

Interacción flexión-cortante-axil en piezas de hormigón armado

Tesina de especialidad de la Escuela Técnica Superior
de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
de Barcelona (UPC)

VÍCTOR ROMÍA PORTOLÉS
OCTUBRE DE 2007
TUTORES: Antonio R. Marí Bernat
Jesús M. Bairán García

AGRADECIMIENTOS

Para la realización de esta tesina he recibido la ayuda de muchas personas, a las que, sin duda, tengo que agradecer sus aportaciones, por ser todas de gran importancia. De todos modos, enmarcando estas líneas en un contexto más amplio, tengo también que dar las gracias a todos aquellos que bien con ayudas concretas o simplemente confiando en mí han hecho posible que llegara hasta aquí.

En primer lugar, tengo que agradecer a Toni Marí el haber confiado en mí al proponerme esta tesina, y sobretodo el haber contribuido a despertar mi interés por el campo de la tecnología de estructuras. Quiero agradecerle además su especial ayuda e interés con motivo de la enfermedad de meningitis que pasé en el cuarto curso.

Por otro lado, la realización de esta tesina no hubiera sido posible sin la ayuda incondicional de Jesús Bairán, que me ha guiado en todo momento, desde las explicaciones a cerca del programa TINSA hasta la redacción del documento. Quiero agradecerle todas las horas que me ha dedicado y todos los conocimientos que con él he tenido ocasión de aprender.

Sin lugar a dudas tengo también que agradecer las impagables ayudas ofimáticas que me han prestado Marisa Portolés, Enric de Mur y David Romía. El tiempo dedicado por parte de los tres ha facilitado y amenizado el trabajo. Asimismo, tengo que agradecer también todas las ayudas técnicas por parte de Jordi Bordillo no sólo para la realización de esta tesina sino a lo largo de toda la carrera.

El apoyo incondicional por parte de la familia ha jugado un papel crucial en la elección y en el transcurso de esta carrera, entre otros, fue Josep M^a Romía quien me animó a emprender esta aventura. Gracias a su compañía y a la de los amigos en los momentos difíciles, la redacción de este documento se ha convertido en una realidad. Resulta entonces difícil no recordar a dos personas que lamentablemente hoy ya no siguen entre nosotros: Ramón Portolés y Josep Romía.

En último lugar, a día de hoy, considero todavía de gran importancia las ayudas referentes a dibujo técnico prestadas por parte de José M^a Montull en el primer curso de carrera.

A todos, muchas gracias.

RESUMEN

TÍTULO Interacción flexión-cortante-axil en piezas de hormigón armado
AUTOR Víctor Romía Portolés
TUTORES Antonio R. Marí Bernat y Jesús M. Bairán García

Actualmente la mayoría de los métodos utilizados para proyectar estructuras de hormigón armado tratan por separado la respuesta de la sección frente a estados últimos de flexión compuesta y cortante. Sin embargo, el estudio de secciones de hormigón armado sometidas a esfuerzos combinados de flexión, cortante y axil es muy frecuente en la práctica. Esto ha propiciado la realización de campañas experimentales en todo el mundo que resaltan la necesidad de una formulación que explique el comportamiento a cortante bajo solicitaciones normales y tangenciales combinadas.

La actual instrucción española del hormigón EHE introduce parcialmente en su formulación aspectos relativos a la interacción de esfuerzos en el término que cuantifica la contribución del hormigón al esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma. Tanto la intuición como la práctica indican que el término que tiene en cuenta la contribución de la armadura pasiva a dicha resistencia a cortante debería depender de alguna manera de los esfuerzos de flexión y axil. El Documento 0 de la nueva instrucción EHE incorpora ya esta última modificación.

La respuesta a flexión de secciones de hormigón armado se trata en la mayoría de textos normativos estudiando los distintos dominios de deformación de la sección. De modo que, por ejemplo, se pueden obtener los diagramas de interacción axil adimensional-flector de manera analítica, lo que permite agilizar el dimensionamiento a flexión. Sin embargo, frente a la respuesta a cortante, no existen actualmente diagramas de interacción axil adimensional-cortante. Todos estos aspectos justifican el desarrollo que se ha realizado en la UPC de un modelo numérico de análisis no lineal de secciones de hormigón solicitadas a esfuerzos combinados de flexocompresión y cortante.

En esta tesina se ha realizado un estudio del comportamiento a cortante frente a solicitaciones combinadas de flexión, cortante y axil en dos tipologías de secciones con el modelo numérico antes mencionado. Las dos geometrías del análisis han sido sección rectangular y tubular. La primera, por ser de las más utilizadas en la práctica (principalmente en edificación), y la segunda por la inexistencia de una formulación explícita para el cálculo de la respuesta a cortante en los distintos textos normativos.

Aprovechando las ventajas de la modelización numérica con elementos finitos, se han analizado la evolución de las deformaciones y tensiones y sus distribuciones en la sección. Se han realizado diagramas esfuerzo-deformación para flector y cortante, así como gráficos de tensiones normales y tangenciales en el hormigón para ambos tipos de secciones en aras de presentar y comprender el problema.

En secciones rectangulares se han obtenido curvas axil adimensional-cortante adimensional mediante la modelización numérica y se han comparado con las propuestas en la actual EHE. Se propone una nueva formulación con brazo mecánico variable, en la que para reflejar mejor la realidad, dicho brazo mecánico depende linealmente del esfuerzo axil aplicado en la sección.

En secciones tubulares se han realizado diagramas adimensionales de interacción flexión-cortante y también axil-adimensional-cortante adimensional, poniendo, estos últimos en evidencia los diferentes comportamientos de ambas tipologías de secciones debido principalmente a la distinta distribución de las armaduras longitudinales.

ABSTRACT

TITLE Bending, Shear and Axial interaction in reinforced concrete beams
AUTHOR Víctor Romía Portolés
TUTORS Antonio R. Marí Bernat and Jesús M. Bairán García

Nowadays most of the methods that are used to project reinforced concrete structures separate the response of the section in terms of ultimate states of skew bending and shear. However, the study of reinforced concrete sections under combined bending, shear and axial stress is really usual in practical cases. This fact has made experimental campaigns to be done all around the world, what has showed the necessity to have a formulation that explains shear behaviour under combined normal and shear tensions.

The current Spanish concrete code EHE partially introduces in its formulation aspects that make reference to stress interaction in the term that quantifies concrete contribution to traction failure shear stress in the web. Both, intuition and practical experience show that the term that takes into account yielding shear reinforcement shear contribution should somehow depend on bending and axial stresses. *Documento 0* in the future Spanish concrete code already incorporates this last modification.

Reinforced concrete sections bending response is treated in most of the current design codes studying the possible range of strain distribution in the section. So that, for example, interaction curves neutral axial stress-bending stress can be obtained in an analytical way, what lets make easier section's under bending stress design. However, in reference to shear response, don't exist nowadays neutral axial stress-shear stress interaction curves. All these items have taken to the development, that has taken place in the UPC, of a non linear analysis numerical model to study reinforced concrete sections under combined stresses of skew bending and shear.

In this dissertation a study of the shear behaviour under combined bending, shear and axial stresses has been carried out for two kinds of reinforced concrete sections with the numerical model that has been mentioned before. Both geometries of the analysis have been rectangular and tubular sections. The first one, for being one of the most used ones in the practical cases (mostly in edification), and the second one due to the inexistence of an explicit formulation for the shear response calculations in the design codes.

Making use of the advantages of the numerical model with finite elements method, strain's and stress' evolution and distributions in the section have been analyzed. Strain-stress curves for bending and shear have been plotted, normal and shear stresses for both kinds of reinforced concrete sections have also been showed in order to introduce and understand the problem.

In rectangular sections neutral axial stress-shear stress curves have been obtained trough the numerical model, and have been compared to that ones purposed on the current EHE. A new formulation with variable inner lever arm is purposed, in which, in order to approximate in a better way to reality, the inner lever arm is a linear function of axial stress.

In tubular sections bending-shear and also neutral axial-shear stress adimensional interaction curves have been carried out, showing, the last ones the great difference in the behaviour of both kind of sections mostly due to the different distribution of longitudinal reinforcement.

ÍNDICE

1. Introducción y Objetivos	3
1.1. Introducción	3
1.2. Objetivos	4
1.3. Contenido del documento	4
2. Interacción Cortante – Flector – Axil: Estado del Arte	6
2.1. Comportamiento tensodeformacional del hormigón	6
2.1.1. Comportamiento uniaxial	6
2.1.2. Comportamiento biaxial	7
2.1.3. Comportamiento triaxial	8
2.2. Mecanismos de resistencia a flexión de secciones	11
2.2.1. Hipótesis básicas	11
2.2.2. Dominios de deformación	13
2.3. Mecanismo de resistencia a cortante	14
2.3.1. Comportamiento en ausencia de armadura a cortante	17
2.3.1.1. Efecto viga y efecto arco	17
2.3.1.2. Parámetros influyentes en la resistencia a Cortante	18
2.3.1.3. Cálculo de la resistencia a cortante	20
2.3.1.4. Normativas	22
2.3.2. Comportamiento con armadura a cortante	23
2.3.2.1. Modelo de la celosía	24
2.3.2.1.1. Inconvenientes y limitaciones de la analogía de la celosía	27
2.3.2.2. Teorías de los campos de compresión	28
2.3.2.3. Normativas	29
2.3.2.3.1. EHE-99	30
2.3.2.3.2. ACI 318-05	32
2.3.2.3.3. EC-2	33
2.3.3. Disposición de las armaduras transversales	34
2.4. Interacción Cortante-Flector-Axil	36
2.4.1. Comportamiento del acero	36
2.4.2. Modelo propuesto en el Documento 0 de la nueva instrucción EHE (2008)	38
2.4.3. Modelos de carácter plástico	39
2.4.3.1. Solución de cota inferior	39
2.4.3.2. Solución de cota superior	41
3. Breve explicación del modelo acoplado TINSA	44
3.1. Introducción	44
3.2. El modelo TINSA	45
3.2.1. Respuesta seccional	45

3.2.2.	El modelo constitutivo	48
3.2.3.	Biblioteca de elementos seccionales	49
3.2.4.	Estrategia de análisis no lineal	49
3.2.5.	Valoración final	50
4.	Estudio paramétrico de secciones rectangulares sometidas a esfuerzos combinados de cortante, flexión y axil	52
4.1.	Introducción	52
4.2.	Curvas esfuerzo-deformación	54
4.3.	Diagramas de tensiones normales en el hormigón	58
4.4.	Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} en el hormigón y de tensiones normales en los cercos	60
4.5.	Análisis de la efectividad de la armadura transversal	62
4.6.	Diagramas de interacción	64
4.6.1.	Comparación con formulación modificada EHE	64
4.6.2.	Comparación con una formulación con brazo mecánico variable	72
4.6.2.1.	Variación lineal	72
4.7.	Análisis de los resultados	76
5.	Estudio paramétrico de secciones tubulares sometidas a esfuerzos combinados de cortante, flexión y axil	77
5.1.	Introducción	77
5.2.	Curvas esfuerzo-deformación	78
5.3.	Diagramas de tensiones normales	83
5.4.	Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} en el hormigón	87
5.5.	Diagramas de interacción	90
5.5.1.	Diagramas de interacción flexión-cortante	90
5.5.2.	Diagramas de interacción axil adimensional-Cortante	93
5.6.	Análisis de los resultados	95
6.	Conclusiones y perspectivas futuras	96
6.1.	Conclusiones	96
6.2.	Recomendaciones para futuros trabajos	98
	Referencias	99

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Introducción

La gran mayoría de las estructuras de hormigón armado y pretensado están sometidas a solicitaciones combinadas de flexo-compresión y cortante. Sin embargo, la complejidad de los fenómenos de interacción dificulta el tratamiento conjunto de los efectos de las tensiones normales y tangenciales producidas por estos esfuerzos; especialmente en un material frágil como el hormigón, que se fisura bajo tensiones de tracción relativamente bajas y en el que se disponen armaduras en distintas direcciones para coser estas fisuras. Ello hace que los métodos de cálculo utilizados para proyectar, propuestos en las normativas vigentes como el Eurocódigo EC-2 [14], Código Modelo CEB-FIP [6], Instrucción Española EHE-99 [10], el Código ACI [1], e incluso métodos avanzados de análisis, traten por separado la respuesta frente a estados límite últimos de flexocompresión y de cortante.

No obstante, la experimentación indica que es necesario considerar la interacción entre esfuerzos si se desea proyectar con rigor y racionalidad. Así, es conocido, entre otros fenómenos, que la cuantía de armadura longitudinal y la presencia de esfuerzos axiales o de pretensado influyen en la capacidad resistente a cortante, que la fisuración diagonal procedente de cortante incrementa las tensiones de la armadura longitudinal, procedentes de la flexión pura, desarrollando una zona de plastificación finita que se conoce como rótula plástica, que la armadura transversal confina el hormigón y contribuye a aumentar la resistencia a flexocompresión en vigas y pilares, etc. Algunos de estos fenómenos se tienen en cuenta, de forma simplificada, en los métodos de cálculo y análisis antes mencionados.

Sin embargo, y a pesar de las múltiples campañas experimentales realizadas en todo el mundo, no existe un criterio único para explicar la respuesta resistente, tanto en situaciones de servicio como en estados avanzados de carga, bajo solicitaciones normales y tangenciales combinadas. Ello da lugar a multiplicidad de formulaciones, unas de carácter empírico y otras analíticas que, en general, proporcionan resultados muy dispersos cuando se comparan con los experimentales.

La Instrucción Española del Hormigón EHE [10], si bien supuso un avance en este campo, en relación a anteriores Instrucciones, queda poco clara en los artículos relativos a interacción, mezclando parámetros propios del comportamiento en servicio (básicamente basados en la teoría de la elasticidad) con parámetros propios del estado límite último de agotamiento.

Por ello, en el Departamento de Ingeniería de la Construcción de la UPC se inició hace algunos años una línea de investigación orientada a abordar la solución a este problema. Ello da lugar a un modelo de análisis no lineal de secciones sometidas a solicitaciones combinadas, denominado TINSA (Total

Interaction Nonlinear Sectional Analysis) (Bairán [2],[3]) capaz de captar los efectos de la presencia de esfuerzos normales y tangenciales en la respuesta seccional post-fisurada y última. Este modelo, que ha sido parcialmente verificado experimentalmente ha sido el utilizado en esta tesina para el estudio de dos tipos de secciones: rectangular y tubular. Cabe destacar que ambas geometrías se encuentran en fases de estudio muy distintas. Mientras que los textos normativos prescriben un valor de la respuesta a cortante para secciones rectangulares, aunque sea con las limitaciones en cuanto a interacción de esfuerzos citadas anteriormente, no sucede así en secciones tubulares. A día de hoy el estudio de secciones tubulares sometidas a esfuerzos de flexión, torsión y cortante se encuentra todavía en una fase muy precaria.

1.2. Objetivos

El objetivo concreto de este trabajo de investigación es realizar un estudio paramétrico del comportamiento de secciones rectangulares y tubulares de hormigón armado bajo solicitaciones combinadas de axil, cortante y flexión, a fin de estudiar la influencia de diversas variables de diseño (cuantías de armaduras, resistencias del hormigón y del acero, relaciones de esfuerzos M/N/V) en la resistencia y en la rigidez de secciones. En concreto se pretende:

- Realizar un estudio del estado del arte, consultando bibliografía sobre estructuras solicitadas por esfuerzos combinados, a fin de comprender en mayor medida el problema a estudiar.
- Conocer y utilizar el programa de análisis no lineal TINSA (*Total Interaction Non Linear Section Analysis*), Bairán ([2], [3]).
- Obtener curvas de interacción M-V-N, comparando, para sección rectangular, los resultados obtenidos con los de las diferentes normativas.
- Proponer criterios de comprobación de secciones rectangulares, de carácter práctico y contrastarlos numéricamente.
- Obtener conclusiones sobre el comportamiento a cortante de secciones tubulares sometidas a esfuerzos combinados de flexión, cortante y axil.

1.3. Contenido del documento

Se expone a continuación un breve resumen de cada capítulo:

Capítulo 2: Se pretende realizar una descripción del estado del conocimiento en relación a la respuesta de secciones de hormigón armado sometidas a esfuerzos combinados de flexión y cortante. En una primera fase se estudia el comportamiento tensodeformacional del hormigón, a continuación los mecanismos de resistencia a flexión y cortante de una sección. En este último apartado se exponen las teorías más comunes del comportamiento a cortante, así como las formulaciones adoptadas por las distintas normativas. A continuación se estudia el fenómeno de interacción cortante-flexión propiamente dicho, a partir del comportamiento del acero, de la formulación

que aparece en el Documento 0 [12] de la futura EHE y de un modelo de carácter plástico.

Capítulo 3: Se realiza un breve resumen de la situación actual de programas comerciales de cálculo de estructuras y se explica a grandes rasgos el funcionamiento y las ecuaciones en las que se basa el programa TINSA, mostrando a su vez algún ejemplo de sus posibilidades.

Capítulo 4: Se realiza un estudio paramétrico de secciones rectangulares sometidas a esfuerzos combinados de cortante, flexión y axil. Se muestran en primer lugar las curvas esfuerzo-deformación directamente asociadas (cortante-deformación por cortante y momento-curvatura) sin interacción de esfuerzos. A continuación se muestran los diagramas de tensiones normales y tangenciales en el hormigón, así como de tensiones normales en los cercos, que ayudan a comprender lo expuesto en los apartados de análisis de la efectividad de la armadura transversal y los diagramas de interacción. Se comparan los resultados obtenidos con TINSA con la formulación EHE-99 [10] mediante diagramas de interacción axil adimensional-cortante adimensional y se propone una nueva formulación en la que el brazo mecánico z es función lineal del axil aplicado en la sección.

Capítulo 5: Se realiza un estudio paramétrico de secciones tubulares sometidas a esfuerzos combinados de cortante, flexión y axil. En primer lugar aparecen las curvas esfuerzo-deformación directamente asociadas (cortante-deformación por cortante y momento-curvatura) sin interacción de esfuerzos. A continuación se muestran los diagramas de tensiones normales y tangenciales en el hormigón. En cuanto a los diagramas de interacción se muestran en primer lugar los adimensionales de flexión-cortante y a continuación los de axil adimensional-cortante adimensional.

Capítulo 6: Se exponen las principales conclusiones obtenidas.

CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN CORTANTE – FLECTOR - AXIL: ESTADO DEL ARTE.

2.1.Comportamiento tensodeformacional del hormigón.

2.1.1.Comportamiento uniaxial:

Bajo carga uniaxial las curvas tensión-deformación presentan las siguientes características:

El comportamiento es prácticamente lineal hasta tensiones aproximadamente iguales a $0.45 \cdot f_c$ en hormigones normales. En hormigones de alta resistencia el comportamiento se mantiene lineal hasta relaciones σ / f_c más elevadas.

Se llega a una tensión máxima aproximadamente cuando la deformación es del 2 por mil. Este máximo se llama resistencia a compresión del hormigón f_c . El pico es más agudo cuanto más alta es la resistencia a compresión del hormigón.

Después de este pico, todavía se pueden resistir tensiones. La rama después del pico cae más rápidamente cuanto más elevada sea la resistencia a compresión del hormigón.

Cuanto más alta es la resistencia a compresión del hormigón, antes se llega a la deformación última y más frágil es la rotura.

En la figura 2.1 se representan gráficamente las tensiones y deformaciones observadas.

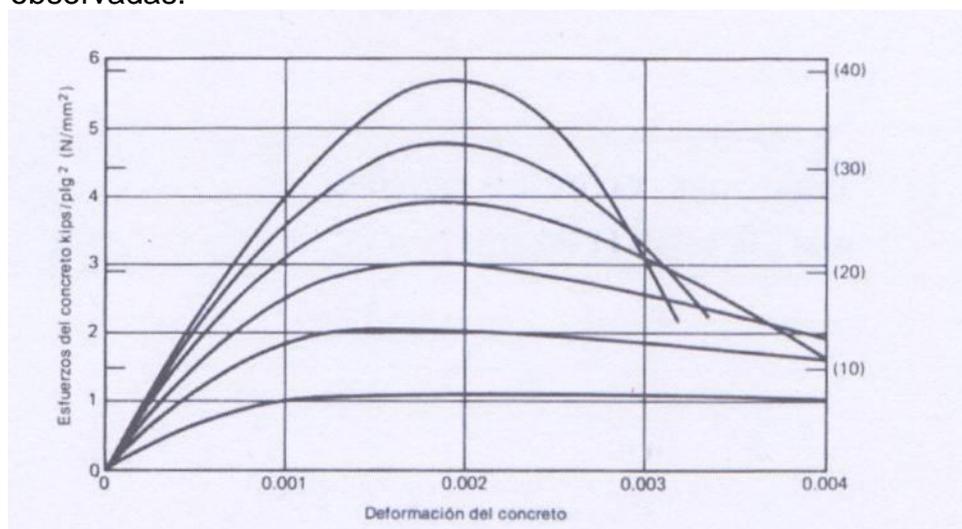


Figura 2.1: Curvas tensión -deformación para carga uniaxial para hormigones de diferentes resistencias (extraída de Park y Paulay [20]).

La resistencia a tracción del hormigón es generalmente inferior al 20% de la de compresión y, teniendo en cuenta las dificultades que comportaría medirla mediante tracción directa de las probetas, se suele medir indirectamente mediante el ensayo brasileño o el ensayo de flexotracción.

Las dificultades de medir la resistencia a tracción uniaxial han hecho que ésta se relacionara con la resistencia a compresión del hormigón mediante fórmulas empíricas sencillas. Típicamente se aceptan relaciones del tipo

$$f_{ct} \propto f_c^p \quad (2.1.)$$

pero la dispersión de datos experimentales hace que el valor de p varíe según la correlación. A modo de ejemplo, el American Concrete Institute (ACI) [1] acepta un valor de 1/2 (y una constante de proporcionalidad de 0.475 si ambos valores son expresados en N/mm^2), mientras que el Comité Europeo de Normalización (CEN) [14] considera que 2/3 se ajusta mejor (con una constante de proporcionalidad de 0.30 si ambos valores son expresados en N/mm^2).

2.1.2. Comportamiento biaxial

La resistencia a compresión del hormigón en tensión plana mejora respecto a la resistencia a compresión uniaxial (figura 2.2). Este aumento depende de la relación de las tensiones principales a las que es sometido el hormigón: f_1 y f_2 . La resistencia a compresión puede llegar a ser hasta un 27% superior a la axial y es aproximadamente el 16% en el caso $f_1 = f_2$. Sin embargo, pequeñas tracciones en una de las direcciones hacen disminuir considerablemente la resistencia a compresión en la otra dirección.

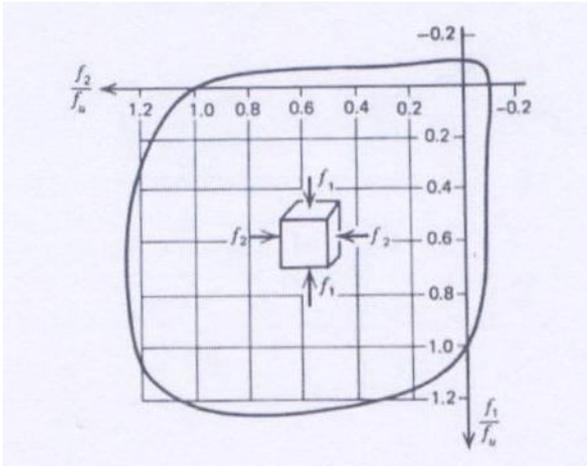


Figura 2.2: Resistencia biaxial del hormigón en gráfico adimensionalizado para la resistencia a compresión uniaxial f_u . (extraída de Park y Paulay [20]).

Es útil representar gráficamente los estados de tensión bidimensionales mediante círculos de Mohr en el espacio $\sigma - \tau$. La envolvente de todos los círculos de rotura (figura 2.3) nos da idea de cómo mejora la resistencia a compresión en estados de tensión plana y constituye la superficie de rotura en el espacio de las tensiones principales.

