Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Curs 2010 / 2011

Màsters Universitaris

Treball de fi de màster

Títol: La inducció matemàtica a l'ensenyament secundari

Cognoms: Vega Moreno

Nom: Helena

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemàtiques

Director/a: José Luis Díaz-Barrero

Data de lectura: 29/06/2011

Institut de Ciències de l'Educació

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Sumari

1. Introducció

Les demostracions sempre han tingut un paper fonamental en l'àmbit de les matemàtiques, així com també en moltes altres ciències i disciplines com ara la física, la química o la mecànica.

No obstant, sembla que aquesta importància reconeguda de les demostracions dins les seves àrees respectives, no es veu reflectida en l'àmbit de l'educació secundària actual, ja que és molt poc freqüent veure a les aules d'un institut com s'exposen demostracions i, encara menys, que siguin els mateixos alumnes els que les realitzin.

En aquest treball, lògicament centrat en l'àmbit matemàtic, es pretén recuperar aquest interès per les demostracions i traslladar-les al món educatiu. Amb aquesta finalitat, el treball s'ha centrat en analitzar una tècnica de demostració particular, però molt important, la demostració pel mètode d'inducció matemàtica.

Aquesta tipologia de demostracions potencien en l'alumne una manera de pensar, d'intuir, de relacionar conceptes, fer abstraccions, experimentar, generalitzar, etc. En general, tots aquests aspectes fomenten un tipus de raonament i pensament matemàtic que resulta de gran importància per assolir la competència matemàtica, que és considerada una de les principals competències bàsiques en l'educació secundària.

Així doncs, amb l'objectiu de portar les demostracions per inducció a dins les aules d'ensenyament secundari, aquest treball es divideix en dues parts. En la primera s'exposa què és la inducció matemàtica i en què consisteix el mètode de demostració per inducció. Lògicament, es plantegen també diversos exemples amb l'aplicació d'aquest mètode. En la segona part, el treball es centra en com traslladar aquests continguts a dins l'aula i es realitza una proposta detallada de com treballar aquestes demostracions amb els alumnes de secundària.

En aquest sentit, es profunditza en la forma més adequada de treballar les demostracions per inducció matemàtica dins les aules de secundària. Per això, es planteja una metodologia de treball que es considera molt adequada donada les característiques tant de la matèria com dels alumnes a qui es dirigeix, i en la que es tenen en compte aspectes fonamentals com la necessitat d'adaptar-se al currículum actual de la matèria o de tenir uns coneixements previs adquirits. Igualment, s'han dissenyat un conjunt d'activitats que es consideren uns recursos didàctics realment útils, ja que estan pensats específicament per tal de que l'alumne treballi aplicacions reals de la inducció matemàtica en un context que ja coneix.

Sintetitzant, l'objectiu del treball és presentar el mètode de demostració per inducció matemàtica i exposar una manera efectiva de portar aquesta tècnica de demostracions a les aules d'un institut, tenint present que aquest tipus de demostracions poden aportar a l'alumne uns valors de caire matemàtic molt importants i el poden ajudar significativament a assolir les competències bàsiques.

2. Definició i context del problema

Actualment, és poc habitual veure demostracions matemàtiques a les aules d'educació secundària dels instituts i, encara és menys habitual, que siguin els propis alumnes els que realitzen aquestes demostracions.

En aquest aspecte, el que sovint succeeix és que el professor realitza, en moments molt puntuals del curs, una demostració d'alguna fórmula o teorema que s'utilitzarà al llarg de la mateixa unitat didàctica, o bé de forma transversal durant tot el curs. Per exemple, és molt usual mostrar als alumnes, en algun moment de l'ESO, la demostració del Teorema de Pitàgores, del Teorema de Tales i de les identitats notables. Malauradament però, és molt probable que aquestes siguin les úniques, o de les poques, demostracions que els alumnes vegin durant tot el seu cicle d'educació secundària obligatòria.

Per tant, sembla que en general no es dóna prou importància a haver de demostrar i raonar la validesa de moltes de les eines matemàtiques que s'utilitzaran sovint durant el curs. Això provoca, en certa manera, que la gran majoria dels alumnes tendeixin a creure a cegues en tot allò que el professor els presenta (fórmules, teoremes, procediments matemàtics, ...) sense parar-se a pensar en la seva validesa o en el seu origen.

En aquest sentit, crec que és un error no intentar que els alumnes tinguin aquesta visió més àmplia de les matemàtiques i mostrin curiositat en saber com es van arribar a deduir moltes de les eines matemàtiques que a dia d'avui són fonamentals i que utilitzem habitualment de forma sistemàtica.

A més, també considero que és important que els mateixos alumnes realitzin les demostracions i no només intentin entendre-les quan el professor se les exposa. Involucrar als alumnes en el seu propi aprenentatge és fonamental, i fer que s'enfrontin a les demostracions matemàtiques, com si es tractés d'un nou repte, és part d'aquest aprenentatge. Evidentment, s'ha de vetllar per a que l'alumne afronti qualsevol demostració matemàtica disposant dels coneixements previs necessaris, les eines adequades i els suports convenients.

Igualment, resulta interessant que l'alumne pugui treballar durant la seva etapa educativa amb diferents tècniques de demostració, ja que això li permetrà tenir una visió més àmplia de les matemàtiques, de tots els recursos que la pròpia matèria posa al seu abast i de la multitud d'àmbits i temàtiques en que es poden aplicar aquestes demostracions. Així mateix, representa un exemple clau per ajudar a l'alumnat a assolir que tècniques i eines molt diverses poden ser utilitzades en les matemàtiques, tant per arribar al resultat d'un problema com per deduir qualsevol proposició.

Competències bàsiques

És important destacar la importància que té introduir les demostracions matemàtiques a les aules en relació a les competències bàsiques que els alumnes han d'adquirir. Com sabem, cal treballar des de totes i cada una de les matèries les 7 competències bàsiques: competència comunicativa, lingüística i audiovisual; competència artística i cultural; tractament de la informació i competència digital; competència matemàtica; competència d'aprendre a aprendre; competència d'autonomia i iniciativa personal; competència en el coneixement i la interacció amb el món físic; i competència social i ciutadana.

Per tant, com a professors de matemàtiques, sempre hem de tenir presents el reforç i assoliment d'aquestes competències per part dels alumnes a l'hora de desenvolupar qualsevol temàtica o activitat a l'aula, i això s'ha de tenir igualment en compte quan treballem les demostracions.

Ara bé, també cal destacar que, entre totes les competències bàsiques, n'hi ha una que es treballa en gran part i molt especialment des de la matèria de matemàtiques. Lògicament, ens referim a la competència matemàtica.

És important recordar què significa assolir la competència matemàtica per tal d'entendre la rellevància de treballar també les demostracions matemàtiques a les aules d'educació secundària. En aquest sentit, cal remarcar que, segons s'estableix en el Decret 143 sobre el currículum de matemàtiques a l'ESO, adquirir la competència matemàtica té les següents implicacions:

- *Pensar matemàticament*. Construir coneixements matemàtics a partir de situacions on tingui sentit experimentar, intuir, formular, comprovar i modificar conjectures, relacionar conceptes i realitzar abstraccions.
- *Raonar matemàticament.* Realitzar induccions i deduccions, particularitzar i generalitzar; reconèixer conceptes matemàtics en situacions concretes; argumentar les decisions preses, així com l'elecció dels processos seguits i de les tècniques utilitzades.
- *Plantejar i resoldre problemes.* Entendre un enunciat, generar preguntes relacionades amb una situació o problema, plantejar i resoldre problemes anàlegs, desenvolupar estratègies de resolució, verificar la validesa de les solucions, cercar altres resolucions, canviar les condicions del problema, sintetitzar els resultats i mètodes emprats, i estendre el problema, recollint els resultats que poden ser útils en situacions posteriors.
- *Obtenir, interpretar i generar informació* amb contingut matemàtic. Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques (per comptar, operar, mesurar, situar-se a l'espai, organitzar i analitzar dades) i instruments d'ús matemàtic (calculadores, TIC, de dibuix i de mesura).
- *Interpretar i representar* (a través de paraules, gràfics, símbols, nombres i materials) expressions, processos i resultats matemàtics.
- *Comunicar* als altres el treball i els descobriments realitzats, tant oralment com per escrit, utilitzant el llenguatge matemàtic.

Per tant, si ens fixem en tots aquests aspectes, considerats essencials per assolir la competència matemàtica, resulta evident entendre el paper fonamental que representen les demostracions matemàtiques, ja que aquestes fomenten principalment el pensament i raonament matemàtic, però alhora també treballen i reforcen la resta d'aspectes competencials esmentats.

En definitiva, durant l'etapa d'educació secundària es pretén que els alumnes adquireixin unes competències bàsiques, entre les que hi trobem la competència matemàtica. Els aspectes que implica assolir aquesta competència són molt diversos i per això és necessari treballar-los durant tots els cursos i unitats didàctiques de forma transversal.

Donat que mitjançant les demostracions matemàtiques es treballen i reforcen tots els aspectes de la competència matemàtica, crec que és important que els professors ens plantegem la manera d'introduir a les aules dels instituts aquestes tècniques de demostració i ens proposem treballar-les amb els alumnes de la manera més adequada i constructiva.

3. Descripció de la solució

La finalitat d'aquest treball és proposar una manera de treballar les demostracions matemàtiques dins les aules d'educació secundària, entenent que, tal i com s'ha plantejat inicialment, aquestes demostracions permeten als alumnes treballar uns aspectes de la matèria que els serà de gran utilitat i els permetrà assolir la competència matemàtica.

El treball es centra en el desenvolupament a les aules d'un tipus de demostracions, concretament les demostracions pel mètode d'inducció matemàtica. Per aquest motiu, en primer lloc s'exposa què és la inducció matemàtica, en què consisteix el mètode inductiu i quines són les seves aplicacions principals. A continuació, es proposa una forma de treballar aquest tipus de demostracions dins l'aula, centrant el tema en un nivell i en un tipus d'aplicacions concretes, plantejant una metodologia de treball i exposant les activitats dissenyades com a recurs didàctic.

Per tant, en finalitzar aquest apartat, s'haurà exposat detalladament una proposta de com treballar les demostracions per inducció matemàtica a una aula d'ensenyament secundari, d'acord amb el nivell educatiu i el currículum de la matèria, i tenint sempre present els objectius i competències bàsiques que els alumnes han d'adquirir.

