educatives.

Aquest mètode ha de contemplar diferents activitats d'aprenentatge perquè permetin desenvolupar les competències a partir de les intel·ligències múltiples (Howard Gardner, 1983). Cada unitat didàctica ha de servir perquè tot l'alumnat de l'aula pugui aprendre. Per aquesta raó, el docent ha de proposar un mateix contingut amb diferents maneres de presentar la informació, múltiples propostes d'expressió d'alumnat i implicació de l'alumnat, a més d'activitats d'aprenentatge cooperatiu.

D'altra banda, la implantació de l'EM també requereix un canvi organitzatiu dins l'aula. Donat que les lliçons no són magistrals, la planificació i distribució de l'aula és vital pel correcte funcionament.

##### 3.3.1.1. Organització de l'aula

Per treballar pel mètode de l'EM és molt important la distribució i l'organització a l'aula. S'utilitzen taules per treballar en grup. A més, cal disposar d'un canó o una pissarra digital per projectar les activitats proposades pel professor o les activitats realitzades pels alumnes. Així mateix, també seran necessaris uns quants ordinadors de sobretaula, però també poden ser substituïts per portàtils.

A la Figura 1 es presenta una possible distribució de l'aula cooperativa. Aquesta imatge ha estat agafada del model de treball d'Ensenyament Multinivell de l'Institut de Molins de Rei.

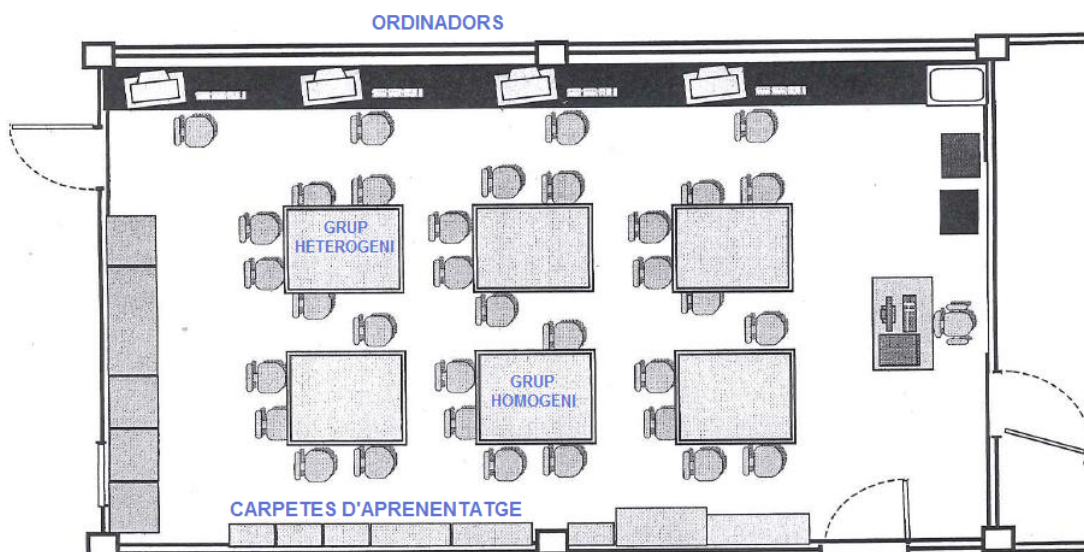


Figura 1: Exemple de distribució d'aula per a la pràctica de l'EM.

Tal i com s'observa a la Figura 1 l'aula estarà distribuïda en grups. Aquests grups seran d'entre 3 i 4 alumnes, depenent del nombre d'alumnes i dels diferents nivells d'aprenentatge que hi hagi en el grup classe. La distribució entre grups heterogenis o homogenis dependrà de la planificació de la sessió que hagi pensat el professor. A més, podem observar que hi ha ordinadors a l'aula, amb els quals els alumnes realitzaran activitats en grup. El prestatge on estaran les Carpetes d'Aprenentatge, serà on cada grup deixi les activitats realitzades durant tota la unitat didàctica (una altra opció és que cada alumne les guardi a la seva carpeta).

### 3.3.1.2. Distribució de la classe en grups

L'EM es basa en la premissa del treball cooperatiu, per tant, el mètode de treball és en grups. No obstant, donat que l'EM té com a objectiu que tots els alumnes adquireixin els continguts mínims de la unitat i alhora, que la dificultat dels continguts estigui adequada a les possibilitats de cada alumne, la classe es distribuirà en dos tipus de grups: els "Grup NOM" i els "Grup COLOR". Les característiques de cada grup són les següents:

- Els *Grup NOM* són els denominats grups heterogenis, és a dir, grups formats per alumnes amb diferents nivells d'aprenentatge. S'intentarà que la distribució dels grups sigui, a més de tenint en compte el nivell d'aprenentatge de cada alumne, l'afinitat entre ells. Aquest tipus de grup inclou les activitats que realitzaran tots els alumnes de la classe.
- Els *Grup COLOR* són els grups homogenis, és a dir, grups distribuïts segons el seu nivell d'aprenentatge. Aquests grups poden ser: *VERMELL*, *GROC* i *VERD*, que corresponen a les activitats d'aprenentatge proposades segons els diferents nivells i dificultats. Pel que, *VERMELL* equival al nivell més alt, el *GROC* al nivell mitjà i el *VERD* al nivell més baix.

Cal matisar que a l'EM els alumnes no només treballen en grup, sinó també hi ha un treball individual, que bàsicament es reflecteix amb el treball autònom a casa i amb la participació individual al grup de treball. A més, la distribució dels alumnes en els *Grup NOM* i *Grup COLOR* serà una tasca del professor.

### 3.3.1.3. El "rol" dels alumnes al grup

Donat que la base de l'EM és el treball cooperatiu i col·laboratiu, pel bon funcionament dels grups i una bona gestió de l'aula, s'estableixen un seguit de càrrecs o responsabilitats als alumnes que assumeixen de manera rotatòria. Són els següents:

- *Coordinador/a* del grup és la persona encarregada de comprovar que tots els membres del grup tinguin clara la seva tasca, a més, coordina les intervencions dels membres del grup i vigila que el grup no perdi el temps.
- *Secretari/a* és la persona encarregada de recollir els documents utilitzats pels membres del grup i arxivar-los a la carpeta d'aprenentatge.
- *Ajudant/a de coordinació* és la persona que controla el to de veu del grup i l'encarregada, en el cas de l'absència d'algun dels membres del grup, d'assumir les seves tasques.
- *Responsable del material* és la persona encarregada de supervisar que tots els membres del grup s'hagin apuntat a l'agenda la feina que cal fer a casa i s'encarrega al proper dia de comprovar si l'ha feta o no. A més, és la persona responsable de vetllar pel material que el grup necessita, proveint-lo i retornant-lo al finalitzar la classe.

## 3.4. Desenvolupament de la proposta.

Per tal de mostrar al lector les eines i el tipus d'activitats emprats en l'EM, una manera il·lustrativa de fer-ho és amb un exemple. D'aquesta manera, tal i com s'ha esmentat a la introducció, es procedirà a l'elaboració del material docent per ensenyar la Unitat Didàctica de Probabilitat a 3er d'ESO.

Així doncs, per elaborar la Unitat Didàctica el primer pas és establir els objectius de la Unitat Didàctica, posteriorment, els conceptes i continguts a ensenyar, les activitats relacionades a desenvolupar i la manera d'avaluació d'aquestes activitats.

Un cop definits tots aquests conceptes, es presentaran un seguit de tasques i activitats proposades als alumnes, distribuïdes per sessions que serviran al lector com a guia o exemple del tipus d'activitats utilitzades en l'EM en el context de matemàtiques.

### 3.4.1. Objectius de la Unitat Didàctica (UD)

Els objectius que es treballen a la UD de Probabilitat a 3er d'ESO són els següents:

- Comprendre el concepte d'experiment aleatori i distingir-lo d'un determinista.
- Identificar els successos aleatoris després d'un experiment i diferenciar un succés simple d'un succés compost.
- Trobar alguns successos especials: el succés segur i el succés impossible.
- Operar amb successos aleatoris i interpretar els successos resultants després d'efectuar unions, interseccions i diferències.
- Assignar probabilitats als successos aleatoris senzills de dues formes diferents: mitjançant la Regla de Laplace i a través de les freqüències relatives (Llei dels grans nombres).

### 3.4.2. Competències Bàsiques treballades a la UD

Les competències bàsiques són treballades a l'aula a través de les següents opcions múltiples:

- **Competència matemàtica:** Dominar les tècniques de la probabilitat com a mitjà per resoldre problemes i interpretar taules per treure'n conclusions.
- **Competència social i ciutadana:** organitzar la informació i compartir-la amb el grup, respectar les decisions preses pel grup, treball cooperatiu en una part de les activitats, relacionar el càlcul de probabilitats amb la predicció de certs fenòmens habituals com les malalties, les tendències de moda, ...
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal:** Escollir la millor estratègia entre les apreses en aquesta unitat per resoldre problemes relacionats amb l'atzar.
- **Competència comunicativa i lingüística:** comprensió lectora i reflexió, compartir el coneixement de forma col·laborativa i oral des de diferents conceptes relacionats amb el tema, realització d'un mapa conceptual i mental on es reculli tot allò que s'ha après, realitzar diferents activitats d'aplicació a diferents nivells i realitzar activitats d'ampliació i aprofundiment.
- **Competència artística i cultural:** realització d'esbossos per entendre i resoldre els problemes plantejats.
- **Competència digital i tractament de la informació:** utilització de suports informàtics, com el full de càlcul (*Excel o altres*) per demostrar la Llei dels Grans Nombres.
- **Competència d'aprendre a aprendre:** Saber contextualitzar els resultats obtinguts en problemes on intervé la probabilitat per adonar-se si són, o no, lògics, fer-se preguntes sobre què es treballa, realització de diaris, mapes mentals i conceptuals, carpeta d'aprenentatge, etc.

