2. PRESENTACIÓN DE LOS PROGRAMAS FLAC Y PLAXIS

2.1.- Estudio del programa FLAC

Introducción

El programa FLAC (Fast Lagrangian Analisys of Continua), es un programa que fue desarrollado por ITASCA Consoulting Group, de Indiana, por primera vez en el año 1986. Concretamente el programa fue ideado por el Dr. Peter Cundall con la intención de resolver modelos lineales y no-lineales que contenían varios miles de elementos con los ordenadores que entonces existían a nivel de usuario (FLAC 3.0 User's Manual, Volum I. ITASCA Consulting Group, Inc., 1991). Desde entonces hasta hoy día, han ido apareciendo versiones más sofisticadas y actualizadas de la versión inicial.

Aspectos conceptuales

El programa FLAC está basado en el método de las diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales. En diferencias finitas, cada grupo de ecuaciones es reemplazado directamente por una expresión algebraica en puntos discretos. La característica fundamental del programa es que utiliza un método de resolución explícita.

Básicamente, el esquema de cálculo corresponde a un método cíclico que se puede sintetizar en el diagrama siguiente (figura 1).

Este esquema de cálculo se produce de forma cíclica en cada uno de los elementos y en cada uno de los pasos de cálculo de manera independiente.

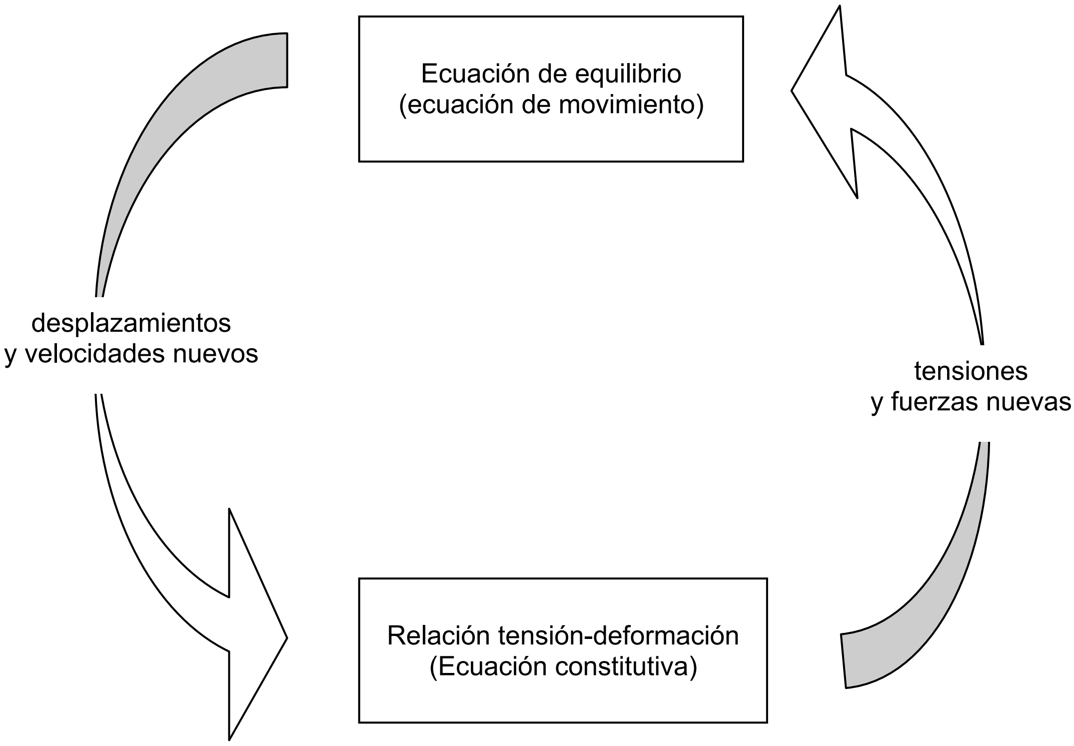

Figura 1. Esquema de cálculo de FLAC

Formulación numérica

El campo de ecuaciones utilizado por FLAC parte de la ecuación de movimiento (2ª Ley de Newton), que relaciona la aceleración, $\frac{du'}{dt}$, de una masa, *m*, con la fuerza aplicada, *F*, que puede variar en el tiempo (ver figura 2).

