NAPOLEON, ESCHER AND TESSELLATIONS

NAPOLÉON, ESCHER ET LES TESSELLATIONS

J.F. Rigby

University of Wales College of Cardiff
School of Mathematics
Senghennydd Road
CARDIFF CF2 4AG
Wales, U.K.

ABSTRACT

Napoleon and Escher both have theorems about triangles named after them. It is doubtful whether Napoleon knew enough geometry to prove Napoleon's theorem [3, p.63], and Escher apparently never found a proof for the last part of Escher's theorem. The first part of Escher's theorem is a form of converse of Napoleon's theorem, and both theorems can be proved using tessellations, a method that would surely have appealed to Escher with his love of filling the plane with congruent shapes. ...

Given any triangle, we can tessellate the plane using congruent copies of this triangle and equilateral triangles of three sizes, as shown in **Figure 1**. The centres of the small equilateral triangles in this figure clearly form the vertices of an equilateral triangular lattice, shown in **Figure 2** by unbroken lines. The centres of the remaining equilateral triangles lie at the centres of the triangles of the lattice; hence we see from the **Figure 2** that the centres of *all* the equilateral triangles form the vertices of a smaller equilateral triangular lattice, shown by broken lines. **Figure 3a** forms just part of the

RÉSUMÉ

Napoléon et Escher ont tous deux, au sujet des triangles, des théorèmes sur les triangles portant leur nom. Il est permis de douter que Napoléon connaissait assez la géométrie pour démontrer le théorème de Napoléon [3, p.63], et Escher n'apparemment jamais pu démontrer la dernière partie du théorème d'Escher. La première partie du théorème d'Escher est une forme de réciproque du théorème de Napoléon et les deux théorèmes peuvent être démontrés en utilisant les tessellations, une méthode qui aurait sûrement plu à Escher étant donné son amour pour le pavage du plan avec des formes congruentes. ...

Étant donné un triangle quelconque, on peut remplir le plan par des copies congruentes de ce triangle et des triangles équilatéraux de trois tailles, comme illustré à la **figure 1**. Les centres des petits triangles équilatéraux de cette figure constituent clairement les sommets d'un treillis triangulaire équilatéral, illustré à la **figure 2** par des traits continus. Les centres des autres triangles équilatéraux se situent au centre des triangles du treillis; on voit donc à la **figure 2**

By mutual agreement, this article is also being published in *Mathematical Magazine*.

Suite à une entente mutuelle, cet article est également publié dans la revue *Mathematical Magazine*.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

FIGURE 1

FIGURE 2

FIGURE 3

tessellation in **Figure 1**; hence the centres of the three equilateral triangles in **Figure 3a** are the vertices of an equilateral triangle. This result is known as *Napoleon's theorem*; the proof just given can be found in [9], together with a figure showing that the same proof will work when the equilateral triangles are erected internally as in **Figure 3b** if we are prepared to extend our idea of a tessellation.

One of the notebooks of the Dutch graphic artist M.C. Escher contains some interesting results about a special type of hexagon. Although these results were known previously, we shall group them together under the title of "Escher's theorem"; the theorem may be stated as follows.

- (i) Let ABC be an equilateral triangle and E any point (**Figure 4**). Let F be the point such that $AF = AE$ and $\angle FAE = 120^\circ$. Let D be the point such that $BD = BF$ and $\angle DBF = 120^\circ$. Then $CE = CD$ and $\angle ECD = 120^\circ$.
- (ii) Congruent copies of the hexagon $AFBDCE$ can be used to tessellate the plane.
- (iii) In **Figure 4** the lines AD , BE and CF are concurrent.

que les centres de *tous* les triangles équilatéraux constituent les sommets d'un plus petit treillis triangulaire équilatéral, illustré par des traits brisés. La **figure 3a** n'est qu'une partie de la tessellation de la **figure 1**; ainsi, les centres des trois triangles équilatéraux de la **figure 3a** sont les sommets d'un triangle équilatéral. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Napoléon*; la démonstration qui en fut alors donnée peut être trouvée dans [9]; on y trouve aussi une figure montrant que la même démonstration est applicable lorsque les triangles équilatéraux se prolongent à l'intérieur comme à la **figure 3b** si on est prêt à étendre le concept de tessellation.