Per últim, només remarcar que l'aplicació de les demostracions per inducció matemàtica permetrà a l'alumne veure un tipus de demostracions que es basen en un procés definit, és a dir, en una seqüència de passos que cal seguir fins arribar a deduir el resultat final. Per tant, són unes demostracions que es poden realitzar pràcticament de forma sistemàtica, sense haver de recórrer a teories més conceptuals o abstractes, i només utilitzant eines i processos matemàtics simples que l'alumne ja ha assolit i té al seu abast.

3.1. La inducció matemàtica

La inducció és, en sentit molt ampli, un tipus de raonament que permet deduir el cas general a partir dels casos particulars, és a dir, és el pas de la particularitat a la generalització.

A grans trets, es pot considerar que una afirmació o proposició matemàtica pot ser de tipus general o de tipus particular. Un exemple il·lustratiu senzill és el següent: la proposició "*tots els nombres enters parells són divisibles per 2*" és de caire general, mentre que l'afirmació "*el nombre 246 és divisible per 2*" és de tipus particular.

De la validesa d'una proposició general es pot deduir la validesa de les corresponents proposicions particulars i al contrari, d'una o vàries proposicions particulars vàlides es pot arribar a la certesa d'una proposició més general.

Ara bé, cal tenir present que aquests canvis d'un tipus de proposició a un altre requereixen un procés de raonament lògic que s'anomena, segons el cas, generalització i particularització.

En aquest sentit, el procés pel qual, coneguda la validesa de la proposició general es dedueix la validesa de la proposició particular, es coneix com procés deductiu de particularització. En canvi, quan des de la certesa d'una o diverses proposicions particulars es dedueix que es verifica una proposició general que les engloba, es realitza un procés deductiu de generalització.

Seguint amb l'exemple exposat, si acceptem com a vàlida la proposició general "*tots els nombres enters parells són divisibles per 2*", el procés que porta a la certesa de la proposició particular "*el nombre 246 és parell i per tant és divisible per 2*" és un procés de particularització. Evidentment, la validesa d'aquesta afirmació particular depèn de que la proposició general de la qual s'ha partit sigui certa.

En canvi, els processos de generalització poden resultar més complicats, ja que sovint succeeix que la validesa de la proposició particular no permet afirmar la certesa de la proposició general. Aquesta dificultat es pot il·lustrar amb un exemple molt senzill: de la proposició particular "*el nombre 246 té 3 dígits i és divisible per 2*" no se'n pot deduir la proposició general "*tots els nombres de 3 dígits són divisibles per 2*".

Així doncs, queda clar que no tota generalització feta a partir de casos particulars és vàlida i que el pas de la particularitat a la generalització no sempre és senzill. Per tant, caldrà establir la manera de saber quan aquest procés de generalització que es realitza és vàlid i quan no. En aquest punt es posa de manifest la importància del mètode d'inducció matemàtica, que és una eina que ens permetrà en molts casos fer aquesta distinció i saber quan el procés de generalització efectuat és correcte.

3.1.1. Principi d'inducció matemàtica

El mètode d'inducció matemàtica és una eina molt potent que normalment s'utilitza per demostrar proposicions en les quals intervenen nombres naturals.

Aquest mètode es basa en el principi d'inducció matemàtica, el qual s'exposa a continuació:

"una proposició és vàlida per a tot nombre natural n si es compleixen dos requisits: en primer lloc, la proposició és vàlida per $n = 1$ *; i en segon lloc, si de la seva validesa per a un nombre natural qualsevol* $n = k$ *, se'n dedueix la seva validesa per* $n = k + 1$ *"*

El principi d'inducció matemàtica es basa en l'Axioma de la Inducció Completa (Peano), que permet demostrar proposicions relatives als nombres naturals generalitzant situacions particulars. En efecte, amb aquest teorema s'exposa que si s'aconsegueix evidenciar que una propietat que es verifica per un nombre natural qualsevol m , també es verifica pel seu següent, anomenat $s(m)$, aleshores es pot afirmar que aquesta propietat es verifica per m i tots els nombres naturals següents a m, és a dir, que la proposició és vàlida per tots els naturals més grans o iguals que m. Si la proposició es verifica a més, per al primer dels nombres naturals (que no és successor de cap altre), llavors cal concloure que la propietat es compleix per a tot el conjunt de nombres naturals $\mathbb{N}$.

3.1.2. Mètode d'inducció matemàtica

Tota demostració on s¡aplica el principi de inducció matemàtica s'anomena demostració per inducció o demostració pel mètode d'inducció matemàtica.

Com s'ha esmentat anteriorment, aquest tipus de demostracions s'utilitzen per establir la validesa de proposicions P(n) on intervenen nombres naturals. Una demostració pel mètode d'inducció matemàtica consta, necessàriament, de les següents fases:

- *Pas 1 o base de la inducció*: consisteix en verificar que la proposició és vàlida per $n = 1$.
- *Pas 2 o pas inductiu:* assumir que la proposició és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol més gran o igual que 1, i establir, a partir d'aquesta, la validesa de la proposició per $n = k + 1$.

Si aquests dues proposicions queden verificats, es pot afirmar, en virtut del principi d'inducció matemàtica, que la proposició general P(n) és vàlida per a tot nombre natural n.

Resulta interessant comentar que cada un dels dos passos té el seu propi paper en el mètode, ja que el pas 1 crea la base de la inducció i el pas 2 permet ampliar aquesta base de forma automàtica i indefinida, passant d'un cas particular al següent, és a dir, acceptant com a hipòtesi la certesa de la proposició $P(n)$ es dedueix la validesa de $P(n+1)$.

En definitiva, per comprovar que una propietat es compleix per tots els nombres naturals, només caldrà: primer, verificar que es compleix per $n = 1$; seguidament, suposar que la propietat es compleix per un nombre natural qualsevol $n = k$, i a partir d'aquí deduir que llavors també es compleix per al nombre natural següent, $n = k + 1$. Com que per mitjà d'aquesta metodologia es demostra la validesa de la proposició per tot nombre natural n , inclòs el primer natural $n = 1$, el mètode utilitzat també és conegut com a mètode d'inducció perfecte o completa.

A continuació s'exposa un exemple d'aplicació del mètode d'inducció completa. Es tracta de demostrar a través d'aquest mètode el resultat del següent sumatori:

$$P(n):\ \ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad \forall n \geq 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

El primer pas de la demostració per inducció consisteix en crear la base de la inducció, és a dir, verificar que la igualtat és certa per $n = 1$.

$$P(1):\ \ 1 = 1^2$$

Efectivament, la igualtat és vàlida per $n = 1$.

A continuació, cal assumir que la igualtat és vàlida per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol més gran o igual que 1, és a dir:

$$P(k):\ \ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Per finalitzar el pas inductiu, s'ha de demostrar la validesa de la igualtat per $n = k + 1$ utilitzant la hipòtesis enunciada anteriorment.

$$P(k+1\ ):\quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Per tant, utilitzant $P(k)$ es pot reescriure aquesta expressió de la següent forma:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$$

Aleshores, caldrà operar el terme dret de la igualtat fins arribar a la igualtat desitjada. Per aquest motiu, caldrà expressar el polinomi $k^2 + 2k + 1$ en forma de factors, i per tant, convé recordar la identitat notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. En definitiva, la igualtat queda expressada:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

que prova la validesa de la proposició $P(k + 1)$.

En conclusió, s'ha demostrat pel mètode d'inducció matemàtica la validesa de la proposició inicial, ja que s'ha establert la base de la inducció, verificant la igualtat per $n = 1$, i s'ha demostrat la certesa de la igualtat per $n = k + 1$ a partir de la seva validesa per $n = k$ (essent k un nombre natural qualsevol), i això completa la demostració.

Sovint, la proposició que es vol demostrar pel mètode d'inducció matemàtica és vàlida a partir d'un determinat nombre natural p, on $p \geq 2$ (i no per a tot nombre natural n). En aquests casos, el procés a seguir per tal de realitzar la demostració per inducció consta igualment dels dos passos mencionats anteriorment, la base de la inducció i el pas inductiu, però el primer d'aquests varia sensiblement respecte el cas exposat.

Concretament, el mètode de demostració per inducció matemàtica queda aleshores definit de la següent forma:

- *Pas 1 o base de la inducció:* verificar que la proposició és vàlida per $n = p$.
- *Pas 2 o pas inductiu:* assumir que la proposició és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, i establir, a partir d'aquesta, la validesa de la proposició per $n = k + 1$.

Mitjançant aquest mètode, es determina que la proposició és certa per tot nombre natural n, sempre que $n \geq p$ ($p \in \mathbb{N}$). És a dir, que es demostra la validesa de la proposició per tot nombre natural igual o superior a p. Donat que la validesa de la proposició no inclou doncs tot el conjunt de nombres naturals sinó que queda demostrada per $n \geq p$ però no per $n < p$, aquest mètode d'inducció matemàtica a vegades rep el nom de mètode d'inducció incompleta.

A continuació s'exposa un exemple d'aplicació d'aquest mètode.

Demostreu la següent desigualtat:

$$P(n): \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \qquad \forall\, n \geq 2 \qquad n \in \mathbb{N}$$

El primer pas és provar la base de la inducció que, tal i com s'ha exposat, consisteix en verificar aquesta desigualtat per al primer nombre natural que la compleix, és a dir, per $n = 2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} + 1 > 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} > 1 \quad \Rightarrow \quad 2 > 1$$

Efectivament, la desigualtat és certa per $n = 2$.

Seguidament s'ha de verificar el pas inductiu i per tant cal assumir que la desigualtat és certa per $n = k$, on k és qualsevol nombre natural superior a 2.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

Aquesta serà la nostra hipòtesis $P(k)$ i caldrà demostrar, a partir d'aquesta hipòtesis, la validesa de la desigualtat per $n = k + 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Per tant, tenint present $P(k)$ es pot reescriure la desigualtat i operar els seus termes fins deduir la certesa d'aquesta per $n = k + 1$. En efecte,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad \Rightarrow \quad 1 > \sqrt{k+1} \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 > (k+1) - \sqrt{k(k+1)} \quad \Rightarrow \quad 0 > k - \sqrt{k^2 + k} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{k^2 + k} > k \quad \Rightarrow \quad k^2 + k > k^2 \quad \Rightarrow \quad k > 0$$

En definitiva, amb aquest darrer pas inductiu ja completat, es pot afirmar que la desigualtat de l'enunciat és vàlida per tot $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

3.1.3. Tipologia de problemes d'aplicació

En els apartats anteriors, s'han exposat alguns exemples senzills d'aplicació del mètode de demostració per inducció matemàtica. No obstant, cal dir que aquesta metodologia presenta multitud d'aplicacions en àmbits molt diversos de la matemàtica.