### 3.4.3. Continguts de la UD

- Experiments i successos aleatoris o esdeveniments dependents de l'atzar.
- Els successos i les seves probabilitats.
- Tipus de successos: Successos segurs, probables i impossibles. Incompatibilitat, unió i intersecció de successos.
- Propietats dels successos.
- Freqüències absolutes i freqüències relatives.
- Diagrames d'arbre.
- Comportament regular de l'atzar. Llei dels grans nombres.
- Regla de Laplace per esdeveniments elementals equiprobables.

### 3.4.4. Temporalització de la UD

La UD es realitzarà en 8 sessions, és a dir, 8 hores lectives. Les quals es distribuïran de la següent forma:

- **Sessió nº 1:** Treball cooperatiu. Què és? Quins rols tindrem?
- **Sessió nº 2:** Introducció a la Probabilitat. Concepte d'experiment aleatori, espai mostral i succés. Taula de doble entrada i diagrama d'arbre.
- **Sessió nº 3:** Tipus de successos.
- **Sessió nº 4:** Probabilitat d'un succés. Llei dels grans nombres i Regla de Laplace.
- **Sessió nº 5:** Exercicis de Tipus de successos i Probabilitat d'un succés.
- **Sessió nº 6:** Mapa conceptual del tema i exercicis d'aprofundiment.

- Sessió nº 7: Prova escrita.
- Sessió nº 8: Correcció de la prova escrita i anàlisi dels resultats.

A banda de les hores lectives, s'estima que el temps que els alumnes hauran de dedicar a casa és d'aproximadament 5 hores.

### 3.4.5. Metodologia de la UD

Per elaborar aquesta programació de la UD de Probabilitat a 3er d'ESO utilitzant el mètode d'Ensenyament Multinivell, s'han utilitzat recursos de llibres, d'Internet i documents específics utilitzats en l'EM en un centre de Molins de Rei<sup>3</sup>.

En iniciar la UD, l'alumnat disposarà de tots els recursos necessaris per realitzar la UD que estaran disponibles al *Moodle* de l'Institut. La planificació de la UD es realitza a través d'un Quadre Organitzatiu que descriu la planificació de la UD dividida per sessions (Taula 1). En aquest quadre s'indiquen i es distribueixen les activitats d'aprenentatge separades en diferents apartats (continguts de la UD i altres) que estan disposats en fileres on, a cada apartat hi ha les activitats relacionades. Les tasques referents a continguts bàsics es realitzaran en els *Grup NOM*, és a dir, en els grups cooperatius heterogenis. En canvi, els grups homogenis duren a terme tasques que s'adaptin a les seves necessitats i estils d'aprenentatge -*Grups COLOR*-.

D'aquesta manera, la columna de *Grups NOM* inclou les activitats que es realitzen en grups heterogenis i realitzades per tota la classe. D'altra banda, cada columna de *Grups COLOR* (Vermell, Groc i Verd) correspon a les activitats de diferents nivells de dificultat. No obstant, per exemple, una activitat dissenyada i destinada pel Grup Verd, també podrà ser realitzada pel Grup Groc com a mètode de reforç.

A més de les activitats d'aprenentatge, els alumnes trobaran al *Moodle* un seguit de documents que aniran realitzant al llarg de la UD. I al final de la UD cada estudiant entregarà la seva Carpeta d'Aprenentatge<sup>4</sup>. Aquesta carpeta inclourà a més de les activitats d'aprenentatge proposades a la UD, tot el seguit de documents que es demanen al Quadre Organitzatiu. D'aquesta manera, aquesta carpeta serà valorada pel professor seguint la rúbrica que es presenta a l'Annex 1, la qual entregarà a cada alumne al principi de la UD.

---

<sup>3</sup> Veure tots els recursos utilitzats a l'apartat de "Recursos Didàctics de Probabilitat" a la Bibliografia.

<sup>4</sup> Veure rúbrica de valoració de la Carpeta d'Aprenentatge, Annex 1.



Taula 1: Quadre organitzatiu de la UD de Probabilitat.

**TEMA 9: PROBABILITAT**

Relació de propostes d'aprenentatge de l'alumne/a:

En aquest tema treballarem:		Grups NOM		Vermell			Groc			Verd		
Activitats d'ensenyament-aprenentatge	Què és el treball cooperatiu?	9L1	9P1									
	Experiments aleatoris, Espai Mostral i Succés	9L2	9P2	9C2			9B2			9A2		
	Tipus de successos	9L3	9P3	9C3	9B2	<i>Diari</i>	9B3	9A3	<i>Diari</i>	9A3	<i>Diari</i>	
	Probabilitat de successos	9L4	9P4	9C4			9B4			9A4		
	MAPA CONCEPTUAL I PARAULES CLAU	9M5										
	EXERCICIS CONSOLIDACIÓ	<i>9P5, 9P6, 9P7, 9P8</i>										
	AUTOAVALUACIÓ	9Av										
	PROVA ESCRITA	9Pe										

**NOTA:**

- Les activitats en lletra cursiva i subratllades són propostes de treball autònom per fer a casa (DEURES)
- Les activitats que no s'acaben a classe s'acabaran a casa (DEURES).
- ACTIVITATS REALITZADES: quan acabis una activitat pinta el requadre per indicar que l'has acabada.
- Cal conservar aquest full per a la CARPETA D'APRENTATGE un cop senyalades les activitats realitzades.

Com s'observa al Quadre Organitzatiu, les activitats proposades a la UD es divideixen en codis. Existeixen principalment, cinc tipus de codis, els quals corresponen a cinc tipus d'activitats:

- **Lectures o teoria** (designades amb la lletra "L")  
Per exemple, *Activitat 9L1* significa "la Lectura nº 1 del Tema 9".  
Les lectures són obligatòries i comunes per tot l'alumnat. Es tracta de la teoria de la UD.
- **Pràctiques** (designades amb la lletra "P").  
Per exemple, *Activitat 9P2* significa "la Pràctica nº 2 del Tema 9".  
Les pràctiques són obligatòries i comunes per tot l'alumnat. Són les activitats que els alumnes realitzen en el Grup NOM.
- **Activitats Nivell** (designades amb les lletres "A" (Verd), "B" (Groc), "C" (Vermell) ).  
Per exemple, *Activitat 9B3* significa "l'Activitat del nivell mitjà nº 3 del Tema 9".  
Les activitats corresponents a cada *Grup COLOR* són obligatòries per cada Grup *COLOR*. Poden ser realitzades tant a l'hora de classe com a casa de deures.
- **Activitats a escollir** (designades amb la lletra "P", en cursiva i subratllades).  
Aquestes activitats són opcionals per els alumnes, les han de entregar a través del *Moodle* fins a quatre dies abans de la data de realització de la Prova Escrita. En aquest moment, el professor penjarà les solucions d'aquestes activitats i els alumnes podran verificar el seu resultat.  
Les activitats escollides formaran part de la Carpeta d'Aprenentatge, s'hauran d'incloure i es tindrà en compte en el càlcul de la nota final de la carpeta, tal i com s'indica en la rúbrica d'avaluació de la carpeta d'aprenentatge, a l'Annex 1.

Així mateix, l'alumne que realitzi aquestes activitats haurà d'omplir la fitxa d'"Elecció d'activitat"<sup>5</sup>. El que pretén aquesta fitxa es que l'alumne avalui la importància de l'activitat que ha escollit i què li aporta.

- **Mapa conceptual** (designat amb la lletra "M").  
És tracta d'una activitat "resum" que els alumnes realitzaran al acabar la Unitat Didàctica per tal d'entendre tots els conceptes treballats a classe. Consistirà en un diagrama on els alumnes, a partir d'algunes paraules, hauran de completar el mapa conceptual a partir d'unes paraules claus facilitades pel professor. Així mateix, hauran de definir aquestes paraules i posar exemples de cada un d'ells.

A partir d'aquest Quadre Organitzatiu, l'estudiant realitzarà les activitats proposades. Cada alumne ha de presentar el seu Quadre Organitzatiu completat a la Carpeta d'Aprenentatge.

### 3.4.6. Avaluació de la UD

L'avaluació en l'EM és formativa, és a dir, s'avalua per aprendre, ja que els estudiants aprenen satisfactòriament quan entenen el que estan aprenent i el sentit del que aprenen.

