[Escribir el nombre de la compañía]

# 7. ANNEX

Aplicacions de l'Economia a l'aula de Matemàtiques

Elena Arroyo Borrell
27 de juny de 2011

# ÍNDEX

Annex 1: Equacions i inequacions..........................................................................pàg. 1

Annex 2: Funcions..........................................................................................pàg. 4

Annex 3: Límits i continuïtats.........................................................................pàg. 5

Annex 4: Derivades i optimització..........................................................................pàg. 7

Annex 5: Demostració d'elasticitats per a una funció lineal...................................pàg. 9

Annex 6: El TFM a l'aula de matemàtiques.........................................................pàg. 11

**Annex 1: Equacions i inequacions**

En aquesta secció es resumirà el concepte d'Equació. Les equacions són igualtats que només es compleixen per a determinats valors de $x$. Els elements d'una equació són:

- *La incògnita:* És la lletra de l'equació. També s'anomena variable.
  - $8x - y = y - 3$
  - $3x - 11 = 81$

En el primer cas, és una equació amb dues incògnites (x,y) i en el segon cas, una equació amb una incògnita.

- Les dues expressions algèbriques que conformen l'equació són separades pel signe d'igualtat "=". L'expressió de l'esquerra s'anomena *primer membre* de l'equació i la de la dreta, *segon membre*.
  - De l'equació $3x - 11 = 81$, el primer membre és $3x - 11$ i el segon membre és $81$.
- El *grau d'una equació* és l'exponent més gran amb el qual surt la incògnita.
  - Del l'exemple anterior, $3x - 11 = 81$és una equació de primer grau, mentre que $x^2 - 11x + 28 = 0$ és una equació de segon grau.
- Una variable és un *símbol* que pot ser substituït per un nombre qualsevol que pertanyi al conjunt numèric. Normalment els més comuns son x, y, z, w, i t. La resta de números són anomenats *constants*.
  - De $3x - 11 = 81$, x és el símbol i -11 i 81 són números constants.
- No es permet que una variable tingui un valor pel qual alguna expressió en aquesta equació no estigui definida. Per tant,
  - $\frac{y-1}{y-8} = 6$; *y* no pot ser 8 ja que provoca que el denominador sigui 0.
- *Resoldre* una equació vol dir trobar tots els valors de les seves equacions pels quals l'equació es compleix. Aquests valors que satisfan l'equació són anomenats *solucions* de l'equació. També s'anomena *arrels* a les solucions quan només hi ha una variable.
  - $x + 2 = 5$; L'únic valor de "x" que satisfà l'equació és 3. Per tant, 3 és una arrel i el conjunt de la solució és {3}.
- $x^2 - 11x + 28 = 0$; 4 i 7 són arrels de l'equació ja que al substituir 4 i 7 per "x" l'equació sigui 0: ex. $4^2 - 11 \cdot 4 + 28 = 0$.
- Les *equacions equivalents* faciliten la resolució d'una equació. Realitzant les següents operacions, es troben les equacions equivalents que farà que es trobin les solucions més ràpidament:
  - Sumar o restar a cada costat d'una equació la mateixa expressió que representi un número.
  - Multiplicar o dividir a cada costat d'una equació per la mateixa expressió que representi un número diferent a 0.
  - $2x^2 - 22x + 56 = 0$;
    - Solució:

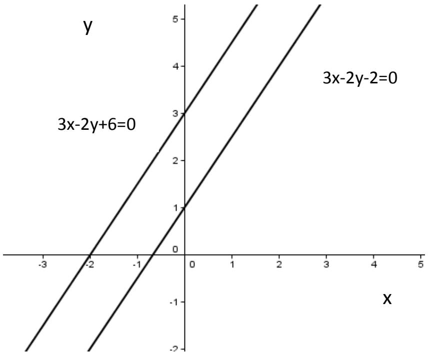
$2x^2 - 22x + 56 = 0$ dividint entre 2, l'equació es simplifica

$x^2 - 11x + 28 = 0$ així obtenim l'equació que ja hem resolt anteriorment

Les solucions, arrels, d'aquesta equació de segon grau són 4 i 7.