A continuació s'exposen alguns dels tipus de problemes on és més habitual utilitzar el mètode d'inducció matemàtica, exemplificant-los amb un cas particular per tal d'entendre la seva aplicació.

A) <u>Demostrar propietats dels enters positius (nombres naturals)</u>

Exemple: Demostrar pel mètode d'inducció matemàtica que el nombre $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ és divisible per 3, $\forall n \ (n \in \mathbb{N})$

El primer pas és comprovar que la proposició és certa per $n = 1$.

$$a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$$

Efectivament, 9 és divisible per 3.

A continuació, es considera vàlida la proposició per $n = k$, on $k \geq 1 \ (k \in \mathbb{N})$, establint així la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$a_k = k^3 + 3k^2 + 5k \quad \textit{és divisible per } 3$$

Finalment, cal demostrar que l'afirmació és certa per $n = k + 1$. En efecte,

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$$

$$a_{k+1} = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3 \cdot (k^2 + 2k + 1) + (5k + 5)$$

$$a_{k+1} = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3k^2 + 6k + 3 + (5k + 5)$$

$$a_{k+1} = \underbrace{k^3 + 3k^2 + 5k} + 3k^2 + 9k + 9$$

$$a_{k+1} = a_k + 3k^2 + 9k + 9$$

$$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\text{És divisible per 3}} + \underbrace{3 \cdot (k^2 + 3k + 3)}_{\text{És divisible per 3}}$$

Per tant, s'ha demostrat la validesa de la propietat per $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$. Donat que també s'havia provat anteriorment la base de la inducció, podem afirmar que aquesta proposició és vàlida per tot enter positiu.

B) <u>Determinar els nombres naturals que compleixen una determinada propietat</u>

Aquest tipus de problema consisteix en establir quins són els nombres naturals que compleixen una propietat donada, com ara una desigualtat.

Exemple: Trobar els nombres naturals n que compleixen:

$$2^n > n^2$$

En aquest cas, en primer lloc provarem la validesa d'aquesta desigualtat amb els primers nombres naturals per intentar determinar una regularitat que ens permeti resoldre la qüestió.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^1 > 1^2 \quad \Rightarrow \quad 2 > 1 \quad \Rightarrow \; \textit{compleix la desigualtat}$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^2 > 2^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2 \quad \Rightarrow \; \textit{no compleix la desigualtat}$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^3 > 3^2 \quad \Rightarrow \quad 8 < 9 \quad \Rightarrow \; \textit{no compleix la desigualtat}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^4 > 4^2 \quad \Rightarrow \quad 16 = 16 \quad \Rightarrow \; \textit{no compleix la desigualtat}$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad 2^5 > 5^2 \quad \Rightarrow \quad 32 > 25 \quad \Rightarrow \; \textit{compleix la desigualtat}$$

$$n = 6 \quad \Rightarrow \quad 2^6 > 6^2 \quad \Rightarrow \quad 64 > 36 \quad \Rightarrow \; \textit{compleix la desigualtat}$$

$$n = 7 \quad \Rightarrow \quad 2^7 > 7^2 \quad \Rightarrow \quad 128 > 49 \quad \Rightarrow \; \textit{compleix la desigualtat}$$

Per tant, a partir dels càlculs realitzats amb els primers n nombres, podem estimar que aquesta desigualtat és certa per $n = 1$ i per $n \geq 5$. Com és evident, no podem realitzar els càlculs per a tots els nombres naturals superiors a 5 (ja que n'hi ha infinits) i per tant, per confirmar la suposició a la que hem arribat amb els primers càlculs, utilitzarem el mètode d'inducció matemàtica i demostrarem així que la proposició es compleix per tot $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

En definitiva, es tracta de provar mitjançant el mètode inductiu, que la desigualtat $2^n > n^2$ és certa per tot $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

En primer llos, s'ha de verificar que la proposició és vàlida per $n = 5$. S'ha calculat anteriorment i, efectivament, es compleix la desigualtat.

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad 2^5 > 5^2 \quad \Rightarrow \quad 32 > 25$$

Seguidament, cal assumir que la proposició és vàlida per $n = k$, on $k > 5$ $(k \in \mathbb{N})$, establint així:

$$n = k \quad \Rightarrow \quad 2^k > k^2$$

Finalment, s'ha de demostrar la validesa de la proposició per $n = k + 1$ mitjançant la hipòtesis anterior

$$n = k + 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{k+1} > (k+1)^2$$

Així doncs, es pot reescriure aquesta expressió de la forma següent:

$$2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$$

$$2k^2 > (k+1)^2$$

$$2k^2 > k^2 + 2k + 1$$

$$k^2 - 2k - 1 > 0$$

$$(k-1)^2 - 2 > 0$$

$$(k-1)^2 > 2$$

S'ha demostrat per inducció matemàtica que la desigualtat és certa per $k \geq 5$ $(k \in \mathbb{N})$. Per tant, es pot afirmar que la desigualtat és certa per $n = 1$ i $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

C) <u>Demostrar identitats trigonomètriques</u>

El mètode de demostració per inducció matemàtica també és sovint utilitzat per provar igualtats trigonomètriques.

Exemple: Demostrar per inducció matemàtica la següent identitat trigonomètrica.

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n\alpha) = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1} \cdot \sin\alpha} \quad \forall \ \sin\alpha \neq 0, \qquad \forall \, n \in \mathbb{N}$$

El primer pas de la demostració consisteix en comprovar que la igualtat és certa per $n = 1$

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sin(4\alpha)}{4 \cdot \sin\alpha}$$

Per dur a terme aquesta primera comprovació i procedir amb la demostració, caldrà recordar una relació trigonomètrica utilitzada habitualment i que és la següent:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 + (\tan\alpha)^2}$$

Fent ús d'aquesta identitat, es pot demostrar que, efectivament, la igualtat per $n = 1$ es compleix.

$$\frac{\sin(4\alpha)}{4 \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{4 \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}{4 \cdot \sin\alpha} = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

Per continuar la demostració cal assumir que la identitat que es vol demostrar és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos\ (2^k\alpha) = \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1} \cdot \sin\alpha}$$

Finalment, cal demostrar la validesa de la identitat per $n = k + 1,\ k \in \mathbb{N}$, per tant cal demostrar la següent expressió:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^k\alpha) \cdot \cos(2^{k+1}\alpha) = \frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+2} \cdot \sin\alpha}$$

Si reescrivim aquesta igualtat utilitzant la hipòtesis d'inducció matemàtica, en resulta:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^k\alpha) \cdot \cos(2^{k+1}\alpha) = \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1} \cdot \sin\alpha} \cdot \ \cos(2^{k+1}\alpha)$$

Per tant, només és necessari demostrar que les expressions anteriors són equivalents. Per això, és immediat i fàcilment s'arriba al resultat esperat.

$$\frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+2} \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin(2 \cdot 2^{k+1}\alpha)}{2^{k+2} \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot \sin(2^{k+1}\alpha) \cdot \cos(2^{k+1}\alpha)}{2 \cdot 2^{k+1} \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1} \cdot \sin\alpha} \cdot \ \cos(2^{k+1}\alpha)$$

En conclusió, s'ha demostrat la identitat trigonomètrica per mitjà del mètode d'inducció matemàtica.

D) <u>Demostrar identitats</u>

Exemple: Demostrar per inducció matemàtica la següent identitat:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \qquad \forall n \geq 2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

El primer pas de la demostració pel mètode inductiu és verificar que la igualtat és certa per $n = 2$.

$$1 \cdot 2 = \frac{(2-1) \cdot 2 \cdot (2+1)}{3} \qquad \Rightarrow \qquad 2 = 2$$

Per continuar, cal assumir que la igualtat és vàlida per $n = k$, on k és qualsevol nombre natural més gran que 2 ($k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$), establint així la hipòtesis:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k = \frac{(k-1)k(k+1)}{3}$$

Per acabar, cal demostrar la validesa de la igualtat per $n = k + 1$, on k és qualsevol nombre natural superior a 2 ($k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$), mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica formulada en el pas anterior. Així, l'expressió d'aquesta igualtat per $n = k + 1$ és la següent:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + \big((k+1)-1\big) \cdot (k+1) = \frac{\big((k+1)-1\big)(k+1)\big((k+1)+1\big)}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}$$

A partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica es pot reescriure l'expressió tal i com segueix:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot (k+1) = \frac{(k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{3} + k \cdot (k+1)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot (k+1) = \frac{(k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{3} + \frac{3 \cdot \big(k \cdot (k+1)\big)}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{3} \cdot \big((k-1)+3\big)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{3} \cdot (k+2)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}$$

Operant es demostra la identitat per $n = k + 1$ i per tant, finalitza la demostració per inducció. En definitiva, es pot afirmar que la igualtat de l'enunciat es verifica per tot nombre natural superior a 2.

E) Demostrar desigualtats

Exemple: Demostrar pel mètode d'inducció matemàtica, la següent desigualtat:

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad \forall a \geq -1\ ;\ a \in \mathbb{N};\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En el primer pas de la demostració, es comprova que la desigualtat es verifica per $n = 1$.

$$(1+a)^1 \geq 1+1a \quad \Rightarrow \quad (1+a) \geq 1+a$$

A continuació, cal assumir que la desigualtat es compleix per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis de inducció matemàtica.

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

Finalment, s'ha de demostrar la validesa de la desigualtat per $n = k+1$, on k és un nombre natural qualsevol, mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica exposada anteriorment.

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

Aquesta expressió és pot reescriure, tenint present la hipòtesis d'inducció matemàtica, tal i com es mostra seguidament:

$$(1+a)^k \cdot (1+a) \geq (1+ka) \cdot (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a+ka^2 \geq \ 1+(k+1)a$$

Després d'operar els termes, es demostra la desigualtat per $n = k+1$, concloent així la demostració pel mètode inductiu i, per tant, quedant comprovada la desigualtat de l'enunciat.

F) Problemes geomètrics

En aquests casos, es tracta d'utilitzar el mètode d'inducció matemàtica per resoldre problemes en l'àmbit de la geometria.

Exemple: Quin és el nombre màxim de parts en què es pot dividir un pla amb n rectes en posició general ($n \in \mathbb{N}$)?

