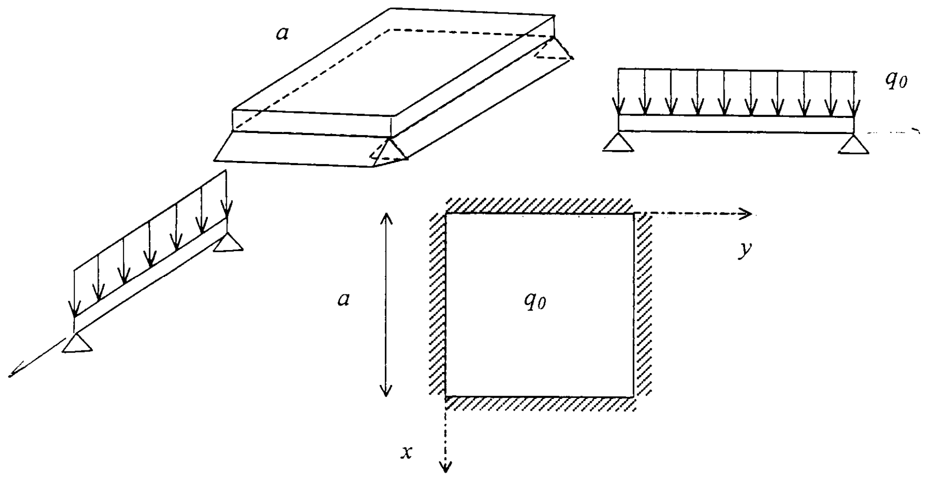


Si la flecha w(x, y) se desarrolla en serie doble de senos:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{mn}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

los desarrollos satisfacen de forma automática unas condiciones de contorno:

$$w(x,y)\,\big|_{x=0}=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{mn}\,\mathrm{sen}(0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)=0$$

$$w(x,y)\,\big|_{x=a}=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{mn}\,\mathrm{sen}(m\pi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)=0$$

$$w(x,y)\,\big|_{y=0}=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{mn}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}(0)=0$$

$$w(x,y)\,\big|_{y=a}=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{mn}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}(n\pi)=0$$

$$M_x \mid_{x=0} = -\frac{D\,\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{m\,n} \left(m^2 + \nu\, n^2\right) \operatorname{sen}(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\, y}{a}\right) = 0$$

$$M_x \mid_{x=a} = -\frac{D\,\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{m\,n} \left(m^2 + \nu\, n^2\right) \operatorname{sen}(m\,\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\, y}{a}\right) = 0$$

$$M_y \mid_{y=0} = -\frac{D\,\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{m\,n} \left(\nu\, m^2 + n^2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\, x}{a}\right) \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$M_y \mid_{y=a} = -\frac{D\,\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{m\,n} \left(\nu\, m^2 + n^2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\, x}{a}\right) \operatorname{sen}(n\,\pi) = 0$$

La selección de un determinado desarrollo armónico para representar la flecha *w(x, y)* implica que se satisfacen automáticamente unas condiciones de contorno específicas. Por ello en esta situación las condiciones se denominan forzadas ya que vienen incluidas en la solución y por tanto no se pueden alterar. En este caso las condiciones de flecha y momentos nulos en los cuatro bordes corresponden a la situación de lados simplemente apoyados.

En la técnica de desarrollos en serie la carga exterior se desarrolla en la misma forma que la flecha:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} q_{m\,n} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\, x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\, y}{a}\right)$$

pero ahora como la función $q(x, y)=q_0$ es conocida las amplitudes del desarrollo se pueden determinar sin más que:

$$q_{m\,n} = \frac{2}{a}\,\frac{2}{a} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=a} q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\, x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\, y}{a}\right) dx$$