L'un des cahiers de notes de l'artiste graveur hollandais M.C. Escher contient certains résultats intéressants à propos d'un type spécial d'hexagone. Même si ces résultats étaient connus précédemment, on les groupera sous le titre de « *théorème d'Escher* »; le théorème peut être énoncé comme suit:

- (i) Soient ABC un triangle équilatéral et E un point quelconque (**figure 4**). Soit F le point tel que $AF = AE$ et $\angle FAE = 120^\circ$. Soit D le point tel que $BD = BF$ et $\angle DBF = 120^\circ$. Alors $CE = CD$ et $\angle ECD = 120^\circ$.

FIGURE 4

FIGURE 5

Escher's notebooks have been edited by Professor Doris Schattschneider [10]. She remarked in a letter to me that "it is very likely that Escher learned about the special tiling hexagon in a paper by F. Haag [5]; this paper and an earlier one [4] were on the list of references provided to him in 1937 by his half brother B.G. Escher. He studied [5] pretty carefully, copying many diagrams, including one showing a 6-fold "rosette" of the special hexagon. As far as I can see from the articles, Haag makes no mention of the diagonals of the hexagon. The facts are that in stating his Theorem, Escher underlined his statement about the diagonals and also had no reference and no proof—that makes me pretty sure it was his own discovery. Also he wrote to his son George to ask if he could prove the result."

To prove (i) we apply Napoleon's theorem to the triangle DEF. The point A is the centre of the equilateral triangle erected on EF, and B is the centre of the equilateral triangle erected on FD. The centres of all three equilateral triangles erected on the sides of DEF form an equilateral triangle by Napoleon's theorem; but ABC is equilateral, so C must be the centre of the equilateral triangle erected on DE. The result follows immediately.

(ii) Des copies congruentes de l'hexagone AFBDC E peuvent être utilisées pour construire un pavage du plan.

(iii) Dans la **figure 4**, les droites AD, BE et CF sont concourantes.

Les cahiers de notes d'Escher ont été édités par le professeur Doris Schattschneider [10]. Elle a noté dans une lettre qu'elle m'adressait qu'"il est très probable qu'Escher ait pris connaissance de ce pavage spécial d'hexagones dans un article de F. Haag [5]; cet article, de même qu'un autre plus ancien [4] apparaissaient sur la liste de références que lui fournissait son demi-frère B.G. Escher en 1937. Il a étudié [5] assez attentivement, copiant plusieurs diagrammes, y compris celui montrant une « rosette » sextuple de l'hexagone spécial. En autant que je puisse le voir des articles, Haag n'a pas fait mention des diagonales de l'hexagone. Le fait est qu'en énonçant son théorème, Escher souligna son énoncé concernant les diagonales et il n'avait ni référence ni démonstration. Cela m'assure presque totalement que c'était sa propre découverte. De plus, il a écrit à son fils George pour lui demander s'il pouvait démontrer le résultat."

Pour montrer (i), on applique le théorème de Napoléon au triangle DEF. Le point A est le centre du triangle équilatéral construit sur EF, et B est le centre du triangle équilatéral construit sur FD. Les centres des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés de DEF forment un triangle équilatéral selon le théorème de Napoléon; mais ABC est équilatéral, ainsi C doit être le centre du triangle équilatéral construit sur DE. Le résultat s'ensuit immédiatement.