En primer lloc, cal tenir clar que n rectes dividiran un pla en el nombre màxim de parts quan totes aquestes rectes es tallin entre si, és a dir, no hi hagi cap parell de rectes paral·leles i que tres no siguin concurrents en el mateix punt.

En definitiva, només cal determinar en quantes parts es divideix un pla mitjançant n rectes ($n \in \mathbb{N}$) que es tallen entre si, sense ser cap d'elles paral·leles ni concurrents. Per fer-ho, començarem plantejant els casos més senzills (amb una recta, dues, tres, etc...) per intentar detectar alguna regularitat en el resultat que ens permeti fer una afirmació pel cas general de n rectes en el pla.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 1\ recta \xRightarrow{divideix\ el\ pla\ en} 2\ parts$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\ rectes \xRightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 4\ parts$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad 3\ rectes \xRightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 7\ parts$$

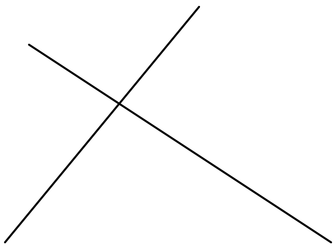
$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad 4\ rectes \xRightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 11\ parts$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad 5\ rectes \xRightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 16\ parts$$

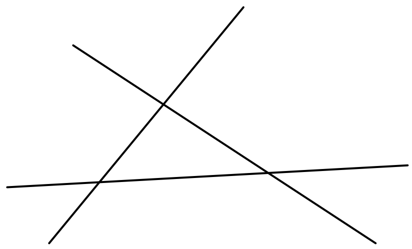
$$n = 6 \quad \Rightarrow \quad 6\ rectes \xRightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 22\ parts$$

Per ajudar a detectar la regularitat, suposem que en un pla ja estan dibuixades k d'aquestes rectes ($k \in \mathbb{N}$), procedim a dibuixar la recta $k+1$ i, aleshores, observem en quant ha incrementat el nombre de parts en que es divideix aquest pla.

Per exemple, si tenim dues rectes dibuixades, és a dir $n = k = 2$, el pla està dividit en 4 parts. Si dibuixem la recta $n = k + 1$, o sigui la recta número 3 ($n = 3$), el pla queda dividit en 7 parts.

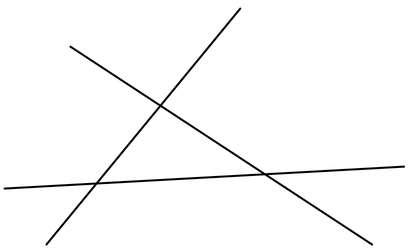


$n = k = 2$

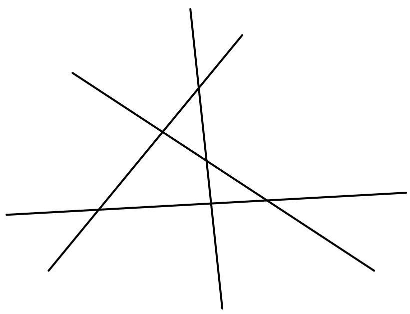


$n = k + 1 = 3$

Un altre exemple, si tenim dibuixades les 3 rectes, és a dir $n = k = 3$, el pla està dividit en 7 parts. Si afegim al dibuix la recta $n = k + 1$, o sigui la recta número 4 ($n = 4$), el pla queda llavors dividit en 11 parts.



$n = k = 3$



$n = k + 1 = 4$

Podem observar que la recta $k + 1$ talla totes les rectes k que ja estaven dibuixades en el pla i els k punts d'intersecció incrementen en $k + 1$ les parts en que es divideix aquest pla.

Per tant, podem afirmar que quan afegim la recta $k + 1$ en el pla, el nombre de parts en que aquest pla es divideix augmenta en $k + 1$ parts.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 1\ recta \xrightarrow{divideix\ el\ pla\ en} 2\ parts$$

$$\Downarrow \quad augmenta\ en\ (k+1)\ parts,\ \text{és}\ a\ dir,\ divideix\ en\ 2\ parts\ \text{més}$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\ rectes \xrightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 4\ parts$$

$$\Downarrow \quad es\ divideix\ en\ 3\ parts\ \text{més}$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad 3\ rectes \xrightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 7\ parts$$

$$\Downarrow \quad es\ divideix\ en\ 4\ parts\ \text{més}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad 4\ rectes \xrightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 11\ parts$$

$$\Downarrow \quad es\ divideix\ en\ 5\ parts\ \text{més}$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad 5\ rectes \xrightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 16\ parts$$

$$\Downarrow \quad es\ divideix\ en\ 6\ parts\ \text{més}$$

$$n = 6 \quad \Rightarrow \quad 6\ rectes \xrightarrow{divideixen\ el\ pla\ en} 22\ parts$$

Per tant, en dibuixar la segona recta el nombre de parts en que es divideix el pla s'incrementa en 2, en dibuixar la tercera recta incrementa aquest nombre de parts en 3, en dibuixar la quarta recta augmenta en 4 parts més, etc. Així, podem extreure que després d'haver dibuixat les n rectes en el pla, aquest quedarà dividit en les següents parts:

$$2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

En definitiva, podem afirmar que el màxim nombre de parts en que es pot dividir un pla mitjançant n rectes ($n \in \mathbb{N}$), és:

$$2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$$

Aquesta identitat es demostrarà finalment pel mètode d'inducció matemàtica.

Primer s'ha de verificar la igualtat per $n = 1$:

$$1 + 1 = 1 + 1$$

Seguidament, s'ha d'assumir que la igualtat és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis de inducció matemàtica.

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + k) + 1 = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + 1$$

Finalment, cal demostrar la validesa de la igualtat certa per $n = k + 1$, a partir de la hipòtesis formulada anteriorment.

$$\big(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\big)+1=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}+1$$

Per tant, es pot reescriure aquesta expressió de la següent manera:

$$\big(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\big)+1=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+1+(k+1)$$

$$\big(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\big)+1=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+1+\frac{2\cdot(k+1)}{2}$$

$$\big(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\big)+1=\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}+1$$

$$\big(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\big)+1=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}+1$$

Hem arribat a l'expressió desitjada i per tant, s'ha demostrat la validesa de la igualtat per $n=k+1$, a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica, finalitzant així el procés de demostració per inducció matemàtica de la igualtat conjecturada.

3.2. EL mètode d'inducció matemàtica dins l'aula

En aquest apartat s'exposa una proposta de com introduir el mètode d'inducció matemàtica dins les aules d'educació secundària. Així doncs, es planteja una possible manera de treballar amb els alumnes aquest tipus de demostracions, tenint present el currículum de la matèria i també els objectius i competències que es volen assolir.

La proposta que es realitza pretén desenvolupar la inducció matemàtica a l'aula en un moment i context determinats, ja que es considera que és la millor manera d'aprofitar els coneixements que ja tenen els alumnes, d'ubicar el tema en un àmbit específic i de veure les aplicacions directes i reals d'aquesta metodologia.

Per tant, a continuació s'exposaran tots aquells aspectes que s'han tingut presents a l'hora de portar la inducció matemàtica a una aula de secundària i que es considera que ajudaran a l'alumnat a entendre i assolir de la millor forma aquest tema. És una proposta en la que es detalla a quin nivell acadèmic es treballarà, com s'ubicarà dins el currículum, quina metodologia de treball s'emprarà a les classes i també quines activitats s'han dissenyat per desenvolupar aquest tema de la inducció matemàtica dins l'aula.

3.2.1. Situació dins el currículum de matemàtiques

A l'hora de plantejar la introducció de les demostracions pel mètode d'inducció matemàtica a una aula d'educació secundària, s'ha optat fer-ho dirigint-se al nivell de 3er d'ESO, on els coneixements previs dels alumnes els permetrà entendre i desenvolupar aquesta metodologia. A més, els continguts i les activitats proposades per treballar aquest mètode de demostració s'adapten especialment al currículum de la matèria i als objectius d'etapa fixats.

De fet, la proposta consisteix en treballar les demostracions per inducció matemàtica ubicant-les dins de la unitat didàctica de "*Successions i progressions*", focalitzant així els continguts i activitats que es volen desenvolupar.

Tot i que al llarg del curs es poden donar igualment situacions particulars dins d'altres unitats didàctiques on també pot ser interessant realitzar una demostració pel mètode d'inducció, la idea és que els alumnes puguin treballar aquest tipus de demostracions de forma continuada durant tota una setmana. Aquesta continuïtat de treball es proposa amb la finalitat d'ajudar als alumnes a entendre i assolir millor una metodologia de treball que normalment no els resulta senzilla, i que encara seria més difícil d'assumir, si només és realitza de forma puntual i sense connexió aparent, un parell de cops durant el curs.

A més a més, el desenvolupament del mètode de demostracions per inducció matemàtica dins la unitat de "*Successions i Progressions*" permet a l'alumne veure una aplicació real d'aquesta metodologia a través de diversos tipus de problemes que presenten diferents graus de dificultat però que estan relacionats de forma directa i clara amb la unitat que s'està treballant.

Així doncs, el mètode de demostració per inducció matemàtica es desenvoluparà dins la unitat didàctica de "*Successions i progressions*", la qual s'ubica, dins el currículum de 3er d'ESO, en el bloc de "*Canvi i relacions*". De fet, aquest bloc consta, generalment, de 4 unitats principals:

- *Equacions*
- *Sistemes d'equacions*
- *Successions i progressions*
- *Funcions lineals i afins*

Per tant, l’alumne ja ha adquirit a través de les unitats anteriors uns coneixements i competències bàsiques que li permeten manipular expressions algebraiques, resoldre equacions de 1er i 2^{on} grau, solucionar sistemes d’equacions, identificar igualtats notables, etc. Tots aquests coneixements seran de gran utilitat, i de fet seran necessaris, a l’hora de realitzar les demostracions per inducció matemàtica.

Així mateix, si s’observa amb més detall la unitat didàctica “*Successions i progressions*”, on es situaran les demostracions pel mètode inductiu, cal tenir present que els continguts fonamentals que es desenvolupen són els següents:

1. *Successions. Definició. Successió recurrent. Terme general.*
2. *Progressions aritmètiques. Diferència de la progressió. Terme general. Suma dels termes d’una progressió aritmètica. Suma dels n primers nombres d’una progressió aritmètica.*
3. *Progressions geomètriques. Raó de progressió. Terme general. Suma dels termes d’una progressió geomètrica il·limitada. Suma dels n termes d’una progressió geomètrica.*

Per tant, caldrà afegir a aquesta unitat didàctica un quart contingut que correspon a l’ús del mètode d’inducció matemàtica per realitzar demostracions d’identitats numèriques i pel càlcul d’algunes sumes finites. Es pot expressar aquesta nova temàtica com es mostra a continuació:

4. *Mètode d’inducció matemàtica. Demostració d’identitats numèriques. Càlcul de sumes finites*.