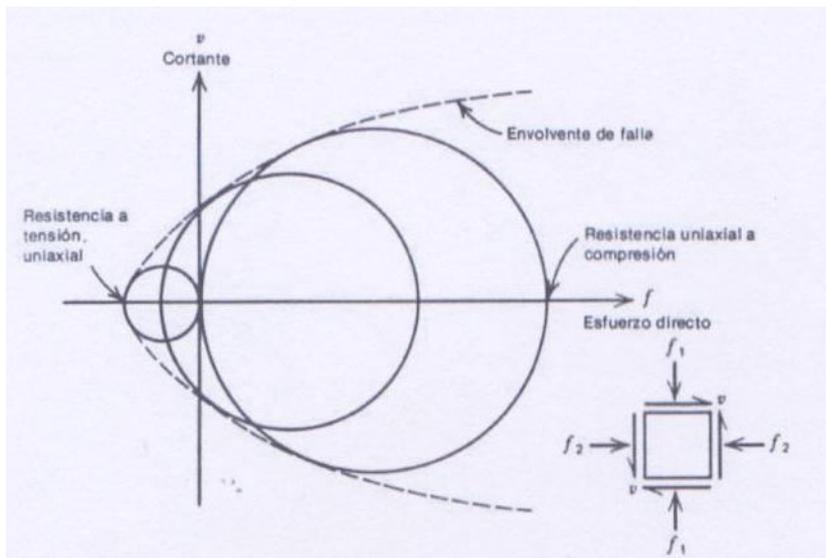


Figura 2.3: Envolvente típica para el hormigón de los círculos de rotura (extraída de Park y Paulay [20]).

2.1.3. Comportamiento triaxial

La resistencia y ductilidad del hormigón sometido a un estado tensional de compresión triaxial aumentan considerablemente.

Entre los criterios clásicos de rotura, son aplicables al hormigón los de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager (figura 2.4). En el espacio de las tensiones principales, el primero es una superficie piramidal con sección pentagonal y el segundo es un cono de sección circular. Por otro lado, existen criterios

específicos para el hormigón que se ajustan mejor a la realidad, como las superficies de Willam-Warnke (de 3 y 5 parámetros) (figura 2.5).

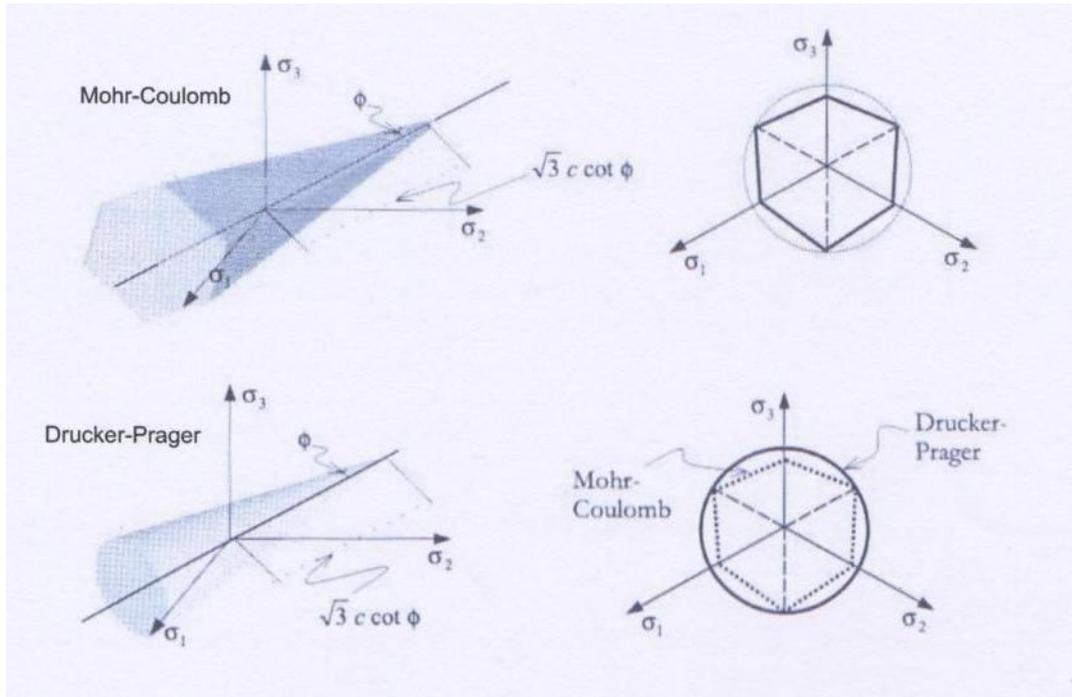


Figura 2.4: Criterios de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager (adaptados de Oliver y Agelet [19]).

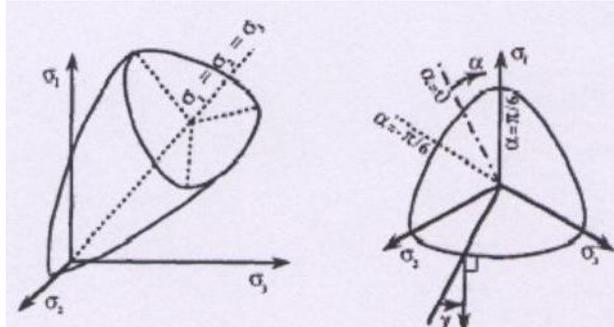


Figura 2.5: Superficie de Willam-Warnke (extraída de Bardet [4])

En la figura 2.6 se muestra la superficie de rotura de Willam-Warnke de 5 parámetros. Se trata de una superficie pseudocónica con una sección variable que tiende a ser circular cerca del vértice y triangular a altos niveles de compresión hidrostática. Las ventajas principales frente a otros criterios propuestos específicamente para el hormigón son que es utilizable tanto en altos como en bajos estados tensionales, y que su forma suave comporta derivadas continuas en todos los puntos.

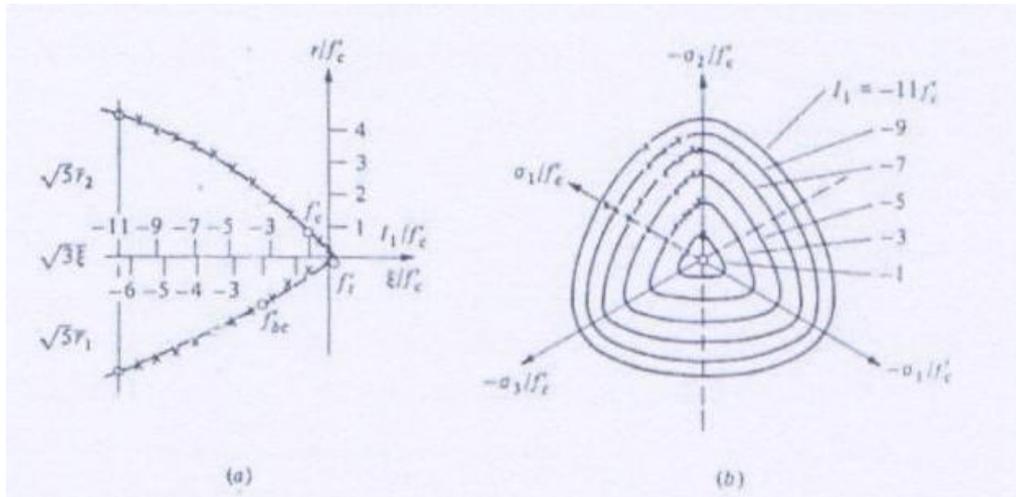


Figura 2.6: Criterio de William-Warnke de 5 parámetros (extraída de Chen [8])

Los meridianos son parábolas mientras que los paralelos están formados por la unión de tres elipses (con un periodo de repetición de 120° como se observa en la figura 2.6.b). la superficie queda definida con los cinco parámetros, que son los siguientes (Chen [8]):

a) Resistencia uniaxial del hormigón, f'_c

b) Relación de resistencias de tracción y compresión, $\bar{f}'_t = \frac{f'_t}{f'_c}$

c) Relación de resistencias a compresión biaxial (caso $f_1=f_2$) y uniaxial, $\bar{f}'_{bc} = \frac{f'_{bc}}{f'_c}$

d) Un punto en un meridiano a 0° , adimensionalizado, $(-\bar{\xi}_1, \bar{r}_1) = \left(\frac{\sigma_m}{f'_c}, \frac{\tau_m}{f'_c} \right)$.

e) Un punto en un meridiano a 60° , también adimensionalizado, $(-\bar{\xi}_2, \bar{r}_2) = \left(\frac{\sigma_m}{f'_c}, \frac{\tau_m}{f'_c} \right)$.

2.2. Mecanismos de resistencia a flexión de secciones

Con el método de los estados límites la condición de verificación es que las solicitaciones en los estados últimos y de servicio sean menores que las respuestas que es capaz de dar la pieza. De todas formas, es preciso subrayar también que, además, es necesario garantizar que la pieza estudiada rompa de forma dúctil, es decir, que el acero de tracción haya plastificado antes de que agote el hormigón comprimido.

El problema de la flexión, con presencia o no de axil, ha sido uno de los problemas más estudiados y que ha aportado más aclaraciones en el comportamiento general del hormigón, sobre todo en el caso de piezas esbeltas, donde es válida la teoría clásica de vigas de Euler-Bernoulli.

2.2.1. Hipótesis básicas

Las suposiciones básicas que se han hecho tradicionalmente en el estudio de agotamiento por solicitaciones normales han sido las siguientes:

Agotamiento de la pieza

El agotamiento de la pieza se caracteriza por el valor máximo de las deformaciones longitudinales del acero y el hormigón. Cuando uno de estos dos valores supera su correspondiente umbral de rotura, se considera que la pieza falla.

Hipótesis de Bernoulli

Las secciones planas antes de la deformación se mantienen planas después de la deformación. Esta suposición implica que las deformaciones longitudinales ε de todas las fibras de la sección, sean de hormigón, de acero pasivo o de acero activo adherente (en este caso se habla de incremento de deformación $\Delta\varepsilon$) son proporcionales a la distancia al plano neutro.

Implícitamente, si se acepta la hipótesis de Bernoulli, también es necesario aceptar que hay una buena adherencia entre armadura adherente y hormigón, aunque obviamente, la adherencia nunca será perfecta en el entorno de una fisura.

La experiencia ha demostrado que la hipótesis de Bernoulli es bastante correcta en piezas suficientemente esbeltas. En general, se acepta si la relación entre puntos de momento nulo y el canto total de la pieza es mayor que 2.5.

Ley tensodeformacional del acero

El comportamiento tensión-deformación del acero se puede aproximar bilinealmente al de plasticidad perfecta a partir del límite elástico.

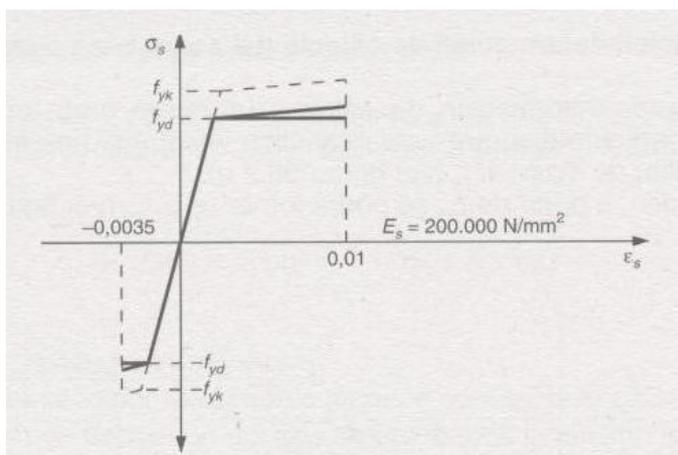


Figura 2.7: Diagrama tensión-deformación habitual del acero (extraída de la EHE-99 [10])

Ley tensodeformacional del hormigón

Se admite para el hormigón un diagrama tensión-deformación formado por una rama de parábola y un segmento rectilíneo de plasticidad perfecta.

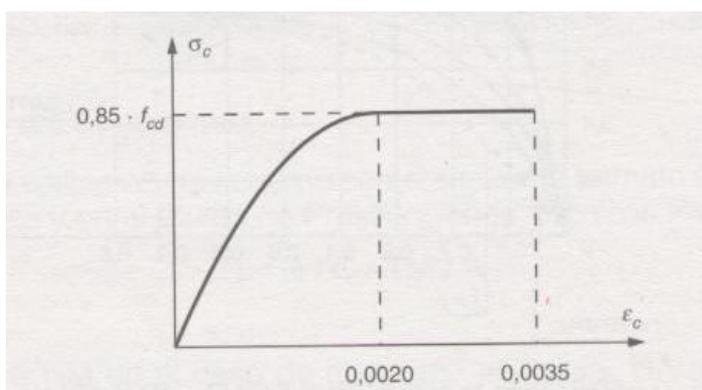


Figura 2.8: Diagrama parábola-rectángulo del hormigón (extraída de la EHE-99 [10])

No se suele considerar la resistencia a tracción del hormigón ya que los esfuerzos de tracción que absorbe antes de fisurar son relativamente pequeños, y generalmente, tienen, además, muy poco brazo de palanca.

El coeficiente 0,85 que aparece multiplicando la resistencia del hormigón representa un coeficiente de cansancio del material; es decir, para estados tensionales elevados y mantenidos el hormigón disminuye algo su resistencia.

Para una simplificación de los cálculos, es corriente sustituir la distribución real de tensiones que resultaba de la aplicación del diagrama parábola-rectángulo por una distribución rectangular equivalente que tiene idéntica resultante en el mismo punto de aplicación, llamada distribución de Whitney.

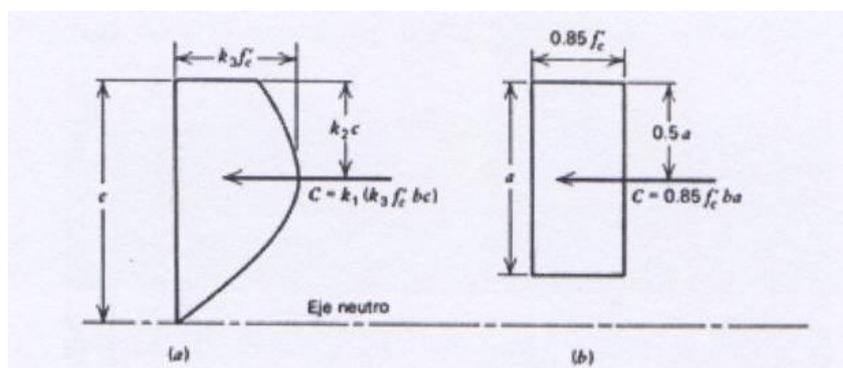


Figura 2.9: Distribución de tensiones de compresión. (a) Real. (b) Rectangular equivalente (extraída de Park y Paulay [20]).

2.2.2 Dominios de deformación

Tanto en la instrucción EHE [10] como en el EC-2 [14] se distinguen 5 dominios diferentes de rotura, apreciables en la figura 2.10 y comentados brevemente a continuación:

- Dominio 1: el acero de la armadura longitudinal llega a su deformación última por tracción mientras el resto de la sección también está sometida a tracción. Es pues una rotura fruto de una sollicitación de tracción simple o compuesta y tiene un comportamiento dúctil ya que el acero está muy plastificado antes de la rotura avisando con deformaciones elevadas.
- Dominio 2: el acero de la armadura longitudinal llega a su deformación última por tracción mientras que no todo el resto de la sección está sometida a tracción. Se trata pues de una rotura dúctil (el acero de la armadura de tracción plastifica y las deformaciones de la pieza aumentan antes de la rotura) en una pieza sometida a flexión simple o compuesta.
- Dominio 3: cuando el hormigón llega a su deformación última, la armadura de tracción ya ha superado su deformación correspondiente al límite elástico de manera que es una rotura dúctil por flexión simple o compuesta.
- Dominio 4: el hormigón llega a su deformación última antes que la armadura de tracción (que en este estado está traccionada) plastifique. Se trata pues de una rotura frágil, no hay deformaciones exageradas que avisen de la rotura inminente. En el diseño de piezas por flexión simple o compuesta, se debe procurar por lo tanto, huir de este dominio de rotura.
- Dominio 4a: dominio correspondiente a flexión compuesta en el que parte de la sección está sometida a tracción, pero todas las armaduras están sometidas a compresión. El hormigón llega a su deformación última sin que se hayan producido grandes deformaciones. Se trata pues, de una rotura frágil que, por tanto, es necesario evitar.

- Dominio 5: toda la sección está comprimida en el momento que se produce el aplastamiento del hormigón. Se trata de una rotura frágil ya, que ningún material ha plastificado antes de la rotura.

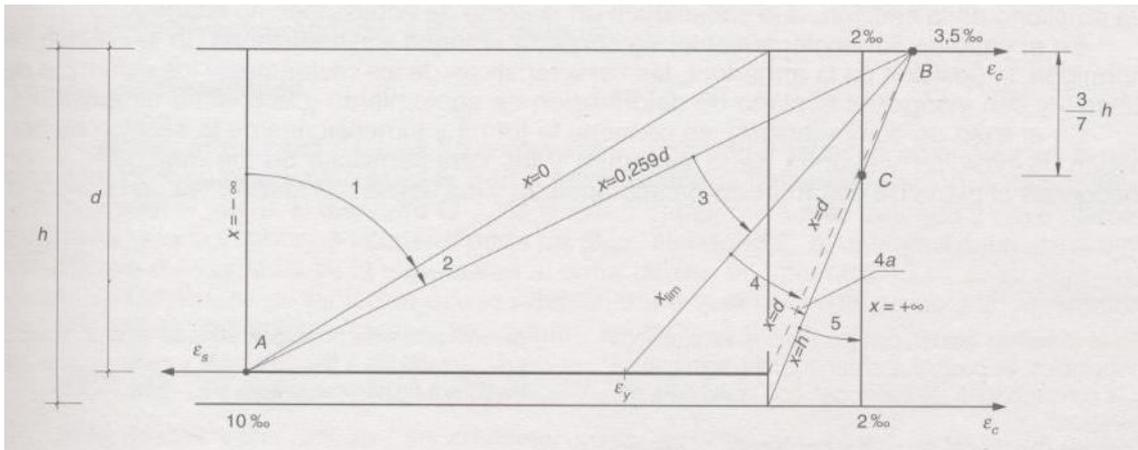


Figura 2.10: Dominios de rotura (extraída de la EHE-99 [10]).

La línea divisoria que marca la diferencia de comportamiento frágil o dúctil es la correspondiente a la que separa los dominios 3 y 4. La profundidad x de la fibra neutra en esta frontera se llama x_{lim} y su valor depende obviamente del límite elástico del acero. Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{c,lim}}} \quad (2.2)$$

profundidad que toma el valor de $0.617d$ para aceros de $f_{yk}=500$ MPa y hormigones con $\varepsilon_{c,lim} = 0.035$.

2.3 Mecanismo de resistencia a cortante

El comportamiento a cortante del hormigón armado es mucho más complejo que el de flexión. Esto se refleja en que las formulaciones de cálculo en las distintas normativas suelen proporcionar resultados mucho más distintos que para el problema de flexión, cuyo tratamiento es prácticamente único. Por tanto, aunque el cortante aparece casi en todos los casos de carga, es un fenómeno difícil de comprender, y más lo es su interacción con el flector a pesar de que casi siempre actúan juntos. Por otro lado, el hecho de que el fallo por cortante sea generalmente de comportamiento no dúctil hace necesario un estudio detallado del fenómeno.

Iniciamos el análisis del mecanismo resistente a cortante estudiando el estado elástico de una viga biapoyada, isótropa, homogénea y uniformemente cargada, que adquiere un estado tensional ampliamente estudiado en la resistencia de los materiales continuos si se acepta el principio de Saint-Venant, que viene dado por las expresiones siguientes para la tensión normal y la tangencial en una sección cualquiera:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (2.3)$$

$$\tau = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q \cdot m_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \quad (\text{Jourawski, 1856})$$

mientras que las tensiones principales se pueden calcular según

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Se observa que el estado de tensiones principales se puede representar gráficamente por las líneas isostáticas de la figura 2.11. El sistema de tensiones principales tiene una inclinación de 45° (y 135°) en las proximidades de la fibra neutra de la viga.

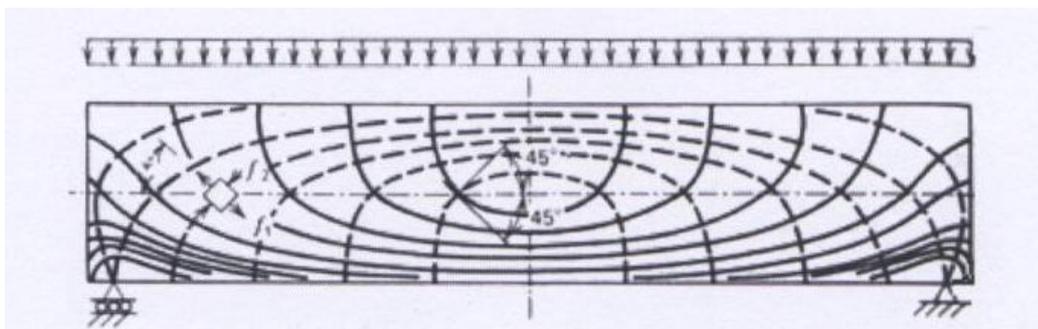


Figura 2.11: Isostáticas en una viga biapoyada isótropa y homogénea uniformemente cargada (extraída de Park y Paulay [20]).

En un primer nivel de carga, este comportamiento propio de un continuo isótropo y homogéneo es válido para una viga real de hormigón en secciones bastante alejadas de las cargas concentradas donde es válida la aproximación de Saint-Venant.

A medida que se incrementa la carga en la viga de hormigón se observa la aparición de dos tipos de fisuras: unas verticales, perpendiculares al eje de la viga en la zona de flectores grandes, y otras inclinadas, normalmente extensiones a las de flexión (aproximadamente a 45° al eje de la viga) donde el cortante es importante. Las fisuras aparecen antes de llegar a los valores de carga correspondientes a los que comportarían tracciones críticas para hormigón en el caso de la viga idealizada, y a pesar de que no coinciden, siguen a grandes rasgos las líneas isostáticas.

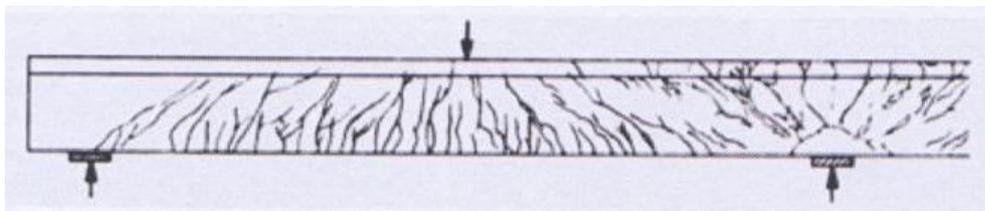


Figura 2.12: Fisuras típicas (extraída de Leonhardt [17]).

Este otro nivel de carga conlleva un estado bien diferente al primero, ya que con la aparición de las fisuras, el esquema de isostáticas de la figura 2.11, deja de ser válido y el mecanismo varía en función de las características de la viga. Estos mecanismos no trabajan todavía al límite, ya que a partir de la aparición de las fisuras todavía queda mucha resistencia para desarrollarse.

Mecanismos de transmisión de cortante en una viga fisurada

- Tensiones tangenciales en la parte no fisurada del hormigón, que sólo adquieren relativa importancia en vigas de gran canto o en vigas comprimidas axialmente. En las demás, la profundidad sin fisuras donde se puede transmitir el cortante con este mecanismo es pequeña.

- Tensiones de corte transmitidas mediante la fricción entre las dos caras de una fisura. Dichas fuerzas de fricción dependen, sobretodo, de la rugosidad, el grosor y los movimientos de fisura, y de la resistencia del hormigón.

- Efecto pasador, fuerzas de dovela o esfuerzo no axial de la armadura longitudinal. Generalmente tienen poca importancia en vigas sin armadura transversal.

- Efecto arco: formación de una zona de compresión que une directamente el punto de aplicación de una carga con la reacción en un apoyo. Es importante en vigas de gran canto y en zonas próximas a los apoyos.

- Tensiones residuales de tracción en las fisuras. En las fisuras estrechas, puede permanecer algún puente de hormigón todavía capaz de transmitir tracciones.

- Efecto celosía o formación de bielas de compresión y tirantes. Es la forma de transmisión más representativa en vigas esbeltas con armadura de cortante.