$$m \cdot \frac{du'}{dt} = F \qquad [1]$$

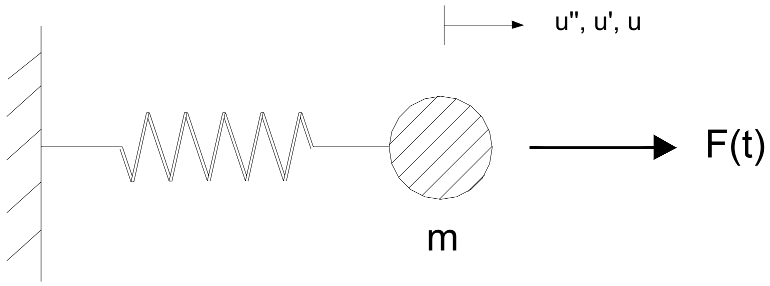

Figura 2. Aplicación de una fuerza variable en el tiempo, sobre una masa, m, resultando una aceleración, u'', una velocidad, u', y un desplazamiento, u.

En problemas estáticos, FLAC utiliza la propiedad de que la aceleración correspondiente a la suma de las fuerzas del sistema tiende a cero ($\Sigma F = 0$). En un sistema formado por un sólido continuo, la ecuación [1] se generaliza como:

$$\rho \frac{du'}{dt} = \frac{d\sigma ij}{dxij} + \rho g_i \qquad [2]$$

Además de la ecuación de movimiento, se necesita la ley del comportamiento del sólido, que se conoce como la relación constitutiva o ley tensión-deformación. Las ecuaciones utilizadas en cada caso dependerán de la relación constitutiva que se aplique (por ejemplo, modelo elástico o modelo de Mohr-Coulomb).

Para terminar de definir el sistema a resolver se han de definir las condiciones de contorno e iniciales.

Discretización

Generalmente, el método de diferencias finitas sólo puede utilizar elementos con forma rectangular. FLAC aplica el método de Wilkins (1964), tal que utiliza ecuaciones diferenciales para elementos con cualquier forma y tomar cualquier tipo de propiedades. En FLAC, el usuario divide el sólido en elementos formados por cuadriláteros, aunque FLAC internamente divide el cuadrilátero en 2 grupos superpuestos de triángulos de deformación constante de elementos triangulares (ver figura 3).