En definitiva, es considera que introduir les demostracions per inducció a aquest nivell i dins d’aquesta unitat didàctica encaixa perfectament en el currículum de la matèria i permet als alumnes treballar amb una aplicació totalment real d’aquest mètode.

3.2.2. Competències bàsiques i objectius fixats

Tal i com s’ha comentat a l’inici d’aquesta memòria (Apartat 2: Definició i context del problema), les demostracions per inducció matemàtica contribueixen de forma molt positiva a que els alumnes assoleixin les competències bàsiques, i en especial, la competència matemàtica.

Recordem que dins la competència matemàtica, es considera fonamental que els alumnes adquireixin la capacitat de pensament i de raonament matemàtic, i aquests dos valors són especialment potenciats per mitjà de les demostracions matemàtiques.

De fet, el primer d’aquests valors, el pensament matemàtic, implica aspectes bàsics com ara construir coneixements matemàtics, experimentar, intuir, formular, comprovar i modificar conjectures, relacionar conceptes i fer abstraccions. Per tant, resulta evident que mitjançant les demostracions per inducció matemàtica es treballen de forma significativa tots aquests aspectes.

Igualment evident, és la importància de les demostracions per inducció per tal d’assolir la capacitat de raonament matemàtic, ja que aquest porta implícit aspectes com: particularitzar i generalitzar, reconèixer conceptes matemàtics, argumentar les decisions preses així com els processos i tècniques utilitzades. En aquest sentit, el raonament matemàtic és probablement la competència que més es treballa i potencia des de la inducció matemàtica.

En general, la competència matemàtica també implica altres aspectes que l’alumne ha d’adquirir i que també es veuran reforçats amb el treball de les demostracions per inducció. Alguns d’aquests trets més característics s’exposen breument a continuació:

- Resolució de problemes: implica entendre i interpretar un enunciat, fer-se preguntes davant un problema, verificar la validesa de les solucions trobades, buscar altres maneres de solucionar un problema, ser capaç d'explicar els mètodes utilitzats i sintetitzar els resultats, etc.

- Ús de les tècniques matemàtiques bàsiques: és necessari aplicar processos i coneixements ja assolits, s'ha de poder recórrer a eines bàsiques i conceptes matemàtics que s'han treballat durant el mateix curs o en altres anteriors i que l'alumne hauria d'interioritzar.
- Obtenir, interpretar i representar informació amb contingut matemàtic, és essencial saber expressar tant amb paraules com amb símbols, nombres, etc. És important anar adquirint el llenguatge matemàtic però també saber expressar amb paraules tot allò que es realitza matemàticament.

Per tant, han quedat exposades totes aquelles competències bàsiques que es reforçaran a través del treball de les demostracions per inducció matemàtica. Tots aquests aspectes s'observen clarament reflectits en les activitats que s'han dissenyat per realitzar a l'aula amb l'alumnat.

Per altra banda, s'han fixat uns objectius bàsics que els alumnes haurien d'assolir amb el treball de la inducció matemàtica a l'aula, i que s'indiquen a continuació:

1. Entendre en què consisteix la inducció matemàtica i reconèixer el seu ús en la resolució de problemes.
2. Comprendre el procediment que cal seguir per a realitzar una demostració pel mètode d'inducció matemàtica
3. Aplicar correctament el mètode d'inducció matemàtica per demostrar igualtats numèriques.
4. Ser capaç d'aplicar adequadament el mètode de demostracions per inducció matemàtica per tal de resoldre problemes de sèries numèriques.

Així doncs, han quedat establerts els objectius específics de l'aplicació de les demostracions per inducció matemàtica a l'aula i s'han exposat les competències bàsiques que es potenciaran a través d'aquesta tècnica.

3.2.3. Metodologia de treball i recursos didàctics

Tal i com s'ha raonat anteriorment, el desenvolupament a l'aula del mètode de demostració per inducció matemàtica es realitzarà a nivell de 3er d'ESO, durant tota una setmana del curs i dins la unitat didàctica de "*Successions i progressions*", concretament a la part final d'aquesta unitat.

Com ja s'ha exposat, el mètode inductiu es pot aplicar en problemes de tipologia molt diversa, però a l'hora de desenvolupar-lo dins una aula de secundària, es creu convenient centrar-se en només algunes de les aplicacions i ubicar-lo dins una unitat didàctica concreta, de manera que així es pot treballar aquesta metodologia de forma continuada (i no fent alguna demostració puntual al llarg d'un curs) i es pot veure la seva aplicació real i directa dins la unitat que s'està desenvolupant.

Es proposa treballar el mètode de demostració per inducció matemàtica dins la unitat didàctica de "*Successions i progressions*" amb la finalitat de desenvolupar aquesta metodologia a partir de la seva aplicació en problemes d'igualtats numèriques i, sobretot, de sèries numèriques. Lògicament, es pretén introduir aquesta tècnica de demostració a partir d'exemples i exercicis senzills, i anar augmentant progressivament el grau de dificultat de les activitats.

Donat que les demostracions per inducció matemàtica es treballaran amb el grup classe durant 3 hores lectives, a continuació es mostra la seqüència de continguts i activitats que es plantegen per aquestes 3 sessions:

- *Primera sessió:* és la sessió d'introducció i per tant, es tracta de que el professor exposi què és la inducció matemàtica, expliqui quin és el procés per fer demostracions a través del mètode d'inducció matemàtica i es vegin diversos exemples de l'aplicació d'aquest mètode. En general, es tracta de que l'alumne comprengui aquest mètode, es familiaritzi amb el procés de demostració que comporta, i vegi diferents problemes i aplicacions. En aquesta primera classe, el paper del professor és força important però també cal que l'alumne mostri el seu interès i implicació. De fet, l'alumne també rebrà el primer dia el "*Full d'activitats 1*", amb una proposta d'exercicis que ja pot començar a treballar de forma individual.
- *Segona sessió:* en aquesta sessió el professor perdrà protagonisme, ja que l'hora de classe estarà dedicada a que els alumnes realitzin, individualment o en parelles, totes les activitats proposades en el "*Full d'activitats 1*". L'objectiu principal és que l'alumne practiqui l'aplicació d'aquest mètode d'inducció matemàtica en diversos tipus de problemes i adquireix la capacitat de fer demostracions mitjançant aquesta tècnica. En aquest cas, el paper del professor serà secundari, ja que podrà resoldre dubtes i donar orientacions a l'alumnat, però es tracta de que siguin els propis alumnes els que s'enfrontin a les activitats, intentin aplicar el mètode inductiu, raonin com solucionar els problemes que sorgeixin i detectin les seves pròpies dificultats.
- *Tercera sessió*: aquesta darrera sessió es dedicarà a realitzar el "*Full d'activitats 2*", que presenta exercicis amb major grau de dificultat que l'anterior. Com es mostrarà amb detall més endavant, el primer full d'activitats consisteix en demostrar igualtats numèriques per mitjà de la inducció matemàtica i, en canvi, en aquest segon full d'activitats es tracta de trobar la solució de diverses sèries numèriques a través del mètode d'inducció matemàtica. En aquesta última sessió, el professor també tindrà un paper més orientatiu i seran els propis alumnes els que han d'intentar resoldre les activitats a partir dels exemples donats i de totes les eines que ja han adquirit.

Per tal de desenvolupar la inducció matemàtica a l'aula, s'utilitzaran diversos recursos didàctics, entre els quals destaquen el conjunt d'activitats dissenyades personalment, que es recullen en el "*Full d'activitats 1: Demostracions per inducció matemàtica*" i "*Full d'activitats 2: Sumes finites i inducció matemàtica*". Aquestes activitats es comenten i mostren detalladament en l'apartat següent d'aquesta mateixa memòria.

3.2.4. Activitats dissenyades

Amb la finalitat de treballar el mètode d'inducció matemàtica dins l'aula, de la millor forma possible i situant-lo dins de la unitat de "*Successions i Progressions*", s'han dissenyat un conjunt d'activitats que es recullen en dos dossiers d'activitats que s'han anomenat: "*Full d'activitats 1: Demostracions per inducció matemàtica*" i "*Full d'activitats 2: Sumes finites i inducció matemàtica*"

El "*Full d'activitats 1: Demostracions per inducció matemàtica*" es centra en aplicar el procés de demostració pel mètode d'inducció en diversos problemes d'igualtats numèriques. En aquestes primeres activitats, es va guiant a l'alumne a través de diverses qüestions que li permetran anar aplicant el mètode inductiu pas a pas fins arribar a completar el procés de demostració.

En el "*Full d'activitats 2: Sumes finites i inducció matemàtica*", es planteja un altre ús del mètode de demostració per inducció matemàtica que s'aplica en la resolució de sèries numèriques. El grau de dificultat d'aquests exercicis augmenta respecte l'anterior, ja que l'alumne ha d'estimar el resultat d'una sèrie numèrica i després comprovar, mitjançant el mètode inductiu, si la seva estimació era correcta o no. En aquest cas, la resolució dels exercicis proposats no està guiada, ja que es considera que l'alumne pot aplicar el mètode de resolució de forma anàloga a com es realitza en els exemples exposats.

En ambdós casos, a l'alumne se li presenten exemples solucionats detalladament de l'aplicació del mètode d'inducció matemàtica, els quals li han de servir de referència l'hora d'aplicar per si mateix el mètode de resolució. A l'alumne li pot ser de gran ajuda tenir aquests exemple resolts, ja que li haurien de permetre realitzar les demostracions i els exercicis proposats de manera anàloga a com se li exposa en aquestes resolucions.

Els dos fulls d'activitats dissenyades, juntament amb les resolucions de cada un dels exercicis proposats, es presenten a continuació.

FULL D'ACTIVITATS 1: DEMOSTRACIONS PER INDUCCIÓ MATEMÀTICA

A continuació es proposen un conjunt d'activitats en les quals cal utilitzar el mètode d'inducció matemàtica per realitzar demostracions d'igualtats numèriques.

Abans de començar les activitats, recorda el procés que cal seguir per realitzar una demostració pel mètode d'inducció matemàtica:

- *Base de la inducció*: cal verificar que la proposició és vàlida per $n = 1$.
- *Pas inductiu*: cal assumir que la proposició és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, i establir, a partir d'aquesta, la validesa de la proposició per $n = k + 1$.