2.3.1. Comportamiento en ausencia de armadura de cortante

2.3.1.1. Efecto viga y efecto arco

En vigas sin armadura de cortante y cuando no actúa axial sobre la sección, el planteamiento del equilibrio interno de la pieza (ver figura 2.13) nos permite llegar a la expresión:

$$M = T \cdot z \quad (2.5)$$

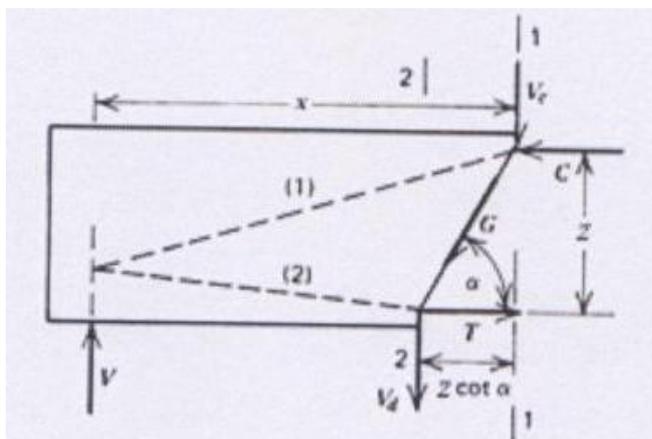


Figura 2.13: Planteamiento del equilibrio interno en una pieza sin armadura de cortante (extraída de Park y Paulay [20]).

Teniendo en cuenta la relación $V = dM / dx$ y derivando el producto de (2.5) se obtiene la expresión

$$V = z \frac{dT}{dx} + T \frac{dz}{dx} \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) nos informa de los dos mecanismos de cortante de una viga sin armadura transversal, correspondientes a los dos sumandos de la expresión.

El primer sumando, hace referencia al mecanismo conocido como efecto viga, propio de una pieza verdaderamente prismática y fisurada tal como muestra la figura 2.14, con la formación de bloques que actúan a modo de voladizos pero que aún son capaces de transmitir fuerzas tangenciales mediante cohesión por entrelazado. En la figura se observa cómo la componente vertical es compensada por la proyección de estas fuerzas tangenciales a lo largo de la fisura y el cortante en la zona comprimida. Por otro lado, el momento está equilibrado por la variación de tensión a lo largo de la barra longitudinal, fenómeno posible gracias a la adherencia entre hormigón y acero. En el voladizo, también actúan y se produce un deslizamiento entre las caras de la fisura, fuerzas de dovetail, pero tradicionalmente no se tienen en cuenta ya que tienen un efecto poco significativo. Las regiones de las piezas donde el cortante es resistido principalmente por este efecto viga son llamadas zonas B, y en ellas se cumplen las hipótesis de Navier – Bernoulli (ver apartado 2.2.1).

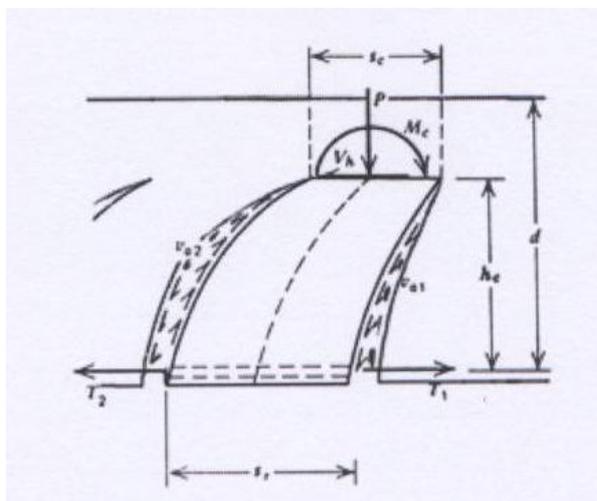


Figura 2.14: Voladizos de hormigón (Adaptada de Park y Paulay [20].).

El segundo sumando de la expresión (2.6) en cambio, es el correspondiente al mecanismo llamado efecto arco, más propio de vigas de gran canto y zonas próximas a fuerzas concentradas aplicadas o cambios bruscos de sección (llamadas D o de discontinuidad). La característica principal del mecanismo es la formación de una zona de compresión (donde no aparecen fisuras) que une directamente el punto de aplicación de la fuerza con el punto de apoyo. Esta reacción puede ser absorbida por los refuerzos longitudinales en apoyos simples si están convenientemente anclados.

El fallo puede llegar, principalmente, por el agotamiento a tensión normal del hormigón comprimido en la línea de empuje, y estas tensiones dependen directamente del canto de la pieza. Es preciso remarcar, que este comportamiento sólo puede existir si la carga se aplica en la zona comprimida de la pieza.

2.3.1.2 Parámetros influyentes en la resistencia a cortante

En el caso de vigas sin armadura de cortante, históricamente se ha dado importancia a cuatro parámetros de cara a la resistencia a cortante.

En primer lugar, cabe destacar la importancia del valor absoluto del canto útil d . Cuanto mayor sea el canto, mayor es el ancho de las fisuras si los elementos que conforman el agregado del hormigón no varían de medida (es lo que se conoce como efecto tamaño). Así, la fuerza que se puede transmitir por entrelazado entre las dos caras de una fisura, unos de los mecanismos de transmisión más importantes en el efecto viga, disminuye considerablemente al aumentar d , y con ella, la capacidad de la pieza de transmitir el cortante. Es necesario tener en cuenta que el canto útil d no sólo influye en el ancho de las fisuras, sino que también aparece involucrado con otro parámetro importante en la resistencia a cortante: a , la luz a cortante.

El comportamiento de vigas biapoyadas con una sola carga concentrada aplicada a una distancia a del apoyo (luz a cortante) depende en gran parte del cociente a/d . Experimentalmente, se distinguen los siguientes tipos de viga (Park y Paulay [20].):

a) Vigas de gran canto ($a/d < 2.5$): el efecto predominante es el de arco. Se distinguen dos tipos:

i) Vigas muy cortas ($a/d < 1$): se desarrolla desde el primer momento una zona de compresión que une directamente el punto de aplicación de la carga con los apoyos. La armadura longitudinal contrarresta las componentes horizontales trabajando a tracción. El colapso más corriente es el deslizamiento en el anclaje de esta armadura, pero también puede darse el aplastamiento del hormigón en la zona de compresión.

ii) Vigas cortas ($1 < a/d < 2.5$): en una primera fase aparecen fisuras inclinadas y después se forma la zona de compresión típica del efecto arco. El colapso en este tipo de viga puede ser debido al exceso de compresión del hormigón, a un deslizamiento de las armaduras longitudinales, o bien, a un fallo por efecto dovela a lo largo de toda la armadura longitudinal.

b) Vigas esbeltas ($a/d > 2.5$): el efecto predominante es el de la viga. Se distinguen dos tipos:

i) Vigas esbeltas: en este tipo de viga, se desarrolla el efecto viga hasta que llega el fallo del mismo mecanismo.

ii) Vigas muy esbeltas ($a/d > 6$): en estas vigas también se desarrolla el efecto viga, pero la resistencia a cortante es superior a la de flexión, de manera que agotan por flexión.

Para el caso de vigas sometidas a cargas repartidas, la luz a cortante sigue siendo de gran importancia, ya que es el parámetro que controla en mayor medida con qué mecanismo se transmitirá el cortante. Así mismo, el valor de esta distancia no está claro para cargas no concentradas, de manera que se suele omitir en el estudio de este tipo de sollicitación.

El tercer factor que es necesario tener en cuenta, es la resistencia del hormigón. Tradicionalmente se ha aceptado que a mayor resistencia a compresión del hormigón, más cortante puede resistir la viga, y experimentalmente se ha visto que esta relación es aproximadamente lineal para hormigones convencionales en vigas con cantos comunes. Sin embargo, esta relación deja de ser lineal (incluso se invierte) para resistencias características a partir de 50 MPa en cantos por ejemplo de 900 mm (Cladera [9], [18]).

Finalmente, el último factor que tradicionalmente se ha considerado más importante en este tipo de viga es la cantidad de armadura longitudinal, y experimentalmente se ha visto que para valores normales de cantidad, la capacidad de resistir cortantes aumenta según la cantidad elevada a $1/3$, ya que la armadura de flexión reduce el ancho de las fisuras, aumentando la capacidad de transmisión de cortante por entrelazado.

2.3.1.3. Cálculo de la resistencia a cortante

En vista a la gran diferencia de comportamiento a cortante entre las zonas D, donde principalmente se observa un efecto arco, y las zonas B, donde predomina el efecto viga, tradicionalmente se han usado métodos de cálculo de la resistencia a cortante diferentes para cada una de estas zonas.

En las regiones de tipo D, los métodos de cálculo más usados han sido los modelos de bielas y tirantes. Estos modelos consisten en considerar el hormigón armado como una estructura articulada de bielas comprimidas y tirantes en tracción. Las bielas de compresión suelen considerarse de hormigón y unen directamente los apoyos con las zonas de carga. Los tirantes son el reflejo del comportamiento de las armaduras, y equilibran las fuerzas actuantes. A partir del análisis mediante el modelo de bielas y tirantes distinguimos tres tipos de fallo: aplastamiento de las bielas de compresión del hormigón, plastificación de los tirantes (armaduras), y deslizamiento de las armaduras por falta de anclaje.

En las zonas B, el problema de los estados límite últimos en piezas sin armadura de cortante ha sido tradicionalmente tratado mediante formulación empírica o semi-empírica aunque han existido modelos teóricos bastante satisfactorios como los evolucionados a partir de los de Kani o los modelos de campo de compresiones. Los primeros, llamados modelos de diátesis, consideran que el hormigón situado entre fisuras adyacentes actúa como un voladizo empotrado en la zona de compresión de la pieza y sometido a un cortante que se transmite por entrelazamiento a través de la fisura (figura 2.14). Los últimos, fueron ideados para explicar el comportamiento de piezas con armadura de cortante (explicados en el apartado 2.3.2.2), pero se pueden adaptar a vigas sin armadura transversal. A pesar de tener bases diferentes estos dos modelos presentan resultados similares.

En referencia a las fórmulas empíricas, una de las más usadas alrededor del mundo por su sencillez es la que se muestra a continuación, donde es necesario introducir el cortante último V_c en N, la resistencia a compresión f_c en MPa y las medidas del canto útil d y ancho b_o del alma, en mm. Conviene decir que la raíz cuadrada de la resistencia a compresión ha sido tradicionalmente considerada por ACI [1] como una aproximación (conservadora) a la resistencia a tracción si ambos valores se introducen en MPa (para otras unidades sólo es necesario introducir un coeficiente fuera de la raíz).

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = \frac{\sqrt{f_c}}{6} \quad (2.7)$$

También han sido muy usadas las fórmulas semiempíricas provenientes de los trabajos de Zsutty entre 1968 y 1971. Las fórmulas, bastantes más complejas que la anterior, tienen en cuenta la resistencia a tracción del hormigón, medida

indirectamente por el término $(f_{ck})^{1/3}$ (f_{ck} y resultado en MPa); el efecto tamaño, mediante el término ξ ; y la presencia de la armadura longitudinal, con la cantidad geométrica de armadura longitudinal en tracción ρ_l . Opcionalmente también se puede incluir un término de efecto arco-efecto viga, que depende de la luz a cortante a_s (distancia entre el apoyo y el punto de aplicación de la carga); esta distancia es complicada de obtener en vigas con carga distribuida, y es por eso que a menudo se acaba obviando todo el factor que la contiene. También puede ser interesante incluir un término (que no se consideraba en las primeras formulaciones) que evalúa la presencia beneficiosa de una posible compresión axial $-\sigma'_{cd}$. La fórmula (en su versión más completa) es:

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = \frac{0.15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \left(\frac{3d}{a_s}\right)^{1/3} \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} - 0.15 \cdot \sigma'_{cd} \quad (2.8)$$

$$\text{con } \xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (\text{d en mm})$$

donde γ_c es un factor de seguridad. Esta, es la fórmula sugerida por el Código Modelo CEB-FIP [6] de 1990 (CM-90).

La fórmula (2.8) presenta muy buen ajuste experimental cuando hay una cantidad razonable de armadura longitudinal en tracción ρ_l . De hecho, este es el punto más polémico de la fórmula: el exceso de importancia que tiene ρ_l para valores bajos de ésta. En efecto, en ausencia de axil de compresión, los elementos sin armadura longitudinal pierden toda resistencia a cortante y la fórmula llega al absurdo en elementos en tracción con ρ_l pequeña o nula.

En 1993, en elementos sin armadura de cortante sometidos a cortante y grandes compresiones, Gupta y Collins detectaron rupturas frágiles no previstas por (2.8) en el momento de la fisuración diagonal. Es necesario pues, tener cuidado con estos tipos de elementos.

Finalmente también es importante la fórmula semiempírica propuesta por Gastebled y May el 2001 [15] elaborada a partir de un modelo de mecánica de fractura, considerando que V_c es alcanzado cuando una fisura horizontal se empieza a propagar a la altura de la armadura longitudinal:

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = 0.15 \cdot \frac{37.41}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{3d}{a_s}\right)^{1/3} \cdot (100 \cdot \rho_l)^{1/6} \cdot (1 - \sqrt{\rho_l})^{2/3} \cdot f_c^{0.35} \quad (2.9)$$

Los resultados de (2.8) y (2.9) son muy parecidos, pero el segundo da más importancia al efecto tamaño.

2.3.1.4 Normativas

La normativa española (EHE-99 [10]) propone, en general el uso del método de bielas y tirantes para el cálculo de estructuras de hormigón sometidas a cortante. Sin embargo, para el caso concreto de vigas sin armadura de cortante utiliza una de las fórmulas derivadas de las de Zsutty, obviando el término con a_s e incluyendo implícitamente el factor de seguridad de 1.25.

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = 0.12 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} - 0.15 \cdot \sigma^I_{cd} \quad (2.10)$$

$$\text{con } \xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (d \text{ en mm})$$

En la cuantía geométrica de la armadura de tracción, que se limita al 2%, entra además de la armadura pasiva bien anclada, la activa adherente ya que se proporciona la siguiente expresión:

$$\rho_l = \frac{A_s + A_p \cdot \frac{f_{pyd}}{f_{yd}}}{b_o \cdot d} \quad (2.11)$$

Para viguetas prefabricadas para forjados unidireccionales, la normativa específica española EFHE-03 [11], como también en otras normativas y antiguas ediciones de las españolas (EH91 por ejemplo), se usa la fórmula directamente de la formulación más simple (2.7), de manera que

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = 0.16 \cdot \sqrt{f_{cd}} \quad (2.12)$$

Sin embargo, según la EFHE-03 [11] esta resistencia puede considerarse doble en el caso de viguetas pretensadas con un distintivo distinguido oficialmente, con cantos totales no superiores a 350 mm y con grosores mínimos de alma no superiores a 60 mm. Este límite inferior de la resistencia a cortante ha sido recogido igualmente en la propuesta para la nueva Instrucción EHE (2008), Documento 0.

El Comité Europeo de Normalisation (CEN) ha ido cambiando el método para calcular la resistencia a cortante en los diversos borradores publicados para la redacción del EC-2 [14]. En el borrador de Abril de 2002 aparece una de las fórmulas derivadas de las de Zsutty, obviando el término con a_s y modificando el coeficiente de 0.15:

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{0.18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} - 0.15 \cdot \sigma_{cd} \\ 0.035 \xi^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\text{con } \xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (\text{d en mm})$$

donde la cuantía geométrica de la armadura de tracción se limita al 2%, mientras que el factor que controla el efecto tamaño, ξ , se limita a 2.

En el borrador de 1991, la resistencia a cortante última para vigas sin armadura de cortante se calculaba con la fórmula siguiente:

$$\frac{V_c}{b_o \cdot d} = \tau_{Rd} \cdot k \cdot (1.2 + 40\rho_l) - 0.15 \cdot \sigma_{cd} \quad (2.14)$$

con $k=1$ si más del 50% de la armadura inferior máxima no se extiende en toda la luz, o bien $k = \max\{1.6 - d, 1\}$ en caso contrario (d en m)

donde τ es la resistencia de cálculo básica a cortante y se obtiene de una tabla a partir de la resistencia característica del hormigón. Tres son las principales diferencias entre esta fórmula y la de CM-90 [6].

En primer lugar, la forma de calcular la resistencia básica a cortante difiere bastante de la proporcionalidad con el término $(f_{ck})^{1/3}$. En segundo lugar, la influencia de la cantidad de armadura de tracción es tratada aquí con un término bilineal directamente proporcional muy diferente a la relación de raíz cúbica de las otras expresiones; asimismo, la dispersión de los datos experimentales a cerca de esta relación impide diferenciar cual de las dos curvas se ajusta más a la realidad (Beeby y Narayanan [5]). Finalmente cabe destacar que el término que controla el efecto medida, k , da resultados muy diferentes que el término ξ del resto de expresiones.

2.3.2. Comportamiento con armadura de cortante

La presencia de armadura de cortante no cambia sustancialmente la primera distribución de tensiones de la figura 2.11. Puesto que el hormigón fisura a muy poca deformación, la tensión del acero cuando se forman las primeras fisuras es todavía bastante baja, de manera que no evita la aparición de fisuras. La armadura de cortante no cambia sustancialmente los mecanismos de efecto arco y efecto viga. El acero introduce una nueva acción a los voladizos de hormigón que se forman con la fisuración, y además, también:

- Mejora el papel de las fuerzas de dovela de las barras longitudinales al sujetarlas.
- Comprime transversalmente los voladizos de manera que reduce o elimina las tracciones.

- c) Limita el ancho de fisura garantizando un buen funcionamiento del mecanismo de transmisión de esfuerzos de cohesión por entrelazamiento.
- d) Proporciona confinamiento, impidiendo la expansión del hormigón en el interior del estribo si estos no se distancian demasiado y se cierran adecuadamente.
- e) Impide la falta de adherencia en las zonas de anclaje.

2.3.2.1 Modelo de celosía

Tradicionalmente, el estudio del comportamiento a cortante en vigas con armadura de cortante se ha realizado mediante un modelo de celosía desarrollado por Ritter a finales del siglo XIX, y mejorado posteriormente por Mörsch. Esta analogía consiste en considerar el material hormigón armado como una celosía, siendo las barras longitudinales las cabezas comprimidas y traccionadas de la celosía, los estribos, los montantes, mientras que los voladizos de hormigón se convierten en las bielas comprimidas paralelas a las fisuras diagonales (figura 2.15). Las tensiones en la celosía del modelo se pueden calcular planteando el equilibrio de las piezas, y el comportamiento previsto por el modelo refleja bastante bien la realidad, sobretudo en el comportamiento tipo viga.

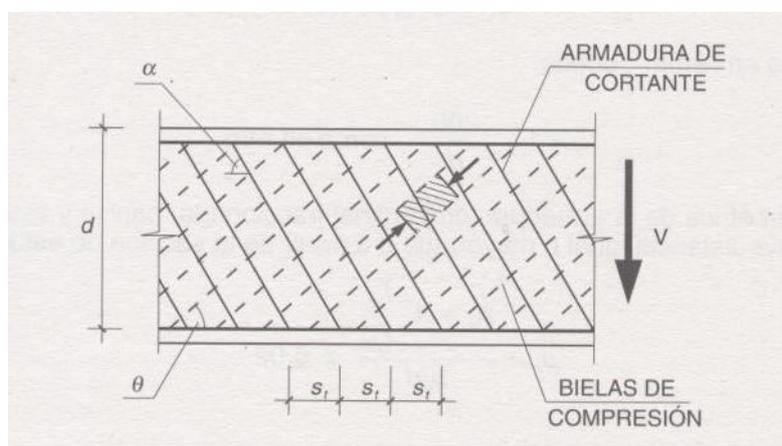


Figura 2.15: Bielas y tirantes (ex. de la EHE.99 [10])

Planteando el equilibrio interno de una pieza con refuerzos de cortante situados a una distancia s , trabajando en celosía y cortándose sin la intervención de la armadura de cortante (como en la figura 2.16 a) se ve que las únicas fuerzas que actúan son, además del cortante V aplicado, la resultante de las tensiones f_2 del hormigón (que trabaja a compresión pura y homogénea según las hipótesis del modelo), y las tensiones de tracción de las armaduras longitudinales debidas al cortante. Sea N_v la resultante de estas tensiones en el acero y D la de las del hormigón.

Está claro que la suma vectorial de D , N_v , y V debe de ser nula, de manera que

$$\begin{aligned} N_v &= V \cdot \cot \theta \\ D &= V \cdot \csc \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

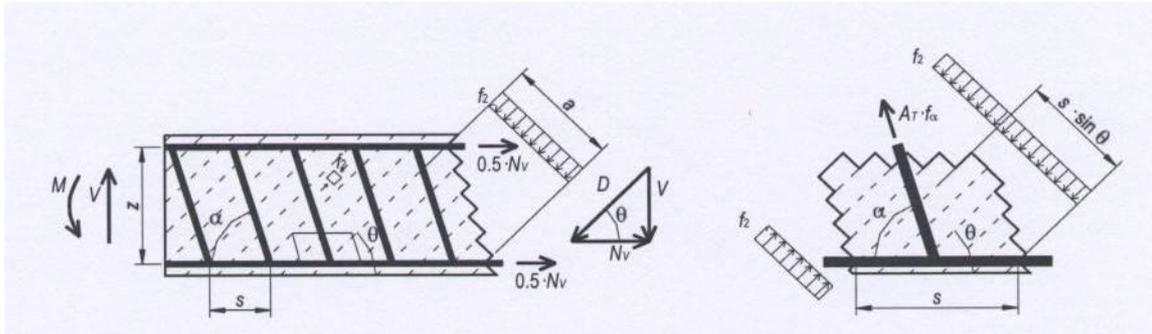


Figura 2.16: Equilibrio de fuerzas en un modelo de celosía

A partir de relaciones trigonométricas se tiene:

$$a = z \cdot \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin \alpha} = z \cdot \sin \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \quad (2.17)$$

y por lo tanto obtenemos la relación

$$f_2 = \frac{D}{b \cdot a} = \frac{V}{b \cdot z \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)} \quad (2.18)$$

Por otra parte, si nos fijamos en la figura 2.17b donde también actúa la armadura transversal con una tensión f_α en un área A_t podemos plantear el equilibrio vertical de fuerzas teniendo en cuenta que parte de las tensiones f_2 se compensan:

$f_\alpha \cdot A_t \cdot \sin \alpha = f_2 \cdot s \cdot b \cdot \sin^2 \theta$. Reordenando y sustituyendo f_2 de la expresión (2.18) se obtiene:

$$\frac{A_t \cdot f_\alpha}{s} = \frac{V}{z \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)} \quad (2.19)$$

Las expresiones (2.16), (2.18) y (2.19) constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas: D, N_v, θ, f_α y f_2 . Tradicionalmente este problema se ha solucionado tomando el valor de 45° en hormigón armado para la inclinación θ de las fisuras. Para hormigón pretensado a menudo se usan expresiones extras para calcular θ en función del axil y la resistencia a tracción del hormigón.

A partir del análisis de bielas y tirantes se distinguen los siguientes cuatro tipos de rotura:

Rotura causada por aplastamiento del hormigón:

Como especifica la expresión (2.18), el esfuerzo cortante origina unas tensiones de compresión diagonal al alma, soportadas por las llamadas bielas de compresión. Este tipo de rotura es especialmente peligroso ya que si las armaduras no han plastificado previamente, la pieza no avisa con deformaciones previas antes de romper bruscamente.

Obviamente, es necesario controlar estas tensiones que aparecen en el alma de la viga, pero se tiene que tener en cuenta que las bielas comprimidas de hormigón se ven en la realidad sometidas a acciones transversales que le causan los cercos. De esta manera, la capacidad del hormigón a compresión se ve reducida de forma notoria. Éste, es un fenómeno bastante complejo y la reducción depende de muchos factores como la distancia entre armadura transversal, pero en general se puede suponer que la resistencia a compresión del hormigón de las bielas está entre un 50 y un 70 % de su resistencia característica.

Por otro lado, también puede ser interesante tener en cuenta el grado de confinamiento del hormigón de las almas, que depende principalmente del grueso del alma y de la presencia de los cercos o barras transversales, su separación y su forma.