Le lecteur astucieux aura remarqué qu'il existe deux triangles équilatéraux qui peuvent être construits sur EF et sur FD; il y a aussi deux triangles équilatéraux qui ont AB comme côté. Notre démonstration n'est donc pas suffisamment soignée. Mais le théorème lui-même n'a pas été énoncé de façon assez précise! La **figure 5** satisfait les conditions du théorème, et on a même mesuré les angles $\angle FAE$ et $\angle DBF$ dans la même direction; toutefois la conclusion du théorème

FIGURE 6

The astute reader will have noticed that there are two equilateral triangles that can be erected on EF and on FD; also there are two equilateral triangles having AB as one side. Hence our proof was not sufficiently careful. But the theorem itself has not been stated carefully enough! **Figure 5** satisfies the conditions of the theorem, and the angles $\angle FAE$ and $\angle DBF$ have even been measured in the same direction, yet the conclusion of the theorem is not valid. This is because the triangle ABC has “the wrong orientation”. The difficulty can be resolved by a more careful statement of the theorem, but this point presumably did not worry Escher, so we shall not let it worry us.

The tessellation in (ii) can be obtained immediately from **Figure 1** by joining the centre of each equilateral triangle to its three vertices, as in **Figure 7**.

The third part of Escher's theorem is a special case of the following result.

*Let $A'EF$, $B'FD$, $C'DE$ be similar isosceles triangles erected on the sides of a triangle DEF , as in **Figure 6**. Then the lines $A'D$, $B'E$, $C'F$ are concurrent. It can also be shown that, as the shape of the isosceles triangles varies, the locus of the point of concurrency is a rectangular hyperbola passing through D , E and F .*

A proof of these results can be found in [2]; see also [8]. Three other references have been supplied by Hans Cornet: proofs of Escher's special case can be found in [6] and [7], and a proof of concurrency in the general case, from a book by O. Bottema [1, 1st ed. p.36, 2nd ed. p.51], is so short and elegant that it is worth reproducing here.

In **Figure 6**, $ED''/D''F = \Delta EDA' / \Delta FDA'$ (using Δ to denote the area of a triangle) $= \frac{1}{2} DE \cdot EA' \sin(E+\phi) / \frac{1}{2} FD \cdot FA' \sin(F+\phi) = DE \sin(E+\phi) / FD \sin(F+\phi)$. Using this and two similar expressions we find that $(ED''/D''F)(FE''/E''D)(DF''/F''E) = 1$, and the result now follows by the converse of Ceva's theorem.

n'est pas valide. La raison en est que le triangle ABC possède « la mauvaise orientation ». On peut résoudre cette difficulté par un énoncé plus précis du théorème, mais ce point n'inquiétait vraisemblablement pas Escher, et nous ne nous en ferons pas plus de souci.

On peut obtenir immédiatement la tessellation dans (ii) de la **figure 1** en joignant le centre de chaque triangle équilatéral à ses trois sommets, comme à **figure 7**.

La troisième partie du théorème d'Escher est un cas spécial du résultat suivant.

*Soient $A'EF$, $B'FD$ et $C'DE$ des triangles isocèles semblables construits sur les côtés d'un triangle DEF , comme à la **figure 6**. Alors les droites $A'D$, $B'E$ et $C'F$ sont concourantes. On peut aussi montrer que, à mesure que la forme des triangles isocèles varie, le lieu du point d'intersection est une hyperbole rectangulaire passant par D , E et F .*

On peut trouver une preuve de ces résultats dans [2]; voir aussi [8]. Hans Cornet a fourni trois autres références : des preuves du cas spécial d'Escher se trouvent dans [6] et [7], et une preuve de l'intersection dans le cas général publiée dans un livre de O. Bottema [1, 1^{ère} éd., p.36, 2^e éd., p.51] est si courte et élégante qu'elle mérite d'être reproduite ici.

Dans la **figure 6**, $ED''/D''F = \Delta EDA' / \Delta FDA'$ (Δ représente l'aire du triangle) $= \frac{1}{2} DE \cdot EA' \sin(E+\phi) / \frac{1}{2} FD \cdot FA' \sin(F+\phi) = DE \sin(E+\phi) / FD \sin(F+\phi)$. En utilisant ceci et deux expressions similaires on trouve que

$$(ED''/D''F)(FE''/E''D)(DF''/F''E) = 1,$$

et le résultat s'ensuit maintenant par la réciproque du théorème de Ceva.