$$q_{m\,n} = \frac{4\,q_0}{a^2}\;\frac{a}{m\,\pi}\,\frac{a}{n\,\pi} \left[-\cos\left(\frac{m\pi\, x}{a}\right)\right]_0^a \left[-\cos\left(\frac{n\pi\, y}{a}\right)\right]_0^a = \frac{4 q_0}{\pi^2}\,\frac{1}{m\,n}\,[1-\cos(m\pi)][1-\cos(n\pi)]$$

cuando m y/o n sean pares el *cos (par x π)=1* de forma que:

$$[1-\cos(m\pi)] = 0 \quad y/o \quad [1-\cos(n\pi)] = 0$$

sin embargo cuando m y n sean impares el *cos (impar x π)=-1* de forma que:

$$[1-\cos(m\pi)] = 2 \quad y/o \quad [1-\cos(n\pi)] = 2$$

por lo tanto:

$$q_{m\,n}\begin{cases} 0 & para\ m\ o\ n = 2,4,6,8,\cdots \\ \dfrac{16 q_0}{\pi^2}\dfrac{1}{m\,n} & para\ m\ y\ n = 1,3,5,7,\cdots \end{cases}$$

La variación de la carga a lo largo del eje x con y=0,5 a viene dada en las siguientes figuras.

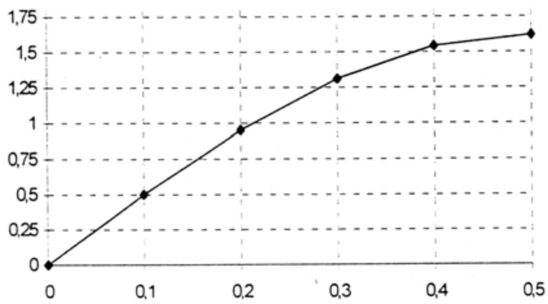


Fig 1. q(x,y) considerando 1 término del desarrollo

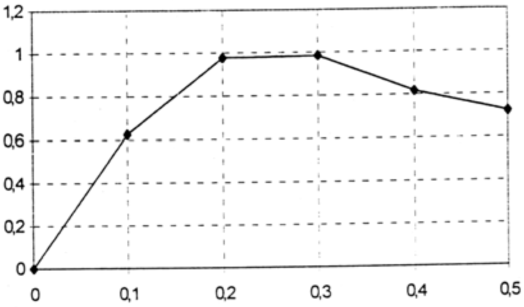


Fig 2. q(x,y) considerando 3 términos

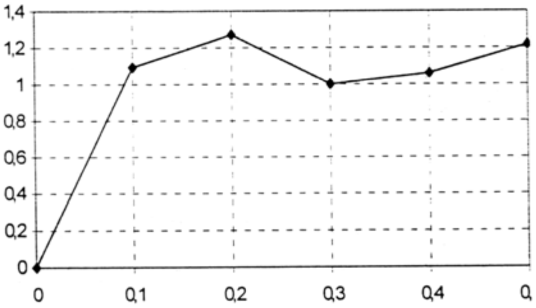


Fig 3 q(x,y) considerando 5 términos

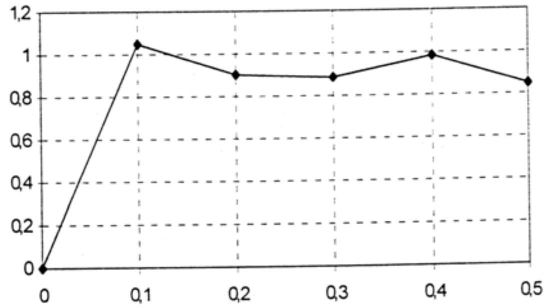


Fig. 4 q(x,y) considerando 7 términos

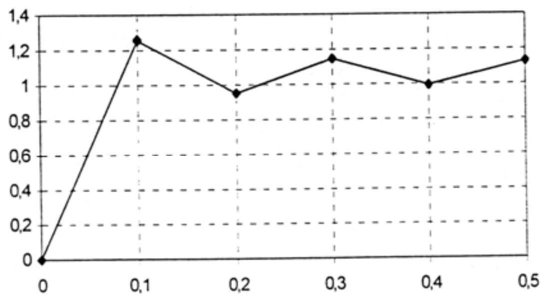


Fig. 5 q(x,y) considerando 9 términos

La flecha *w(x, y)* tiene que satisfacer la ecuación diferencial de equilibrio de la placa:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{mn} \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \right] \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{a} =$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{a}$$

que proporciona para cada término del desarrollo:

$$w_{mn} \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \right] == \frac{q_{mn}}{D}$$