Rotura causada por plastificación de la armadura traccionada

La componente longitudinal de las tensiones diagonales de compresión del hormigón debe ser contrarrestada por una fuerza de tracción en la armadura longitudinal

(N_v) en la figura 2.16. La armadura longitudinal sin embargo, estará ya en tensión para resistir la ley de flectores que siempre aparece cuando se tiene cortante, de manera que esta fuerza aparecerá en forma de incremento de tensión. Este incremento de tracción influye pues, en la capacidad de resistencia a flexión pudiendo precipitar en algún caso la rotura a flexión.

Rotura causada por la plastificación de la armadura transversal

Si las barras de la armadura transversal ceden y entran en fluencia, las fisuras formadas se empiezan a abrir considerablemente. Aparte de la no aceptación del exceso de apertura por motivos estéticos, es preciso evitar un ancho exagerado de fisura para evitar la entrada de agua con todos los iones corrosivos que incorpora, y la pérdida de entrelazamiento entre las dos caras de la fisura.

Si la armadura transversal llega a la tensión de rotura no se produce necesariamente el colapso de la pieza ya que esta tiene otros mecanismos para resistir el cortante y la presencia de esta armadura es fundamentalmente para limitar el ancho de fisuras. Además, es necesario remarcar que la apertura

de fisuras comporta una mayor deformabilidad de la pieza, y por tanto, se habla de rotura dúctil.

Finalmente, es importante destacar que la armadura transversal no es efectiva si no atraviesa ninguna fisura inclinada. Es por eso que la mayoría de normativas establecen que la separación mínima entre barras transversales ha de garantizar atravesar alguna fisura, a menudo tomando un ángulo de inclinación θ de 45° y una extensión de las mismas de la mitad del alma inferior (esto es medio canto para armaduras transversales no inclinadas).

Deslizamiento de las armaduras

El cortante (y la variación del momento flector) hacen aumentar las tensiones en la armadura traccionada del apoyo al centro de luz. Este incremento de tensión se consigue gracias a las tensiones de adherencia entre el acero y el hormigón. Si la tensión máxima de adherencia es inferior a la sollicitación de la armadura, se produce el deslizamiento de esta y la rotura brusca de la pieza. Este tipo de rotura produce fisuras que siguen la armadura de tracción de la viga, muy horizontales cerca de los apoyos y posteriormente se inclinan convirtiéndose en las típicas fisuras a 45° del hormigón en tracción del alma.

2.3.2.1.1 Inconvenientes y limitaciones de la analogía de la celosía

Los principales puntos a tener en cuenta en la aplicación de esta analogía se resumen a continuación:

. El análisis de la celosía supone todas las bielas paralelas mientras que la inclinación de las fisuras no es constante a lo largo de toda la pieza.

. Como ya se ha comentado anteriormente, tradicionalmente se toma el valor de 45° en hormigón armado para la inclinación de las fisuras, pero hay estudios que afirman que el ángulo óptimo está ligeramente por debajo (hacia los 38° , Park y Paulay [20]) y que el valor de 45° es demasiado conservador.

. La celosía se considera de uniones articuladas, hecho que carga las barras virtuales (tanto las bielas como los tirantes) solo con un axil, cuando es evidente que también deberían tomar flectores y cortantes. Además las cargas se imponen en estas uniones mientras que en la realidad, las cargas se distribuyen a lo largo de todas las barras.

. En la celosía análoga, se considera que los anclajes de la armadura transversal son satisfactorios. Es necesario pues, asegurarse de que las barras se doblen correctamente alrededor de las barras longitudinales, o bien, se extiendan más allá. Este es un problema grave, ya que si algún grupo de barras transversales cede, las fisuras que atraviesan se empiezan a abrir sin el impedimento de las barras. Se anulan así las tensiones de entrelazado entre las dos caras de la fisura, una de las componentes más importantes de resistencia a cortante.

. No se estudia la compatibilidad de deformaciones entre acero y hormigón. Este hecho impide recorrer el camino carga – deformación (cosa que sí permiten los métodos como las teorías del campo de compresiones).

. No se tiene en cuenta el efecto viga visto en el apartado 2.3.1.1, mecanismo de resistencia de cortante que haría resistir la viga en caso de no tener armadura de cortante pero que continua actuando en caso de tenerla. Para evitar esta discrepancia con la realidad, es bastante común suponer, además de la contribución a la resistencia de cortante mediante el modelo de celosía, otra contribución del hormigón. Ésta se suele calcular de la misma manera que se calcula la resistencia a cortante de la misma pieza sin armadura de cortante.

2.3.2.2 Teorías de los campos de compresión

A partir de la década de 1950 y a raíz de una accidental rotura frágil a cortante se empezaron a desarrollar las teorías de los campos de compresión, una sucesión de teorías basadas en la teoría del campo de tracciones, formulada por Wagner en 1929 para explicar el comportamiento de vigas metálicas armadas sometidas a cortante. Wagner observó que después de la abolladura, el alma no podía resistir más compresiones, de manera que el cortante al que estaba sometida la viga se transmitía mediante un campo de tracciones diagonales. Además, aplicó ecuaciones de compatibilidad de deformaciones entre el alma y los rigidizadores, de manera que con una relación tensodeformacional ligaba todas las ecuaciones y obtenía un problema bien planteado si consideraba coincidencia entre direcciones principales de tensión y deformación.

La hipótesis fundamental de las teorías de los campos de compresión es precisamente esta última consideración: se considera el hormigón como un material donde las direcciones principales de tensión y deformación coinciden en todo momento aunque cambien a lo largo del proceso de carga, mientras que el sistema de transferencia de cortante mediante la celosía todavía perdura. En hormigón, la idea impacta un poco más que en acero por la aparición de las fisuras, pero la experimentación demuestra que estas direcciones son aproximadamente paralelas dentro de un rango de $\pm 10\%$. En el modelo de celosía no se estudiaba el campo de deformaciones y por tanto, tampoco hacen falta las ecuaciones constitutivas del material. En las teorías del campo de compresiones, su consideración es totalmente necesaria.

De esta manera nació la Teoría del Campo Diagonal de Compresiones de la mano de Mitchell y Collins en 1974 para elementos sometidos a torsión pura. De la extensión de este modelo nació en 1978 la Teoría del Campo de Compresiones (o CFT, acrónimo del inglés) para estudiar el comportamiento de elementos sometidos a cortante. En ambos modelos, así como también en el de la celosía, se había aceptado como hipótesis que el hormigón no tenía ningún tipo de resistencia a tracción y por eso, las tres consideran el estado tensional del hormigón como uniaxial de compresión.

En 1986, Collins y Vecchio publican la Teoría Modificada del Campo de Compresiones (MCFT) (Vecchio y Collins [23],[24]). La diferencia entre MCFT y la CFT es que esta última supone que después de la fisuración la tensión principal de tracción f_1 se anula. La MCFT, en cambio, considera una tensión media a tracción, paralela a la deformación principal a tracción, a lo largo de toda el alma de la pieza.

2.3.2.3 Normativas

La mayoría de las normativas adoptan el modelo de la celosía para calcular la resistencia a cortante de las piezas con armadura de cortante, pero en general se intentan evitar algunos de los inconvenientes que se plantean en el apartado 2.3.2.1.1. Las discrepancias más importantes entre normativas son las referentes a la contribución del hormigón para explicar el efecto viga, visto en el apartado 2.3.1.1., que continua actuando en las vigas con armadura de cortante al mismo tiempo que el mecanismo de bielas y tirantes de la celosía, y la adopción o no de un ángulo θ de inclinación de las fisuras.

La contribución del hormigón sólo se debería considerar si la armadura transversal no ha cedido, garantizando un buen entrelazado entre las dos caras de la fisura. Por lo que respecta a su cálculo existen dos estrategias. La primera es considerar que la contribución del hormigón coincide con la resistencia a cortante de la misma pieza en ausencia de armadura transversal. La segunda, consiste en considerarla ligeramente inferior ya que las deformaciones a las que se verá sometida la pieza con armadura de tracción serán mucho más elevadas.

Tradicionalmente se ha considerado que la contribución de la celosía y la del hormigón se pueden superponer. Esta suposición es buena para valores de inclinación de las bielas cercanas a 45 °, pero es totalmente inaceptable para valores cercanos a 30 ° (o 60 °) donde la contribución del hormigón apenas se nota.

Como se ha explicado en el apartado 2.3.2.1, las tensiones transversales generadas en las bielas de hormigón por la armadura transversal reducen considerablemente la resistencia a compresión del hormigón. Si f_{0cd} es esta resistencia, se puede considerar:

$$f_{0cd} = k \cdot f_{cd} \quad (2.20)$$

con valores de K entre 0.50 a 0.70.

2.3.2.3.1 EHE-99

La EHE-99 [18] adopta un modelo de celosía con la limitación

$$0.50 \leq \cot \theta \leq 2.00 \quad (2.21)$$

El cortante reducido de cálculo V_{rd} (una vez corregido el cortante exterior de sollicitación V_d por los efectos de sección variable (efecto Ressal) y fuerza de pretensado inclinada) se ha limitado a dos valores de cortante últimos: el que agota por compresión oblicua en el alma (V_{u1}) y el que lo hace por tracción (V_{u2}), de manera que es preciso que se cumpla simultáneamente:

$$\begin{aligned} V_{rd} &\leq V_{u1} \\ V_{rd} &\leq V_{u2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cortante de agotamiento por compresión oblicua al alma (V_{u1})

Imponiendo el agotamiento de las bielas de hormigón (o sea, haciendo $f_2 = f_{0cd}$ en la ecuación (2.18) y generalizando para piezas de sección con anchura no constante (adoptando el valor de b_0) se obtiene la relación:

$$V_{u1} = f_{0cd} \cdot b_0 \cdot z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \theta \quad (2.23)$$

Además, existe un fenómeno por medio del cual el brazo de palanca z se ve reducido en piezas fuertemente comprimidas. Según el CM-90 [6], se puede suponer un coeficiente reductor K , de manera que

$$\begin{aligned} z &= K \cdot 0.9 \cdot d \\ \text{con } K &= \min \left\{ \frac{5}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sigma^I_{cd}}{f_{cd}} \right), 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

La EHE-99 [10] adopta un valor para k de la ecuación (2.20) de 2/3 (Pozo Surrido et al.[21]. De esta ecuación y de las fórmulas (2.23) y (2.24), y considerando la equivalencia trigonométrica de, $\sin^2 \theta = (1 + \cot^2 \theta)^{-1}$, resulta

$$V_{u1} = 0.60 \cdot K \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \quad (2.25)$$

$$\text{con } K = \min \left\{ \frac{5}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sigma^I_{cd}}{f_{cd}} \right), 1 \right\}$$

Cortante de agotamiento para tracción en el alma (V_{u2})

De la ecuación (2.19) del modelo de la celosía, imponiendo la fluencia del armado transversal ($f_\alpha = f_{yad}$) y adaptando la expresión para más de una inclinación de barras se obtiene la contribución de la armadura transversal al cortante último (V_{su})

$$V_{su} = z \cdot \sum_{\alpha} (A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin \alpha) \quad (2.26)$$

donde A_{α} es el área de armadura transversal por unidad de longitud.

La normativa española considera que la contribución del hormigón actúa a la vez con el mecanismo de bielas y tirantes de la celosía pero se incluye un coeficiente β de reducción para tener en cuenta que la contribución del hormigón a duras penas se nota para valores cercanos a 30° (o 60°) y cómo esta contribución va en aumento a medida que la inclinación de las bielas de la pieza se acercan a las isostáticas que marcaron la fisuración.

$$V_{u2} = V_{su} + \beta \cdot V_{\theta=\theta_e} \quad (2.27)$$

Según los datos experimentales de la normativa española, la expresión que da el valor de $V_{\theta=\theta_e}$ tiene la misma forma que la resistencia que tenía una viga sin armadura de cortante, pero reduciendo a 0.10 el valor de primer coeficiente, ya que las deformaciones a que se someterá una pieza con armadura de cortante al momento de la rotura serán superiores a las que está sometida la misma pieza en ausencia de armadura transversal cuando rompe (Pozo, Surrido et al. [21]). Así:

$$\frac{V_{\theta=\theta_e}}{b_0 \cdot d} = 0.10 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} - 0.15 \cdot \sigma_{cd} \quad (2.28)$$

$$\text{con } \xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (d \text{ en mm}) \quad \text{y} \quad \rho_l = \frac{A_s + A_p \cdot \frac{f_{pyd}}{f_{yd}}}{b_0 \cdot d} \leq 0.02$$

Por otro lado, el cálculo del coeficiente β se hace mediante interpolación lineal con el ángulo de inclinación de las bielas (θ), maximizándose a 1 cuando este coincide con el ángulo de referencia de inclinación de las fisuras (θ_e):

$$\beta = \frac{2 \cdot \cot \theta - 1}{2 \cdot \cot \theta_e - 1} \quad \text{si } 0.50 \leq \cot \theta < \cot \theta_e \quad (2.29)$$

$$\beta = \frac{\cot \theta - 2}{\cot \theta_e - 2} \quad \text{si } \cot \theta_e \leq \cot \theta \leq 2.00$$

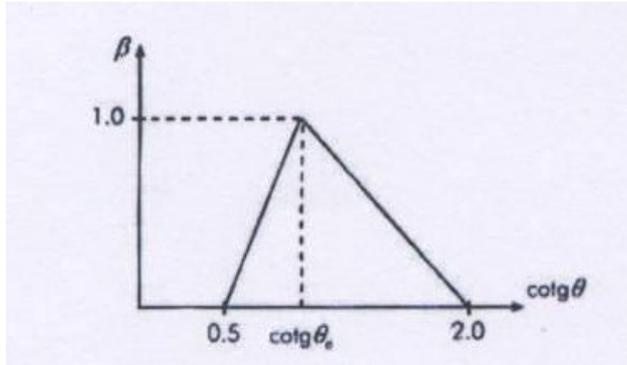


Figura 2.17: Coeficiente β en función del ángulo de inclinación de las bielas (ex. de Pozo, Surrido et al. [21])

Para el cálculo del ángulo de referencia de inclinación de las fisuras, la norma propone la siguiente fórmula obtenida a partir del análisis del círculo de Mohr de las tensiones:

$$0.5 < \cot \theta_e = \frac{\sqrt{f_{ct,m}^2 - f_{ct,m} \cdot (\sigma_{xd} + \sigma_{yd}) + \sigma_{xd} \cdot \sigma_{yd}}}{f_{ct,m} - \sigma_{yd}} < 2.0 \quad (2.30)$$

2.3.2.3.2 [ACI 318-05](#)

El código de ACI 318-05 [1], adopta un modelo de celosía con las bielas inclinadas a 45° y obliga a que el cortante efectivo V_{rd} sea inferior al cortante último que agota por tracción el alma (V_{u2}). No hay ninguna prescripción para evitar roturas a cortante por compresión de las bielas de hormigón.

Por lo que respecta a las contribuciones del hormigón y el acero, ACI 318-05 [1] supone que se pueden superponer directamente los dos efectos. De la misma manera, esta suposición que no es válida para valores de θ alejados de 45° es congruente aquí ya se trabaja con una inclinación de las fisuras de 45° :

$$V_{u2} = V_{su} + V_{cu} \quad (2.31)$$

ACI supone que la contribución del hormigón coincide con la resistencia a cortante de la misma pieza sin armadura de cortante, y por tanto, el código americano calcula V_{cu} con (2.15) o bien con la formulación simplificada (2,7).

La contribución de la armadura transversal ya se ha comentado que se hacía con el modelo de celosía con $\theta = 45^\circ$. De la ecuación (2.19) del modelo de la celosía, imponiendo la fluencia del armado transversal ($f_\alpha = f_{y\alpha,d}$), considerando A_α el área de armadura transversal por unidad de longitud y obviando la diferencia entre el canto útil d y el brazo de palanca z ,

$$V_{su} = d \cdot A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (2.32)$$

2.3.2.3.3 Eurocodigo2

El cálculo de la resistencia a cortante para piezas con armadura de cortante se basa en un modelo de celosía. El EC-2 2 [14], propone dos métodos para los cálculos. El primero, que se denomina método normalizado considera una inclinación fija de las fisuras de 45° y permite superponer la contribución del hormigón con la del acero, de manera que

$$\begin{aligned} V_{u2} &= V_{su} + V_{cu} \\ \theta &= 45^{\circ} \end{aligned} \quad (2.33)$$

El segundo, o método de las bielas de inclinación variable, no considera la contribución del hormigón pero se aceptan valores del ángulo θ que cumplen:

$$\begin{aligned} 0.40 \leq \cot \theta \leq 2.50 & \text{ si la armadura longitudinal es constante} \\ 0.50 \leq \cot \theta \leq 2.00 & \text{ si la armadura longitudinal es variable} \\ V_{cu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Como en el caso de la normativa española, se controlan tanto las tensiones de compresión máxima en las bielas de hormigón como el cortante que hace colapsar la pieza por tracciones al alma, teniéndose que cumplir en todo momento las ecuaciones de (2.22).

Cortante de agotamiento por compresión oblicua al alma V_{u1}

Tanto para el método normalizado como el de bielas de inclinación variable, se considera que las tensiones transversales generadas en las bielas de hormigón por la armadura transversal reducen la resistencia a compresión según (2.20). Según el comité europeo, el factor de eficacia k depende de la resistencia característica del hormigón, de manera que

$$k = \max \left\{ 0.7 - \frac{f_{ck}}{200}, 0.5 \right\} \quad (f_{ck} \text{ en MPa}) \quad (2.35)$$

Imponiendo el agotamiento de las bielas de hormigón (o sea, haciendo $f_2 = f_{0cd}$ en la ecuación (2.18), por el primer método, considerando los 45° del ángulo se obtiene la relación

$$V_{u1} = \frac{1}{2} \cdot f_{0cd} \cdot b_w \cdot z \cdot (1 + \cot \alpha) \quad (2.36)$$

mientras que por el segundo método, considerando la equivalencia trigonométrica de, $\sin^2 \theta = (1 + \cot^2 \theta)^{-1}$, resulta

$$V_{u1} = f_{0cd} \cdot b_w \cdot z \cdot \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \quad (2.37)$$

Cortante de agotamiento por tracción al alma V_{u2}

El método normalizado considera la contribución del hormigón y su valor lo considera coincidente con la resistencia a cortante última que tendría la misma pieza sin armadura de cortante, así, V_{cu} se calcula con la fórmula (2.14). No obstante, el método de bielas de inclinación variable considera nula esta contribución.

La contribución de la armadura transversal se obtiene de la ecuación (2.19) del modelo de la celosía, imponiendo la fluencia del armado transversal ($f_\alpha = f_{y\alpha,d}$), considerando A_α el área de armadura transversal por unidad de longitud. Por el primero de los métodos, que considera $\theta = 45^\circ$, se obtiene

$$V_{su} = z \cdot A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (2.38)$$

mientras que si se usa el segundo método se obtiene

$$V_{u2} \equiv V_{su} = z \cdot A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d} \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin \alpha \quad (2.39)$$

2.3.3. Disposición de las armaduras transversales

Como ya se ha comentado en apartados anteriores las armaduras transversales tiene diversas funciones, como las de coser las fisuras de cortante o la de confinar las bielas de compresión que forma el hormigón. En este sentido, es necesario establecer unas separaciones máximas para la colaboración de las armaduras. Las expresiones en las diferentes normativas no son idénticas, pero van todas encaminadas a garantizar las mencionadas funciones.

Normativa española

La normativa española (EHE-99 [10]) obliga a cumplir los tres requisitos siguientes:

- Al menos un tercio de la armadura necesaria para cortante, y en todo caso la cuantía mínima, se tiene que disponer de manera que forme un ángulo de 90° con el eje de la viga.

.- La cuantía de armadura a cortante debe superar una determinada cuantía mínima.

$$\sum \frac{A_{\alpha} \cdot f_{y,ad}}{\sin \alpha} \geq 0.02 \cdot A_{\alpha} \cdot b_0 \quad (2.40)$$

.- La separación entre armaduras transversales tiene que ser inferior a un determinado límite superior. Estas separaciones máximas son más restrictivas a medida que el cortante de cálculo se acerca a que agota la resistencia a compresión de las bielas de hormigón como se recoge en su fórmula de cálculo.

$$\begin{aligned} s_1 \leq 0.80d \leq 300mm & \quad \text{si} \quad V_{rd} \leq \frac{1}{5} \cdot V_{u1} \\ s_1 \leq 0.60d \leq 300mm & \quad \text{si} \quad \frac{1}{5} \cdot V_{u1} < V_{rd} \leq \frac{2}{3} \cdot V_{u1} \\ s_1 \leq 0.30d \leq 200mm & \quad \text{si} \quad \frac{2}{3} \cdot V_{u1} < V_{rd} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Eurocódigo 2

El Comité Europeo de Normalización (CEN) permite la disposición de toda la armadura transversal inclinada si es a más de 45° en vigas, pero al menos un 50% de la armadura a cortante ha de ser en forma de estribos. Existe también un mínimo en la cantidad de armadura transversal y que va entre 0.0007 y 0.0030 según el tipo de acero y hormigón.

Finalmente, el EC-2 [14] 2 también prescribe una separación máxima entre armado transversal de forma idéntica a la EHE (ecuación (2.41))

ACI 318-95

El Código 318-05 de ACI [1] establece también una serie de condicionantes referentes a la armadura de cortante. En primer lugar, es preciso decir que el armado a cortante puede consistir en armados inclinados si los elementos no están pretensados.

También existe un área mínima de armado trasversal si $V_{rd} \leq \frac{1}{2} \cdot V_{cu}$ pero de esta prescripción no están exentos los nervios de los forjados unidireccionales.

Este área mínima se calcula, para el caso general con

$$A_v = 3.5 \frac{b_w \cdot s}{f_y} \quad (2.42)$$

Por lo que respecta a las separaciones, establece unos máximos también más restrictivos a medida que el cortante de cálculo se acerca a la resistencia proporcionada para el hormigón. Para estribos colocados perpendicularmente al eje de la pieza,

$$s_1 \leq 0.50d \leq 600mm \quad \text{si } V_{su} < 1.1 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d \quad (2.43)$$

$$s_1 \leq 0.25d \leq 300mm \quad \text{si } V_{su} \geq 1.1 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d$$

y para armadura inclinada, es preciso garantizar que toda fisura sea atravesada como mínimo por una o dos barras según si $V_{su} < 1.1 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d$ o $V_{su} \geq 1.1 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d$ respectivamente. La fisura se considera con una inclinación de 45° y que se extiende en la mitad inferior del alma de la viga.

2.4. Interacción cortante-flector-axil

En la mayoría de casos, el esfuerzo cortante no tiene influencia en la capacidad de resistencia a flexión, de manera que se pueden estudiar los dos fenómenos de forma desacoplada. Es importante tener en cuenta sin embargo, que en vigas de gran canto las fuerzas cortantes pueden ser dominantes, y que por otro lado, cuando existe un cortante importante en una sección que desarrolla un movimiento último, las deformaciones sufridas se ven alteradas.