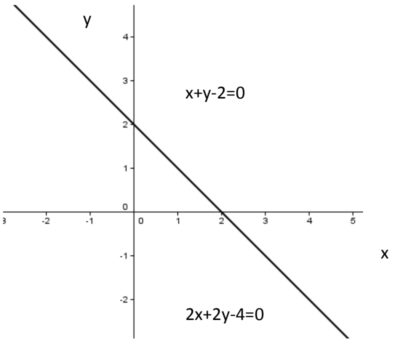
**Sistemes d'equacions lineals**

Si dues o més equacions no tenen solucions comunes, es diu que el sistema és **incompatibles**:



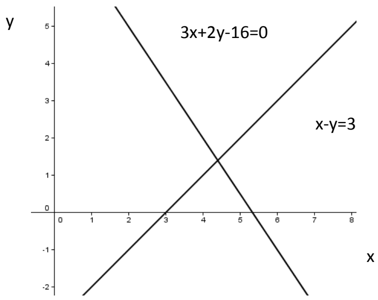

Les dues rectes paral·leles que formen les funcions de les equacions lineals no tenen cap punt en comú. El sistema doncs, no té solució. Es diu que és incompatible.

Es diu que aquest és un **sistema compatible indeterminat** quan el sistema té infinites solucions.




Les dues rectes formen la mateixa recta i, per tant, el sistema té infantes solucions (tots els punts de la recta). Com es veu, les rectes són coincidents.

S'anomena a un **sistema compatible determinat** a aquell el qual només té una solució.




Les dues rectes es tallen en un sol punt, que és la solució del sistema. En aquest cas, les rectes són secants.

Existeixen tres mètodes de resolució de sistemes d'equacions lineals: mètode de substitució, mètode d'igualació i mètode de reducció. Per resoldre problemes d'economia el mètode més pràctic és el d'igualació.

**El mètode de GAUSS**

Consisteix a transformar un sistema d'equacions lineals en un altre d'escalonat. Per fer-ho, "fem zeros" sotmetent les equacions a dues transformacions elementals:

- Multiplicar una equació per un nombre diferent de zero.
- Sumar a una equació una altra multiplicada per un nombre.

El procés es realitza molt avantatjosament si, en lloc de les equacions, hi utilitzem exclusivament els nombres –coeficients i termes independents- estructurats en matrius.

**Inequacions**

- En les desigualtats s'usen els *signes*: ≤, ≥, >, <.

- $2x+1>7;\; x^2+8x-5\geq 0;\; \sqrt{x+3}\leq 25;\; x^2-5x<0$

- La *solució d'una inequació* és un valor de x amb el qual es compleix la desigualtat:
  - De la primera inequació, la solució és 3.
- La *solució d'un sistema d'inequacions* és una solució comuna a totes les inequacions que el formen.
  - $\begin{cases} 3x-9<0 \\ 2x+4\geq 0 \end{cases}$

    La solució d'aquest sistema és x=0, ja que és solució de les dues inequacions.

**Sistemes d'inequacions amb dues incògnites: Programació lineal**

S'ha consolidat com el nom d'optimització i en general es tracta d'un conjunt de tècniques matemàtiques que intenten obtenir el màxim profit possible de sistemes econòmics, socials i tecnològics, entre d'altres, el funcionament dels quals es pot descriure matemàticament de manera adequada. S'utilitza fonamentalment en problemes de tipus maximitzar beneficis o minimitzar costos, és a dir, en situacions en què la funció que cal optimitzar depèn d'unes variables subjectes a determinades restriccions.

## Annex 2: Funcions

Descriurem de forma descriptiva i pràctica una funció *f* de la següent manera:

*f* és una funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si a cada nombre real $x \in D$ li fa correspondre un altre nombre real $f(x)$:

$$D \subset \mathbb{R} \qquad \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

El conjunt $D$ dels valors que pot prendre la variable independent, $x$, s'anomena domini de la funció.

El conjunt $f(D)$ dels valors que pren la funció s'anomena recorregut. Cal destacar que a cada valor de $x \in D$, la funció li assigna un únic valor de $f(x)$.