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2} = \frac{q_{mn} a^4}{D \pi^4 \left(m^2 + n^2 \right)^2}$$

La flecha viene dada por tanto por:

$$w(x, y) = \frac{a^4}{D \pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q_{mn}}{\left(m^2 + n^2 \right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a} \right)$$

y para la carga uniforme:

$$w(x, y) = \frac{16\, q_0\, a^4}{D \pi^6} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{m n \left(m^2 + n^2 \right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a} \right)$$

w(0,5 a, 0,5 a) x (q_0 a^4 / D)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0,0041606		-5,548 10^{-5}		4,92 10^{-6}
		0,0041606			
m=3	-5,548 10^{-5}		5,707 10^{-6}		-9,598 10^{-7}
				0,0040554	
m=5	4,92 10^{-6}		-9,598 10^{-7}		2,66 10^{-7}
				SUMA	0,0040636

Tabla 1. Flecha en el centro de la placa para 1,3 y 5 términos del desarrollo

La solución converge rápidamente ya que en el denominador de la flecha aparecen las quintas potencias de m y n.

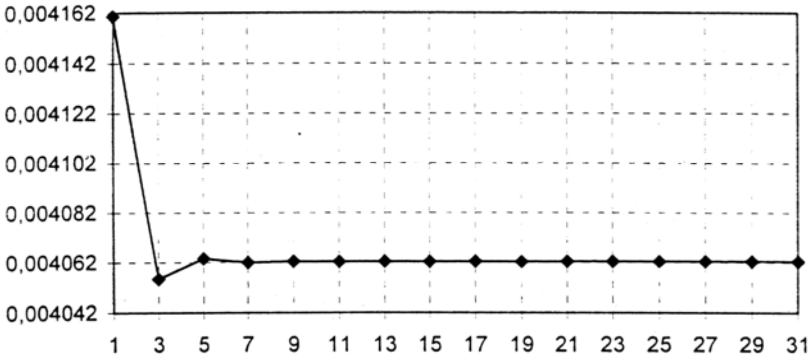


Fig. 6. Convergencia de la flecha en el centro de la placa con el número de armónicos

La solución exacta vale **:** $\boldsymbol{w(0{,}5\,a,\ 0{,}5\,a) = 0{,}0040624\ q_0\, a^4 / D}$

Conocida la flecha, se pueden calcular los esfuerzos que dependen de ella:

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) = \frac{16 q_0\, a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m^2 + \nu\, n^2}{mn\left(m^2+n^2\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$M_y = D\left(\nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) = \frac{16 q_0\, a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu\, m^2 + n^2}{mn\left(m^2+n^2\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Los momentos M_x y M_y son nulos en los bordes y toman su valor máximo en el centro, senos máximos, de la placa y son por simetría iguales.

M_x(0,5 a, 0,5 a) x (q_0 a^2)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0,0533831		-0,0020258		0,0004131
		0,053383			
m=3	-0,0050919		0,0006591		-0,0001563
				0,0469244	
m=5	0,0012295		-0,0002624		8,541 10^{-5}
				SUMA	0,0482337

Tabla 2. M_x en el centro de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo

La solución converge rápidamente ya que en el denominador de la flecha aparecen las quintas potencias de m y n.