2.4.1. Comportamiento del acero

El modelo de la celosía presupone un incremento de tensión en la armadura longitudinal. Tomando momentos en el punto O de la figura 2.19, se obtiene:

$$\Delta T \cdot z + V_{su} \cdot \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} = V_{su} \cdot \frac{z \cdot \cot \theta}{2} + V_{cu} \cdot z \cdot \cot \theta \quad (2.44)$$

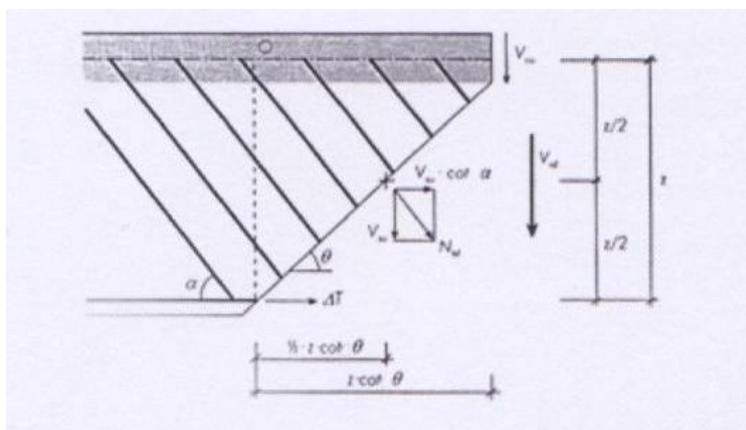


Figura 2.18: Fuerzas internas en el modelo de celosía (extr. De Pozo, Surrido et al. [21])

De la ecuación (2.44), teniendo en cuenta que $V_{cu} = V_{rd} - V_{su}$ y aislando el incremento de tensión, resulta

$$\Delta T = V_{rd} \cdot \cot \theta - \frac{V_{su}}{2} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \quad (2.45)$$

Para tener en cuenta el fenómeno de forma cómoda y precisa, se puede ver que un incremento de tracción en la armadura longitudinal es equivalente a un incremento del momento ΔM_d actuando en la sección:

$$\Delta M_d = \Delta T \cdot z \quad (2.46)$$

Pero un incremento de momento se puede ver como un decalaje de la ley de momentos flectores una distancia s_d hacia el lado más desfavorable (de manera que aumente virtualmente la sollicitación por flexión) tal y como muestra la figura 2.20. En efecto, teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor de primer grado de la relación entre momento y cortante en una distancia s_d ($V_{rd} = \Delta M_d / s_d$) se llega a la relación

$$s_d = \frac{\Delta M_d}{V_{rd}} = \frac{\Delta T \cdot z}{V_{rd}} \quad (2.47)$$

que en virtud de la ecuación (2.45) se convierte

$$s_d = z \cdot \left[\cot \theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{su}}{V_{rd}} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \right] \quad (2.48)$$

Así, se puede decalar la ley de momentos flectores una distancia s_d hacia el lado más desfavorable tal y como muestra la figura 2.20. Es extremadamente importante considerar este fenómeno en el cálculo de vigas con la armadura longitudinal adecuada a la ley de momentos flectores. En efecto, el ahorro de parte de las barras longitudinales en secciones de menor sollicitación que la máxima, es una práctica habitual que se puede hacer siempre y cuando se tenga en cuenta este incremento de tracción ya que las barras longitudinales de una viga están sometidas a más tensión que la debida a él por consideraciones de flexión. Este incremento es mayor cuanto más inclinadas estén las fisuras, ya que crece con θ . Con la ley decalada sin embargo, se pueden calcular sin problemas los puntos de corte a partir de los cuales las barras no serían necesarias para resistir el momento (decalado, que ya incluye el incremento de tensión por cortante) y se considera la longitud de anclaje a partir de este punto. Tradicionalmente sin embargo, la distancia s_d de decalaje de la ley de momentos se tomaba igual al canto útil d de la pieza en lugar de usar la fórmula (2.48).

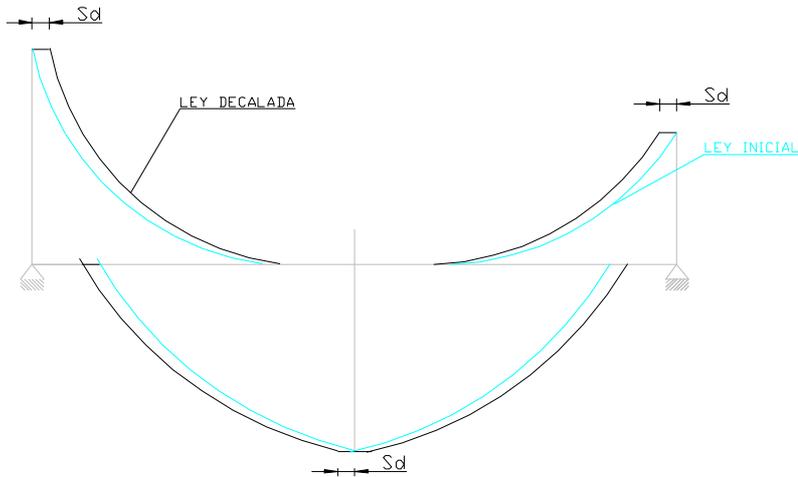


Figura 2.19: Ejemplo de decalaje de la ley de momentos.

Finalmente, cabe remarcar que para todos los cálculos, es necesario tener en cuenta el cortante efectivo, teniendo en cuenta la reducción o aumento de este por efecto Réstal, en piezas de canto variable y por la componente vertical de un posible pretensado.

2.4.2. Modelo propuesto en el Documento 0 de la nueva instrucción EHE (2008)

La verificación a realizar según este borrador de la futura edición de la instrucción es la misma que en su versión anterior, es decir:

$$V_{Rd} \leq V_{u1}; V_{rd} \leq V_{u2} \quad (2.49)$$

i) V_{u1} : de cara al cálculo de este término no aparecen novedades importantes, a excepción de que se amplía el rango de aplicación de la expresión a HAR ($f_{ck} \geq 60MPa$).

ii) V_{u2} : El esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alra vale: $V_{u2} = V_{cu} + V_{su}$, donde:

$$V_{su} = z \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot g\theta) \cdot \sum A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d} \quad (2.50)$$

Expresión análoga a la de la edición anterior. En flexión simple, y a falta de cálculos más precisos, puede adoptarse el valor aproximado $z=0.9 \cdot d$. En el caso de secciones circulares solicitadas a flexión, d puede considerarse igual a $0.8 \cdot h$. En caso de flexocompresión, z puede aproximarse como:

$$z = \frac{M_d + N_d \cdot z_0 - U'_s(d - d')}{N_d + U_s - U'_s} \left\{ < 0.9 \cdot d' \right. \quad (2.51)$$

Donde:

z_0 : Distancia desde la armadura traccionada hasta el punto de aplicación del axil

d, d' : Distancia desde la fibra más comprimida de hormigón hasta el centro de gravedad de la armadura traccionada y comprimida, respectivamente.

$U_s = A_s \cdot f_{yd}$: Capacidad mecánica de la armadura de tracción

$U'_s = A'_s \cdot f_{yd}$: Capacidad mecánica de la armadura de compresión.

De manera que se tiene en cuenta la disminución de la capacidad resistente a cortante por las tensiones de compresión en la sección ocasionadas por la interacción de momento y axil.

El término V_{cu} se calcula de de manera prácticamente análoga a la de la instrucción actual.

2.4.3. Modelos de carácter plástico

Se considera una viga simplemente apoyada con sección en T sobre la que actúan dos cargas simétricas de valor P , como se muestra en la figura 2.20. La zona de compresiones se idealiza como un cordón sometido a una fuerza C y la zona de tracciones como otro sometido a una fuerza T . El alma tiene un espesor b , y la longitud de la zona con valor del cortante constante e igual a $P=Q$ es a . La distancia entre los cordones comprimido y traccionado es h .

2.4.3.1. Solución de cota inferior

Se considera un campo homogéneo de tensiones en el alma consistente en una tensión de compresión uniaxial f'_c en el hormigón, que forma un ángulo constante ϑ con el eje x (fig. 2.20.)

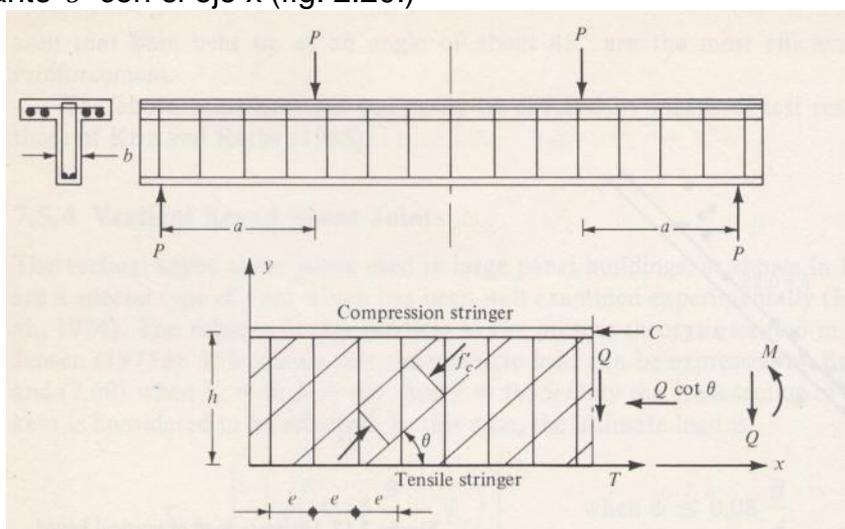


Figura 2.20: Vigas con cercos verticales y un campo ideal de tensiones (extraída de Chen [8])

Este campo de tensiones se llama campo diagonal de tensiones. Este campo de tensiones se puede considerar como un modelo idealizado de un alma fisurada, siendo las fisuras paralelas a la dirección del esfuerzo uniaxial.

Con el sistema de referencia xy el campo de tensiones tiene las siguientes componentes de tensiones normales y de corte:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -f'_c \cos^2 \vartheta \\ \sigma_y &= -f'_c \sin^2 \vartheta \\ \tau &= f'_c \sin \vartheta \cos \vartheta\end{aligned}\quad (2.52)$$

Si los cercos verticales están relativamente cerca, se pueden reemplazar las fuerzas en los estribos por un esfuerzo equivalente igual a las fuerzas en los cercos pero distribuido sobre el área de hormigón, es decir:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_y &= \frac{A_s f_y}{be} = \rho f_y\end{aligned}\quad (2.53)$$

Siendo ρ la cuantía de armadura transversal.

Las tensiones totales en el hormigón y en los cercos son por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -f'_c \cos^2 \vartheta \\ \sigma_y &= -f'_c \sin^2 \vartheta + \rho f_y \\ \tau &= f'_c \sin \vartheta \cos \vartheta\end{aligned}\quad (2.54)$$

Este campo de tensiones será estáticamente admisible si se satisfacen las condiciones de contorno y se desprecia el peso propio de los materiales. Las condiciones de contorno a lo largo de los cordones requieren $\sigma_y = 0$.

Con esta condición, las dos últimas ecuaciones conducen a

$$\rho f_y = \tau \tan \vartheta \quad (2.55)$$

Y la primera y la última

$$\sigma_x = -\tau \cot \vartheta \quad (2.56)$$

Resolviendo las dos ecuaciones para τ y ϑ , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{f'_c} &= \sqrt{\psi(1-\psi)} \\ \tan \vartheta &= \left(\frac{\psi}{1-\psi}\right)^{1/2}\end{aligned}\quad (2.57)$$

Donde la cuantía mecánica de armadura transversal se define como

$$\psi = \frac{\rho f_y}{f'_c} \quad (2.58)$$

La ecuación 2.57 representa un círculo en el sistema de coordenadas $\tau/f'_c, \psi$, como se muestra en la figura 2.21. El máximo valor de τ/f'_c es 0.5, para $\psi = 0.5$.

Cuando ψ aumenta de 0 a 0.5, el ángulo ϑ aumenta de 0 a 45° , y para $\psi > 0.5$ el valor de ϑ es constante a 45° .

La solución completa de la capacidad resistente es por lo tanto:

$$\frac{\tau}{f_c'} = \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad \psi \leq 1/2 \quad (2.59)$$

$$\frac{\tau}{f_c'} = 1/2 \quad \psi > 1/2$$

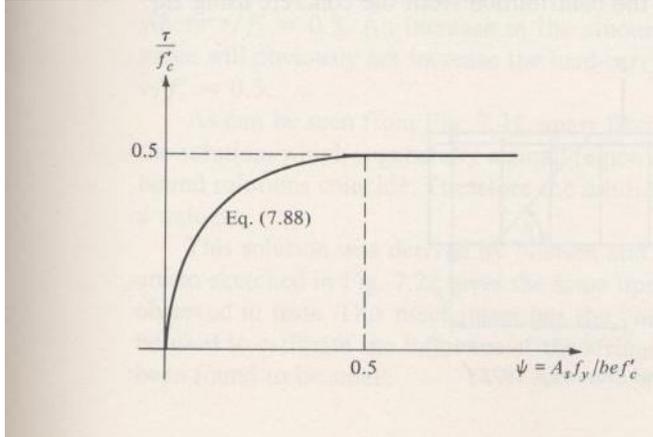


Figura 2.21: Solución de cota inferior de la máxima capacidad a cortante (extraída de Chen [8])

Debido al esfuerzo de compresión $\sigma_x = -\tau \cot g \vartheta$ (ecuación 2.56) en secciones normales del alma las fuerzas en los cordones T y C no son iguales a M/h , donde M es el momento flector. Por simples ecuaciones de momento, deberían tener los valores:

$$T = \frac{M}{h} + \frac{1}{2} Q \cot g \vartheta \quad C = \frac{M}{h} - \frac{1}{2} Q \cot g \vartheta \quad (2.60)$$

Por lo tanto aumenta T en comparación con una sección sometida sólo a flector, y C disminuye en la misma cantidad.

2.3.4.2. Solución de cota superior

Un simple campo de desplazamientos se muestra en la figura 2.22, donde la parte central I de la viga tiene un movimiento vertical descendente de valor u . Las partes II no se mueven. Por lo tanto se desarrolla una línea de rotura entre estas dos partes que forma un ángulo β con el eje horizontal.

La ecuación correspondiente a este mecanismo de fallo tiene la forma:

$$P_u = (\rho f_y b h \cot g \beta) u + 0.5 f_c' b (1 - \cos \beta) \frac{h}{\sin \beta} u \quad (2.61)$$

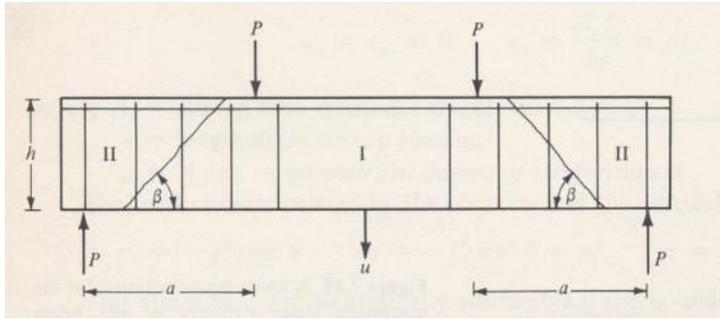


Figura 2.22: Un mecanismo de fallo (extraída de Chen [8])

El primer término es la contribución de los cercos que intersectan con la línea de rotura, y el segundo es la contribución del hormigón. La contribución de los cordones se desprecia en estos cálculos. De la ecuación anterior se obtiene una solución de cota superior

$$\frac{\tau}{f_c'} = \frac{P}{bhf_c'} = \psi \cot g\beta + 0.5(1 - \cos \beta) \frac{1}{\sin \beta} \quad (2.62)$$

Esta solución de cota superior presenta un mínimo cuando el ángulo β satisface la condición $\partial P / \partial \beta = 0$, o

$$\tan \beta = \frac{2\sqrt{\psi(1-\psi)}}{1-2\psi} \quad (2.63)$$

Lo que lleva a la solución

$$\frac{\tau}{f_c'} = \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad (2.64)$$

Esta solución es idéntica a la de la cota inferior.

Se puede demostrar que la ecuación 2.63 corresponde con

$$\beta = 2\vartheta \quad (2.65)$$

Donde ϑ se determina de la ecuación 2.57. A partir de consideraciones geométricas se deduce que el ángulo β debe estar en el intervalo

$$\frac{h}{a} \leq \tan \beta \leq \infty \quad (2.66)$$

Para que sea válida la ecuación 2.64

Introduciendo el límite inferior $\tan \beta = h/a$ en 2.62 se tiene

$$\frac{\tau}{f_c'} = 0.5 \left\{ \left[1 + (a/h)^2 \right]^{0.5} - a/h \right\} + \psi \frac{a}{h} \quad (2.67)$$

Que es la capacidad resistente a cortante cuando $\tan \vartheta$ no cumple la condición geométrica 2.66.

La línea recta que define la ecuación 2.67 es tangente al círculo en el punto donde el ángulo de inclinación $\tan \beta$ es igual a h/a . Esto se muestra en la figura 2.23. El valor $\beta = \pi/2$ corresponde con una línea de rotura vertical y se obtiene para $\psi = 0.5$, es decir, $\tau/f_c' = 0.5$.

Como se muestra en la figura 2.23, a excepción de la zona donde la ecuación 2.67 gobierna la solución, que es en general un rango pequeño de valores de ψ .

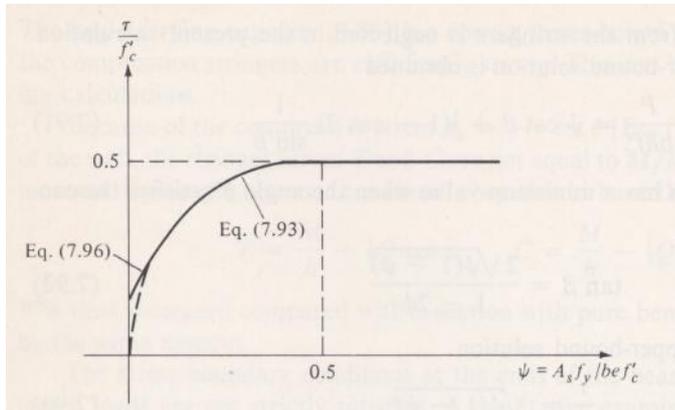


Figura 2.23: Soluciones de cot a inferior y superior para la resistencia a cortante de vigas simplemente apoyadas (extraída de Chen [8])

CAPÍTULO 3. BREVE EXPLICACIÓN DEL MODELO ACOPLADO TINSA

3.1 Introducción

En los últimos años se ha presenciado una evolución constante de los modelos de cálculo para el análisis no lineal de estructuras de hormigón armado y pretensado.

Cuando se trata de simular el comportamiento de estructuras completas o bien subestructuras más o menos grandes de estructuras reticuladas, los modelos basados en elementos finitos tipo barra son los más utilizados. Esto es debido a su versatilidad, su facilidad de uso, construcción del modelo numérico y precisión de los resultados obtenidos.

Los modelos con elementos finitos tipo barra que permiten cálculo no lineal- modelos donde existe un modelo seccional no lineal asociado a cada punto de integración del elemento viga-, se pueden clasificar en dos tipos. Los primeros son aquellos que se basan en rótulos plásticos, concentrando toda la no linealidad en unas pocas secciones y manteniéndose en régimen elástico en el resto de la estructura. La otra clase de modelos son los llamados modelos no lineales de inelasticidad distribuida, que presentan mayor precisión y posibilidades de uso. Actualmente, los primeros son los más usados, y la mayoría de programas comerciales como SAP2000 [13] o ROBOT [16] son de este tipo. Sin embargo, los segundos tienen perspectivas de acabar desbancando a los primeros.

Las respuestas no lineales de este tipo de modelos dependen, básicamente, de la capacidad del modelo seccional de reproducir determinados efectos locales. En este sentido, el modelo seccional hace de ecuación constitutiva del elemento barra.

Los modelos, han ido evolucionando a lo largo de las últimas décadas. En un principio, aparecieron los llamados modelos de fibras, que discretizan la sección en elementos (fibras) y utilizan modelos de tensión – deformación uniaxial no lineal. Los resultados de estos modelos son buenos para solicitaciones a flexocompresión, y pueden realizar un análisis diferido. Los resultados, sin embargo, no se ajustan a la realidad cuando la pieza falla a cortante o torsión. El efecto de confinamiento del hormigón dentro de los estribos se debe de introducir artificialmente utilizando modelos tensodeformacionales diferentes dependiendo del grado de confinamiento de cada fibra.

Más adelante, fueron apareciendo modelos capaces de incluir el efecto de los esfuerzos cortantes, pero sólo en un plano. Inicialmente, se conocen

como modelos duales (Dual-section-analysis) porque requieren dos secciones transversales para calcular el cortante con el incremento de momento entre secciones; de esta manera, los elementos barra tenían dos tipos de puntos de Gauss: los de flexión y los de cortante, dispuestos alternativamente (Vecchio y Collins [23] y [24]).

Seguidamente, se fueron desarrollando modelos seccionales para flexocompresión y cortante en una sola sección. En este tipo de modelo, el cortante es calculado mediante equilibrio diferencial en lugar de utilizar dos secciones diferentes. El problema de este tipo de modelos es que siguen siendo planos y no permiten describir correctamente el comportamiento de secciones sometidas a cortante o flexión esviada. Por tanto, sólo permite el análisis en secciones simétricas respecto el plano de carga, y el torsor tampoco puede ser analizado correctamente (ni, consecuentemente, la problemática global 3D flexión-torsión).

Recientemente, Bairán y Marí ([2] y [3]) propusieron un modelo capaz de reproducir la interacción total flexión-torsión, juntamente con los efectos propios de la geometría y la fisuración del hormigón en un modelo seccional basado en el equilibrio diferencial 3D, de manera que no requiere un análisis dual de secciones. El problema pasa a ser internamente hiperestático, de manera que también hace falta considerar, además, compatibilidad de deformaciones y trabajar con una determinada ley constitutiva, que permite tener en cuenta la distorsión y el alabeo de la sección. Como consecuencia, aparece una ventaja añadida: el efecto del confinamiento se obtiene directamente ya que se somete cada fibra a una ecuación constitutiva triaxial.

3.2 El modelo TINSA

El modelo acoplado TINSA, acrónimo de Total Interaction Sectional Analysis, (Bairán, [2], Bairán y Marí, [3]), es un modelo seccional aplicable a secciones cualquiera.

3.2.1. Respuesta seccional

La hipótesis fundamental del modelo es que los desplazamientos (y deformaciones) seccionales se pueden descomponer en dos campos de desplazamientos continuos. La primera componente (u^{ps}) es la que cumple con la hipótesis de sección plana de Navier-Bernoulli. La segunda (u^w), es la componente adicional que tiene en cuenta los fenómenos de alabeo y distorsión; u^w , es una magnitud vectorial porque no sólo recoge el alabeo de la sección sino que también su posible cambio de forma (distorsión), como se observa en la figura 3.1.

$$u = u^{ps} + u^w \quad (3.1)$$

Así, para las deformaciones se tiene:

$$\varepsilon = \varepsilon^{ps} + \varepsilon^w \quad (3.2)$$

con $\varepsilon^{ps} = [\varepsilon_x^{ps} \varepsilon_y^{ps} \varepsilon_z^{ps} \gamma_{xy}^{ps} \gamma_{xz}^{ps} \gamma_{yz}^{ps}]^T$ i $\varepsilon^w = [\varepsilon_x^w \varepsilon_y^w \varepsilon_z^w \gamma_{xy}^w \gamma_{xz}^w \gamma_{yz}^w]^T$

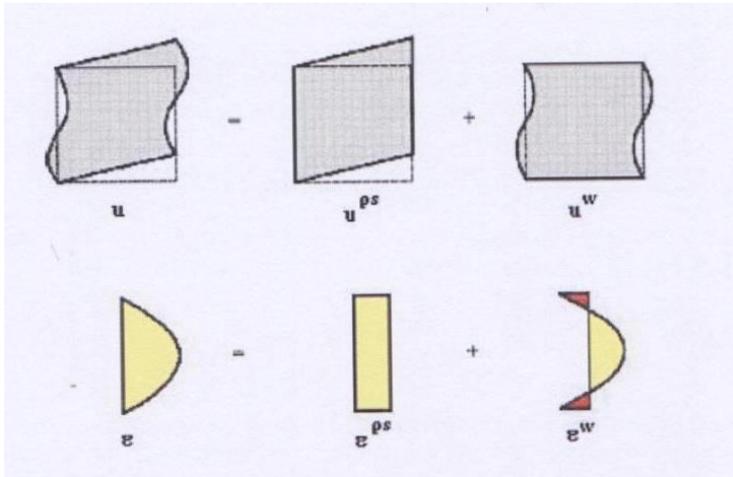


Fig.3.1: Superposición de desplazamientos y deformaciones (extraída de Bairán y Marí [3])

Es posible relacionar ε^{ps} con el vector tradicional de deformaciones generalizadas $\varepsilon_s^* = [\varepsilon_0 \phi_x \phi_y \phi_z]^T$:

$$\varepsilon^{ps} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & z - z_0 & -(y - y_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(z - z_0) & 0 & 0 \\ 0 & y - y_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N^{ps}} \cdot \varepsilon_s^* \quad (3.3)$$

Por otra parte, la relación entre ε^w y las deformaciones generalizadas ε_s^* no es tan inmediata si no se quiere imponer una condición cinemática de distribución de deformaciones. Ésta, se deduce a partir del equilibrio interno de una rebanada diferencial de una viga (de una sección transversal). El procedimiento seguido se describe a continuación.