Hi ha diverses maneres d'expressar la relació funcional entre dues variables. Les principals són a través d'un enunciat textual, via una expressió algebraica o fórmula, mitjançant una taula de valors o a partir d'una gràfica.

La gràfica d'una funció pot tallar l'eix d'abscisses en un o més punts i l'eix d'ordenades en un sol punt:

- Punts de tall amb l'eix x: són aquells en què l'ordenada és igual a zero, és a dir, tenen la forma ($a$,0), on $a$ és el valor que compleix: $f(a)=0$.
- Punt de tall amb l'eix y: és aquell en què l'abscissa és igual a zero, és a dir, té la forma (0,$b$), on $b$ és el valor que compleix $f(0)=b$.

Es diu que la funció és creixent si la variable dependent augmenta quan la variable independent també ho fa, i la funció és decreixent si la variable dependent disminueix quan la variable independent augmenta.

La funció té un màxim si és creixent a l'esquerra d'aquest punt i decreixent a la dreta. Ara bé, es diu que la funció té un mínim si és decreixent a l'esquerra d'aquest punt i creixent a la dreta.

**Annex 3: Límits i continuïtats**

Una funció és contínua quan es pot “construir en un sol traç”, és a dir, una funció és continua en un punt si no hi presenta cap tipus de discontinuïtat. Així doncs, perquè una funció $f(x)$ sigui continua en $x = x_0$ cal que es compleixi que:

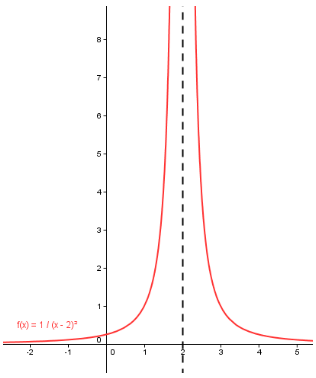
1. $\exists f(x_0)$; existeix, per tant ha de pertànyer al domini.
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
3. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Així doncs, per saber què fa la funció en aquells punts en els quals és discontínua, s’estudia el límit quan x tendeix en cadascun d’aquests punts.

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

Es poden presentar diferents tipus de discontinuïtat depenen del supòsit que no es compleixi:

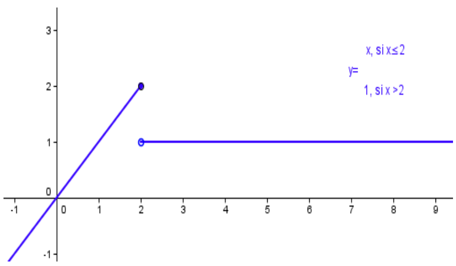
a. Asímptotes verticals




En aquest cas concret, el $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ i, per tant, ens trobem en el cas que existeix una asímptota vertical en $x_0 = 2$. Generalitzant, trobarem una asímptota vertical quan:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

b. Discontinuïtat de salt



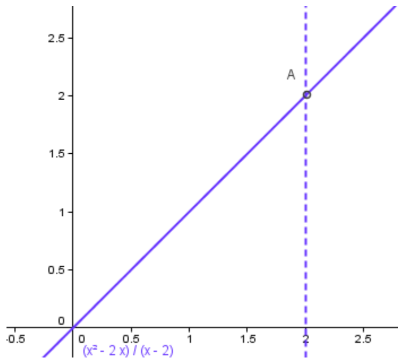

Aquest és un cas probable de les funcions definides a trossos, i s’observa que no es compleix el següent:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Així doncs, en el nostre cas concret:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

c. Discontinuïtat evitable




En aquest cas, com es veu gràficament:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Però,

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$; ja sigui perquè és diferent o perquè $f(x_0)$ no existeix (com és el cas que tenim representat, on $x_0 = 2$).