Hi ha diverses maneres d'avaluar el procés d'aprenentatge, de les quals s'han de destacar dos:

- La realització d'un **Diari**<sup>6</sup>: Es tracta que els alumnes completin una fitxa comentant els següents aspectes de manera oberta. El Diari de la UD es demanarà de deures (treball autònom) i l'adjuntaran a la Carpeta d'Aprenentatge. Es realitzarà una vegada s'hagin fet les sessions de conceptes bàsics i s'hagin practicat, d'aquesta manera els alumnes se sentiran segurs pera contestar les preguntes incloses en el Diari, que són les següents:
  - *Què he après fins avui?*  
El Diari de la UD es realitza entre la segona i la tercera sessió perquè es considera que s'han treballat conceptes que els alumnes han d'haver consolidat. Amb aquesta pregunta es pretén que el professor vegi si s'estan assolint o no.
  - *Com ho he après?*  
Amb aquesta pregunta es pretén esbrinar si el Grup NOM funciona correctament i les sinergies són positives.
  - *Què he entès bé?*  
Es pretén veure què és el que l'alumne/a ha entès correctament.
  - *Quines coses no acabo d'entendre?*  
Identificar les mancances per treballar en les properes sessions.

D'aquesta manera, permet a l'alumnat reflexionar i crear un *feedback* entre ell i el professorat.

- La realització de la **Carpeta d'Aprenentatge**: està constituïda per les activitats que són més importants en el coneixement:
  - Lectures.
  - Activitats comunes.
  - Activitats d'aprenentatge que cada alumne tria documentant el per què de la seva elecció.
  - Mapa conceptual.

<sup>5</sup> Veure model d'Elecció d'Activitat a l'Annex 2.

<sup>6</sup> Veure model de Diari de la UD a l'Annex 3.



Respecte a l'avaluació final, aquesta es constitueix mitjançant dos punts:

- **L'Autoavaluació:** L'Autoavaluació es realitza al finalitzar la UD. L'Autoavaluació avaluarà tant els coneixements adquirits per part de l'alumnat<sup>7</sup>, com també l'avaluació d'un mateix en vers al paper exercit dintre del grup de treball<sup>8</sup>. D'aquesta manera es realitzaran els dos documents de manera autònoma i s'adjuntaran a la Carpeta d'Aprenentatge.
- **La Prova Escrita:** La prova escrita es realitzarà de manera individual al finalitzar la UD. S'avaluarà un mateix contingut exposat de diverses maneres, segons el grau de dificultat. A més, es procurarà que les tasques que realitzin els alumnes estiguin contextualitzades i s'avalui l'assoliment de les competències bàsiques a través d'elles.

Al principi de la UD, a més d'entregar la rúbrica d'avaluació de la Carpeta d'Aprenentatge, també es comunicarà per escrit als alumnes el pes de cada activitat sobre el total de l'avaluació.

En concret, la realització de la Carpeta d'Aprenentatge serà d'un 50%, la Prova Escrita d'un 30% i l'actitud a classe d'un 20%.

En quant a l'actitud a l'aula, a cada sessió tots membres de cada grup partiran de la nota màxima, un 10, i cada cop que s'avisí a un grup, sigui *Grup NOM* o *Grup COLOR*, per mal comportament o per to de veu excessiu, la nota dels membres del grup en qüestió anirà minorant en 1 punt. Al final de la UD es farà la mitjana aritmètica entre totes les notes d'actitud de cada alumne.

### 3.4.7. Activitats i estructura de la UD

Per tal de fer més il·lustrativa la manera d'impartir classe a través del mètode de l'EM, es presenten els continguts i les activitats proposades dividides per sessions:

#### 3.4.7.1. SESSIÓ N<sup>o</sup> 1

La planificació de la sessió és la següent:

En aquesta primera sessió de la unitat es vol introduir als alumnes aprendre matemàtiques a través del mètode de l'Ensenyament Multinivell, treballant tècniques relacionades amb el treball cooperatiu. Així, s'explicarà el funcionament de les classes, el paper de cada alumne dins de l'equip i la importància de fer el treball en equip.

D'aquesta manera es llegirà una guia on explica el paper i les funcions de cada un dels membres de l'equip (com s'han explicat anteriorment, veure apartat 3.3.1.3. d'aquesta memòria i veure guia de funcions a l'Annex 6). Tanmateix, es realitzarà un exercici individual d'autoconeixement. Aquesta activitat servirà perquè el professor i els propis alumnes coneguin les seves aptituds i mancances en quant al treball cooperatiu<sup>9</sup>.

<sup>7</sup> Veure model d'Autoavaluació de coneixements a l'Annex 4.

<sup>8</sup> Veure model d'Autoavaluació del paper al grup de treball a l'Annex 5.

<sup>9</sup> Veure model de reflexió de treball cooperatiu a l'Annex 7.

### 3.4.7.2. SESSIÓ N<sup>o</sup> 2

La planificació de la sessió és la següent:

Aquesta sessió és completament en *Grups NOM*. Es realitzarà la lectura i les activitats corresponents al Grups NOM (9L2 i 9P2). Les activitats que no s'acabin seran de deures (fer-los a casa). Les activitats dels *Grups COLOR* es realitzaran de deures. El professor intervé de manera personal.

La lectura obligatòria per tot l'alumnat a la segona sessió és l'activitat 9L2 que es presenta a continuació:

#### ACTIVITAT 9L2: CONCEPTES D'EXPERIMENTS ALEATORIS, ESPAI MOSTRAL I SUCCÉS

Aquesta lectura es realitzarà amb tot el grup. Estudiarem els conceptes bàsics de Probabilitat, tals com, què és un experiment aleatori, l'espai mostral i els seus esdeveniments o successos.

##### **Espai mostral i esdeveniments**

Un experiment aleatori és aquell que abans de realitzar-lo no es pot predir el resultat que s'obtindrà, el resultat depèn de l'atzar. En cas contrari es diu **determinista**.

Encara que en un experiment aleatori no sabem amb exactitud el resultat que obtindrem, sí que coneixem per endavant tots els seus possibles resultats.

- L'**espai mostral** és el conjunt format per tots els resultats possibles d'un experiment aleatori. Es designa amb la lletra **E**. Els elements que el formen s'escriuen entre claus: { }.

Cada un d'aquests possibles resultats es diu **esdeveniment elemental**.

- Anomenarem **succés** a qualsevol subconjunt de l'espai mostral. El mateix espai mostral és un succés anomenat **succés segur** i el **conjunt buit**,  $\emptyset$ , és el **succés impossible**.

$\emptyset$ : símbol amb què es designa el conjunt buit o que no té cap element.

**Exemple:** En l'experiment aleatori de "tirar un dau":

Hi ha 6 resultats possibles.

A continuació es mostra l'espai mostral "E" i alguns successos:

**ESPAI MOSTRAL:**

$E = \{ \text{1}, \text{2}, \text{3}, \text{4}, \text{5}, \text{6} \}$

**ALGUNS SUCCESOS:**

$A = \{ \text{1}, \text{3}, \text{5} \}$  "sortir imparell"

$B = \{ \text{3}, \text{6} \}$  "sortir múltiple de 3"

$C = \{ \text{6} \}$  "sortir un 6"

No obstant, en moltes ocasions un experiment aleatori està format per la successió d'altres més senzills, s'anomena, aleshores, esdeveniment **compost**. És el cas de "tirar dos daus", "llançar dues o més monedes", "extreure diverses cartes d'una baralla",...

En aquests casos per obtenir l'espai mostral es pot utilitzar alguna d'aquestes tècniques:

- Construir una **taula de doble entrada**, si es combinen dos experiments simples.

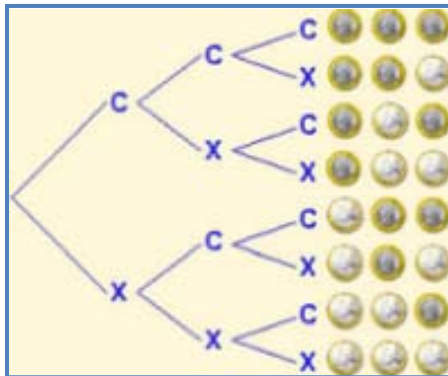
*Per exemple l'experiment, tirar dos daus:*

	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

**Resultats possibles =  $m \cdot n = 6 \cdot 6 = 36$**

- Fer un **diagrama d'arbre**, més útil si es combinen dos o més experiments simples.

*Per exemple l'experiment, tirar tres monedes:*



**Resultats possibles =  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$**

Observa que si el primer experiment té **m** resultats diferents i el segon **n**, el nombre de resultats per a la combinació d'ambdós experiments és **m·n**.

Les activitats proposades als alumnes a la segona sessió són la 9P2 (obligatòria per a tots els alumnes). Les activitats 9A2, 9B2 i 9C2 es realitzaran depenent de la dificultat. Es presenten a continuació:

**ACTIVITAT 9P2:**

- a) Dels següents experiments assenyalau quins depenen de l'atzar i quins no:
- Llançar dues moneda a l'aire.
  - Obrir una aixeta.
  - Extreure una carta d'una baralla.
  - Llançar una moneda trucada amb dues cares.
  - Tirar un dau.

- b) Digues l'espai mostral del següents esdeveniments aleatoris i dos successos possibles. Raona-ho amb els teus companys.