La ecuación de Cauchy (o de equilibrio) a falta de fuerzas másicas establece que:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (3.4)$$

se descompone en dos operadores, uno conteniendo las derivadas a lo largo de la directriz de la pieza y el otro, con las derivadas contenidas dentro de la sección

$$\nabla_x \cdot \sigma + \nabla_\Omega \cdot \sigma = 0 \quad \text{donde } \nabla_x \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \nabla_\Omega \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) se transforma en su forma débil multiplicando por una función de peso arbitraria u^{w*} , e integrando en un dominio contenido en la sección de estudio. Posteriormente, una integración por partes es realizada

en el miembro con ∇_{Ω} , y si simplificamos el término correspondiente al contorno de Dirichlet donde no hay tracciones (t_{Γ}) aplicadas, se obtiene

$$g = \int_{\Omega} u^{w*} \cdot \nabla_x \cdot \sigma d\Omega + \int_{T_N} u^{w*} \cdot t_{\Gamma} dT - \int_{\Omega} \nabla_{\Omega} u^{w*} \cdot \sigma d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Siguiendo una estrategia incremental, ésta expresión es linealizada con el método de Newton-Raphson, de manera que si se usa el punto para denotar incrementos, se tiene

$$g \cong g_0 + g = 0$$

$$g = \int_{\Omega} u^{w*} \cdot \nabla_x \cdot \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \nabla_{\Omega} u^{w*} \cdot \sigma d\Omega \quad (3.7)$$

Con ésta última expresión, las cuatro extras que se obtienen de considerar que los movimientos de sólido rígido no interfieren en el estado tensional y las relaciones para pequeños incrementos

$$\sigma^{ps} = D \cdot \varepsilon^{ps}$$

$$\sigma^w = D \cdot \varepsilon^w \quad (3.8)$$

$$\sigma = \sigma^{ps} + \sigma^w$$

donde $D = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ es la matriz constitutiva del material.

se puede llegar a escribir la expresión que se buscaba, escrita más abajo. Para hacerlo, es más sencilla si se considera que las componentes de alabeo y distorsión son constantes a lo largo de la directriz de la barra. De esta manera, se obvia la torsión de alabeo y las tensiones normales debidas al alabeo o la distorsión.

$$K_{w\xi} \cdot \xi^* + K_{ww} \cdot d^w = g_0 \quad (3.9)$$

Siendo $K_{w\xi}$ y K_{ww} dos operadores matriciales que se calculan con la integración numérica de otros operadores matriciales, d_w es el vector con los valores nodales de u^w y ξ^* es un nuevo vector de ocho componentes que recoge las cuatro deformaciones generalizadas de la sección y sus derivadas a lo largo de la directriz de la viga. Si con un ' se denota esta derivada,

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_s^* \\ \varepsilon_s^{*'} \end{pmatrix} = (\varepsilon_0 \phi_x \phi_y \phi_z \varepsilon_0' \phi_x' \phi_y' \phi_z') \quad (3.10)$$

La ecuación (4.5) es usada en un proceso iterativo. Una vez convergida en un estado determinado, puede escribirse como:

$$d^w = \underbrace{K_{ww}^{-1} \cdot K_{w\xi}}_{=A} \cdot \xi^* \quad (3.11)$$

donde se observa que la matriz de distorsión A contiene las funciones de forma del campo de distorsiones.

Finalmente, con la igualdad del trabajo virtual generado por un incremento en un campo de deformaciones compatible con el trabajo virtual

generado por el incremento de esfuerzos generalizados actuantes en la sección, se puede obtener una relación entre ξ^* (que recoge las cuatro deformaciones generalizadas de la sección y sus derivadas) y los esfuerzos generalizados que genera, σ_ξ :

$$\sigma_\xi = K^* \cdot \xi^* \quad (3.12)$$

Se observa que esta relación arrastra 8 grados de libertad, así que esta matriz de rigidez no se podría implementar en ningún modelo de barras, donde los grados de libertad adicionales son 6: las cuatro primeras componentes de ξ^* y dos deformaciones en cortante. Como el modelo se debe poder implementar dentro de otros modelos con formulación tradicional, hace falta reducir dos de los grados de libertad necesarios y posteriormente calcular las deformaciones a cortante a partir de las deformaciones ya conocidas. El primer paso se debe hacer suponiendo que el axil y el momento torsor de la pieza se mantienen constantes a lo largo de su directriz, ya que es necesario eliminar dos grados de libertad. De esta forma, los dos vectores se pueden relacionar con una matriz X :

$$\xi^* = X \cdot \xi \quad (3.13)$$

El cálculo de las deformaciones de cortante, sin imponer ninguna forma, se consigue a través de consideraciones energéticas imponiendo la compatibilidad entre ϕ_x y las deformaciones a cortante. Estas consideraciones proporcionan la matriz de relación Ω :

$$\xi = \Omega \cdot \varepsilon_s \quad (3.14)$$

Con estas dos últimas relaciones, ya se puede escribir la matriz de rigidez de la sección con dos vectores generalizados tradicionales:

$$\sigma_s = K_s \cdot \varepsilon_s \quad (3.15)$$

$$\text{donde } K_s = \Omega^T \cdot X^T \cdot K^* \cdot X \cdot \Omega$$

3.2.2. Modelo constitutivo

Cualquier modelo constitutivo 3D puede ser aplicado al modelo TINSA. Actualmente, se usa la superficie de rotura de William-Warnke. La ley constitutiva que el modelo utiliza se basa, por el comportamiento a compresión, en la teoría modificada del campo de compresión adaptada convenientemente para aceptar cargas cíclicas. La descarga en compresión es efectuada por una rama plástica. Respecto al comportamiento a tracción, se utiliza un modelo de daño con descargas a tracción lineales al origen (Cervenka, [7]). Esquemas de estas relaciones pueden verse en la figura 3.2.

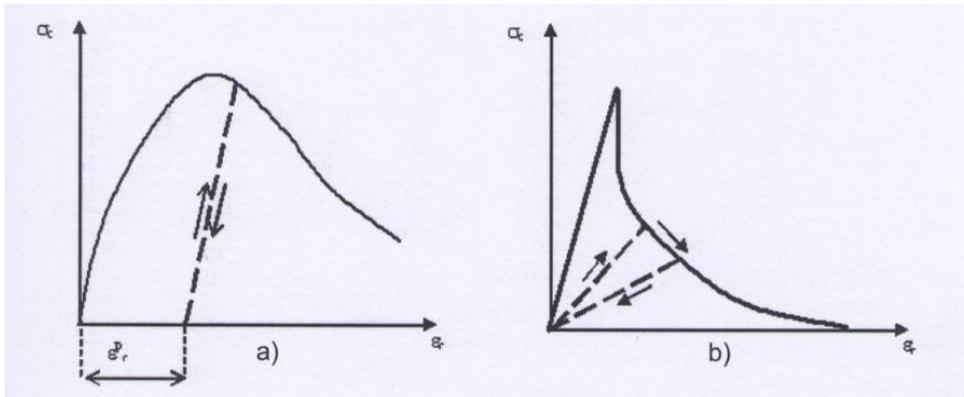


Fig. 3.2: Relaciones tensión-deformación para cargas y descargas a) en compresión b) en tracción (extraída de Bairán [2])

3.2.3. Biblioteca de elementos seccionales

Los elementos finitos utilizados en la discretización son de 3 tipos (figura 3.3). Los que representan el hormigón de la sección son cuadriláteros, de 4 nodos; las funciones de interpolación son bilineales y la cuadratura usada es de Gauss-Lagrange, con 4 puntos de integración en cada elemento. Por otra parte, también existen elementos unidimensionales para representar los cercos; tienen dos nodos, dos puntos de Gauss y las funciones se interpolan con funciones de forma lineales. Finalmente, existen también elementos puntuales para la representación de barras de acero perpendiculares a la sección.

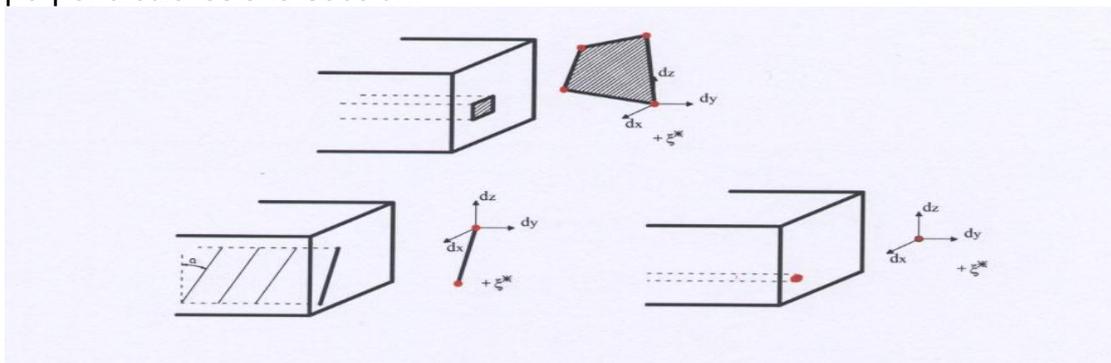


Fig. 3.3: Tipos de elementos finitos utilizados (extraída de Bairán [2])

3.2.4. Estrategia del análisis no lineal

Los pasos de carga se aplican según una estrategia incremental con la estructura típica del método Newton-Raphson. Así, se consigue una convergencia rápida y se resigue toda la evolución de los estados de la sección a medida que esta se va cargando.

Actualmente el método dispone de algunas técnicas para facilitar la convergencia tales como el line search o el control de desplazamientos.

3.2.5. Valoración final

El modelo ha estado validado con la comparación de los resultados de ciertos problemas de solución conocida con los que calcula el modelo, tanto en materiales isótropos como anisótropos. Las comparaciones son muy satisfactorias ya que las respuestas conocidas y las que ofrecen el modelo presentan un muy buen ajuste.

El modelo mantiene la estructura usual los grados de libertad tradicional (deformaciones generalizadas de las secciones) y las relaciona con los esfuerzos generalizados tradicionales con una matriz de rigidez de las sección. Esto permite utilizar el modelo directamente en un elemento barra en 3D como respuesta seccional de un punto de integración. Se trata de una ventaja importante de TINSÁ ya que permite ser implementado dentro de otros paquetes de análisis estructural.

A modo de ejemplo de las posibilidades del modelo TINSÁ se muestra la figura 3.4, en la que aparece el flujo de tensiones tangenciales en una sección rectangular sometida a un momento torsor, antes de fisurar y con sección fisurada.

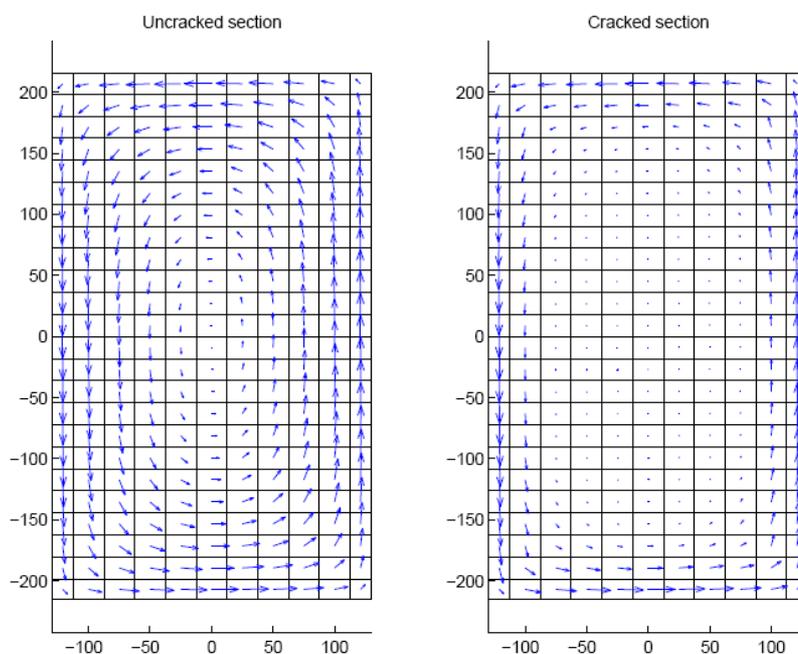


Fig. 3.4: Flujo de tensiones tangenciales: a) Sección no fisurada, b) Sección fisurada (extraída de Bairán [2])

Es bien sabido que el mecanismo de resistencia a torsión de secciones de hormigón armado es notablemente distinto cuando se comparan las secciones antes y después de fisurar. Antes de fisurar el hormigón se puede considerar como un material elástico y homogéneo. En esta situación, ni la armadura transversal ni la longitudinal colaboran con la resistencia a torsión de la sección. Una vez fisurado el hormigón se desarrolla un nuevo mecanismo resistente donde las armaduras longitudinales y transversales juegan un papel determinante. La mayoría de las normativas indican que una sección fisurada de hormigón armado sometida a torsión pura puede asimilarse a una sección de paed delgada, pero la determinación del

espesor equivalente de dicha sección no es trivial. En el caso de la EHE [10] se proponen expresiones empíricas para calcular los valores máximos y mínimos del espesor equivalente, pero es responsabilidad del proyectista elegir el valor final.

El modelo TINSA es capaz de reproducir el fenómeno de la sección eficaz de paredes delgadas automáticamente sin imponer más hipótesis que la resistencia a tracción del hormigón (mediante el apropiado modelo constitutivo) y el resto de hipótesis inherentes del modelo descritas en la tesis doctoral de Bairán [2].

CAPÍTULO 4. ESTUDIO PARAMÉTRICO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A ESFUERZOS COMBINADOS DE CORTANTE, FLEXIÓN Y AXIL

4.1. Introducción

En este apartado se realiza un estudio paramétrico del comportamiento a cortante de una sección rectangular de hormigón armado sometida simultáneamente a un momento flector, esfuerzo axil y esfuerzo cortante. A tal fin se ha estudiado un total de 189 casos mediante el programa de análisis no lineal TINSA. El principal objetivo de este capítulo es el de comparar los resultados obtenidos y los valores propuestos por la actual instrucción española del hormigón EHE, así como proponer modificaciones que permitan ajustar mejor el modelo.

Las características geométricas de la sección de estudio se muestran en la siguiente figura, y son:

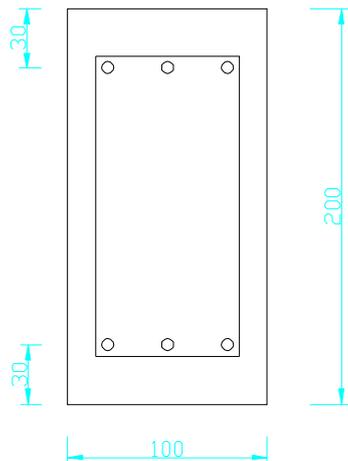


Fig. 4.1: Características geométricas de la sección.

Ancho de la sección $b= 100\text{mm}$.

Canto de la sección $h= 200\text{mm}$.

Área de la sección $A_c= 20000\text{mm}^2$.

Canto útil $d= 170\text{mm}$, definido como la distancia entre el centro de gravedad de las armaduras y la fibra de la sección más alejada de éstas.

$d'=30\text{mm}$, es la distancia entre la fibra superior y el centro de gravedad de las armaduras de compresión.

Con estas dimensiones reducidas se pretende reducir la impotancia del llamado efecto tamaño, que en la vigente EHE toma la expresión (d en mm):

$$\xi = \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (4.1)$$

Las variables que se han tenido en cuenta se definen a continuación:

- f_{ck} : resistencia característica del hormigón.
- f_{yk} : límite elástico de las armaduras pasivas, $f_{yk}=500\text{MPa}$.
- MV : es el brazo, definido como la relación entre el momento y el cortante. Representa la importancia de los esfuerzos de flexión respecto a los de corte. Si se toma el sencillo ejemplo de una viga empotrada en voladizo, el brazo sería la distancia entre la base de la viga y el punto de aplicación de la fuerza. En este apartado, $MV=2d$.
- v : axil adimensional. N es el axil de cálculo (compresiones positivas).

$$v = \frac{N}{b \cdot d \cdot f_{ck}} \quad (4.2)$$

- τ : cortante adimensional. V es el cortante de cálculo.

$$\tau = \frac{V}{f_{ck} \cdot b \cdot d} \quad (4.3)$$

- ρ : cuantía de armadura longitudinal. A_s es el área de armadura traccionada o comprimida.

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (4.4)$$

- $A_{st}/A_{st,min}$: es la relación entre el área de armadura transversal de la sección y el valor mínimo de dicha área especificado en la EHE, que para cercos verticales es:

$$A_{st,min} = \frac{0.02 \cdot f_{ck} \cdot b}{f_{yk}} \quad (4.5)$$

Los 189 casos estudiados se obtienen combinando los siguientes valores de la resistencia característica, el axil adimensional y las cuantías de armadura longitudinal y transversal:

f_{ck} : 30, 60 y 90 MPa.

v : 0; 0.25; 0.50; 0.75; -0.05; -0.075 y -0.1

ρ : 0.005; 0.01 y 0.015

$A_{st}/A_{st,min}$: 0; 1.5 y 3

4.2. Curvas esfuerzo-deformación

Para conocer los efectos de la interacción de esfuerzos en todos los casos antes planteados, se ha procedido a analizar las secciones bajo un proceso incremental de las cargas.

Se ha obtenido en primer lugar las relaciones entre esfuerzo y deformación directamente asociadas (Cortante – deformación por cortante y Momento – Curvatura) sin interacción entre ambos, para los distintos niveles de esfuerzo axil citados en 4.1. En todos los casos la relación M/V empleada es de $2d$ por lo que el cortante aplicado debe considerarse como alto. Se ha optado por esta relación de esfuerzos para conseguir que la rotura sea fundamentalmente por cortante.

En un primer grupo se muestran parejas de resultados para un hormigón de $f_{ck} = 30MPa$

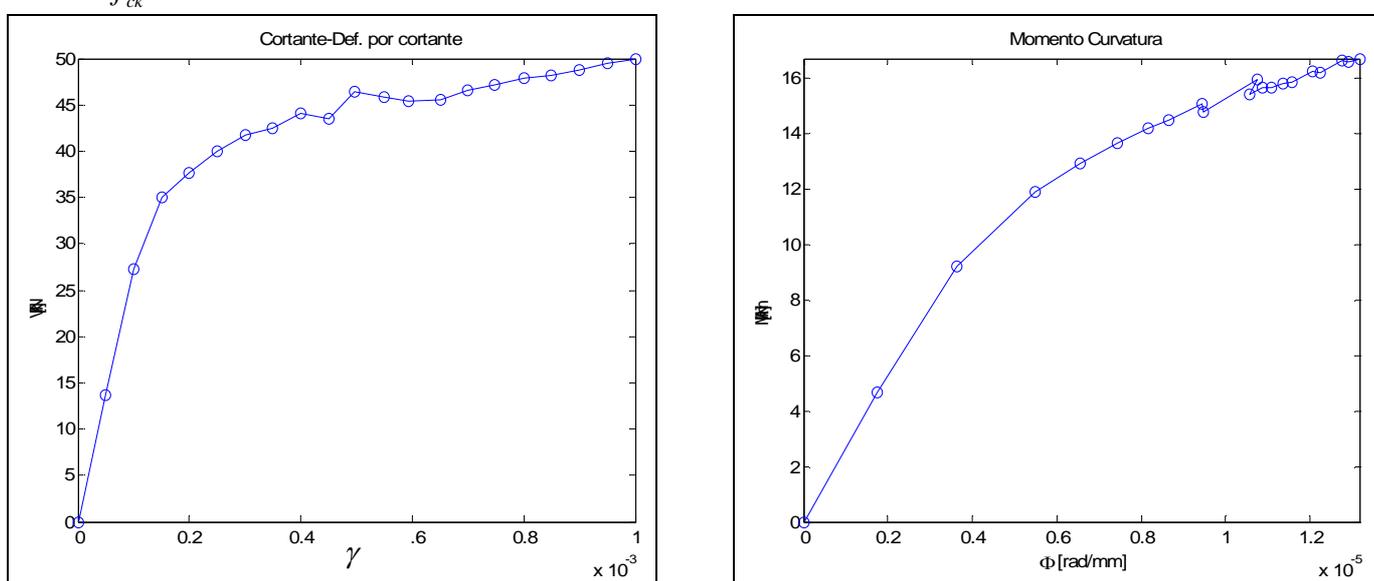


Fig. 4.2: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$; $V =0.25$.

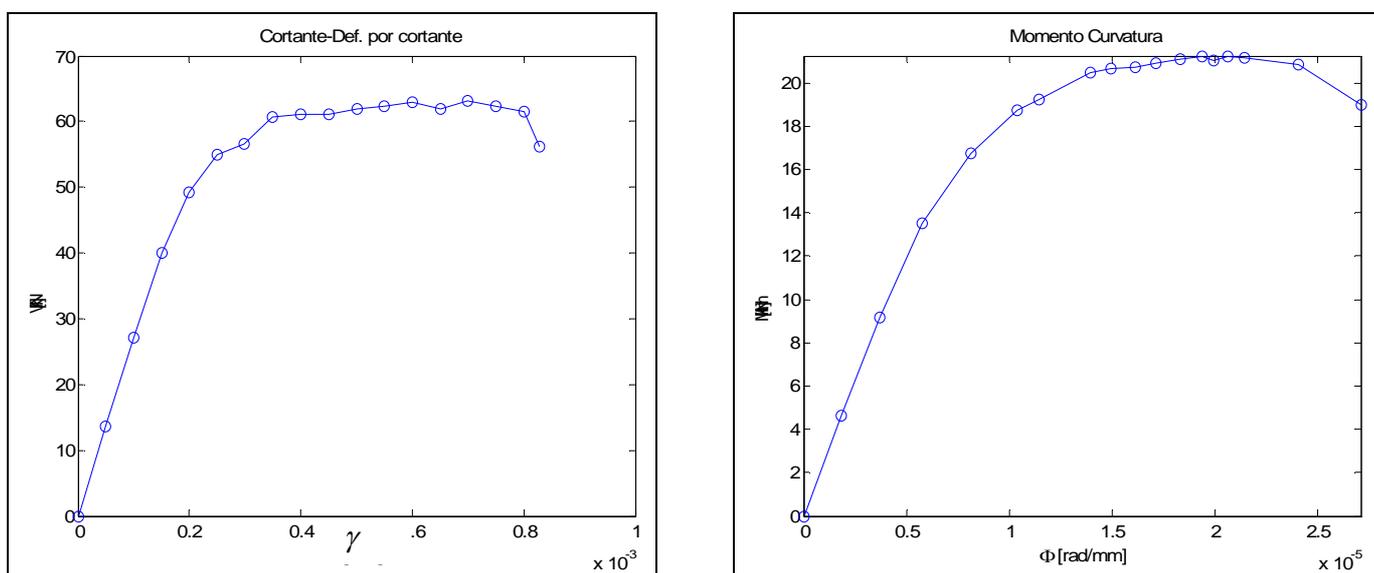


Fig. 4.3: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$; $V =0.5$.