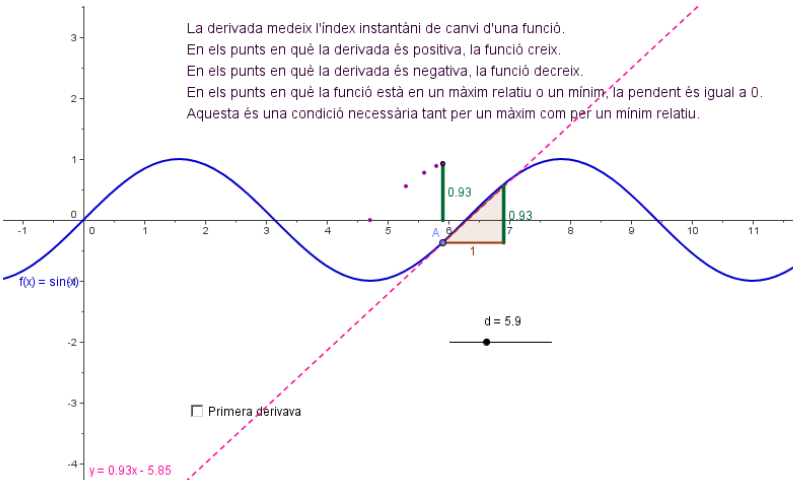
**Annex 4: Derivades i optimització**

L'índex promig de canvi per una funció lineal és constant i igual a la pendent. Pel contrari, l'índex promig de canvi per una funció curvilínia varia amb els moviments successius al llarg de la corba. Així doncs, la pendent d'una funció curvilínia no és constant, sinó que varia en diferents punts de la corba. La pendent d'una funció curvilínia en qualsevol punt donat és igual al pendent d'una línia traçada tangent a la corba en aquell punt. Aquest concepte és important per arribar a entendre el concepte de derivada.

La derivada ens l'índex de canvi instantani d'una funció, és a dir, com canvia la variable depenent a conseqüència d'un petit canvi unitari en la variable independent. La terminologia que s'ha utilitzat durant el treball és la següent:

$$\text{La derivada de f(x)} = \frac{dy}{dx} = f\,'(x)$$

Així doncs,




Així doncs, la derivació és un procés de determinar la derivada d'una funció, o sigui, la determinació del canvi de $y$ com a conseqüència d'un canvi en $x$. A continuació es recordaran algunes de les regles bàsiques de derivació de les funcions.

*a)* *Regla de funció constant:* la derivada d'una funció constant, $y = k$, on $k$ és qualsevol constant, és 0.

$$donat\ y = k; \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

*b)* *Regla de funció lineal:* la derivada d'una funció lineal, $y = a + bx$, és igual a $b$, el coeficient de $x$.

$$donat\ y = a + bx; \quad \frac{dy}{dx} = b$$

*c)* *Regla de funció de potencia:* la derivada d'una funció de potencia, $y = ax^p$, és igual a l'exponent $p$ pel coeficient $a$, multiplicat per la variable $x$ elevat a la potencia $(p-1)$.

$$donat\ y = ax^p; \quad \frac{dy}{dx} = pax^{p-1}$$

d) *Regla per sumes i diferències:* la derivada d'una suma, $y = u(x) + v(x)$ és igual a la suma de les derivades de les funcions individuals. La derivada d'una diferència és igual a la diferència de les derivades de les seves funcions individuals.

$$donat\ y = u(x) \pm v(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

e) *Regla de productes:* La derivada d'un producte, $y = u(x) \cdot v(x)$ és igual a la primera funció multiplicada per la derivada de la segona més la segona funció multiplicada per la derivada de la primera.

$$donat\ y = u(x) \cdot v(x); \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

f) *Regla de quocients:* La derivada d'un quocient, $y = \frac{u}{v}$, és igual al denominador per la derivada del numerador, menys el numerador per la derivada del denominador, tot això dividit pel denominador al quadrat.

$$donat\ y = \frac{u(x)}{v(x)}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot (du/dx) - u \cdot (dv/dx)}{v(x)^2}$$

g) *Regla per una funció d'una funció:* La derivada d'una funció d'una funció, $y = f(u),\ on\ u = g(x)$, és igual a la derivada de la segona funció respecte a $x$. S'anomena regla de la cadena.