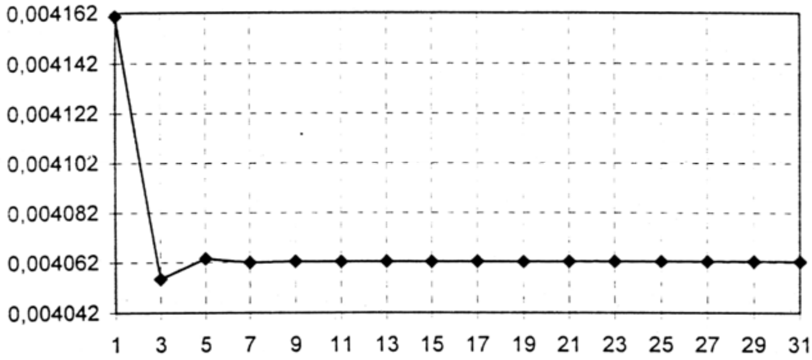


Fig. 6. Convergencia de la flecha en el centro de la placa con el número de armónicos

La solución exacta vale **:** $\boldsymbol{w(0{,}5\,a,\ 0{,}5\,a) = 0{,}0040624\ q_0\,a^4/D}$

Conocida la flecha, se pueden calcular los esfuerzos que dependen de ella:

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) = \frac{16 q_0\, a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m^2 + \nu\, n^2}{mn\left(m^2+n^2\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$M_y = D\left(\nu\,\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) = \frac{16 q_0\, a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu\, m^2 + n^2}{mn\left(m^2+n^2\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Los momentos M_x y M_y son nulos en los bordes y toman su valor máximo en el centro, senos máximos, de la placa y son por simetría iguales.

M_x(0,5 a, 0,5 a) x (q_0 a^2)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0,0533831		-0,0020258		0,0004131
		0,053383			
m=3	-0,0050919		0,0006591		-0,0001563
				0,0469244	
m=5	0,0012295		-0,0002624		8,541 10^{-5}
				SUMA	0,0482337

Tabla 2. M_x en el centro de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo

El momento torsor es nulo en el centro de la placa y máximo en las esquinas, cosenos máximos.

La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha ya que las potencias de m y n son ahora de orden 4.

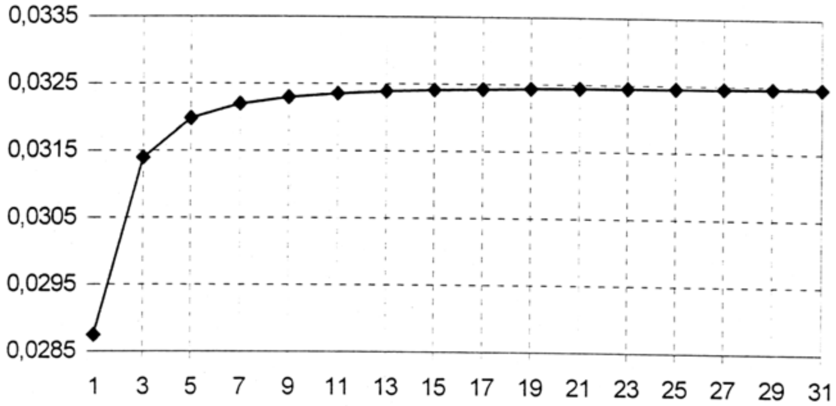


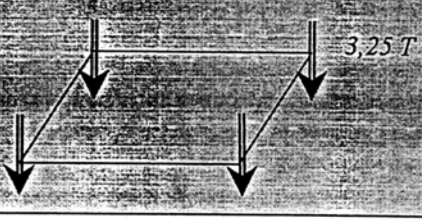
Fig. 8 Convergencia del M_{xy} en las esquinas de la placa con el número de armónicos