En un segundo grupo se muestran algunos de los gráficos para un hormigón de $f_{ck} = 60MPa$

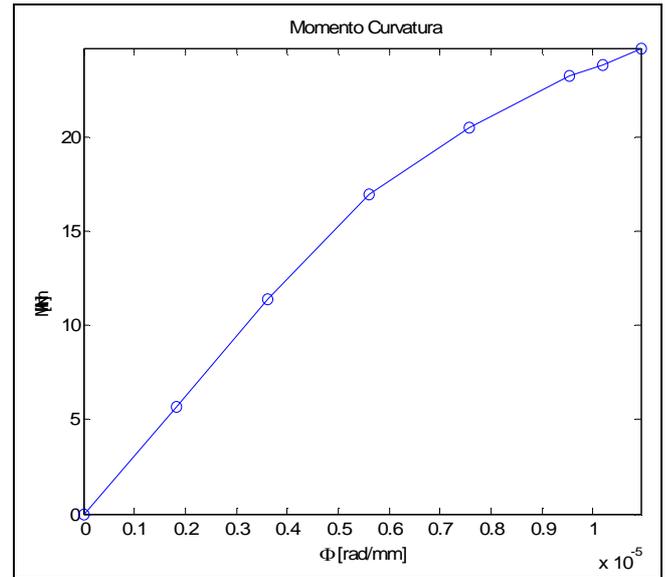
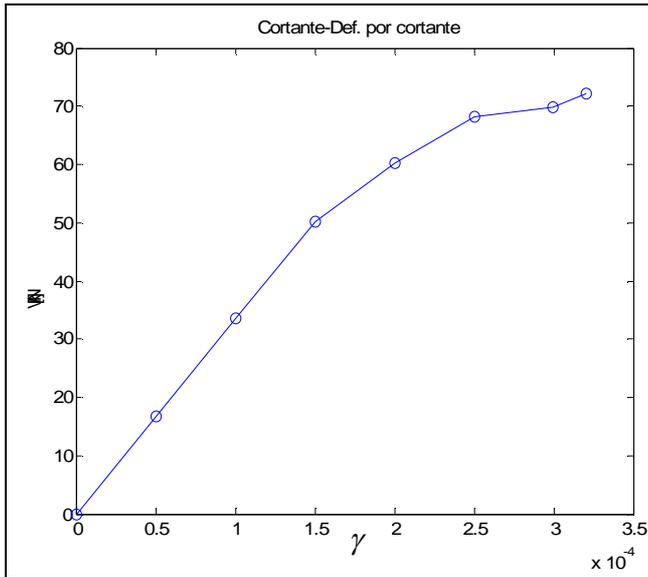


Fig. 4.4: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $f_{ck}=60$; $\rho =0.015$; $Ast/Astmin=1.5$; $V =0.25$.

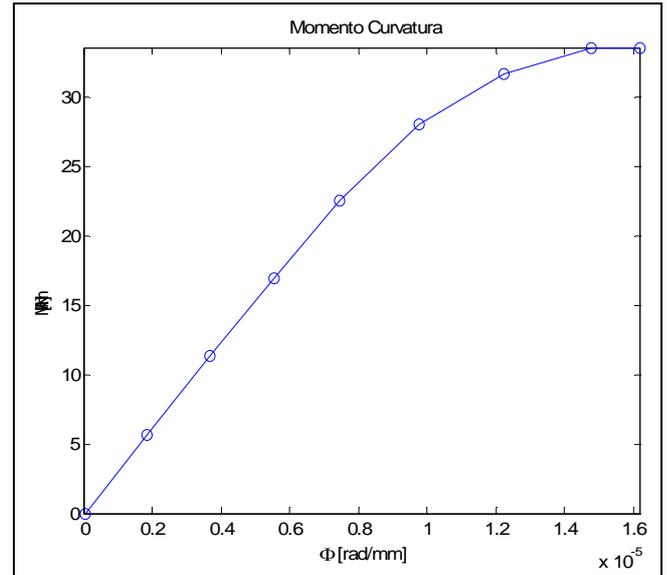
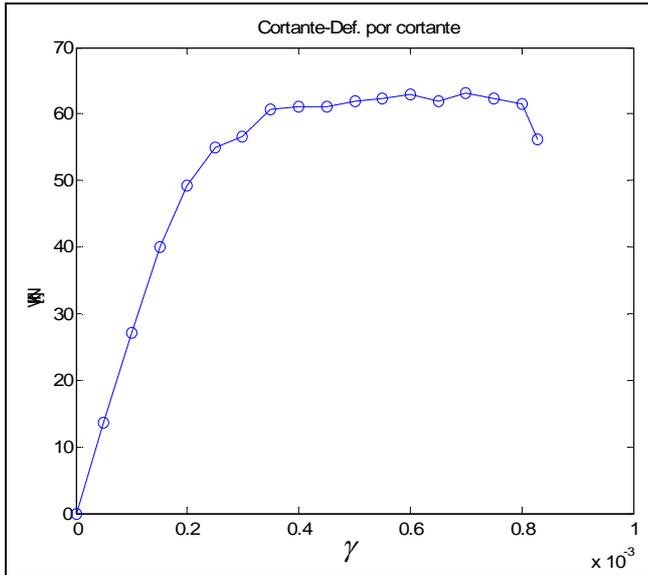


Fig.4.5: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $f_{ck}=60$; $\rho =0.015$; $Ast/Astmin=3$; $V =0.5$.

En este tercer grupo se muestran algunos resultados para el hormigón de $f_{ck} = 90MPa$

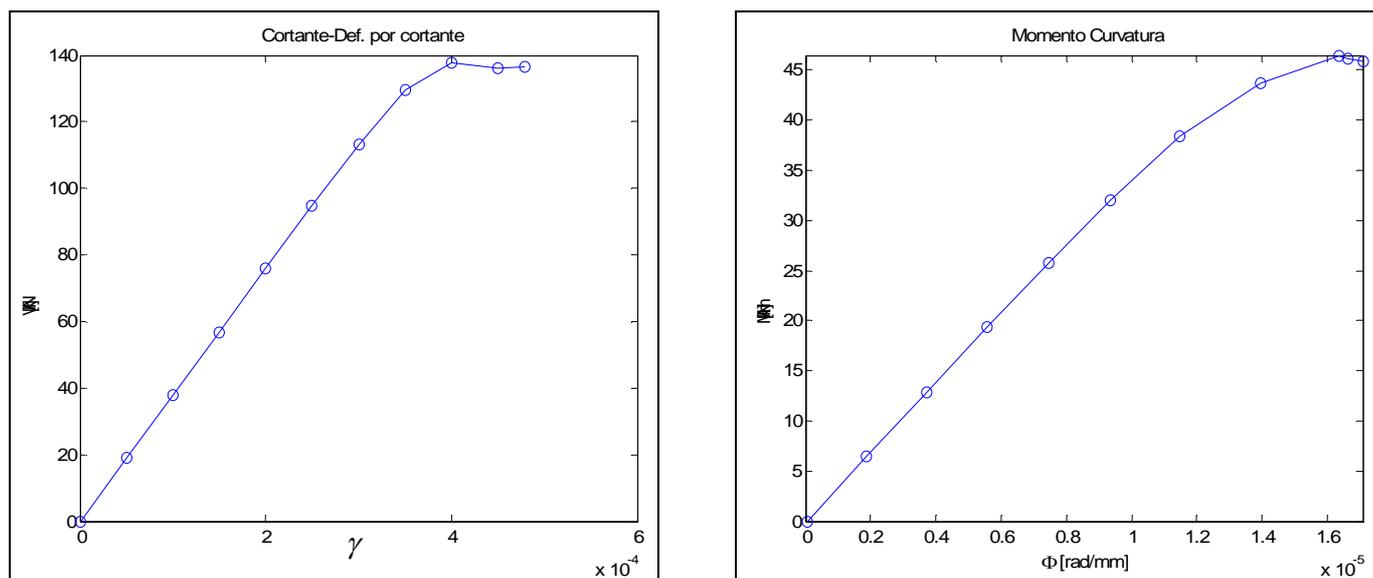


Fig. 4.6: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $f_{ck}=90$; $\rho = 0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$; $V = 0.5$.

En todos los gráficos se observa una primera rama elástica, donde el hormigón no ha todavía fisurado. Este primer tramo es mayor cuanto mayor es el axil aplicado en la sección, ya que en los primeros pasos de carga todas las fibras están comprimidas.

A pesar de que todos los casos mostrados arriba presentan rotura por cortante, se observa que a medida que disponemos de mayor cuantía de armadura transversal se obtiene una rama plástica mayor en la ley momento-curvatura. Esto viene motivado porque a mayor armadura transversal se obtiene una rotura a cortante más dúctil al tener más peso la contribución del acero a la resistencia de cortante (V_s). Al poder sostener el cortante máximo durante un rango mayor de deformaciones, el diagrama momento-curvatura puede mantenerse y se obtiene una global ductilidad mayor.

Por otro lado, se aprecia que el tipo de hormigón tiene un papel muy importante en la ductilidad final que se consigue. Como se aprecia en las figuras 4.3, 4.5 y 4.6, para hormigones ordinarios, de alta resistencia y de muy alta resistencia respectivamente y con la misma cuantía transversal, a medida que aumenta la resistencia del hormigón aumenta la fragilidad del diagrama cortante-deformación de cortante. Consecuentemente, dado que la falla principal es a cortante, esta fragilidad se transmite al diagrama momento-curvatura.

El que el modelo considere el esfuerzo cortante en el cálculo de los diagramas momento-curvatura, supone un comportamiento distinto de la sección, que se explica a continuación. En la figura 4.7 se muestran los diagramas momento-

curvatura obtenidos con TINSA en una sección bajo cuatro niveles de esfuerzo cortante distintos (a través de la relación $M/(Vd)$). De manera que cuanto menor es esta relación mayor es la importancia del cortante. Se observa que a medida que aumenta el esfuerzo cortante se alteran todas las propiedades no lineales: disminuyen los momentos de plastificación y rotura, así como la ductilidad, especialmente para $M/(Vd) \leq 3$. En la figura 4.8 se muestran dos curvas de interacción flexión-cortante de plastificación y de rotura: a medida que aumenta el esfuerzo cortante lo hace también la distancia entre las dos curvas.

El cortante afecta también a la rigidez, reduciéndola en la rama elástica pero aumentándola en la de plastificación, con lo que la curva presenta mayor endurecimiento. Este efecto se explica debido la influencia del campo diagonal de compresiones en la integración del momento flector.

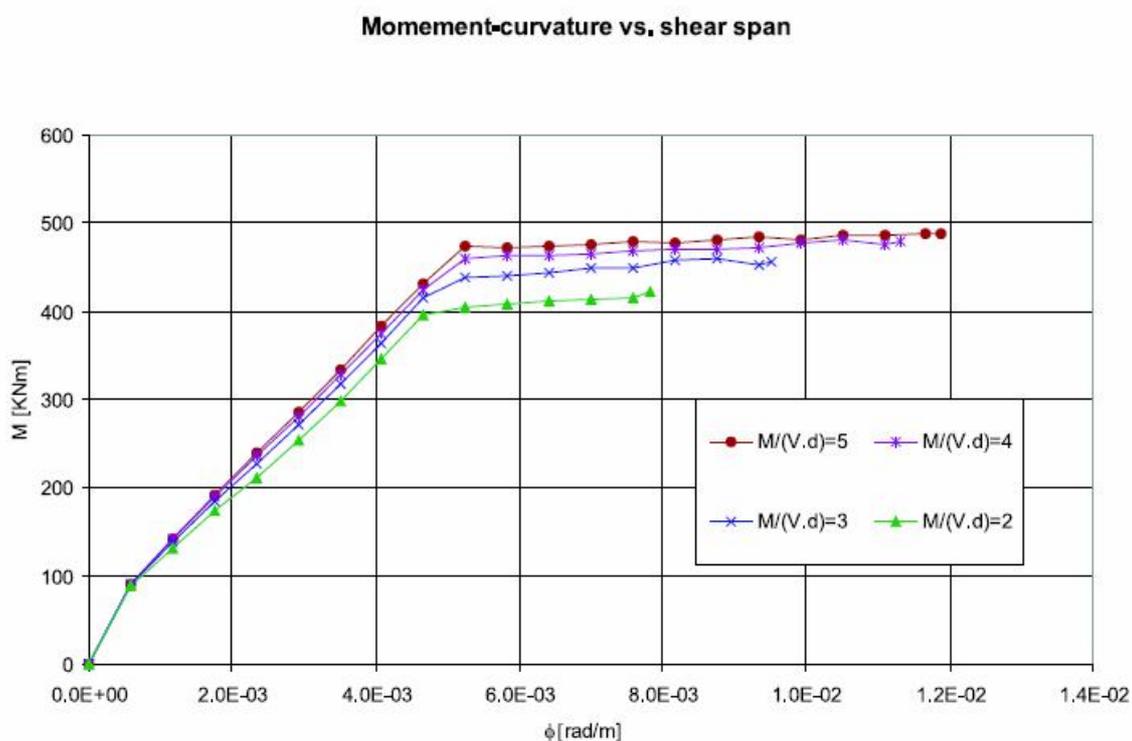


Fig. 4.7: Diagramas momento-curvatura para distintas relaciones $M/(Vd)$. (Bairán [2])

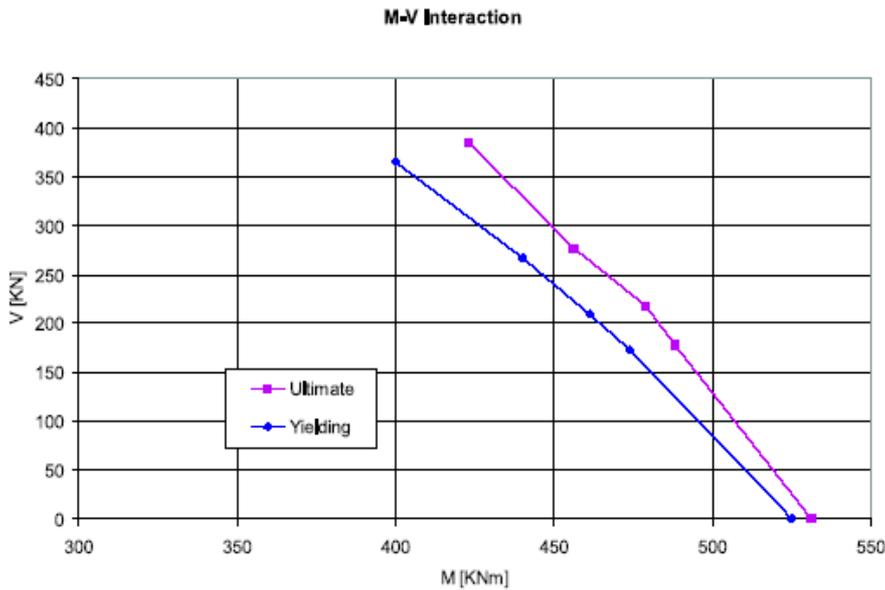


Fig. 4.8: Diagramas de interacción momento-cortante para cargas de plastificación y rotura. (Bairán [2])

4.3. Diagramas de tensiones normales en el hormigón

Se muestran a continuación algunos diagramas de tensiones normales representativos, en el eje de abscisas aparecen las tensiones normales, y en el de ordenadas la profundidad de la sección.

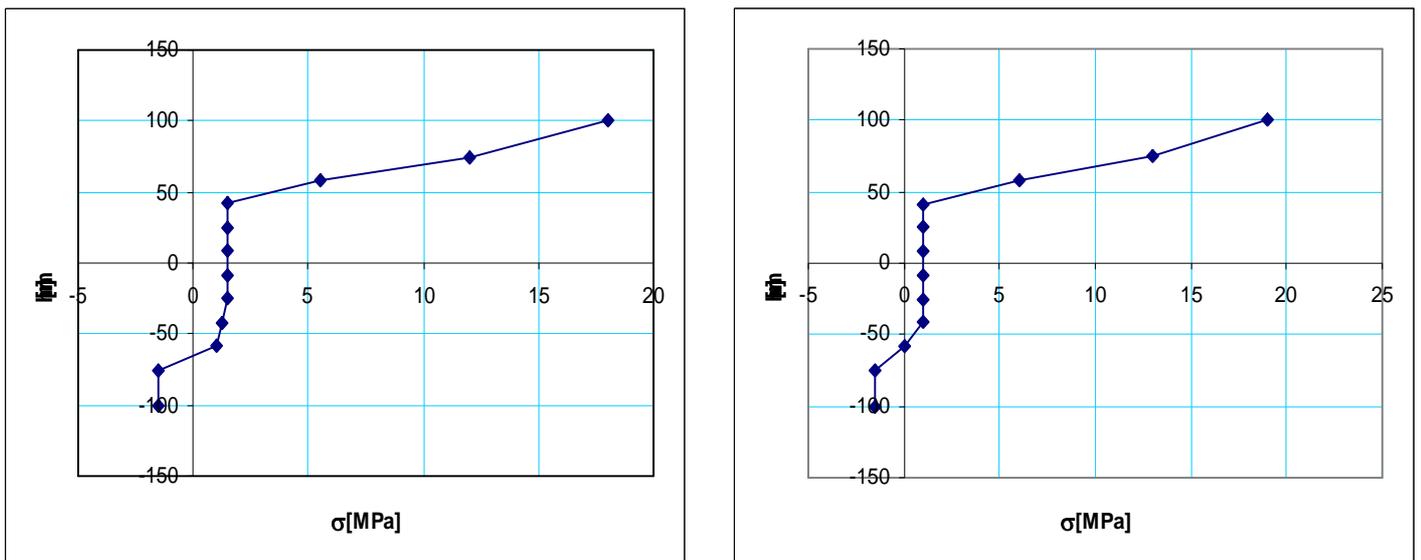


Fig. 4.9: Diagramas de tensiones normales (MPa) $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0$.

Como era de esperar, la distribución de tensiones normales en la sección es prácticamente la misma, aunque cambie la cuantía de armadura transversal, por lo tanto, para los axiles adimensionales de 0.25 y 0.50 se muestran solamente los gráficos para una cuantía de armadura transversal igual a 1.5 veces la mínima.

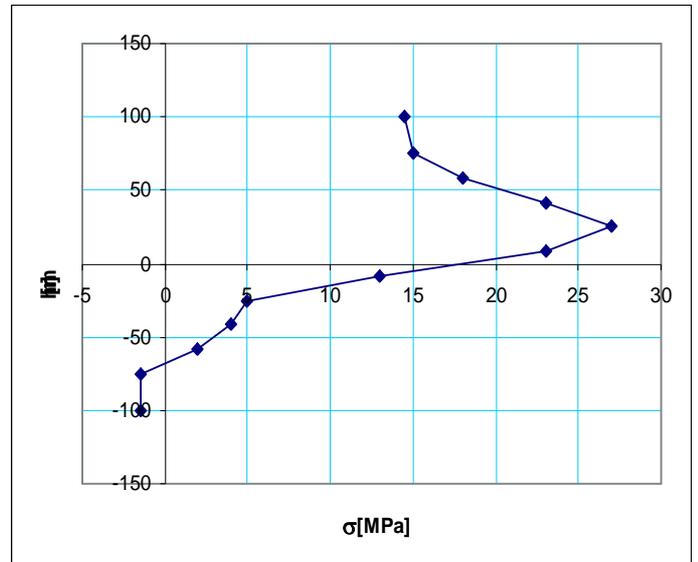
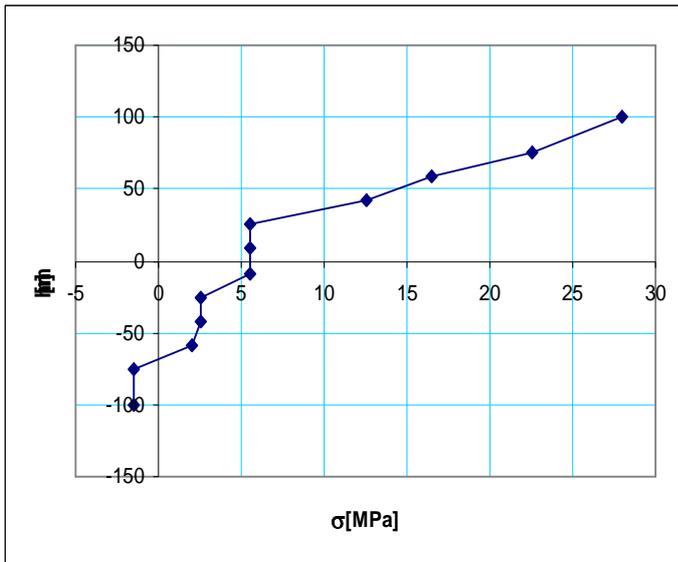


Fig. 4.10: Diagramas de tensiones normales (MPa) $f_{ck}=30$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$; $V=0.25$ (izda.), 0.5 (dcha.).

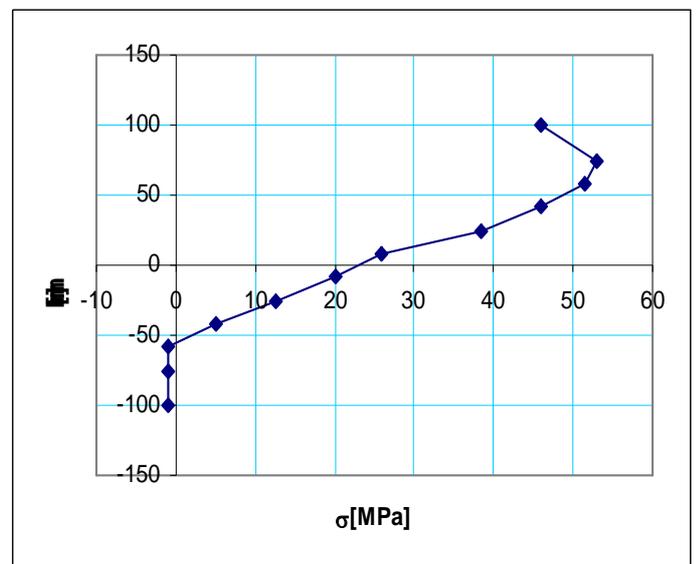
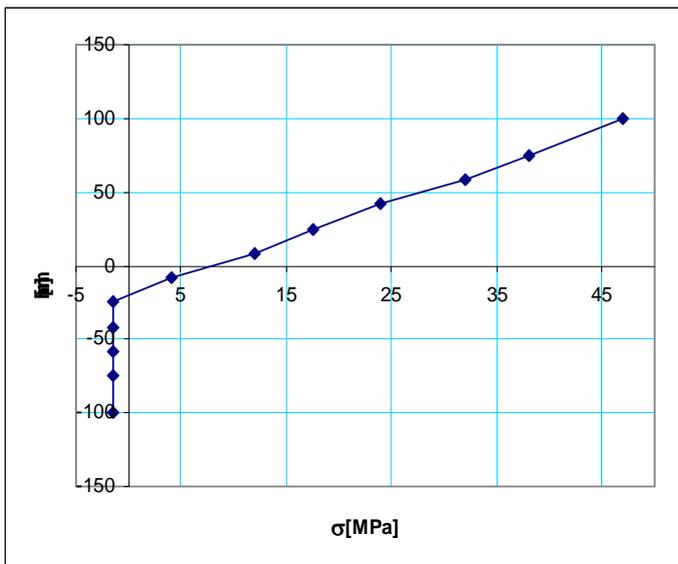


Fig. 4.11: Diagramas de tensiones normales (MPa) $f_{ck}=60$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$; $V=0.25$ (izda.), 0.5 (dcha.).

4.4. Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} en el hormigón y de tensiones normales en los cercos.

Se muestran a continuación algunos diagramas representativos de tensiones tangenciales τ_{xz} en el hormigón a lo largo de la altura de la sección. En el eje de abscisas aparecen las tensiones tangenciales y en el de ordenadas la profundidad de la sección.

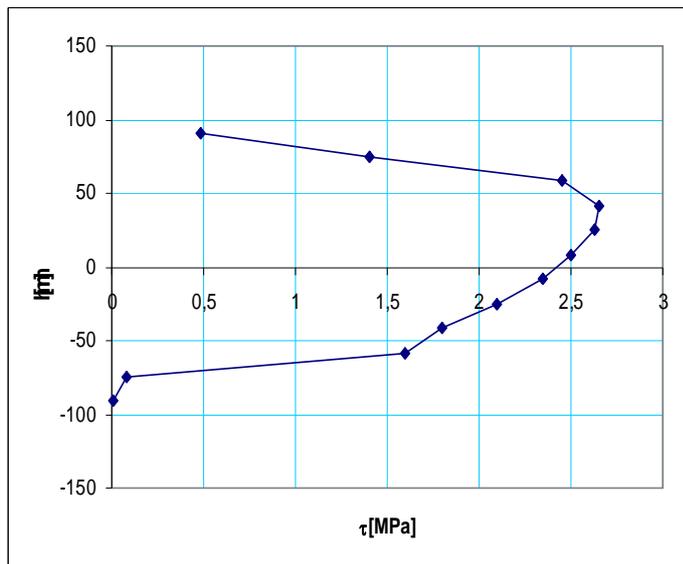
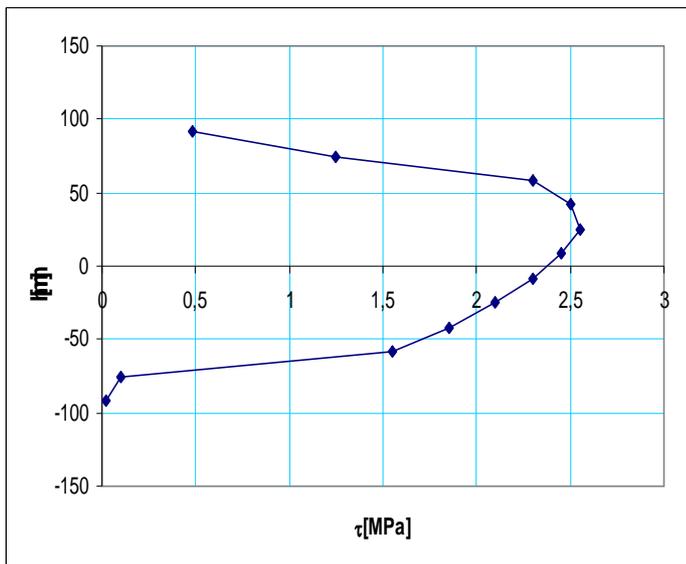


Fig. 4.12: Diagramas de tensiones tangenciales $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0$.