Fixa't en els exemples mostrats i resol els exercicis que es proposen.

EXEMPLE 1

Demostrar pel mètode d'inducció matemàtica la següent identitat:

$$\mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}} \qquad \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{1} \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

Primer cal crear la base de la inducció i per tant, comprovar que la igualtat es verifica per $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 1$$

Per continuar amb la demostració, cal assumir que la igualtat és vàlida per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis de inducció matemàtica (HIM).

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k\,(k+1)}{2} \qquad [HIM]$$

Aleshores, només falta demostrar, a partir de la hipòtesis d'inducció, que la igualtat es compleix per $n = k + 1$, on k és un nombre natural qualsevol. Per tant, cal demostrar la següent expressió:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad [Eq.1]$$

Partint de la hipòtesis d'inducció matemàtica $[HIM]$ i operant les expressions s'arriba a demostrar aquesta igualtat $[Eq.1]$.

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\,(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\,(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\,(k+1)+2\,(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Donat que s'ha creat la base de la inducció i s'ha demostrat el pas inductiu, es pot afirmar que la igualat és vàlida per tot nombre natural.

EXERCICI 1

Demostra la següent identitat numèrica mitjançant el mètode d'inducció matemàtica.

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2} \qquad \forall \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1} \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Recorda el primer pas del mètode de demostració d'inducció matemàtica i expressa'l amb les teves pròpies paraules.

Es compleix aquest primer pas del mètode inductiu?

Explica quin és el següent pas que cal realitzar en la demostració d'aquesta igualtat pel mètode d'inducció matemàtica.

Estableix la hipòtesis d'inducció matemàtica.

Finalment, desenvolupa el procés inductiu per finalitzar la demostració de la igualtat matemàtica.

Es compleixen tots els requisits establerts al mètode de demostració per inducció matemàtica? Ha quedat demostrada la igualtat numèrica de l'enunciat?

EXERCICI 1 (RESOLUCIÓ)

Demostra la següent identitat numèrica mitjançant el mètode d'inducció matemàtica.

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2} \qquad \forall \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1} \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Recorda el primer pas del mètode de demostració d'inducció matemàtica i expressa'l amb les teves pròpies paraules.

El primer pas en una demostració per inducció matemàtica consisteix en crear la base de la inducció, és a dir, verificar que la igualtat és certa per $n=1$.

Es compleix aquest primer pas del mètode inductiu?

$$1=1^2$$

Efectivament, es compleix la base de la inducció.

Explica quin és el següent pas que cal realitzar en la demostració d'aquesta igualtat pel mètode d'inducció matemàtica.

El següent pas en la demostració per inducció és assumir que la igualtat és vàlida per $n=k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis d'inducció matemàtica. Finalment, cal demostrar que la igualtat es compleix per $n=k+1$, mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica. Aquest és el pas inductiu de la demostració.

Estableix la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \qquad [HIM]$$

Finalment, desenvolupa el procés inductiu per finalitzar la demostració de la igualtat matemàtica.

Plantegem la igualtat per $n=k+1$:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2 \qquad [Eq.1]$$

Demostrem que la igualtat es certa per $n=k+1$ mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica formulada anteriorment $[HIM]$. Així, podem reescriure l'expressió de la següent manera:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$

Finalment, cal operar el terme dret de la igualtat fins arribar a l'expressió desitjada $[Eq.1]$ i per això cal factoritzar el polinomi k^2+2k+1 , o bé recordar la igualtat notable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. En tot cas, la igualtat queda expressada definitivament com:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

Es compleixen tots els requisits establerts al mètode de demostració per inducció matemàtica?

S'ha creat la base de la inducció i s'ha demostrat el pas inductiu, per tant podem afirmar que la igualtat de l'enunciat és vàlida per a tot nombre natural.

EXEMPLE 2

Demostra la següent identitat numèrica per mitjà del mètode d'inducció matemàtica:

$$\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad \forall \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

El primer pas de la demostració és comprovar que la igualtat és vàlida per $n=1$

$$1^2=\frac{1\,(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \quad \Rightarrow \quad 1=1$$

Efectivament, es verifica la base de la inducció.

A continuació, cal considerar que la igualtat es compleix per $n=k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k\,(k+1)(2k+1)}{6} \qquad [HIM]$$

Finalment, cal demostrar que la igualtat és vàlida per $n=k+1$ mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica formulada. Plantegem primer la igualtat per $n=k+1$:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad [Eq.1]$$

Podem reescriure la igualtat numèrica a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica $[HIM]$ i operar el terme dret d'aquesta igualtat, fins arribar a la l'expressió desitjada $[Eq.1]$.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k\,(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k\,(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6\,(k+1)^2}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=(k+1)\cdot\frac{k\,(2k+1)+6\,(k+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)}{6}\cdot\underbrace{(2k^2+7k+6)}_{\text{Factoritzar}} \qquad [Eq.2]$$

Per tal de demostrar la igualtat numèrica, cal factoritzar el polinomi $\mathrm{p(k)=2k^2+7k+6}$ de l'expressió $[Eq.2]$. Per tant, cal trobar les seves arrels i per això s'ha de resoldre l'equació següent:

$$2k^2+7k+6=0$$

Donat que tenim una equació de 2^n grau, utilitzarem la fórmula que ja coneixem per resoldre-la. Recordem que per equacions de 2^n grau amb l'expressió genèrica següent:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La fórmula que ens permet resoldre aquesta equació i per tant trobar les arrels del polinomi és la següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

Cal recordar que tota equació de 2^n grau presenta dues solucions, que anomenarem r_1 i r_2 , i que ens permeten escriure aquesta mateixa equació en forma de factors, és a dir, tal com segueix:

$$ax^2 + bx + c = (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Procedim doncs, a trobar les arrels del polinomi $p(k) = 2k^2 + 7k + 6$

$$2k^2 + 7k + 6 = 0$$

$$k = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4}$$

Així, observem que les dues solucions trobades són $r_1 = -2$ i $r_2 = -3/2$ i per tant, el polinomi es pot expressar en forma de factors com es mostra seguidament:

$$2k^2 + 7k + 6 = (k + 2) \cdot \left(k + \frac{3}{2}\right)$$

$$2k^2 + 7k + 6 = (k + 2) \cdot (2k + 3)$$

Si ara tornem a l'expressió de la demostració per inducció $[Eq. 2]$, podem reescriure el terme dret de la igualtat amb els factors trobats i acabar la demostració per inducció de la igualtat numèrica.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)}{6} \cdot (2k^2 + 7k + 6)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)}{6} \cdot (k + 2) \cdot (2k + 3)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

Finalment, hem arribat a l'expressió desitjada $[Eq. 1]$ i, per tant, hem demostrat la igualtat per $n = k + 1$ a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica. Com que també hem verificat abans la base de la inducció, podem afirmar que la igualtat de l'enunciat és vàlida per a tot nombre natural.

EXERCICI 2

Demostra la següent identitat mitjançant el mètode d'inducció matemàtica:

$$\mathbf{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\,(2n-1)(2n+1)}{3}} \qquad \forall \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Anomena quin és el primer pas del mètode de demostració per inducció matemàtica

Es compleix aquest primer pas de la demostració pel mètode inductiu?

Explica quin és el següent pas que cal realitzar en la demostració per inducció d'aquesta igualtat.

Estableix la hipòtesis d'inducció matemàtica.

Finalment, desenvolupa el pas inductiu per finalitzar la demostració de la igualtat.

Es compleixen tots els requisits establerts al mètode de demostració per inducció matemàtica?

EXERCICI 2 (RESOLUCIÓ)

Demostra la següent identitat mitjançant el mètode d'inducció matemàtica:

$$\mathbf{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\,(2n-1)(2n+1)}{3}} \qquad \forall \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Anomena quin és el primer pas del mètode de demostració per inducció matemàtica

El primer pas de la demostració és crear la base de la inducció, que consisteix en verificar que la igualtat és certa per $n = 1$.

Es compleix aquest primer pas de la demostració pel mètode inductiu?

$$1^2 = \frac{1\,(2-1)(2+1)}{3}$$

$$1 = 1$$

Sí que es verifica, i per tant, s'ha establert la base de la inducció.

Explica quin és el següent pas que cal realitzar en la demostració per inducció d'aquesta igualtat.

Per continuar amb la demostració, cal d'assumir que la igualtat es compleix per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis d'inducció matemàtica. Finalment, s'ha de demostrar la validesa de la igualtat per $n = k + 1$, mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica. Aquest és es pas inductiu de la demostració.

Estableix la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k\,(2k-1)(2k+1)}{3} \qquad [HIM]$$

Finalment, desenvolupa el pas inductiu per finalitzar la demostració de la igualtat.

Plantegem la igualtat per $n = k + 1$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1) + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} \qquad [Eq.1]$$

Demostrem que la igualtat es verifica per $n = k + 1$ $[Eq.1]$ per mitjà de la hipòtesis d'inducció matemàtica formulada anteriorment $[HIM]$. Així doncs, podem reescriure aquesta expressió de la següent forma:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k\,(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{k\,(2k-1)(2k+1)}{3}+\frac{3\cdot(2k+1)^2}{3}$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(2k+1)}{3}\cdot\big(k\cdot(2k-1)+(2k+1)\big)$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(2k+1)}{3}\cdot(2k^2-k+6k+3)$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(2k+1)}{3}\cdot\underbrace{(2k^2+5k+3)}_{\text{Factoritzar}}\qquad[Eq.2]$$

Per tal de demostrar la igualtat numèrica, cal factoritzar el polinomi $\mathrm{p(k)}=2\mathrm{k}^2+5\mathrm{k}+3$ de l'expressió $[Eq.2]$. Per tant, cal trobar les seves arrels i per això s'ha de resoldre l'equació següent:

$$2k^2+5k+3=0$$

Donat que tenim una equació de 2n grau utilitzarem la fórmula que ja coneixem per resoldre-la. Recordem que per equacions de 2n grau amb l'expressió genèrica següent:

$$ax^2+bx+c=0$$

La fórmula que ens permet resoldre aquesta equació i per tant trobar les arrels del polinomi és la següent:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

Cal recordar que tota equació de 2^n grau presenta dues solucions, que anomenarem r_1 i r_2 , i que ens permeten escriure aquesta mateixa equació en forma de factors, és a dir, tal i com segueix:

$$ax^2+bx+c=(x-r_1)\cdot(x-r_2)$$

Procedim doncs, a trobar les arrels del polinomi $p(k)=2k^2+5k+3$

$$2k^2+5k+3=0$$

$$k=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{-5\pm1}{4}$$

Així, observem que les dues solucions trobades són $r_1=-1$ i $r_2=-3/2$. Per tant el polinomi es pot expressar en forma de factors com es mostra a continuació:

$$2k^2+5k+3=(k+1)\cdot\left(k+\frac{3}{2}\right)$$

$$2k^2 + 5k + 3 = (k+1) \cdot (2k+3)$$

Si ara tornem a l'expressió de la demostració per inducció $[Eq. 2]$, podem reescriure el terme dret de la igualtat amb els factors trobats i acabar la demostració per inducció de la igualtat numèrica.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(2k+1)}{3} \cdot (2k^2 + 5k + 3)$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(2k+1)}{3} \cdot \big((k+1) \cdot (2k+3)\big)$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

Finalment, hem arribat a l'expressió desitjada $[Eq. 1]$ i, per tant, hem demostrat la igualtat per $n = k + 1$ a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica. Com que també hem verificat abans la base de la inducció, podem afirmar que la igualtat de l'enunciat és vàlida per a tot nombre natural.