- Llancem una moneda.  $E = \{ \quad , \quad \}$
- Llançar un dau. \_\_\_\_\_
- Extreure una carta d'espases de la següent baralla espanyola.



\_\_\_\_\_

- Fer girar aquesta ruleta (colors).

\_\_\_\_\_



- c) Fes una taula de doble entrada o un diagrama d'arbre i descriu l'espai mostral associat a cada un dels següents experiments aleatoris. Quants resultats té cada experiment?

- Llançar tres monedes.
- Llançar tres daus i anotar la suma dels punts obtinguts.
- Extracció de dues boles d'una urna que conté quatre boles blanques i tres negres.

**ACTIVITAT 9A2:**

- a) Considerem l'experiment aleatori de llançar un dau.

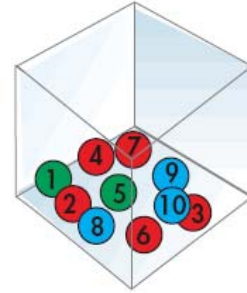
Quin és el seu espai mostral?  $E = \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \}$

Digues els successos següents:

- Que surti un nombre parell:  $A = \{ \quad , \quad , \quad \}$
- Que surti un nombre imparell:  $B = \{ \quad , \quad , \quad \}$
- Que surti un múltiple de 2:  $C = \{ \quad , \quad , \quad \}$
- Que surti un divisor de 4:  $D = \{ \quad , \quad \}$
- Que surti el número 5:  $F = \{ \quad \}$

**ACTIVITAT 9B2:**

- a) De l'urna que tens a la dreta, traiem una bola a l'atzar i anotem el seu número. Descriviu l'espai mostral. Quants casos té?



- b) Descriviu els esdeveniments següents:
- i. Bola Vermella =  $A = \{ \quad \quad \quad \}$
  - iii. Bola Verda =  $B = \{ \quad \quad \quad \}$
  - iv. Bola Blava =  $C = \{ \quad \quad \quad \}$
  - vi. Bola vermella amb nombre senar =  $D = \{ \quad \quad \quad \}$
  - vii. Bola amb nombre parell =  $F = \{ \quad \quad \quad \}$

**ACTIVITAT 9C2:**

- a) Juguem al Joc de l'Oca:

En el transcurs d'una partida al joc de l'Oca ens trobem en la següent situació: Li toca tirar a en Lluís (a la casella número 57) i l'Amaia està a la 51. Quan Lluís llanci el dau:

- Si surt un 1, cau a la casella de "la mort", acaba la partida i Lluís perd.
- Si surt un 2 o un 6, Lluís guanya.
- En els altres casos, li arriba el torn a Amaia.

**Preguntes:**

- i. Quants resultats diferents es poden obtenir en llançar un dau?  
\_\_\_\_\_
- ii. Representa aquests resultats formant un conjunt:  $E = \{ \quad \quad \quad \}$
- iii. Quants elements té E? \_\_\_\_\_
- iv. Escriure els elements dels subconjunts d'E següents:

$A = \text{"que Luis guanyi a la 1ª tirada"} = \{ \quad , \quad \}$

$B = \text{"que Luis caigui a la casella de la mort"} =$

$C = \text{"que li arribi el torn a Amaia"} =$

$D = \text{"que surti senar"}$

$F = \text{"que surti més gran que 4"}$

$E = \text{"que surti entre 0 i 7"}$

$G = \text{"que surti el 5"}$ .

$H = \text{"que surti el 7"}$

### 3.4.7.3. SESSIÓ N<sup>o</sup> 3

La planificació de la sessió és la següent:

En aquesta sessió es deixaran 40 minuts per fer les activitats corresponents *als Grups NOM* (9L3 i 9P3) i després es posaran en comú les activitats proposades a la sessió per consolidar conceptes.



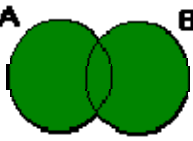

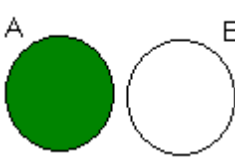
De deures es realitzarà el Diari de la UD.

D'aquesta manera el professor podrà fer un seguiment de què s'ha après fins ara i poder flexibilitzar les següents sessions. Aquest document es lliura de manera virtual a través del *Moodle* i la seva realització és obligatòria per tot l'alumnat.

La lectura obligatòria per tot l'alumnat a la tercera sessió és l'activitat 9L3 que es presenta a continuació:

#### ACTIVITAT 9L3: TIPUS DE SUCCESOS

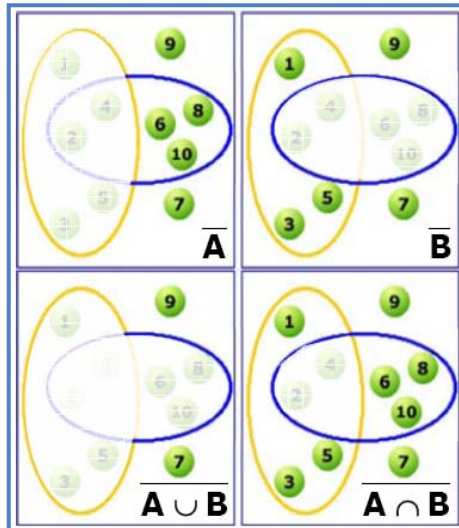
Donats dos successos A i B d'un espai mostral E, tenim:

	<p><b>Succés segur</b> és el succés que està format per tots els resultats possibles de l'experiment i per tant, coincideix amb l'espai mostral "E".</p>
	<p><b>Succés contrari</b> de A és el succés que passa quan no passa A, ho indicarem <math>\bar{A}</math>. El formen els successos elementals que no estan en A.</p>
	<p><b>Succés unió</b> de A i B, <math>A \cup B</math>, és el succés que ocorre quan passa A ó B, almenys un dels dos. Es forma ajuntant els esdeveniments elementals d'A i B.</p>
	<p><b>Succés intersecció o compatibles</b> de A i B, <math>A \cap B</math> al succés que passa quan ocorren A i B alhora. Es forma amb els esdeveniments elementals comuns.</p>
	<p>Quan la intersecció de dos successos és el succés <b>impossible</b>, és a dir que no poden passar simultàniament mai, es diu que tots dos són <b>incompatibles</b>. A i B incompatibles si <math>A \cap B = \emptyset</math></p>

**Atenció:** Cal no confondre els successos **contraris** i els **esdeveniments incompatibles**.

- Els esdeveniments contraris sempre són incompatibles, no poden ocórrer alhora.
- Però dos esdeveniments incompatibles no han de ser obligatòriament contraris.

### Propietats de les operacions amb successos



La unió i intersecció de successos i el succés contrari compleixen:

- La unió d'esdeveniments contraris és el esdeveniment segur, i la intersecció d'esdeveniments contraris és el succés impossible.  $A \cup \bar{A} = E$  i  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- El contrari de  $\bar{A}$  és  $A$ .
- El contrari de la unió és la intersecció dels contraris.  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- El contrari de la intersecció és la unió dels contraris.  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Les activitats proposades als alumnes a la tercera sessió són la 9P3 (obligatòria per a tots els alumnes). Les activitats 9A3, 9B3 i 9C3 es realitzaran a la sessió nº 5. I l'activitat 9P3 es optativa per tot l'alumnat. Es presenten a continuació:

### ACTIVITAT 9P3:

Anem a tornar a llançar un dau.

Recorda que l'espai mostral és  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- a) Relaciona amb fletxes la columna de l'esquerra amb el succés corresponent de la dreta.

$A =$  Sortir un nombre major de 3.

i.  $\{2, 4, 6\}$

$B =$  Sortir un nombre major de 6.

ii.  $\{1, 3, 5\}$

$C =$  Sortir menor de 4.

iii.  $\{6\}$

$D =$  Sortir el 6.

iv.  $\{3, 4\}$

$E =$  Sortir un nombre major de 2 i menor de 5.

v.  $\{2, 4, 6\} \cup \{1\}$

- $F =$  Sortir senar. vi.  $\{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\}$
- $G =$  Sortir parell. vii.  $\emptyset$
- $H =$  Sortir múltiple de 2. viii.  $\{4, 5, 6\}$
- $I =$  Sortir parell i més petit que 2. ix.  $\{2, 4, 6\}$
- $J =$  Sortir parell i sortir senar. x.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $K =$  Sortir menor que 7. xi.  $\{1, 2, 3\}$

- b) Llegeix les definicions i després contesta les següents preguntes relacionades amb l'exercici anterior.
- Quin tipus de succés és **J**?
  - Què observes en els successos **F** i **G**?
  - Trobes algun element en comú en els successos **C** i **G**? Com són aquests successos?
  - Quin tipus de successos són **A**, **B** i **D**?
  - Com són **G** i **H**?

### ACTIVITAT 9A3:

- a) En una urna hi ha 10 boles de colors numerades i extraïem una bola.

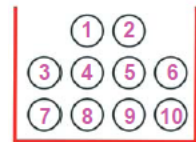
- i. És un experiment aleatori?