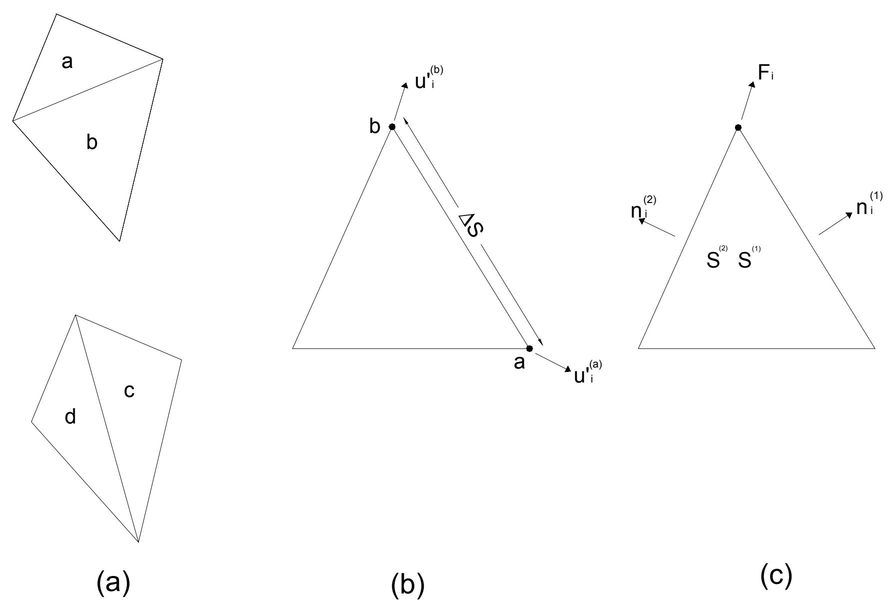

Figura 3. (a) Elementos cuadriláteros utilizados por FLAC;
(b) Típico elemento triangular con vectores de velocidad;
(c) Vector de fuerza en los nodos

Los cuatro subelementos triangulares vienen definidos por a, b, c y d.

En esta subdivisión de los elementos del sólido continuo FLAC utiliza una discretización mixta (Mixed Discretization, Marti & Cundall, 1982), que considera las diferentes discretizaciones de las partes isótropa y desviadora de los tensores de tensión y deformación.

Las deformaciones volumétricas corresponden a la media de cada par de triángulos que forman un elemento, mientras que las deformaciones desviadoras permanecen constantes.

A partir de las deformaciones se obtienen las tensiones usando la ley constitutiva que relaciona la tensión con la deformación:

$$\sigma_{ij} = M(\sigma_{ij}, \dot{e}_{ij}, k) \qquad [3]$$

y el ajuste de rotación:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + (w_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}w_{kj})\Delta t \qquad [4]$$

La discretización mixta es utilizada de nuevo para obtener las tensiones finales, promediando la tensión de los dos triángulos usando el peso del área:

$$\sigma_o^{(a)} = \sigma_o^{(b)} = \left[\frac{\sigma_0^{(a)} \cdot A^{(a)} + \sigma_0^{(b)} \cdot A^{(b)}}{A^{(a)} + A^{(b)}} \right] \qquad [5]$$

Luego, en el esquema explícito utilizado por FLAC, la ley constitutiva solamente es consultada una vez por cada elemento y por cada paso de cálculo, con lo que no es necesario almacenar ninguna matriz de rigidez.

Una vez las tensiones han sido calculadas, las fuerzas equivalentes aplicadas en cada nodo están determinadas. Las tensiones en cada subzona triangular actúan como tracciones en los lados del triángulo. Cada tracción es tomada como equivalente a 2 fuerzas iguales actuando en los extremos del correspondiente lado. Cada esquina del triángulo recibe 2 fuerzas:

$$F_i = \frac{1}{2}\sigma_{ij} \cdot (n_j^{(1)} S^{(1)} + n_j^{(2)} S^{(2)}) \qquad [6]$$

Criterio de signos

El criterio de signos empleado por FLAC viene definido en función de los ejes de coordenadas. Así, las tensiones a compresión son negativas, mientras que las de tracción son positivas (ver figura 4). Lo mismo ocurre con los desplazamientos, que son positivos en el sentido de los ejes de coordenadas.