Es compleixen tots els requisits establerts al mètode de demostració per inducció matemàtica?

Com s'acaba de comentar, s'ha creat la base de la inducció i s'ha demostrat el pas inductiu, per tant podem afirmar que la igualtat de l'enunciat és vàlida per a tot nombre natural.

EXERCICI 3

Demostra la següent identitat mitjançant el mètode d'inducció matemàtica

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}} \qquad \forall \mathbf{n \geq 1} \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

Explica amb les teves paraules quin és el procés que cal seguir per realitzar una demostració pel mètode d'inducció matemàtica.

Aplica aquest procediment per demostrar la igualtat amb el mètode d'inducció matemàtica.

Es compleixen tots els requisits establerts al mètode de demostració per inducció matemàtica? S'ha demostrat la igualtat numèrica?

EXERCICI 3 (RESOLUCIÓ)

Demostra la següent identitat mitjançant el mètode d'inducció matemàtica

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \qquad \forall n \geq 1 \qquad n \in \mathbb{N}}$$

Explica amb les teves paraules quin és el procés que cal seguir per realitzar una demostració pel mètode d'inducció matemàtica.

El procés que cal seguir per realitzar una demostració pel mètode d'inducció matemàtica és el següent:

- *Base de la inducció*: cal verificar que la proposició és vàlida per $n = 1$.
- *Pas inductiu*: cal assumir que la proposició és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, i establir, a partir d'aquesta, la validesa de la proposició per $n = k + 1$.

Si es compleixen les dues part, es pot afirmar que la proposició és vàlida per tot nombre natural.

Aplica aquest procediment per demostrar la igualtat amb el mètode d'inducció matemàtica.

En primer lloc, cal crear la base de la inducció i per això s'ha de comprovar que la igualtat es compleix per $n = 1$.

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$$

$$1 = 1$$

Efectivament, es compleix i per tant s'ha establert la base de la inducció.

A continuació, cal assumir que la igualtat és certa per $n = k$, k és un nombre natural qualsevol. Aquesta serà la hipòtesis d'inducció matemàtica (HIM).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} \qquad [HIM]$$

Finalment, s'ha de demostrar que la igualtat es compleix per $n = k + 1$, mitjançant la hipòtesis d'inducció matemàtica establerta en el pas anterior. Plantegem la igualtat per $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4} \qquad [Eq.1]$$

A partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica $[HIM]$ reescrivim l'expressió de la següent manera i operem el terme dret de la igualtat fins arribar a la igualtat desitjada $[Eq.1]$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + \frac{4 \cdot (k+1)^3}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \cdot \frac{k^2 + 4 \cdot (k+1)}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4} \cdot \underbrace{(k^2 + 4k + 4)}_{\text{Factoritzar}} \qquad [Eq.2]$$

Igual que passava en l'exercici anterior, per tal de demostrar la igualtat numèrica, cal factoritzar el polinomi $p(k) = k^2 + 4k + 4$ d'aquesta expressió $[Eq.2]$. Per tant, cal trobar les seves arrels i per això s'ha de resoldre la següent equació:

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

Donat que tenim una equació de 2^n grau amb l'expressió genèrica següent:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilitzarem la fórmula que ja coneixem per resoldre l'equació i trobar així les arrels del polinomi.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

Cal recordar que tota equació de 2^n grau presenta dues solucions, que anomenarem r_1 i r_2 , i que ens permeten escriure aquesta mateixa equació en forma de factors, és a dir, tal i com segueix:

$$ax^2 + bx + c = (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Procedim doncs, a trobar les arrels del polinomi $p(k) = k^2 + 4k + 4$

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$$

En aquest cas, observem que l'equació té una única solució, el que significa que l'arrel és doble, és a dir, que $r_1 = r_2 = -2$. Per tant, el polinomi es pot expressar en forma de factors com es mostra a continuació:

$$k^2 + 4k + 4 = (k+2) \cdot (k+2)$$

$$k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$$

Si tornem de nou a la darrera expressió de la demostració per inducció $[Eq. 2]$, podem reescriure el terme dret de la igualtat amb els factors trobats i acabar la demostració pel mètode d'inducció de la igualtat numèrica.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k^2 + 4k + 4)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

Finalment, hem arribat a l'expressió desitjada $[Eq. 1]$ i, per tant, hem demostrat la igualtat per $n = k + 1$ a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica. Com que també hem verificat abans la base de la inducció, podem afirmar que la igualtat de l'enunciat és vàlida per a tot nombre natural.

Es compleixen tots els requisits establerts al mètode de demostració per inducció matemàtica? S'ha demostrat la igualtat numèrica?

Tal i com s'acaba de comentar, s'ha creat la base de la inducció i s'ha demostrat el pas inductiu, per tant, podem afirmar que la igualtat de l'enunciat és vàlida per a tot nombre natural.

FULL D'ACTIVITATS 2: SUMES FINITES I INDUCCIÓ MATEMÀTICA

Es proposen un conjunt d'exercicis on s'utilitzarà el mètode de demostració per inducció matemàtica per trobar el resultat de sumes finites.

EXEMPLE 1

Calcula el resultat del següent sumatori:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad n \geq 1}$$

Inicialment, calcularem el resultat d'aquesta sèrie numèrica pels primers n nombres amb la finalitat d'intentar detectar una regularitat en aquests resultats que ens permeti deduir la solució de la sèrie.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{2}{3}$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{3}{4}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{4}{5}$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad S_5 = \frac{5}{6}$$

Tots aquests sumatoris donen com a resultat una fracció on el numerador el nombre de termes de la suma (és a dir, n) i el denominador és aquest mateix nombre més una unitat (o sigui, $n+1$). Per tant, a partir del càlcul del sumatori pels primers 5 nombres naturals, veiem que el resultat presenta una regularitat que ens permet suposar que el resultat d'aquesta sèrie és el següent:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad [Eq. 1]$$

Donat que, evidentment, no podem comprovar aquest resultat per tots els nombres naturals, el que farem és considerar aquesta igualtat com la nostra hipòtesis i demostrar la seva validesa per mitjà del mètode d'inducció matemàtica.

Per tant, procedim a aplicar el mètode de demostració inductiu que ja coneixem.

Primer cal comprovar la validesa de la igualtat $[Eq. 1]$ per $n = 1$:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{2}$$

Efectivament, el resultat estimat de la sèrie es verifica per $n = 1$.

Per continuar la demostració per inducció cal assumir que la igualtat és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$n = k \quad \Rightarrow \quad S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1} \qquad [HIM]$$

Finalment, cal verificar la validesa de la igualtat per $n = k + 1$, mitjançant la hipòtesis de inducció matemàtica formulada anteriorment.

$$n = k + 1 \;\Rightarrow\; S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \qquad [Eq. 2]$$

Aleshores, podem reescriure aquesta expressió a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica $[HIM]$, de la següent forma:

$$S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)}}_{S_k} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} =$$

$$= \frac{k \cdot (k+2)}{(k+1) \cdot (k+2)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k \cdot (k+2) + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1) \cdot (k+2)}$$

Només cal operar aquesta expressió per tal d'arribar a la igualtat desitjada $[Eq. 2]$ i finalitzar la demostració. Per tant, únicament serà necessari factoritzar el numerador $k^2 + 2k + 1$, i per això hem de recordar les igualtats notables (o bé resoldre l'equació de segon grau $k^2 + 2k + 1 = 0$). En qualsevol cas, el resultat és el següent:

$$S_{k+1} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Per tant, hem arribat a l'expressió desitjada $[Eq. 2]$ i, en conseqüència, hem demostrat la igualtat per $n = k + 1$ a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica, completant així la demostració pel mètode inductiu.

En definitiva, podem afirmar que l'estimació que havíem fet del resultat de la sèrie numèrica $[Eq. 1]$ és correcte, ja que la igualtat es compleix per tot nombre natural n, tal i com s'ha demostrat pel mètode d'inducció matemàtica. Per tant, podem assegurar que el resultat de la sèrie és el següent:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

EXERCICI 1

Calcula el resultat de la següent suma finita:

$$\boldsymbol{S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad n\in\mathbb{N} \quad n\geq 2}$$

Determina el resultat d'aquesta sèrie numèrica utilitzant el mètode d'inducció matemàtica. Explica detalladament tots els passos que segueixes per dur a terme aquesta resolució.

EXERCICI 1 (RESOLUCIÓ)

Calcula el resultat de la següent suma finita:

$$\boldsymbol{S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2}$$

Inicialment, calcularem el resultat d'aquesta sèrie numèrica pels primers n nombres amb l'objectiu de detectar una regularitat en aquests resultats que ens permeti deduir la solució de la sèrie.

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{1}{2}$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{1}{3}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{1}{4}$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad S_5 = \frac{1}{5}$$

Podem observar clarament una regularitat en els resultats dels primers n nombres, ja que en tots els casos el resultat és una fracció on el numerador és 1 i el denominador és el nombre de termes de la sèrie, és a dir, n . Per tant, podem deduir el resultat d'aquesta sèrie és el següent:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad [Eq.1]$$

De nou, és evident que no podem comprovar aquest resultat per tots els nombres naturals, i per tant el que farem és considerar aquesta estimació una hipòtesis que demostrem mitjançant el mètode d'inducció matemàtica.