\_\_\_\_\_

- ii. Escriu l'espai mostral i sis successos possibles.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



- b) Digues si són compatibles o incompatibles els següents esdeveniments associats a l'experiment de llançar un dau.

i.  $A = \{1, 3\}$  i  $B = \{4, 5, 6\}$

ii.  $A = \{3, 4, 5\}$  i  $B = \{2, 4, 6\}$

iii.  $A = \{2\}$  i  $B = \{1, 2\}$

iv.  $A = \{3, 4, 5\}$  i  $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

- c) S'extreuen dues cartes de la baralla i es mira el pal. Indica quina opció i., ii. o iii., és el succés contrari de **S**?



S = "Les dues són d'ors"

- i. "Cap és d'ors"
- ii. "Com a mínim una és d'ors"
- iii. "Com a mínim una no és d'ors"

S = "Cap és de copes"

- i. "Les dues són de copes"
- ii. "Com a mínim una és de copes"
- iii. "Com a mínim una no és de copes"

### ACTIVITAT 9B3:

- a) Calcula les possibilitats que es demanen a continuació mitjançant un diagrama d'arbre. Si en un equip de futbol disposen per jugar de pantalons blancs o negres, i de camisetes vermelles, blaves o verdes. ¿De quantes maneres diferents es poden vestir per un partit?
- b) Considera l'experiment aleatori d'extreure una carta de la baralla. Expressa amb unions i interseccions de A i de B, o amb el contrari, els següents successos:
  - i. Si A = "sortir figura" i, B = "sortir ors"  
*Com s'expressa "Que surti figura o ors" ?*
  - ii. Si A = "sortir un rei" i B = "sortir copes"  
*Com s'expressa "Sortir copes però que no sigui rei" ?*
  - iii. Si A = "sortir un as" i B = "sortir ors"  
*Com s'expressa "Que no surti un as ni ors" ?*
  - iv. Si A = "sortir un rei" i B = "sortir espases"  
*Com s'expressa "Sortir el rei d'espases" ?*

### ACTIVITAT 9C3:

- a) Es tira una moneda, si surt cara es treu una bola de l'urna A que conté una bola vermella, una blava i una verda, i si surt creu es treu de l'urna B en la qual hi ha una bola vermella, una blau, una blanca i una negra. Escriu els possibles resultats.
- b) Tenim una urna amb nou boles numerades de l'1 al 9. Realitzem l'experiment, que consisteix en treure una bola de l'urna, anotar el nombre i tornar-la a l'urna. Considerem els següents esdeveniments:

A = "sortir un nombre primer" i B = "sortir un nombre quadrat"

Respon a les qüestions següents:

- i. Calcula els successos ,  $A \cup B$  i  $A \cap B$ .
- ii. Els esdeveniments  $A$  i  $B$ , són compatibles o incompatibles?.
- iii. Troba els successos contraris de  $A$  i  $B$ .

#### 3.4.7.4. SESSIÓ N<sup>o</sup> 4

La planificació de la sessió és la següent:

La sessió n<sup>o</sup> 4 es realitzarà primerament en *Grups NOM*. Es realitzarà la lectura i les activitats corresponents al *Grups NOM* (9L4 i 9P4). Una vegada acabades, aproximadament uns 30 minuts, es posaran els resultats en comú amb tota la classe. I es realitzaran els punts *ii.*, *iii.* i *iv.* de l'activitat 9P4 conjuntament.

La lectura obligatòria per tot l'alumnat a la quarta sessió és l'activitat 9L4 que es presenta a continuació:

#### ACTIVITAT 9L4: PROBABILITAT D'UN SUCCÉS

La probabilitat d'un succés,  $S$ , indica el grau de possibilitat que passi aquest succés. S'expressa mitjançant un nombre comprès entre **0** i **1**, i l'escrivim  $P(S)$ .

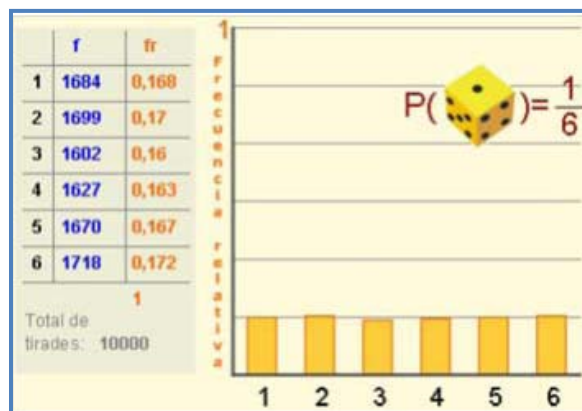
$$0 \leq P(S) \leq 1$$

Si  $P(S)$  està pròxim a 0 el succés és poc probable i serà més probable com més s'aproximi a 1, que és la probabilitat del succés **segur**,  $P(E) = 1$ .

Quan es repeteix un experiment aleatori moltes vegades, la **freqüència relativa** amb què apareix un succés tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix, a mesura que augmenta el nombre de proves realitzades.

Aquest resultat, conegut com **Llei dels grans nombres**, ens porta a definir la probabilitat d'un succés com "el nombre cap al qual tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades".

*Exemple:* Amb el GeoGebra o un full de càlcul com l'Excel es pot demostrar que tirant 10.000 vegades un dau, la probabilitat de sortir cada cara del dau (cada número) tendeix a ser de  $1/6$  (probabilitat teòrica).



### La regla de Laplace

Quan dos successos tenen la **mateixa probabilitat d'ocórrer** en realitzar un experiment aleatori es diuen **equiprobables**.

Si en un espai mostral tots els esdeveniments elementals són equiprobables, es a dir tots tenen la mateixa probabilitat d'aparèixer, l'experiment es diu regular i la probabilitat d'un succés qualsevol A, es pot calcular mitjançant la Regla de Laplace, segons la qual n'hi ha prou en fer recomptes, i fer el quocient entre el nombre de successos elementals que componen A i el nombre de successos elementals de l'espai mostral.

Se sol enunciar així:

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos possibles}}$$

*Exemple:* Tirar 3 monedes a l'aire:

Hi ha 8 casos possibles:



A="que surtin tres cares"

Casos favorables: 1 (vermell)

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0,125$$

B= "que surtin dues cares"

Casos favorables: 3 (blau)

$$P(B) = \frac{3}{8} = 0,375$$

C="almenys una cara"

Casos favorables: 7 (verd)

$$P(C) = \frac{7}{8} = 0,875$$

### Propietats de la probabilitat

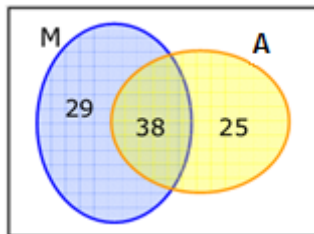
En assignar probabilitats mitjançant la Regla de Laplace o utilitzant la freqüència relativa pots comprovar que es compleix:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ . La probabilitat d'un succés A és un nombre comprès entre 0 i 1.
- $P(E) = 1$ . La probabilitat del succés segur és 1.  
 $P(\emptyset) = 0$ , si el succés és impossible.
- La probabilitat de la **unió** de dos successos és:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
En el cas que siguin dos successos **incompatibles** és:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , ja que  $P(A \cap B) = \emptyset$

- Si B és el succés **contrari** de A, aleshores  $P(B) = 1 - P(A)$

*Exemple:* A la darrera avaluació, a la classe van aprovar les Matemàtiques el 67% i l'anglès el 63%, el 38% van aprovar les dues assignatures.

Dibuixem el diagrama:



$$\text{Matemàtiques} = 29 + 38 = 67$$

$$\text{Anglès} = 25 + 38 = 63$$

Si escollim un alumne de la classe al atzar, calcula la probabilitat que:

**a) Hagi aprovat alguna de les dues.**

"Alguna de les dues" és el succés unió:

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,67 + 0,63 - 0,38 = 0,92$$

Hi ha una probabilitat del 92% de què l'alumne hagi aprovat alguna de les dues assignatures.

**b) No hagi aprovat cap de les dues.**

No aprovar cap és l'esdeveniment contrari a aprovar alguna de les dues (almenys una).

Donat que la probabilitat d'alguna de les dues és  $P(M \cup A) = 0,92$ .

El contrari de  $P(M \cup A)$  és  $1 - P(M \cup A)$ , és a dir,  $1 - P(M \cup A) = 1 - 0,92 = 0,08$ .

Hi ha una probabilitat del 8% de què l'alumne no hagi aprovat cap de les dues assignatures.

**c) Hagi aprovat només les Matemàtiques.**

El fet que hagi aprovat només Matemàtiques comporta que a la probabilitat d'aprovar Matemàtiques s'ha de restar el fet que hagi aprovat les dues assignatures.

$$P(\text{"només } M\text{"}) = P(M) - P(M \cap A) = 0,67 - 0,38 = 0,29$$

Hi ha una probabilitat del 29% de què l'alumne hagi aprovat Matemàtiques.