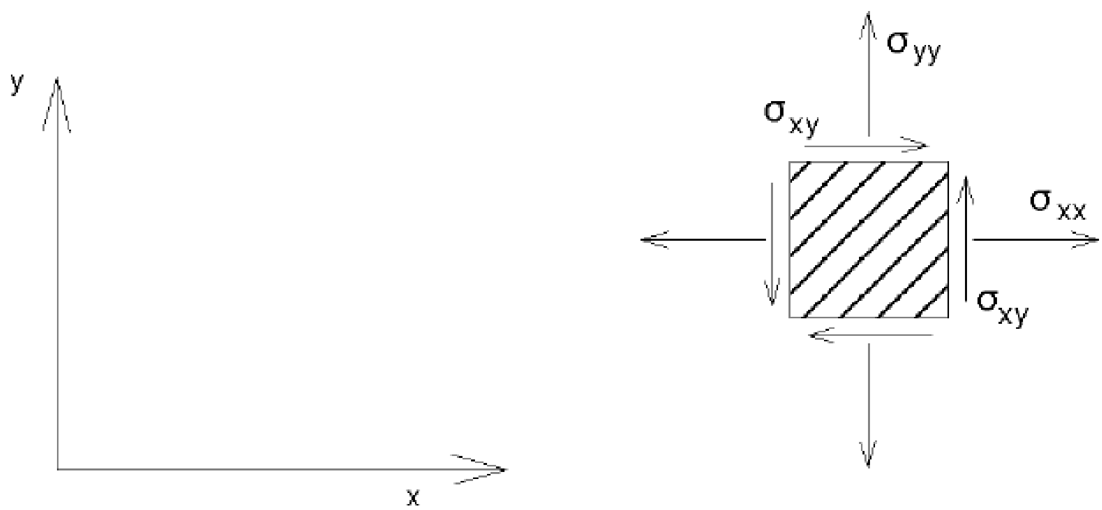

Figura 4. Criterio de signos empleado por FLAC.

Las cargas aplicadas serán positivas en dirección hacia adentro del cuerpo y normales a su superficie, mientras que si están aplicadas hacia fuera del sólido y normales a éste, entonces serán negativas. Las presiones de agua serán siempre positivas.

La gravedad positiva empuja al sólido hacia abajo, y la negativa lo empuja hacia arriba.

<u>Utilización del programa</u>

Los campos de aplicación del programa engloban prácticamente todos los casos que se dan dentro del ámbito de la mecánica de suelos y en la mecánica de rocas. Inicialmente, FLAC fue desarrollado para el análisis y diseño de ingeniería de minas y construcciones subterráneas. La solución explícita en tiempo real de las ecuaciones de movimiento permite el análisis de una rotura progresiva, que es un fenómeno importante en los estudios relacionados con el diseño de minas.

Con la incorporación del análisis del flujo de agua subterránea y de la consolidación, FLAC ofrece una alta capacidad de aplicaciones en mecánica de suelos, como lo son el análisis de estructuras de retención, taludes sometidos a cargas drenadas y no drenadas, y cálculos de la capacidad portante y asentamientos en cimentaciones.

Según indica el propio manual, el programa FLAC ha sido ideado sobre todo para resolver problemas de colapso plástico y de flujo plástico, ya que el método de solución explícita permite seguir procesos físicamente inestables sin divergencias numéricas, así como la resolución de sistemas de ecuaciones no-lineales de tensión-deformación en casi el mismo tiempo de cálculo que con sistemas de ecuaciones lineales, sin necesidad de almacenar ninguna matriz. Por tanto, el método de solución explícita utilizado por FLAC lo hace un programa recomendado para la simulación de grandes deformaciones y modelos que requieren un gran número de elementos.

2.2.- Estudio del programa PLAXIS

Introducción

El programa PLAXIS ha sido creado en la universidad Técnica de Delft, a partir de una iniciativa del Departamento de Trabajos Públicos y Dirección del Agua, en el año 1987. El objetivo inicial fue el desarrollo de un código de fácil uso basado en elementos finitos para el análisis de diques construidos sobre las capas de suelo blando que forman el subsuelo de Holanda. En los años siguientes el programa PLAXIS ha sido ampliado para cubrir la mayor parte de las áreas de la ingeniería geotécnica. Debido al crecimiento continuo de las actividades se formó la compañía PLAXIS BV en el año 1993 (PLAXIS Manual, Versión 7. PLAXIS B.V. – University of Stuttgart, 1998).

Aspectos conceptuales

Las ecuaciones a resolver por el programa se derivan de la formulación del equilibrio estático:

$$\underline{\underline{L}}^{T}\underline{\sigma} + \underline{p} = \underline{0} \qquad [7]$$

donde, $\underline{\underline{L}}^{T}$ es la traspuesta del operador diferencial,

$\underline{\sigma}$ es el vector de las tensiones,

$\underline{p}$ vector espacial (de fuerzas másicas).