La solución exacta vale $\boldsymbol{M_{xy}=0{,}0325\, q_0\, a^2}$

Este momento torsor activa una reacción vertical puntual en cada esquina

$$R= 2\, M_{xy}=0{,}065\, q_0\, a^2$$

*Para tener un orden de magnitud del momento y de la reacción, en una placa cuadrada de 5 m de lado sometida a una carga uniforme de 2 T/m² Mxy= 1,625 m T/m y **R= 3,25 T.** Si no se toman precauciones pueden aparecer problemas de anclaje de la placa al apoyo.*



Por lo tanto la fuerza vertical descendente a equilibrar con las reacciones en los apoyos pasa a ser la carga aplicada más 4R

$$q_0\, a^2+4R= 1{,}26\, q_0\, a^2 \text{ (un 26\% mayor que la carga aplicada)}$$

Los cortantes Q_x y Q_y vienen dados por

$$Q_x = D\left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{16\, q_0\, a^4}{\pi^6} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{m^3 \pi^3}{a^3} + \frac{m\,\pi}{a}\frac{n^2 \pi^2}{a^2}}{m\,n\left(m^2+n^2\right)^2} \cos\left(\frac{m\,\pi\,x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\pi\,y}{a}\right) =$$

$$= \frac{16\, q_0\, a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=!}^{n=\infty} \frac{1}{n\left(m^2+n^2\right)} \cos\left(\frac{m\,\pi\,x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\pi\,y}{a}\right)$$

$$Q_y = D\left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3}\right) = \frac{16\, q_0\, a^4}{\pi^6} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{n\,\pi}{a}\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^3 \pi^3}{a^3}}{m\,n\left(m^2+n^2\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\pi\,x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\,\pi\,y}{a}\right) =$$

$$= \frac{16\, q_0\, a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{m\left(m^2+n^2\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\pi\,x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\,\pi\,y}{a}\right)$$

El cortante Q_x es nulo cuando x = *0,5 a* e *y=0 o y=a.* El cortante Q_y es nulo cuando x = *0 y x= a* e *y=0,5 a.* El cortante Q_x es máximo cuando x=0 o x=a e y=0,5 a. El cortante Q_y es máximo cuando x=0,5 a e y=0 o y=a. Por simetría los cortantes máximos son iguales.

La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha y los momentos ya que las potencias de m y n son ahora de orden 3.

Q_x(0, 0,5 a) x (q_0 a)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0,2580123		-0,0172008		0,0039694
		0,2580123			
m=3	0,0516025		-0,009556		0,0030354
				0,2828579	
m=5	0,0198471		-0,0050591		0,0020641
				SUMA	0,3067149

Tabla 4. Q_x en las esquinas de la placa para 1,3 y 5 términos del desarrollo

La solución exacta vale ***Q_x=0,338 q_0 a***

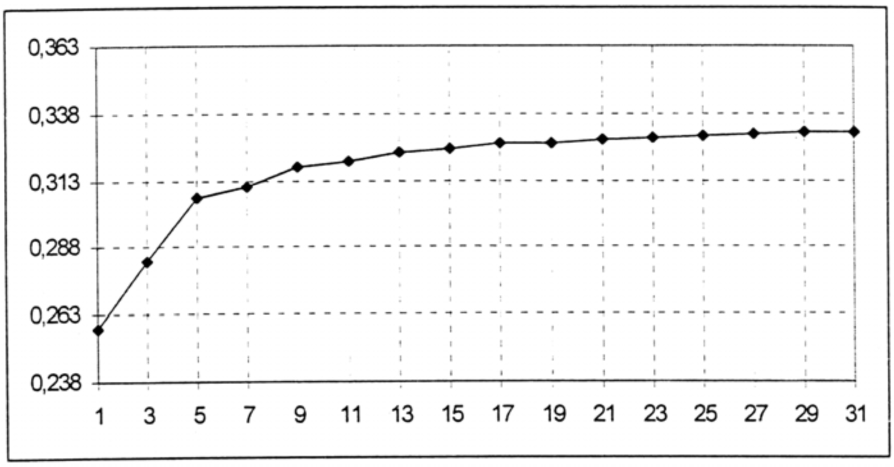


Fig. 9 Convergencia del Q_x en centro de lado de la placa con el número de armónicos