**d) Hagi aprovat només una de les dues.**

Es tracta de la unió de les probabilitats d'haver aprovat únicament Matemàtiques i d'haver aprovat únicament Anglès, sense tenir en compte la probabilitat d'haver aprovat les dues.

$$P(\text{"només } M \text{ o només } A\text{"}) = P(\text{haver aprovat } M \text{ i no haver aprovat } A) + P(\text{haver aprovat } A \text{ i no haver aprovat } B) = 0,29 + 0,25 = 0,54$$

Hi ha una probabilitat del 54% de què l'alumne hagi aprovat Matemàtiques o Anglès.

Una altra manera de calcular aquesta probabilitat és, sabent que s'ha aprovat almenys una assignatura ( $P(M \cup A) = 0,92$ ) li restem la probabilitat d'haver aprovat les dues ( $P(M \cap A) = 0,38$ ). Per tant:

$$P(\text{només } M \text{ o només } A) = 0,92 - 0,38 = 0,54$$

Les activitats proposades als alumnes a la quarta sessió són la 9P4 (obligatòria per a tots els alumnes). Les activitats 9A4, 9B4 i 9C4 es realitzaran a la sessió nº 5. Es presenten a continuació:

#### ACTIVITAT 9P4:

- a) Anem a fer una previsió del temps per al pròxim 6 de juliol a Barcelona. Utilitza una de les següents expressions per descriure cadascuna de les possibilitats que se citen:
- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 1. És molt probable              | a. que plogui                                      |
| 2. Segurament                    | b. que nevi  |
| 3. És segur                      | c. que el dia sigui càlid i assolellat             |
| 4. És difícil                    | d. que faci un lleuger vent                        |
| 5. És gairebé impossible         | e. que el cel estigui ennuvolat                    |
| 6. Hi ha moltes possibilitats de | f. que la temperatura oscil·li entre els 25° i 30° |
| 7. Hi ha poques possibilitats de | g. que la temperatura màxima sobrepassi els 30°    |
| 8. És poc probable               | h. que la mínima estigui per sota dels 5°          |
- b) Ara, assigna-li a cada una de les expressions de la columna de l'esquerra un número entre el 0 i l'1, tant major quan major sigui la confiança de que passi. (El 0 seria el valor corresponent a la paraula "impossible" i l'1 a "segur"). Raoneu-ho.
- c) Experimentar alguns llançaments amb xinxetes o un altre objecte que no presenti simetria.
- Predir, suposant un total de 30 llançaments, quin serà el nombre per cadascuna de les possibles formes d'aterratge de l'objecte.
  - Fer l'experiència, registrar els resultats i contrastar amb la predicció.
  - Comparar els resultats obtinguts amb tota la classe. Considerar la suma del total d'experiències realitzades. Què es pot concloure?
  - Constatar com aquesta freqüència tendeix a estabilitzar-se en la mesura que augmenta el nombre d'experiments realitzats.
- d) Ara, realitzar la mateixa experiència amb un dau.
- Predir, suposant un total de 30 llançaments, quin serà el nombre per cadascuna de les possibles formes d'aterratge de l'objecte.
  - Fer l'experiència, registrar els resultats i contrastar amb la predicció.
  - Comparar els resultats obtinguts amb tota la classe. Considerar la suma del total d'experiències realitzades. Què es pot concloure?
  - Constatar com aquesta freqüència tendeix a estabilitzar-se en la mesura que augmenta el nombre d'experiments realitzats.
- e) Farem un experiment per aproximar-nos als nombres (o probabilitats). Fixeu-vos en la taula següent i tracteu d'endevinar quantes vegades, aproximadament passarà cada un dels tres successos si llancem un dau 30 vegades.

Resultats	Nº de vegades esperat	Recompte	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
A: Surt un 2 ó 6				
B: Surt un 1				
C: Surt un 3,4 ó 5				
<b>Total:</b>	<b>30</b>			

Llanceu el dau 30 vegades, anoteu els resultats en la taula i completeu totes les columnes de la taula.

Completa els buits:

“El nombre de vegades que ocorre cada succés és la seva freqüència \_\_\_\_\_. Si dividim la freqüència \_\_\_\_\_ entre el nombre total de llançaments (en aquest cas, 30) obtenim la proporció de vegades que passa aquest succés, és a dir la freqüència \_\_\_\_\_ que, com es pot observar, sempre varia entre \_\_\_ i \_\_\_.”

- f) Es llança un dau 18.000 vegades; s'obtenen els resultats consignats en la següent taula, agrupats d'acord al nombre de tirs:

Nº de tirades	Resultats possibles					
	1	2	3	4	5	6
20	5	4	2	4	2	3
60	7	6	6	11	9	21
300	47	39	44	56	42	72
600	89	84	82	111	104	130
1200	174	166	185	203	207	265
2400	362	345	387	396	407	503
6000	946	885	1002	993	941	1233
18000	2911	2851	2833	2766	2806	3833

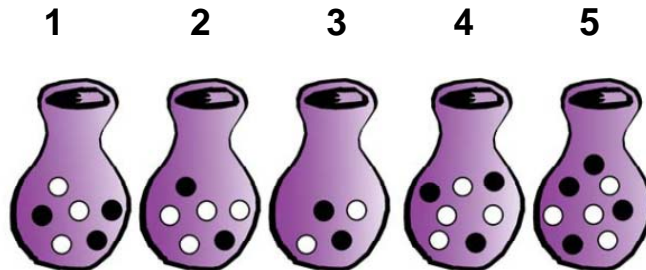
Calcula les freqüències relatives per a les dades de dues files i de dues columnes. Quina deducció es pot plantejar a partir de l'anàlisi d'aquests resultats?

- g) En Ramon va a comprar un dècim de Loteria de Nadal i li ofereixen els números 00015, 12345, 88288 i 36726. Rebutja el primer perquè li sembla difícil que surti un nombre tan baix, el segon perquè li sembla molt estrany que surtin les cinc xifres consecutives, el tercer perquè els capicues gairebé mai surten i tria el quart perquè li sembla el més normal i, per tant, el que tindrà més probabilitat de sortir. Us sembla correcte el seu raonament?. Justifiqueu la resposta.
- h) A un institut el 66% dels estudiants són aficionats al tennis i el 42% ho són a pàdel. Hi ha un 27% que són aficionats ambdós esports.
- 1) Dibuixa el diagrama del succés.
  - 2) Calcula la probabilitat de què triat un estudiant a l'atzar:
    - i. Sigui aficionat almenys a un dels dos esports.
    - ii. Només li agradi un dels dos esports (només un, l'altra no).
    - iii. No sigui aficionat al futbol ni al bàsquet.

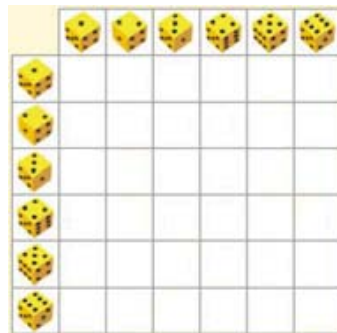
**ACTIVITAT 9A4:**

a) Observa les següents borses i digues en quina d'elles són equiprobables els successos:

$$A = \{\text{extraure bola blanca}\} \quad i \quad B = \{\text{extraure bola negra}\}$$



Es tiren dos daus i s'anota el major dels números obtinguts. En el cas que surti el mateix nombre, s'anotarà el nombre en qüestió. (Per exemple, si surt un 2 i un 2, s'anotarà un 2).



- i. Quins són els successos possibles?
- ii. Quants successos possibles hi ha? (Pista: quants números hi ha en un dau?)
- iii. Quina és la probabilitat d'obtenir cada un dels successos possibles?

$$P(\quad) = \text{---} \qquad P(\quad) = \text{---} \qquad P(\quad) = \text{---}$$

$$P(\quad) = \text{---} \qquad P(\quad) = \text{---} \qquad P(\quad) = \text{---}$$

**ACTIVITAT 9B4:**

a) Una enquesta revela que el 35% dels alumnes que llegeixen el diari, el 28% escolten la ràdio i el 12% llegeixen el diari i escolten la ràdio.

Dibuixa l'espai mostral dels successos.

Ara, escollim un alumne a l'atzar. Determina:

- i. La probabilitat que realitzi alguna de les dues activitats.
- ii. La probabilitat que no realitzi cap de les dues activitats.

- iii. La probabilitat que faci exclusivament una de les dues activitats (només una, o llegir el diari o escoltar la ràdio).

- b) ¿Quin és l'espai mostral corresponent al llançament d'una xinxeta?

Explica per què no podem afirmar que:

$$P\left[\text{👤}\right] = \frac{1}{2}, \quad P\left[\text{👁}\right] = \frac{1}{2}$$

#### ACTIVITAT 9C4:

- a) Una ampolla conté 20 boles de colors negre, vermell i verd. No sabem quantes de cada color, ni podem veure-ho, perquè l'ampolla és opaca. Només podem veure, quan la tombem, el color de la bola que queda al costat del tap, que és transparent. Hem fet 1.000 vegades l'experiència d'agitar, inclinar l'ampolla i anotar el color de la bola que es veu. Hem obtingut aquests resultats:

$$f(\text{👤}) = 461 \quad f(\text{👁}) = 343 \quad f(\text{👁}) = 196$$

Podries esbrinar, amb certa seguretat, quantes boles hi ha de cada color?