La relación cinemática viene formulada como:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u} \qquad [8]$$

donde, $\underline{\underline{L}}$ es el operador diferencial,

$\underline{u}$ es el vector de los desplazamientos,

$\underline{\varepsilon}$ es el vector de las deformaciones.

El enlace entre [1] y [2] viene dado por la relación constitutiva que representa el comportamiento del material:

$$\underline{\sigma}' = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\varepsilon}' \qquad [9]$$

El desarrollo del estado de tensiones $\underline{\sigma}$ viene representado como un proceso incremental:

$$\underline{\sigma}^{i} = \underline{\sigma}^{i-1} + \Delta\underline{\sigma} \quad , \quad \Delta\underline{\sigma} = \int \underline{\sigma}' \, dt \qquad [10]$$

donde $\Delta\underline{\sigma}$ es la variación de la tensión integrada sobre un incremento de tiempo pequeño.

Luego, la combinación entre [7], [8] y [9] da a lugar a la ecuación diferencial parcial de 2º orden en los desplazamientos. Aplicando el teorema de Galerkin y el teorema de Green y si la ecuación está considerada en el estado actual i, entonces la tensión $\underline{\sigma}^{i}$ incógnita se puede eliminar, quedando la ecuación de equilibrio como:

$$\boldsymbol{\int \delta\underline{\varepsilon}^{T} \cdot \Delta\underline{\sigma} dV = \int \delta u^{T} p^{i} dV + \int \delta\underline{u}^{T} \underline{t}^{i} dS - \int \delta\underline{\varepsilon}^{T} \underline{\sigma}^{i-1} dV} \qquad [11]$$

<u>Discretización</u>

El sólido continuo a estudiar por el programa, se discretiza en una malla de elementos finitos en la que se diferencian tres tipos de componentes: los **elementos** triangulares definidos por 6 nodos o 15 nodos; los **nodos**, que son el número de puntos que definen un elemento y es donde se calculan los desplazamientos; y los **puntos de tensión**, que son puntos independientes de los nodos, y es donde se calculan las tensiones. Estos puntos se denominan **puntos de Gauss**. Los elementos con 6 nodos contienen 3 puntos de Gauss, mientras que los elementos con 15 nodos contienen 12 puntos de Gauss (ver figura 5).