Debe hacerse notar que con 31 términos del desarrollo todavía no ha convergido el Q_x

El cortante equivalente viene dado por:

$$V_x = \pm Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \qquad V_y = \pm Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Como de las expresiones anteriores se conoce el cortante, sólo es necesario calcular las derivadas del momento torsor respecto a x e y.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -\frac{16 q_0 a^2 (1-\nu)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{m\pi}{a}}{\left(m^2+n^2\right)^2} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a} =$$

$$= -\frac{16 q_0 a (1-\nu)}{\pi^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m}{\left(m^2+n^2\right)^2} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -\frac{16 q_0 a^2 (1-\nu)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{n\pi}{a}}{\left(m^2+n^2\right)^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{a} =$$

$$= -\frac{16 q_0 a (1-\nu)}{\pi^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{\left(m^2+n^2\right)^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{a}$$

Estas derivadas se anulan para y=0,5 a y x=0,5 a respectivamente y son máximas en los puntos medios de los lados x=0,5 a y=0 e y=a y y=0,5 a x=oy x=a respectivamente.

Por la simetría los valores máximos son los mismos para las dos derivadas. La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha y los momentos ya que las potencias de m y n son ahora de orden 3.

$\delta M_{xy}/\delta y$ **(*0, 0,5 a*)** x (q_0 a)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0,0903043		-0,0108365		0,0026717
		0,0903043			
m=3	0,0012041		-0,0011149		0,0005208
				0,079557	
m=5	0,0001069		-0,0001875		0,0001445
				SUMA	0,0828134

Tabla 5. $\delta M_{xy}/\delta y$ en los puntos medios de los lados para 1 3 y 5 términos del desarrollo

La solución exacta vale **$dM_{xy}/dy=0,082\ q_0\ a$**

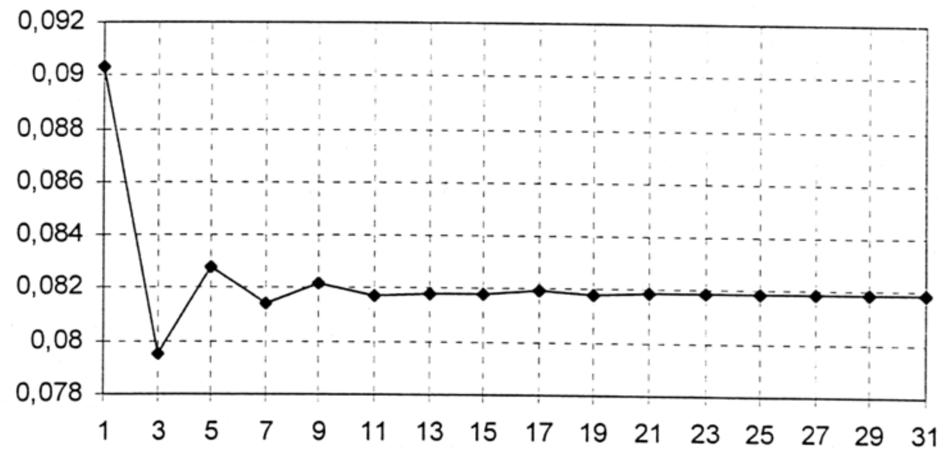
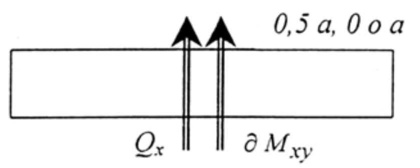


Fig. 9 Convergencia del dM_{xy}/dy en centro de lado de la placa con el número de armónicos

El cortante equivalente en el centro de lado viene dado por:



$$V_{xmáxima}=(0,338 + 0,082)\ q_0\ a = 0,42\ q_0\ a$$