En conseqüència, aplicarem el mètode de demostració inductiu que ja coneixem.

En primer lloc, cal verificar la validesa de la igualtat $[Eq.1]$ pel primer nombre que compleix la sèrie numèrica, és a dir, per $n = 2$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Efectivament, el resultat estimat de la sèrie es verifica per $n = 2$.

El següent pas en la demostració pel mètode d'inducció consisteix en assumir que el resultat de la igualtat és cert per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol major que 2. D'aquesta manera s'estableix la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$n = k \quad \Rightarrow \quad S_k = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \qquad [HIM]$$

Finalment, cal verificar la validesa de la igualtat per $n = k+1$, a través de la hipòtesis de inducció matemàtica formulada anteriorment.

$$n = k+1 \;\Rightarrow\; S_{k+1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} \qquad [Eq. 2]$$

Així doncs, es pot reescriure aquesta expressió a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica establerta anteriorment $[HIM]$, de la següent manera:

$$S_{k+1} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)}_{S_k}\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

$$S_{k+1} = S_k\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k}\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k+1}{k+1}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

Per tant, hem arribat a l'expressió desitjada $[Eq. 2]$ i, en conseqüència, hem demostrat la igualtat per $n = k+1$ a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica, completant així la demostració pel mètode inductiu.

En definitiva, podem afirmar que l'estimació que havíem fet del resultat de la sèrie numèrica $[Eq. 1]$ és correcte, ja que la igualtat es compleix per tot nombre natural $n,\; n \geq 2$, tal i com s'ha demostrat pel mètode d'inducció matemàtica. Per tant, podem assegurar que el resultat de la sèrie és el següent:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

EXERCICI 2

Calcula el resultat de la següent suma finita:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \qquad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

Determina el resultat d'aquesta sèrie numèrica utilitzant el mètode d'inducció matemàtica. Explica detalladament tots els passos que segueixes per dur a terme aquesta resolució.

EXERCICI 2 (RESOLUCIÓ)

Calcula el resultat de la següent suma finita:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}} \qquad \boldsymbol{n \in \mathbb{N}} \quad \boldsymbol{n \geq 1}$$

Inicialment, calcularem el resultat d'aquesta sèrie numèrica pels primers n nombres amb l'objectiu de detectar una regularitat en aquests resultats que ens permeti deduir la solució de la sèrie.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{3}$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{2}{5}$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{3}{7}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{4}{9}$$

Tots aquests sumatoris donen com a resultat una fracció on el numerador és el nombre de termes de la suma, és a dir n, i el denominador és el nombre imparell més alt que apareix en el sumatori o, dit d'una altra manera, l'últim nombre imparell que s'afegeix al denominador del sumatori, és a dir, el nombre $2n+1$.

Per tant, a partir del càlcul del sumatori pels primers 4 nombres naturals, veiem que el resultat presenta una regularitat que ens permet suposar que el resultat d'aquesta sèrie és el següent:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \qquad [Eq. 1]$$

Donat que, evidentment, no podem comprovar aquest resultat per tots els nombres naturals, el que farem és considerar aquesta igualtat com la nostra hipòtesis i demostrarem la seva validesa a través del mètode d'inducció matemàtica.

En conseqüència, procedim a aplicar el mètode de demostració per inducció que ja coneixem.

En primer lloc, s'ha de comprovar la validesa de la igualtat $[Eq. 1]$ per $n = 1$

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1 + 1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{3}$$

Efectivament, el resultat estimat de la sèrie es verifica per $n = 1$

Per continuar la demostració per inducció, cal assumir que la igualtat és certa per $n = k$, on k és un nombre natural qualsevol, establint així la hipòtesis d'inducció matemàtica.

$$n = k \quad \Rightarrow \quad S_k = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \qquad [HIM]$$

Finalment, cal verificar la validesa de la igualtat per $n = k + 1$ mitjançant la hipòtesis de inducció matemàtica formulada anteriorment. Plantegem la igualtat per $n = k + 1$:

$$n = k + 1 \quad \Rightarrow \quad S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k+1}{(2k+3)} \quad [Eq.2]$$

Aleshores, podem reescriure aquesta expressió a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica establida $[HIM]$ de la següent manera:

$$S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}}_{S_k} + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k+1}{(2k+3)}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} =$$

$$= \frac{k\cdot(2k+3)}{(2k+1)\cdot(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k\cdot(2k+3)+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} \quad [Eq.3]$$

Només cal operar aquesta expressió per tal d'arribar a la igualtat desitjada $[Eq.2]$ i finalitzar la demostració. Per tant, únicament serà necessari factoritzar el numerador $2k^2 + 3k + 1$ i per això caldrà resoldre l'equació de 2^n grau següent:

$$2k^2 + 3k + 1 = 0$$

Donat que tenim una equació de 2^n grau amb l'expressió genèrica següent:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilitzarem la fórmula que ja coneixem per resoldre l'equació i trobar així les arrels del polinomi.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

Recordem que tota equació de 2^n grau presenta dues solucions, que anomenarem r_1 i r_2 , i que ens permeten escriure aquesta mateixa equació en forma de factors, és a dir, tal i com segueix:

$$ax^2 + bx + c = (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Procedim doncs, a trobar les arrels del polinomi $p(k) = 2k^2 + 3k + 1$

$$2k^2 + 3k + 1 = 0$$

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

Així, observem que les dues solucions trobades són $r_1 = -1$ i $r_2 = -1/2$. Per tant el polinomi es pot expressar en forma de factors com es mostra a continuació:

$$2k^2 + 3k + 1 = (k + 1) \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)$$

$$2k^2 + 3k + 1 = (k + 1) \cdot (2k + 1)$$

Si ara tornem a la darrera expressió de la demostració per inducció $[Eq. 3]$, podem reescriure el terme dret de la igualtat amb els factors determinats i acabar així la demostració per inducció de la igualtat numèrica.

$$S_{k+1} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k + 1) \cdot (2k + 3)} = \frac{(k + 1) \cdot (2k + 1)}{(2k + 1) \cdot (2k + 3)} = \frac{k + 1}{2k + 3}$$

Per tant, hem arribat a l'expressió desitjada $[Eq. 2]$ i, en conseqüència, hem demostrat la igualtat per $n = k + 1$ a partir de la hipòtesis d'inducció matemàtica, completant així la demostració pel mètode inductiu.

En definitiva, podem afirmar que l'estimació que havíem fet del resultat de la sèrie numèrica $[Eq. 1]$ és correcte, ja que la igualtat es compleix per tot nombre natural n, tal i com s'ha demostrat pel mètode d'inducció matemàtica. Per tant, podem assegurar que el resultat de la sèrie és el següent:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

4. Resultats i conclusions

Aquest treball sorgeix amb la intenció de posar de manifest la importància que tenen les demostracions en l'àmbit matemàtic, i en conseqüència, afrontar també la necessitat de que els alumnes treballin les demostracions matemàtiques durant la seva etapa d'educació secundària.

El treball s'ha centrat en les demostracions per inducció matemàtica i s'han fixat dos objectius ben clars: explicar què es la inducció matemàtica i proposar una forma d'introduir les demostracions per inducció a l'ensenyament secundari.

El primer dels objectius ha quedat assolit ja que, en la part inicial del treball, s'ha exposat detalladament en què consisteix el mètode de demostració per inducció matemàtica, indicant quin procés cal seguir per efectuar una demostració pel mètode inductiu i, finalment, parant especial atenció a l'aplicació d'aquest mètode en la resolució de diversos tipus de problemes senzills.

El segon objectiu també s'ha complert, ja que s'ha presentat una possible manera per treballar el mètode d'inducció matemàtica amb els alumnes d'educació secundària. La proposta realitzada s'ha detallat completament, exposant com incloure aquestes demostracions dins el currículum de la matèria, a quin nivell acadèmic fora bo treballar aquest mètode, quins coneixements previs haurien de tenir els alumnes, quins objectius es pretenen assolir amb l'aplicació d'aquesta tècnica, i quina metodologia de treball es podria desenvolupar a l'aula.

Cal dir que amb la proposta plantejada i a través, sobretot, de la metodologia de treball i de les activitats dissenyades, s'ha aconseguit entendre i aplicar correctament el mètode inductiu però també treballar altres aspectes i eines transversals de les matemàtiques, per exemple, des d'una forma de raonar o estimar un resultat, fins a l'aplicació directa de la fórmula per resoldre equacions de segon grau.

En definitiva, mitjançant la introducció a les aules de les demostracions per inducció matemàtica, s'ha aconseguit fomentar en els alumnes un tipus de raonament i pensament matemàtic que, tal i com es plantejava a l'inici del treball, són valors que es consideren fonamentals per tal d'assolir la competència matemàtica.

5. Treball de futur

En aquest treball s'ha proposat una forma de treballar amb els alumnes d'educació secundària un tipus de demostracions matemàtiques, concretament les demostracions pel mètode d'inducció matemàtica.

Donada la importància de les demostracions en l'àmbit matemàtic, fora bo que durant l'etapa d'educació secundària es mostressin als alumnes més tècniques de demostració i també es fomentés que fossin ells mateixos els que les treballessin i apliquessin.

S'ha comentat al llarg d'aquest treball que la realització de demostracions per part dels alumnes fomenta en ells un tipus de pensament matemàtic de gran valor i que els serà molt útil per assolir la competència matemàtica.

És per això que seria molt adequat, de cara a futures línies de treball, pensar en altres formes alternatives de treballar les demostracions per inducció amb els alumnes, considerant potser altres tipus d'aplicacions o metodologies. A més a més, aquest esforç per treballar les demostracions s'hauria d'estendre també a intentar portar a les aules altres tècniques de demostracions matemàtiques (tenint present diversos àmbits d'aplicacions, altres procediments, diferents graus de dificultat, etc.) i a trobar la forma d'introduir-les en els diversos nivells acadèmics de l'ensenyament secundari.

6. Bibliografia

[1] V.V. VAVILOV, I.I. MELNIKOV, S.N OLEKHNIK, P.I. PASICHENKO, *Mathematics problems. Algebra.* MIR Publishers, Moscow 1987.

[2] I.S. SOMINSKI, *Lecciones populares de matemáticas. Método de inducción matemática*. MIR Publishers, Moscow 1975.

[3] A.M. YAGLOM, I.N. YAGLOM, *Challenging mathematical problems with elementary solutions.* Dover Publications, New York 1987

[4] Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria. Currículum d'Educació Secundària Obligatòria (ESO).