$$donat\ y = f(u),\ u = g(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

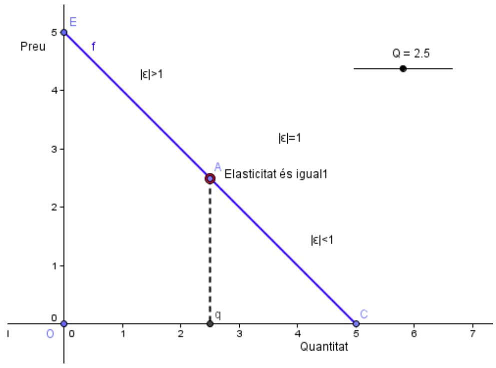
**Annex 5: Demostra que, per una funció lineal de la demanda de la forma P(Q)=-Q+5;**

**a)** $|\varepsilon|=1$**; a la meitat de la corba de demanda,**

**b)** $|\varepsilon|>1$**; per sobre de la meitat de la corba de demanda,**

**c)** $|\varepsilon|<1$**; per sota de la meitat de la corba de demanda.**

*Solució:* En primer lloc el que demostrarem és que l'elasticitat-preu d'una funció lineal és igual a la longitud del segment inferior de la corba de la demanda dividida per la longitud del segment superior. Així doncs, cal demostrar que l'elasticitat-preu en el punt A és $qC/Oq$.




Saben que: $\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$, quan la funció és $P(Q)=f(Q)$ i la derivada de la funció es troba a partir de $\frac{dP}{dQ}$,

$$\varepsilon_d = \frac{1}{\frac{dP}{dQ}}\frac{P}{Q}$$

Per una funció lineal, la pendent és la mateixa en tots els punts de la recta. Per tant,

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{qA}{AC}$$

En el punt A, $P = Aq$ i $Q = Oq$. Al substituir aquests valors a la fórmula de les elasticitats anteriors, s'obté:

$$\varepsilon_d = \frac{1}{Aq/qC}\frac{Aq}{Oq} = \frac{qC}{Aq}\frac{Aq}{Oq} = \frac{qC}{Oq}$$

També es pot demostrar que $\frac{qC}{Oq} = \frac{AC}{EA}$. Donat que $AqC$ i $EF(A)A$ són triangles rectangles similars i ja que $F(A)A = Oq$, a partir de les propietats dels triangles rectangles similars, es pot escriure que:

$$\frac{qC}{Oq} = \frac{AC}{EA} = \varepsilon_d$$

L'elasticitat-preu de la demanda $|\varepsilon_d|$, quant $P = f(Q)$, és igual a la longitud del segment inferior de la corba de la demanda ( $AC$ ) dividida per la longitud del segment superior ( $EA$ ).

En cas de tenir la funció $Q = f(P)$, matemàticament correcte però menys freqüent, els eixos s'invertirien i l'elasticitat seria igual a la longitud del segment superior de la corba de la demanda, dividit per la longitud del segment inferior.

Així doncs, un cop tenim la demostració, podem demostrar que:

$|\varepsilon| = 1$; Com que hem demostrat que $\varepsilon_d = \frac{AC}{EA}$, si $AC = EA$ en el punt $A$, tenim que:

$$\varepsilon_d = \frac{AC}{EA} = 1$$

$|\varepsilon| > 1$; Per qualsevol punt sobre la corba per sobre del punt $A$, $AC > EA$ que implica que $\varepsilon_d > 1$.

$|\varepsilon| < 1$; Per qualsevol punt de la corba per sota del punt $A$, $AC < EA$, cosa que implica que $\varepsilon_d < 1$.

**Annex 6: El TFM a l'aula de matemàtiques**

## APLICACIÓ DEL CONCEPTE DERIVADA EN L'ÀMBIT D'ECONOMIA

Exemples de l'ús de les derivades en economia:

1. Conceptes marginals
2. Maximització i minimització d'una funció
3. Relació entre el concepte total, marginal i mitjà

Ens centrarem amb els conceptes marginals i la maximització i minimització d'una funció.

## Recordatori concepte derivada

La derivada mesura l'índex instantani de canvi d'una funció, o sigui, com canvia la variable dependent com a conseqüència d'un petit canvi unitari de la variable independent.

Derivades.ggb

En economia es parla de com canvia el preu com a conseqüència d'un petit canvi unitari de la variable independent, la quantitat.