Voici une autre preuve du cas spécial d'Escher qui utilise les propriétés de rotation et de translation de la tessellation d'hexagones. Soit X le point d'intersection de AD et de BE (**figure 8**). Alors C est le

FIGURE 7

Here is another proof of Escher's special case, using rotational and translational properties of the tessellation of hexagons. Let AD and BE meet at X (**Figure 8**). Then C is the centre of the equilateral triangle XGJ; hence

$$JG \perp CX. \quad (*)$$

Also A is the centre of the equilateral triangle XKY; hence $XY \perp AK \parallel ZF$; similarly $ZX \perp BL \parallel YF$. Hence F is the orthocentre of triangle XYZ. Hence

$$XF \perp YZ \parallel JG \perp CX \text{ from } (*).$$

Hence CFX is a straight line; i.e. CF passes through X.

Further correspondence with Doris Schattschneider produced more items of interest. Escher's tessellation number 10 in his "abstract motif" notebook is amazingly similar to **Figure 1**, although I was not previously aware of his tessellation. **Figure 9** shows the essential features of Escher's tessellation number 11 from the same notebook; it is built up of four congruent tessellations of hexagons, the original being in four colours, and the way in which the figure is built up can be described in the following way. The basic tessellation of **Figure 8** is transformed into itself by three basic translations deter-

FIGURE 8

centre du triangle équilatéral XGJ; donc

$$JG \perp CX. \quad (*)$$

A est aussi le centre du triangle équilatéral XKY; donc $XY \perp AK \parallel ZF$; de façon similaire, $ZX \perp BL \parallel YF$. Ainsi F est l'orthocentre du triangle XYZ. D'où

$$XF \perp YZ \parallel JG \perp CX \text{ from } (*).$$

Donc CFX est une droite; c'est-à-dire que CF passe par X.

D'autres échanges de lettres avec Doris Schattschneider ont suscité plusieurs points d'intérêt. La tessellation numéro 10 d'Escher dans son cahier de notes « motif abstrait » est étrangement similaire à la **figure 1**, même si je n'avais précédemment pas la connaissance de cette tessellation. La **figure 9** montre les caractéristiques essentielles de la tessellation numéro 11 d'Escher du même cahier de notes; elle est construite à partir de quatre tessellations congruentes d'hexagones; l'original était en quatre couleurs. La manière de construire la figure peut être décrite de la façon suivante. La tessellation de base de la **figure 8** est transformée en elle-même par trois translations fondamentales déterminées par les vecteurs AA_1 , AA_2 et AA_3 (formant des angles de 60° les uns avec les autres). Si on effectue une

FIGURE 9

mined by the vectors AA_1 , AA_2 and AA_3 (making angles of 60° with each other). If we translate the tessellation in these same three directions, but through just half the distance, we obtain the three other tessellations of Figure 9 (the hexagons in Figure 9 are of a different shape to those in Figure 8, but this does not affect the method). The most interesting fact about this compound tessellation is that inside any hexagon of any one tessellation there are three *concurrent* edges from the other three tessellations. Here is a short proof of this fact.

Figure 10 shows part of the original tessellation (with three of the equilateral triangles associated with it; compare Figure 7) and the

FIGURE 10

translation de la tessellation dans ces mêmes trois directions, mais seulement jusqu'à la moitié de la distance, on obtient les trois autres tessellations de la figure 9 (les hexagones de la figure 9 sont d'une forme différente de ceux de la figure 8, mais cela n'affecte pas la méthode). Le fait le plus intéressant à propos de cette tessellation composée est qu'à l'intérieur d'un quelconque hexagone de n'importe quelle tessellation il y a trois arêtes *concurrentes* appartenant aux trois autres tessellations. Voici une courte preuve de ce fait.