#### 3.4.7.5. SESSIÓ N° 5

La planificació de la sessió és la següent:

La sessió n° 5 es realitzarà en els *Grups COLOR*. Cada grup realitzarà les activitats corresponents al seu nivell de dificultat. Es realitzaran tant les activitats que pertanyen a la sessió n° 3 (9A3, 9B3 ó 9C3) com les activitats de la sessió n° 4 (9A4, 9B4 ó 9C4).

Durant aquest temps podran resoldre dubtes amb el professor o amb els propis companys dels *Grups COLOR*.

#### 3.4.7.6. SESSIÓ N° 6

La planificació de la sessió és la següent:

Per tal que els alumnes tinguin clar els conceptes treballats a la UD, se'ls proposarà realitzar en els Grups NOM, la següent activitat, 9P5, que tractarà de completar el mapa conceptual.

D'altra banda, el professor resoldrà els dubtes que sorgeixin, i es proposaran exercicis d'aprofundiment i consolidació dels conceptes.

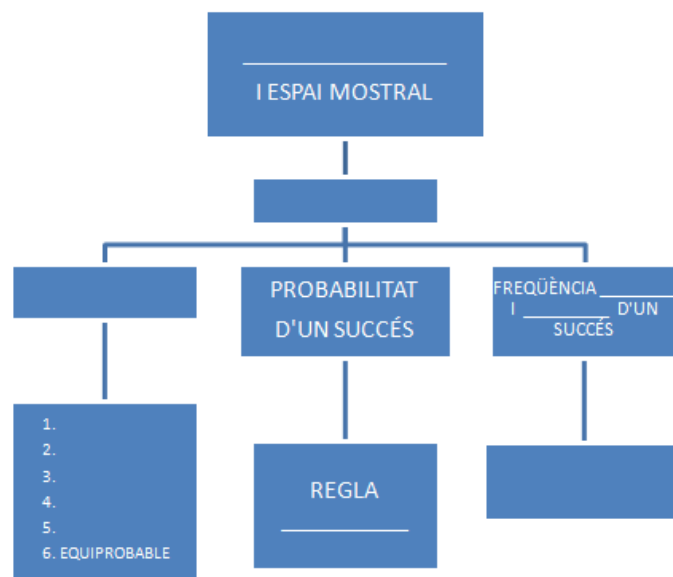


**ACTIVITAT 9P5:**

Completeu el mapa conceptual següent amb les paraules clau que es donen, després defineix els conceptes i posa un exemple de cadascun:

**Paraules clau:**

- |                         |                              |
|-------------------------|------------------------------|
| 1. Experiment aleatori. | 7. Incompatible              |
| 2. Espai mostral.       | 8. Compatible                |
| 3. Succés.              | 9. Contrari                  |
| 4. Tipus de successos   | 10. Equiprobable             |
| 5. Impossible           | 11. Regla de Laplace.        |
| 6. Segur                | 12. Llei dels grans nombres. |



A continuació es proposen un seguit d'activitats d'aprofundiment i consolidació, opcionals per l'alumnat.

**ACTIVITAT 9P5:**

Quins dels següents experiments són aleatoris?

- i. Obrir un llibre per una pàgina qualsevol i anotar el número de la pàgina de la dreta.
- ii. Realitzar el sorteig del cupó de l'ONCE.
- iii. Extreure sense mirar una bola d'una bossa que conté 5 boles blaves.
- iv. Obrir les comportes d'un pantà ple d'aigua.
- v. Mesurar la longitud d'una circumferència de 5 m de radi.
- vi. La celebració de les eleccions generals.
- vii. Llançar un dau i anotar el resultat que s'obté.

### ACTIVITAT 9P6:

Sigui  $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  i  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Demostra les quatre propietats de les operacions que es poden realitzar amb successos (unió d'esdeveniments contraris, intersecció d'esdeveniments contraris, el contrari d'A i B, el contrari de la intersecció).

### ACTIVITAT 9P7:

S'extrau una bola d'una bossa que conté 4 boles blanques, 5 vermelles i 3 blaus.

- a) Dibuixa el diagrama del succés.
- b) Quina és la probabilitat que:
  - i. Sigui vermella.
  - ii. No sigui blanca.
  - iii. Sigui blanca o blava.

### ACTIVITAT 9P8:

Expressa amb un percentatge la probabilitat que en una jugada de la ruleta (nombres del 1 al 36) el resultat sigui senar.

#### 3.4.7.7. SESSIÓ N<sup>o</sup> 7

La sessió n<sup>o</sup> 7 serà la Prova Escrita. Tindrà una durada de 50 minuts. S'avaluarà a tots els alumnes de les mateixes competències bàsiques a assolir en aquesta UD, no obstant, cada *Grup COLOR* tindrà una versió d'examen, més o menys guiada, depenent de la dificultat i nivell.

La prova escrita té un pes del 30% sobre la qualificació final de la UD i és sobre 3 punts.

A continuació es presenten les tres versions de la Prova Escrita.

### PROVA ESCRITA - COLOR VERMELL:

1. (0,5 punts) En l'experiment de llançar a l'aire un dau, amb les cares numerades de l'1 al 6, troba:
  - a) El succés segur.
  - b) Un succés impossible.
2. (0,5 punts) Calcula les possibilitats mitjançant un diagrama d'arbre de les següents situacions:
  - a) En un equip de futbol-sala disposen per jugar de pantalons blancs o negres, i de samarretes vermelles, blaves o verdes. De quantes maneres es poden vestir per a un partit?
  - b) Es tira primer una moneda i després un dau de sis cares, quins són els resultats possibles?

3. (1 punt) S'extreu a l'atzar una carta de la baralla espanyola. Sabem que:
- La baralla espanyola conté 40 cartes repartides en 4 pals (ors, bastos, espases i copes).
  - Cada pal conté 10 cartes: as, 2,3,4,5,6,7 i les figures de sota, cavall i rei.

Troba les següents probabilitats:

- a) La probabilitat de treure ors.
  - b) La probabilitat de treure un rei o un as.
  - c) La probabilitat de no treure cap figura.
  - d) La probabilitat de treure ors i un 7.
4. En una determinada població, el 70% són aficionats al futbol i el 65% al bàsquet. El 45% ho són als dos esports.
- a) Dibuixa el diagrama de la situació.
  - b) S'escull a l'atzar a un individu, quina és la probabilitat que:
    - i. Sigui aficionat a almenys a un dels dos esports.
    - ii. No sigui aficionat a cap dels dos esports.
    - iii. Sigui aficionat només a futbol.

### PROVA ESCRITA - COLOR GROC:

1. (1 punt) En l'experiment de llançar a l'aire un dau amb forma d'octaedre regular i amb les cares numerades de l'1 al 8, troba:
- a) L'espai mostral.
  - b) Els esdeveniments elementals.
  - c) El succés A, format pels múltiples de 4.
  - d) L'esdeveniment contrari a A.
  - e) El succés B, format per nombres senars.
  - f) El succés  $A \cup B$ .
  - g) El succés  $A \cap B$ . Els esdeveniments A i B són compatibles o incompatibles?
2. (1 punt) A una classe de l'Institut se sap el següent dels alumnes:
- Hi ha 31 alumnes a classe, dels quals 16 són nois.
  - 3 de les noies porten ulleres.
  - 10 dels nois no porta ulleres.

Es demana:

- a) Crea la taula de freqüències absolutes. Posant en dos columnes (nois/noies) i en fileres (amb ulleres/sense ulleres)
- b) Si escollim a l'atzar a una persona d'aquesta classe. Calcula la probabilitat que:
  - i. Sigui noia
  - ii. Tingui ulleres.
  - iii. Sigui una noia amb ulleres.

3. (1 punt) Un laboratori farmacèutic crea dos medicaments, A i B.

- El medicament A s'assaja en 50 pacients, i milloren 35 d'ells.
- El medicament B s'assaja en 75 pacients, i d'ells milloren 45.

Quin dels dos medicaments és més eficaç, és a dir, té major probabilitat de què els pacients millorin?

**PROVA ESCRITA - COLOR VERD:**

1. (1 punt) Classifica els següents experiments en deterministes o d'atzar i descriu l'espai mostral quan correspongui:

- a) Omplir un got d'aigua.
- b) Llançar un dau a l'aire.
- c) Extreure una bola de color blau d'una bossa amb boles negres i blaves.
- d) Apagar la llum.
- e) Llançar un dau trucat.
- f) Trobar l'àrea d'un quadrat de 5 m de costat.

2. En girar la ruleta de la figura, calcula la probabilitat que:

- a) Surti un número major de 4
- b) Surti color blau.
- c) Surti vermell i major que 3.



3. (1 punt) En un grup d'alt risc, compost per 60 persones, es prova una vacuna A contra la grip, i contrauen la malaltia 15 d'elles.

En un altre grup d'alt risc, format per 50 persones, es prova una altra vacuna B contra la grip; i contrauen la malaltia 12 d'elles.

a) Omple la següent taula amb les dades del text que resten:

	Vacuna A	Vacuna B
Es curen		38
Contrauen la grip	15	
<b>TOTAL</b>	<b>60</b>	

b) Quina de les dues vacunes té més probabilitats de curar a la gent?