## Conceptes marginals

**Cost marginal**: es defineix en Economia com el canvi del cost total generat per la producció d'una unitat addicional.

$$CT = CT(Q), \quad \text{llavors,} \quad CMg = \frac{dCT}{dQ}$$

**Ingrés marginal:** el canvi d'ingressos provocat per la venda d'un article addicional

$$IT = IT(Q), \quad \text{llavors,} \quad IMg = \frac{dIT}{dQ}$$

**Benefici marginal:** canvi que experimenten els beneficis quan es produeix i es ven una unitat addicional de producte.

$$BT = BT(Q), \quad \text{llavors,} \quad BMg = \frac{dBT}{dQ}$$

## Maximització de la funció benefici

Per maximitzar la funció benefici, en aquella quantitat que fa que el benefici sigui màxim la funció no pot incrementar ni disminuir.

Per tant, si la funció no augmenta ni disminueix, la derivada de la funció en aquest punt ha de ser 0.

Per tant, la primera condició necessària per un màxim (o un mínim) ha de ser que la primera derivada sigui igual a 0. Bci marginal igual a 0!

$$\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{dBci}{dQ} = 0$$

## Practiquem:

**Troba la funció de beneficis a partir de I i C:**

**I(Q)=6Q C(Q)=0,5Q$^2$ + Q + 3**

**B(Q)= I(Q)-C(Q)= 5Q - 0,5Q$^2$ – 3**

a) Quina quantitat hauríem de produir per fer màxim el benefici?
b) Interpreta el concepte. Què passa si produïm una unitat més? I una unitat menys?

Exercici benefici 29.ggb

## Apliquem els conceptes marginals

Sabem que B = I – C ;

I que si derivem el benefici i igualem a 0, obtenim la quantitat que ens maximitza el benefici. Doncs apliquem-ho a l'equació:

$$\frac{dB}{dQ} = \frac{dI}{dQ} - \frac{dC}{dQ}$$

$$BMg = IMg - CMg$$

$$0 = IMg - CMg$$

$$IMg = CMg$$

## Practiquem

**Seguint l'exercici anterior, tenim que:**

**I(Q)=6Q i C(Q)=0,5Q²+Q+3**

**Aplicant el que acabem de veure, troba la quantitat que fa màxim el benefici.**

**Exercici benefici 29.ggb**

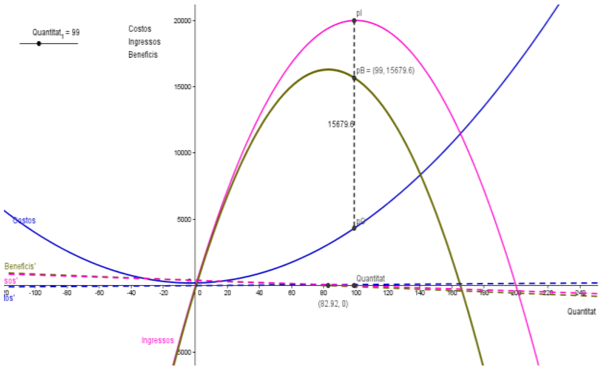
## Exercici

**L'equació de la demanda d'un component per fabricar neveres és P=400-Q , mentre que la funció de costos és C(Q)=0,4Q²+2Q+200. Hi ha tres estratègies per trobar la quantitat de components que es fabricaran:**

**a) Estratègia de minimitzar els costos. Troba la quantitat si l'empresa segueix aquesta estratègia. Representa la funció.**

**b) Estratègia de maximitzar ingressos. Troba la quantitat si l'empresa segueix aquesta estratègia. Representa la funció.**

**c) Per últim, troba la quantitat si l'empresa està interessada en maximitzar els beneficis. Reprsenta la funció.**




exemple 43.ggb

## I per últim...

L’empresa “Hollywood News” té actualment 2.000 subscriptors que paguen una quota mensual de 20€. Una enquesta ha informat que s’inscriurien al diari 50 subscriptors més per cada 0,25€ de reducció de la quota. Amb quina quota s’obtindria l’ingrés màxim i quants subscriptors tindria el diari?

exemple hollywood news.ggb