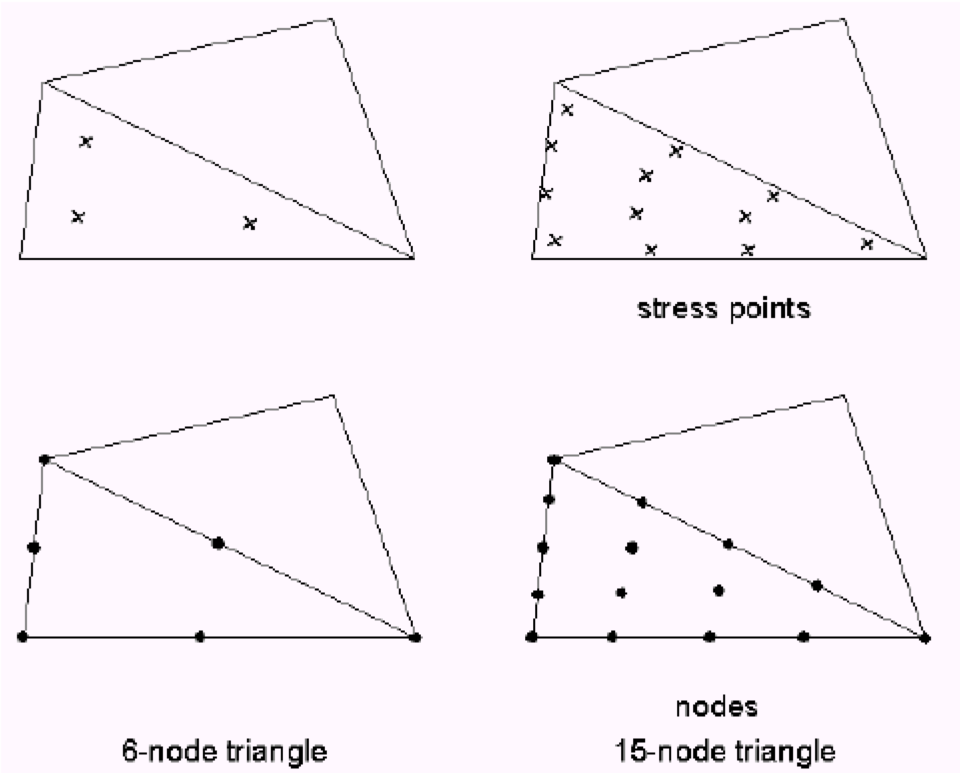

Figura 5. Posición de los nodos y de los puntos de Gauss en la malla de elementos finitos de PLAXIS.

De acuerdo con la teoría de elementos finitos los desplazamientos se calculan en los grados de libertad. El campo de desplazamientos $\underline{u}$ en un elemento se obtiene de los valores de la discretización nodal en un vector $\underline{\upsilon}$ utilizando funciones de interpolación ensambladas en la matriz $\underline{\underline{N}}$:

$$\underline{u} = \underline{\underline{N}}\,\underline{\upsilon} \quad . \quad [12]$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{N}}\,\underline{\upsilon} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\upsilon} \quad [13]$$

donde, $\underline{\underline{B}}$ es la matriz de interpolación de la deformación, que contiene las derivadas parciales de las funciones de interpolación o funciones de forma.

Procedimiento iterativo global

Sustituyendo la relación entre los incrementos de las deformaciones, $\Delta\underline{\sigma} = \underline{\underline{M}}\Delta\underline{\varepsilon}$, dentro de la ecuación de equilibrio, obtenemos:

$$\underline{\underline{K}}^{i}\,\Delta\underline{\upsilon} = \underline{f}_{ex}^{\,i} - \underline{f}_{in}^{\,i-1} \qquad [14]$$

donde, $\underline{\underline{K}}$ es la matriz de rigidez;
$\Delta\underline{\upsilon}$ es el vector del desplazamiento incremental;
$\underline{f}_{ex}$ es el vector de las fuerzas externas;
$\underline{f}_{in}$ es el vector de las reacciones internas.

El superíndice i se refiere al número de iteración. Sin embargo, como la relación entre los incrementos de las tensiones y los incrementos de las deformaciones es generalmente no-lineal, la matriz de rigidez no puede ser formulada previamente. Por tanto, es necesario utilizar un procedimiento iterativo global para satisfacer tanto la condición de equilibrio como la relación constitutiva.

En su forma más simple, $\underline{\underline{K}}$ representa una respuesta lineal-elástica. En este caso, la matriz de rigidez puede ser formulada como:

$$\underline{\underline{K}} = \int \underline{\underline{B}}^{T}\,\underline{\underline{D}}^{e}\,\underline{\underline{B}}\,dV \quad \text{(matriz de rigidez elástica)} \qquad [15]$$

donde , $\underline{\underline{D}}^{e}$ es la matriz del material elástico;
$\underline{\underline{B}}$ es la matriz de interpolación de la deformación.

El uso de la matriz de rigidez elástica nos da un procedimiento iterativo global robusto, aún cuando se utilizan modelos de plasticidad no asociada. Para modelos de materiales con un contorno lineal en el dominio elástico, como por ejemplo el modelo estándar de Mohr-Coulomb, el uso de una matriz de rigidez elástica es particularmente favorable, ya que la matriz de rigidez sólo se necesita formar y descomponer mucho antes de la primera iteración de cálculo.

Criterio de signos

El criterio de signos empleado por PLAXIS viene definido en función de los ejes de coordenadas (ver figura 6). Las tensiones de tracción son positivas mientras que las de compresión son negativas.