La figure 10 montre une partie de la tessellation originale (avec trois des triangles équilatéraux qui lui sont associés; à comparer avec la figure 7) et les trois arêtes restantes des trois autres tessellations.

three relevant edges of the other three tessellations. Let O and H be the circumcentre and orthocentre of triangle DEF , and let N be the midpoint of OH , so that N is the nine-point centre of DEF . Since C is the centre of the equilateral triangle DTE , the line TC is the perpendicular bisector of DE ; hence TC passes through O . Since FW is parallel to TC , it is perpendicular to DE ; hence FW is an altitude of triangle DEF , and so it passes through H . One of the basic translations mentioned earlier transforms TC to FW . A translation in the same direction but of half the magnitude transforms TC to the edge PQ of one of the other tessellations; PQ lies half-way between TC and FW , and hence PQ passes through N which lies half-way between O and H . Similarly the edges of the other two tessellations shown in the figure also pass through N .

If we form the compound tessellation using hexagons of the shape seen in **Figure 8**, the theorem just proved is still true, but one of the edges has to be produced before it passes through the point of concurrence. It can be shown that this happens because the angle F of the triangle DEF in **Figure 8** is less than 30° .

.llll.

Soient O et H le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle DEF , et soit N le point-milieu de OH de telle sorte que N est le centre du cercle des neuf points de DEF . Puisque C est le centre du triangle équilatéral DTE , la droite TC est la bissectrice perpendiculaire de DE ; donc TC passe par O . Puisque FW est parallèle à TC , elle est perpendiculaire à DE ; donc FW est une hauteur du triangle DEF et passe ainsi par H . L'une des translations fondamentales mentionnées plus haut envoie TC sur FW . Une translation dans la même direction, mais de la moitié de la grandeur, envoie TC sur l'arête PQ de l'une des autres tessellations; PQ se situe à mi-chemin entre TC et FW , et donc PQ passe par N qui se situe à mi-chemin entre O et H . De façon similaire, les arêtes des deux autres tessellations illustrées dans la figure passent aussi par N .

Si on construit la tessellation composé en utilisant des hexagones de la forme illustrée à la **figure 8**, le théorème qu'on vient de démontrer demeure vrai, mais on doit produire une des arêtes avant qu'elle ne passe par le point d'intersection. On peut montrer que cela survient parce que l'angle F du triangle DEF de la **figure 8** est de moins de 30° .

.llll.

REFERENCES / RÉFÉRENCES

<p>[1] O. Bottema
<i>Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde.</i>
Servire, Den Haag 1944, Epsilon,
Utrecht 1987.</p> <p>[2] W.J. Courcuf
"Back to areals."
<i>Math. Gazette</i>, 57 (1973), 46–51.</p> <p>[3] H.S.M. Coxeter & S.L. Greitzer
<i>Geometry Revisited.</i>
Mathematical Association of America,
Washington DC 1967.</p> | <p>[4] F. Haag
"Die regelmässigen Plantellungen."
<i>Zeitschrift für Kristallographie</i>, 49
(1911), 360–369.</p> <p>[5] F. Haag
"Die regelmässigen Plantellungen
und Punktsysteme."
<i>Zeitschrift für Kristallographie</i>, 58
(1923), 478–488.</p> <p>[6] F. G.-M.
<i>Questions de Géométrie</i>
Tours, Paris 1918.</p> | <p>[7] M. Hain
<i>Repr. Educ. Times.</i>
New Series VII (1905), no. 10349.</p> <p>[8] J.F. Rigby
"A concentrated dose of old-fashioned
geometry."
<i>Math. Gazette</i>, 57 (1973), 296–298.</p> <p>[9] J.F. Rigby
"Napoleon revisited."
<i>J. of Geometry</i>, 33 (1988), 129–146.</p> | <p>[10] Doris Schattschneider
<i>Visions of Symmetry: Notebooks, Peri-
odic Drawings, and Related Work of
M.C. Escher.</i>
W.H. Freeman & Co., New York 1990.</p> |
|--|---|--|---|