3.4.7.8. SESSIÓ N<sup>o</sup> 8

La sessió n<sup>o</sup> 8 serà la correcció de la Prova Escrita i resolució de dubtes.

Tanmateix, serà el moment d'avaluar per part del professorat l'experiència de l'ensenyament multinivell a la UD de Probabilitat. Es tindrà en compte el *feedback* obtingut per part dels alumnes a través les fitxes obligatòries de la Carpeta d'Aprenentatge i es valoraran els resultats acadèmics del grup envers a la resta de grups de 3er d'ESO del centre.

## IV. CONCLUSIONS I REFLEXIONS FINALS

---

Actualment els centres educatius, i per consegüent, els professors són responsables d'aules on la característica principal que tenen és l'heterogeneïtat dels alumnes que la integren. Aquest fet requereix tenir coneixement de diferents estratègies d'ensenyament que puguin donar resposta a aquestes trets tant diverses de l'alumnat. A mesura que han anat fent més visibles les diferències entre alumnes, sigui perquè són estudiants nouvinguts o amb necessitats especials, la inclusió a l'aula s'ha convertit en una preocupació molt important en l'àmbit dels educadors.

No obstant, és una realitat que molts centres consideren que una manera d'atendre a aquesta diversitat és la segregació de l'alumnat per els seus nivells competencials. És veritat que si aquesta segregació es realitza correctament -eliminant la possibilitat que un alumne sigui atès per error en un grup diferent del que li correspondria- els alumnes més avantatjats poden arribar a tenir un ritme major d'aprenentatge que no pas amb la presència a l'aula d'altres alumnes més desavantatjats que puguin endarrerir la classe.

No obstant, l'ensenyament de qualitat no rau només en el fet d'adquirir coneixements, sinó que es busca adquirir altres competències, tals com la comprensió i reflexió dels problemes plantejats, el respecte de la resta d'idees discutides, saber col·laborar els uns amb els altres, esforçar-se, etc. Aquestes competències són difícilment assolibles si els alumnes només treballen de forma individual i el professor només els mostra una manera d'aprendre: a través de les classes magistrals. Valors que són assolibles amb el treball en equip i la motivació per aprendre. Els alumnes han d'aprendre a col·laborar entre ells,

Per tant, amb aquest treball s'ha volgut demostrar que l'Educació Multinivell és una alternativa al mètode d'ensenyament que actualment la majoria dels professors fan servir, centrat en els continguts. Ja que l'EM permet als professors ensenyar als alumnes des de la perspectiva de les competències bàsiques, fomentant, a més, la col·laboració entre ells i la motivació i el desig per aprendre, sense necessitat de dividir a l'alumnat.

No és fàcil ni ràpid d'aconseguir. És tracta d'un procés que s'ha de desenvolupar al llarg del currículum. Per tant, exigeix als docents compromís i planificació. Per tal d'impartir aquest mètode és necessari que els professors revisin el seu mètode d'ensenyament previ.

A través de la Unitat Didàctica presentada al llarg del treball, s'ha pogut observar com, a l'hora de planificar les lliçons, el rol del professor de presentador és substituït pel de facilitador. El professor facilita els continguts adaptats a tots els estils d'aprenentatge existents a la classe, ofereix la possibilitat de triar entre diferents activitats perquè tothom pugui participar, i l'avaluació es basa en el nivell d'habilitat dels estudiants. A més, promou l'aprenentatge cooperatiu i incrementa la motivació mitjançant la implicació dels estudiants en les activitats proposades.

No obstant, cal matisar que encara que els continguts estiguin adaptats a diferents estils d'aprenentatge -és a dir, per exemple, que les activitats incloguin dibuixos o diagrames per a una major comprensió, o que les preguntes siguin més o menys dirigides- tots els alumnes parteixen d'un mateix temari, pel que es garanteix l'assoliment de les competències bàsiques i els continguts mínims, responent així, a les necessitats del currículum.

Considero que ha estat molt interessant estudiar la proposta de la implantació de l'EM. Si bé, hi ha alguns centres que estan duent a terme aquest mètode d'ensenyament a les ciències naturals, planificar una unitat didàctica de matemàtiques ha estat tot un repte. Tenint en compte els continguts que es volen transmetre als alumnes, no s'ha d'obligar que sovint les matemàtiques causen emocions negatives a alguns alumnes. Emocions que poden bloquejar l'aprenentatge i per tant, aquesta transmissió no sigui fructífera. L'EM dona l'oportunitat d'eliminar aquestes emocions negatives envers de les matemàtiques, ja que els alumnes passen a ser participants del seu propi aprenentatge i no el senten imposat ni aliè a ells.

Per últim, la idea principal que es vol transmetre és que al meu entendre, la opció de treball exposada -l'Ensenyament Multinivell- pot tenir un clar propòsit d'inclusió i de qualitat en l'atenció a l'alumnat. No obstant, també hi ha la opció que arrel de la presentació d'aquesta opció, sigui criticada i per tant, es generin millors alternatives en l'atenció a la diversitat.

## V. BIBLIOGRAFIA

---

- Collicott, J. *Posar en practica l'ensenyament multinivell: estratègies per als mestres*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Any 2000. Vol. 4, núm. 1, pàg. 87-100. Disponible a: <<http://www.raco.cat/index.php/Suports/article/viewFile/102003/141934>>
- Pujolàs, P. *Enseñar juntos a alumnos diferentes*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <[http://www.deciencias.net/convivir/1.documentacion/D.cooperativo/Ensenarjuntos\\_Alumnosdiferentes\\_Pujolas\\_35p.pdf](http://www.deciencias.net/convivir/1.documentacion/D.cooperativo/Ensenarjuntos_Alumnosdiferentes_Pujolas_35p.pdf)>
- Riera, G. *El aprendizaje cooperativo como metodología clave para dar respuesta a la diversidad del alumnado desde un enfoque inclusivo*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <<http://www.rinace.net/rlei/numeros/vol5-num2/art7.pdf>>
- Ruiz, R. *Plans múltiples i personalitzats per a l'aula inclusiva. 1a Edició*. Catalunya: Universitat de Vic. Ed. Eumo, 2008. ISBN 978-84-9766-231-4.
- Vilanova, J. i Llorc, R. *Educació Multinivell*. Conferència al Servei d'Educació de Castelldefels (09 març de 2012).
- Vilanova, J., Sanjuán, C. i Llorc, R. *La evaluación en el aprendizaje multinivel*. [en línia]. 2010. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <<http://ainara-miranda.wikispaces.com/file/view/Contextos+Educativos.pdf>>
- Ministerio de Educación. *Educación Inclusiva. Iguales en la diversidad*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <[http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/126/cd/unidad\\_6/mo6\\_metodologia\\_del\\_aula.htm](http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/126/cd/unidad_6/mo6_metodologia_del_aula.htm)>
- *Enseñanza Multinivel*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <<http://www.slideshare.net/jblasgarcia/enseanza-multinivel-dpm>>
- OCDE. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <<http://www.oecd.org/dataoecd/16/59/41262207.pdf>>
- Departament d'Ensenyament. *Una aproximació pràctica a l'Ensenyament multinivell en el nostre context educatiu*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <[http://phobos.xtec.cat/se-baixllobregat7/index.php?option=com\\_docman&task=cat\\_view&gid=112&p;Itemid=114](http://phobos.xtec.cat/se-baixllobregat7/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=112&p;Itemid=114)>
- Portal web Institut Bernat el Ferrer. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a: <<http://moodle.bernateferrer.cat/>>

### RECURSOS DIDÀCTICS DE PROBABILITAT

- *Decret 143/2007*, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria (currículum ESO). Diari de la Generalitat de Catalunya. Núm. 4915. Pàg. 21933
- Junta de Andalucía. Departamento de Matemáticas. *Tema 13: Azar y Probabilidad*. [en

- línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<[http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/3eso\\_soluciolibro.htm](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/3eso_soluciolibro.htm)>
- Colegio Vizcaya. *Estadística 3º ESO*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<<https://matematicascv.wikispaces.com/file/view/5+ESTADISTICA+Y+PROBABILIDAD+3%C2%BAESO.pdf>>
  - IES Arquitecte Manuel Raspall. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<<http://agora.xtec.cat/iesarquitecteraspall/moodle/>>
  - Introducción al Cálculo de Probabilidades a través de casos reales. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<[http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaesch/veroeffentlichungen/ver\\_texte/prob\\_spanish.pdf](http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaesch/veroeffentlichungen/ver_texte/prob_spanish.pdf)>
  - *Recursos didácticos de probabilidad de 3º ESO*. Ed. Anaya. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<[http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos\\_2005/textos/ejercicios%20resueltos%20anaya/eso\\_3/probabilidad.pdf](http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos_2005/textos/ejercicios%20resueltos%20anaya/eso_3/probabilidad.pdf)>
  - *Recursos didácticos de probabilidad de 3º ESO*. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<[http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena12/3eso\\_quincena12.pdf](http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena12/3eso_quincena12.pdf)>
  - *Solucionario Matemáticas*. Ed. Bruño. [en línia]. [Consulta: Maig 2012]. Disponible a:  
<<http://www.calameo.com/books/001133268b72e744e11a4>>