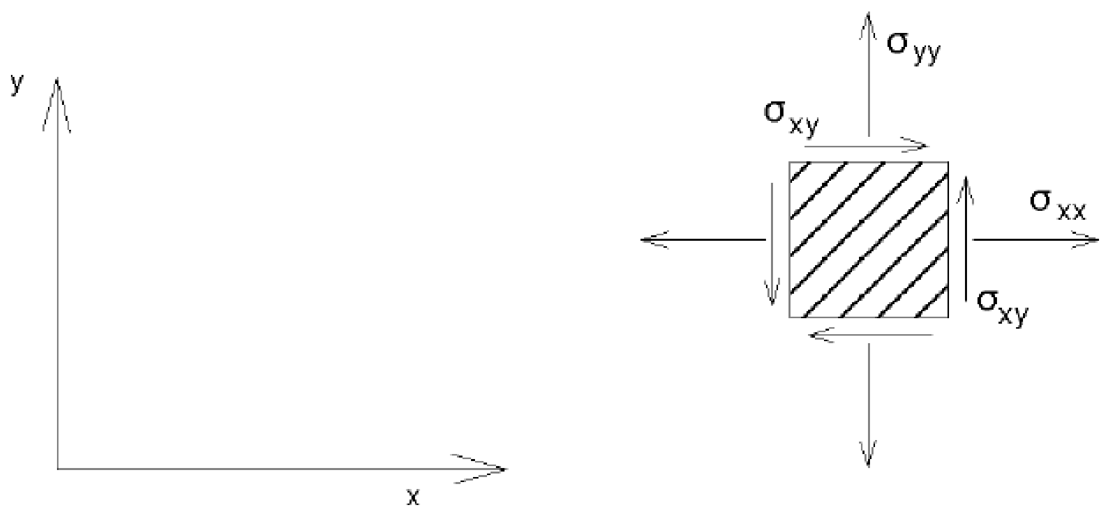

Figura 6. Criterio de signos empleado por PLAXIS.

Lo mismo ocurre con los desplazamientos, éstos son positivos si van en el sentido positivo de los ejes de coordenadas, y negativos si van en sentido opuesto a los ejes.

Las cargas exteriores aplicadas serán negativas si van hacia adentro del sólido, y positivas si van hacia fuera. Las presiones de agua son negativas.

La gravedad es positiva si empuja el sólido hacia abajo, y negativa si lo empuja hacia arriba.

Utilización del programa

Como se ha comentado anteriormente, el programa PLAXIS fue concebido inicialmente para el análisis de diques construidos sobre las capas de suelo blando que forman el subsuelo de Holanda. Actualmente, las aplicaciones de PLAXIS engloban la mayoría de los problemas de ingeniería geotécnica, tanto de mecánica de suelos como de mecánica de rocas.

El programa PLAXIS es recomendado para problemas de excavaciones subterráneas, análisis de la tensión y deformación del suelo sometido a grandes cargas drenadas y no drenadas, y problemas de flujo acoplado. PLAXIS permite el estudio de una gran variedad de modelos constitutivos:

- Modelo de elasticidad
- Modelo de Mohr – Coulomb
- Modelo del endurecimiento isotrópico (Hardening-Soil)
- Modelo del deslizamiento del suelo blando
- Modelo del suelo blando

También presenta un potente paquete de aplicaciones de elementos estructurales que se agrupan en tres categorías: vigas, anclajes y geotextiles.

Aunque las aplicaciones del programa en problemas de geotécnia parecen estar totalmente resueltos, en realidad no es así, ya que el programa ha sido desarrollado partiendo de la filosofía inicial del estudio del subsuelo sometido a grandes cargas y a grandes excavaciones subterráneas, incluyendo en todos ellos el problema de flujo y ofreciendo la posibilidad del análisis mediante diferentes modelos de comportamiento del terreno. Esta característica de PLAXIS ha derivado a una falta de atención a las grandes construcciones de retención mediante estructuras de tierra (presas de tierra), en las que no se tiene en cuenta efectos tan importantes como el asentamiento durante su proceso constructivo, de forma directa. De todos modos, PLAXIS es un programa que almacena gran cantidad de opciones para el estudio de cualquier tipo de terreno y de geometría.

2.3.- COMPARACIÓN ENTRE FLAC Y PLAXIS

La comparación entre los dos programas comerciales de métodos numéricos no solo consiste en comparar dos métodos de cálculo diferentes, sino también, dos filosofías distintas a partir de las cuales se desarrollaron ambos programas.

En primer lugar analizaremos las diferencias entre los dos métodos de cálculo. Por un lado, FLAC se basa en el método de solución explícita, mientras que PLAXIS se basa en el método de solución implícita. Ambos métodos transforman un grupo de ecuaciones diferenciales en una matriz de ecuaciones para cada elemento, relacionando tensiones con los desplazamientos en los nodos.

El método de diferencias finitas es quizás la técnica numérica más antigua utilizada para la resolución de grupos de ecuaciones diferenciales. En él, cada grupo de ecuaciones es reemplazado directamente por una expresión algebraica escrita en términos de variable en puntos discretos.

En cambio, en el método de elementos finitos el requisito principal consiste en que las cantidades (tensiones y deformaciones), varían a lo largo de cada elemento en un campo preescrito, utilizando las funciones específicas controladas por parámetros. La formulación consiste en ajustar estos parámetros de tal forma que el error sea mínimo en términos de energía local o global.

En la tabla 1se resumen las diferencias entre ambos métodos. Básicamente, las ventajas del método explícito frente al método implícito están en que el primero necesita menos cantidad de memoria para resolver problemas numéricos no-lineales y de grandes deformaciones ya que no necesita almacenar ninguna matriz de rigidez. En cambio, el método implícito tiene como ventaja frente al método explícito su mayor robustez debido al uso de la matriz de rigidez.

MÉTODO EXPLÍCITO	**MÉTODO IMPLÍCITO**
Pequeña cantidad de esfuerzo computacional por tiempo de cálculo	Gran cantidad de esfuerzo computacional por tiempo de cálculo
Necesita emplear más tiempo para llegar a la solución final. En modelos elásticos lineales es excesivamente lento	El tiempo de cálculo necesario es menor al empleado por el método explícito. En modelos elásticos lineales, la matriz de rigidez es constante y el cálculo es rápido y robusto
El método explícito es sensible a los cambios bruscos en las propiedades de los materiales del modelo (por ejemplo, grandes diferencias en la rigidez o en la permeabilidad)	El método implícito es más consistente ante cambios bruscos en las propiedades de los materiales del modelo
Las matrices nunca son creadas. Los requerimientos de memoria son siempre mínimos	Las matrices de rigidez tienen que ser almacenadas.
Desde que las matrices no son creadas, grandes deformaciones y desplazamientos son alojadas sin un esfuerzo computacional adicional	Se necesita un esfuerzo computacional adicional para seguir grandes desplazamientos y deformaciones
No es un método incondicionalmente estable. Puede seguir iterando en estados de colapso del modelo	Método incondicionalmente estable. En un estado plástico el programa deja de iterar
No es necesario iterar para seguir la ley constitutiva no-lineal	Es necesario el proceso de iteración para seguir la ley constitutiva no-lineal
Siempre que el criterio del tiempo de cálculo sea siempre correcto, las leyes no-lineales son siempre seguidas en un camino físico válido	Siempre es necesario demostrar que el procedimiento arriba mencionado es: (a) estable; (b) sigue el camino físicamente correcto

Tabla 1. Comparación entre el método de solución explícita (FLAC),
y el método de solución implícita (PALXIS).

Versiones empleadas

Para la realización de este estudio se han utilizado las versiones de FLAC v3.01 y v4.00. En PLAXIS la versión utilizada ha sido la v7.2.