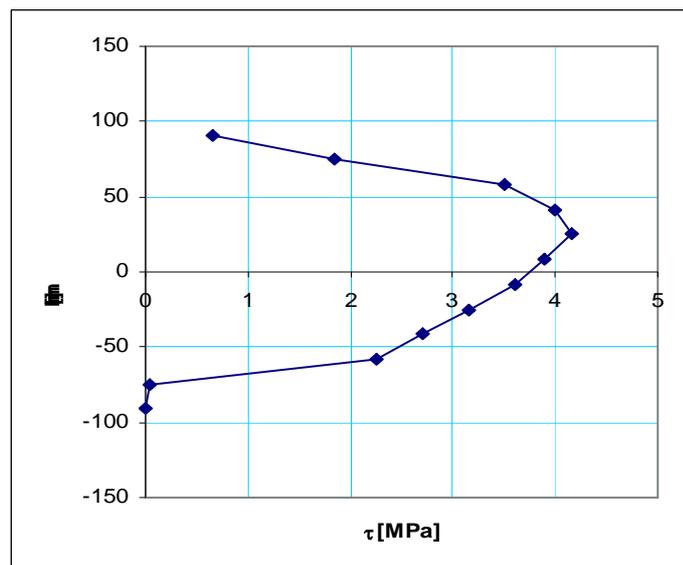
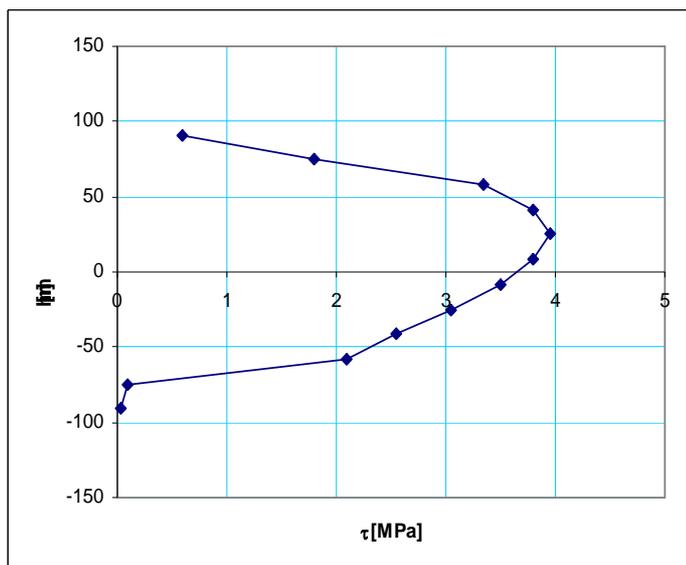


Fig. 4.13: Diagramas de tensiones tangenciales $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0.25$.

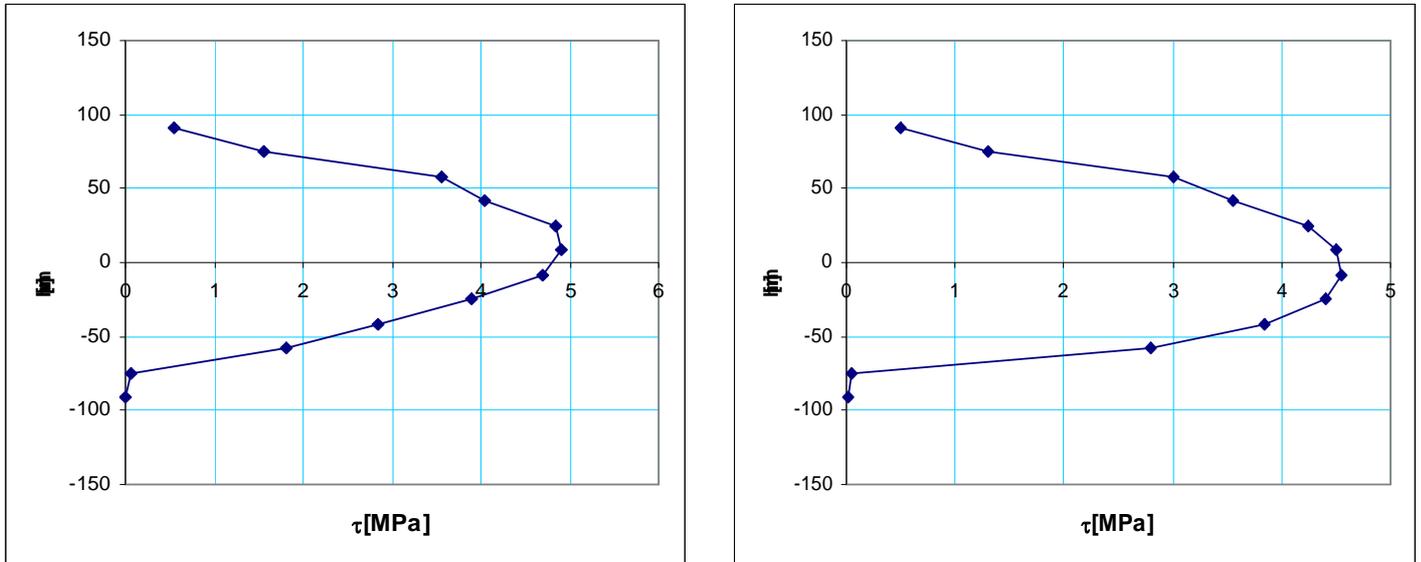


Fig. 4.14: Diagramas de tensiones tangenciales $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0.50$.

Se muestran a continuación los gráficos de tensiones normales en los cercos a lo largo de su profundidad.

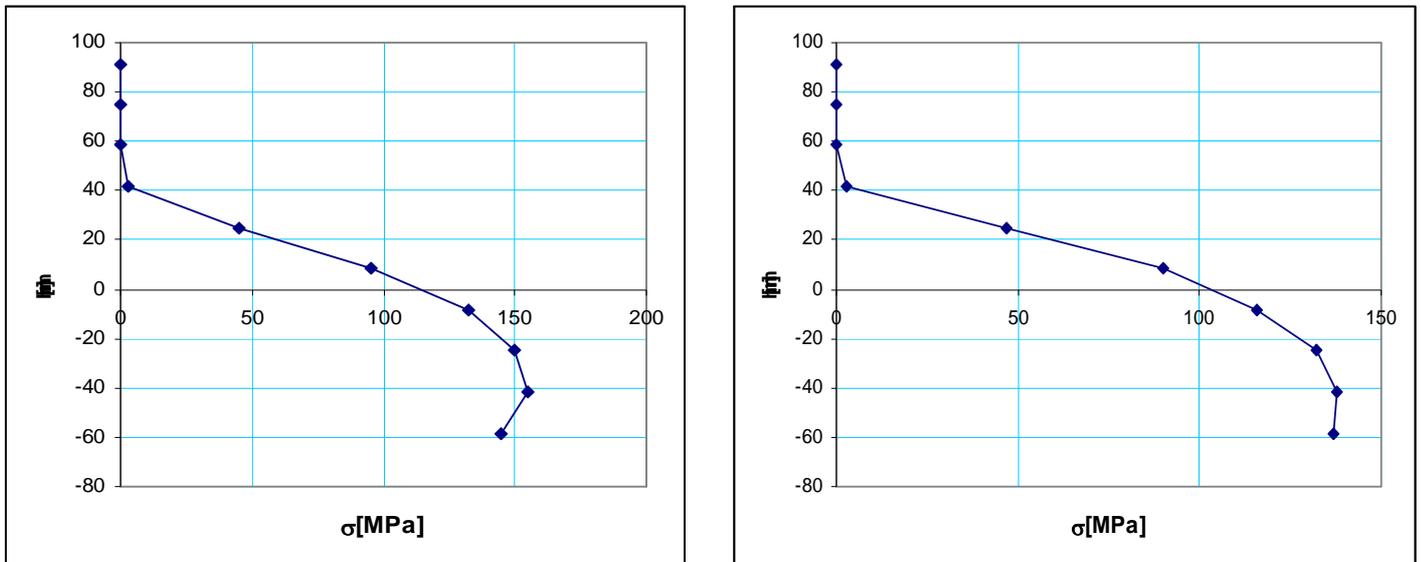


Fig. 4.15: Diagramas de tensiones en estribos $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0$.

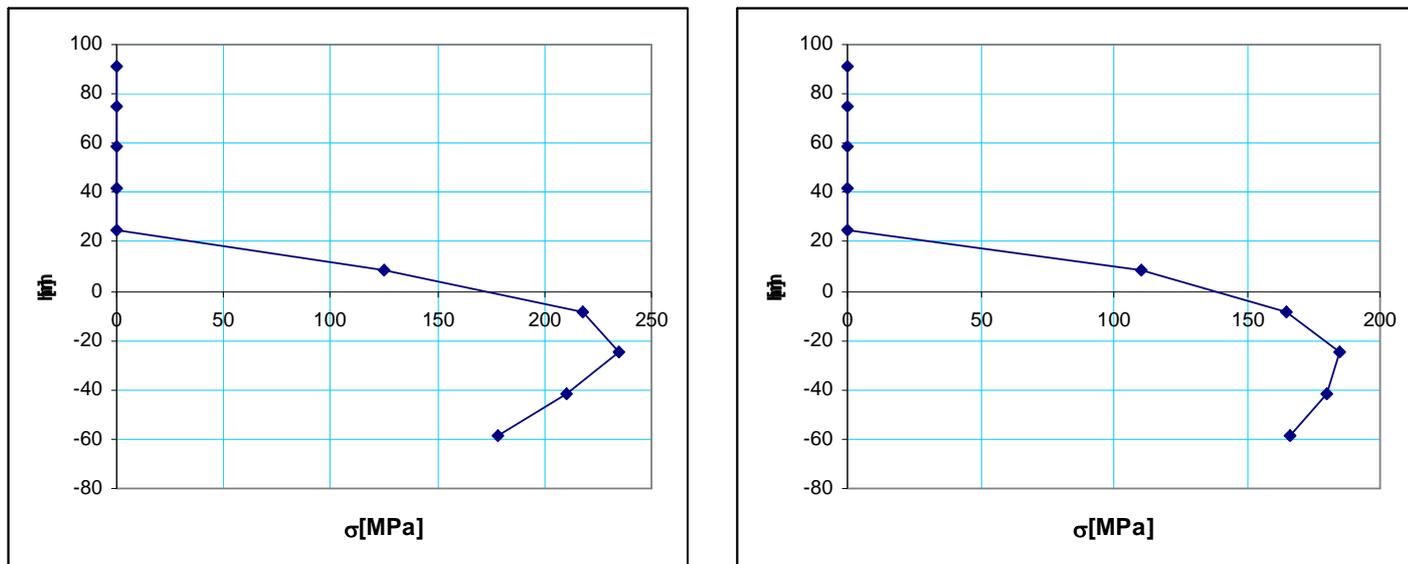


Fig. 4.16: Diagramas de tensiones en estribos $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0.25$.

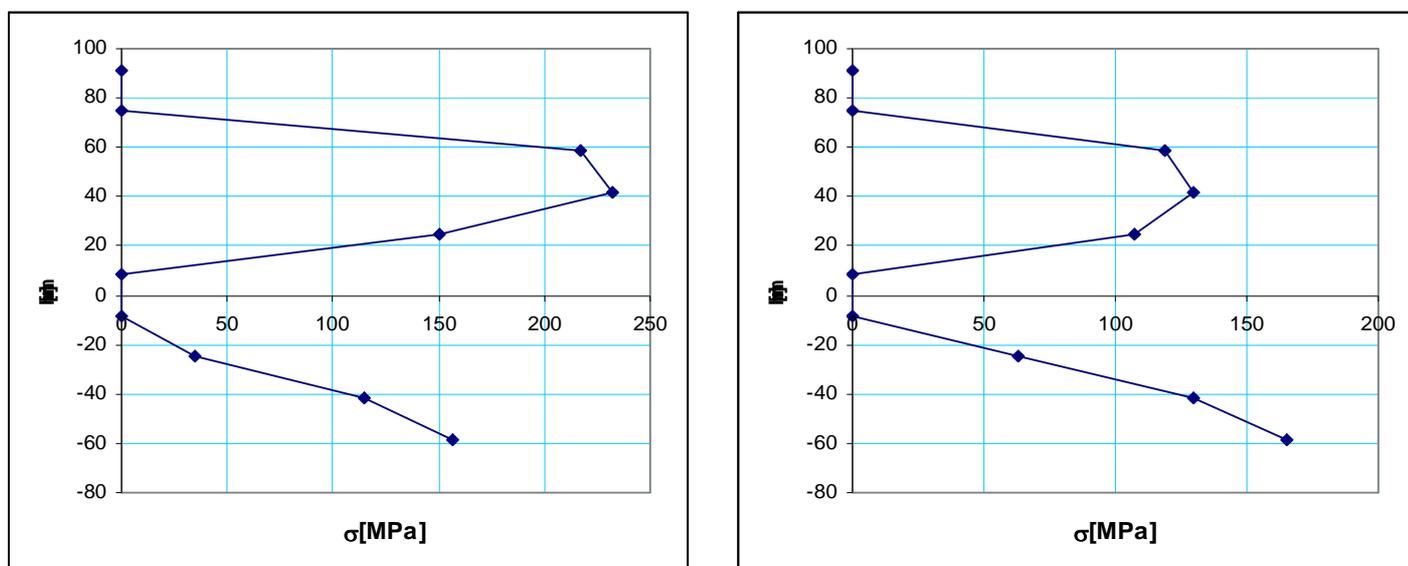


Fig. 4.17: Diagramas de tensiones en estribos $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$ (izda.), 3 (dcha.); $V =0.50$.

4.5. Análisis de la efectividad de la armadura transversal

En este apartado se pretende realizar un breve estudio sobre la efectividad de los cercos cuando actúa un esfuerzo axil sobre la sección en base a los resultados obtenidos con el modelo mostrados en los apartados anteriores.

En la figura 4.9, donde no hay axil aplicado en la sección, la distribución de tensiones normales en el hormigón que aparece es de alguna manera la predecible. En fase elástica, es decir, cuando el momento aplicado es tal que las tensiones en la fibra más traccionada del hormigón son menores que su

resistencia a tracción, el eje neutro coincidiría con el centro de gravedad de la sección. Esto es así al tratarse de flexión simple, y al ser la sección simétrica. Cuando tiene lugar la fisuración (porque aumenta el momento) asciende el eje neutro, es decir, se reduce la profundidad del bloque de compresiones.

En las figuras 4.10 y 4.11 los diagramas son bastante parecidos en lo que se refiere a su forma en valores relativos. Es decir, la profundidad del bloque de compresiones parece ser la misma, por lo que hasta el final de este apartado no se realizará ninguna distinción en función de la resistencia característica.

Se observa que, cuando actúa un axil sobre la sección (casos de $\nu=0.25$ y $\nu=0.5$) la distribución de tensiones en el hormigón resulta bastante distinta. Cuando no hay momento aplicado en la sección existe una distribución de compresiones uniforme sobre ésta. A medida que va aumentando el momento se van comprimiendo más las fibras superiores y se van primero descargando y luego traccionando las inferiores. En el caso en que no haya axil aplicado la sección agota para unas tensiones máximas en el hormigón del orden de los 18MPa, mientras que en el caso contrario se alcanzan tensiones del orden de los 25MPa (valores para $f_{ck}=30\text{MPa}$).

Cuando el momento es cero el eje neutro se halla en el infinito, al ir aumentando la sollicitación éste llega a la fibra inferior cuando las tensiones allí son nulas. Lo que sucede es que a medida que aumenta el axil menos se aleja la fibra neutra de la inferior, puesto que la sección agota antes al fallar el hormigón comprimido. Esto se traduce en que el bloque de compresiones tiene una profundidad mucho mayor.

Este fenómeno se observa también en los gráficos referentes a las tensiones tangenciales en el hormigón. En los primeros pasos de carga (antes de que haya fisuración) la distribución sería la misma que para un material elástico y lineal, es decir, una parábola con vértice en el centro de gravedad de la sección, la que predice la resistencia de materiales. Para los casos sin axil el vértice de la parábola se halla entre la fibra superior y el eje baricéntrico, porque como el hormigón fisurado no ayuda a resistir dicho vértice asciende. A medida que va aumentando el axil la altura del vértice va disminuyendo, puesto que aumenta la profundidad del bloque de compresiones. Nótese que para axiles elevados el vértice puede hallarse incluso por debajo del centro de gravedad de la sección.

La expresión que tiene en cuenta la aportación de la resistencia a cortante de la armadura transversal (V_{su}) es directamente proporcional a z según la instrucción EHE-99 [10] y en la gran mayoría de textos normativos, ya que se obtiene a partir del modelo de la celosía. Actualmente, dicha instrucción especifica un valor de $z=0.9\cdot d$ a falta de cálculos más precisos. Esto parece bastante sensato cuando no actúa axil sobre la sección, pero al ser z la distancia entre la resultante del bloque de compresiones y la armadura traccionada, parece obvio que su valor vaya disminuyendo a medida que aumenta el axil de compresión que actúa sobre la sección, puesto que aumenta la profundidad del bloque de compresiones.

De modo que el texto normativo que aplica actualmente en nuestro país está sobreestimando la capacidad de la armadura transversal para resistir cortante en este caso. Además, hay que tener en cuenta que los cercos sólo trabajan cuando hay una franja de hormigón traccionado, por lo que para valores del axil tales que todas las fibras de la sección estén siempre comprimidas no se puede contar con la contribución de la armadura transversal a la resistencia a cortante.

En las siguientes páginas se intenta cuantificar este problema, que en este párrafo se ha tratado cualitativamente, comparando los diagramas de interacción obtenidos con TINSA en primer lugar con los de la actual instrucción EHE [10], y posteriormente con los obtenidos con la formulación propuesta, en la que z es función lineal de las tensiones normales en la sección.

4.6. Diagramas de interacción

La manera de estructurar la información es mediante gráficos, en los que en el eje de abscisas se encuentra la variable axil adimensional y en el eje de ordenadas el cortante respuesta de la sección. Al haberse realizado el estudio tanto para axiles de compresión como de tracción, el convenio de signos adoptado para todo el documento es el de considerar las compresiones positivas. Como se observa en las leyendas, se compara el valor del cortante obtenido con TINSA con los dos siguientes valores teóricos:

- 1) una formulación modificada de la EHE
- 2) una formulación en la que z varía linealmente con el axil

Cabe destacar, que en una primera fase el análisis se llevó a cabo sin considerar en el cálculo armadura de compresión (en la cara superior), a pesar de que en la realidad se tendría que haber colocado armadura de tracción y de compresión. El proceso de carga es el siguiente: se va incrementando el flector mientras el axil se mantiene siempre constante. Por esta razón, en las primeras fases las fibras superiores están traccionadas, de forma que hay que colocar armadura.

4.6.1. Comparación con formulación modificada EHE:

Debido a la imposibilidad de reflejar en este documento todos los resultados obtenidos en este trabajo se intenta resumir a continuación los más representativos. El valor que refleja la respuesta de la sección en los gráficos según la formulación de la EHE-99 [10] es igual al mínimo entre V_{u1} y V_{u2} . Es

decir, $V_u = \min(V_{u1}; V_{u2})$.

Las modificaciones realizadas respecto a los valores de la instrucción son las siguientes:

- i) En la fórmula para determinar V_{cu} se limita el valor de σ'_{cd} a $0.2f_{cd}$, tal y como especifica el eurocódigo, para tener en cuenta el efecto de agotamiento por compresión en el alma. En principio, este efecto está contemplado en el término k de la fórmula de V_{u1} , pero tras comparar los resultados de esta formulación con los del programa se observa que el modelo de la EHE-99 [10] queda del lado de la inseguridad.
- ii) V_{u2} se ha determinado como el mínimo entre estos dos valores: V_{u2} EHE y V_{u2L} . El primero es el que especifica la instrucción salvo la limitación de σ'_{cd} comentada anteriormente. El segundo se ha calculado como sigue:

$$\text{Si } N > 0: V_{u2L} = \frac{A_s \cdot f_{yk} - 0.5 \cdot N}{1 - 0.5 \cdot \beta + \frac{\alpha}{0.9 \cdot d}} \quad (4.6)$$

$$\text{Si } N < 0: V_{u2L} = \frac{A_s \cdot f_{yk} - N}{1 - 0.5 \cdot \beta + \frac{\alpha}{0.9 \cdot d}} \quad (4.7)$$

Donde

$$\alpha = 2 \cdot d \quad (4.8)$$

$$\beta = \frac{V_{su}}{V_{u2}} \quad (4.9)$$

El término V_{u2L} se obtiene de considerar el incremento de tracción en las armaduras longitudinales debido al cortante, tal y como indica la instrucción EHE. Para cercos verticales y suponiendo $\theta = 45^\circ$ se tiene

$$\Delta T = V_{u2} - V_{su} / 2 \quad (4.10)$$

La deducción se realiza para un axil de compresión actuando sobre la sección, considerando que todo él resta tensión a las armaduras traccionadas. Todo el análisis ha sido realizado para una relación entre momento y cortante igual a $2 \cdot d$, es decir

$$M = \alpha \cdot V_{u2} \quad (4.11)$$

Planteando el equilibrio en la siguiente figura y suponiendo $A'_s = 0$ se tiene:

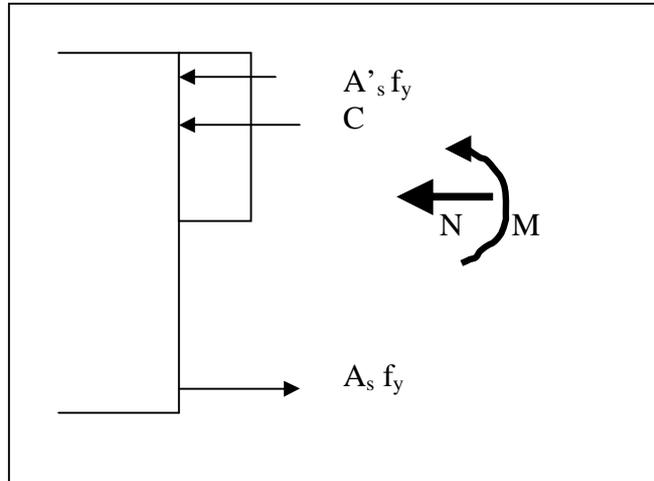


Fig. 4.18: Equilibrio entre esfuerzos externos e internos en una sección de hormigón armado.

$$T = \frac{\alpha \cdot V_{u2}}{0.9 \cdot d} + N \quad (4.12)$$

$$A_s \cdot f_y = T + \Delta T = \frac{\alpha \cdot V_{u2}}{z} + N + V_{u2} - 0.5 \cdot V_{su} \quad (4.13)$$

$$\frac{A_s \cdot f_y}{V_{u2}} = \frac{\alpha}{z} + \frac{N}{V_{u2}} + 1 - \frac{\beta}{2} \quad (4.14)$$

$$V_{u2L} = \frac{A_s \cdot f_y - N}{\frac{\alpha}{z} + 1 - \frac{\beta}{2}} \quad (4.15)$$

La deducción cuando el axil es de tracción es análoga, pero se suma $N/2$ al bloque de compresiones y se resta $N/2$ a la armadura traccionada, según el criterio del código CEB-FIP [6].

Se muestran a continuación tres diagramas representativos para el hormigón de resistencia característica 30MPa.

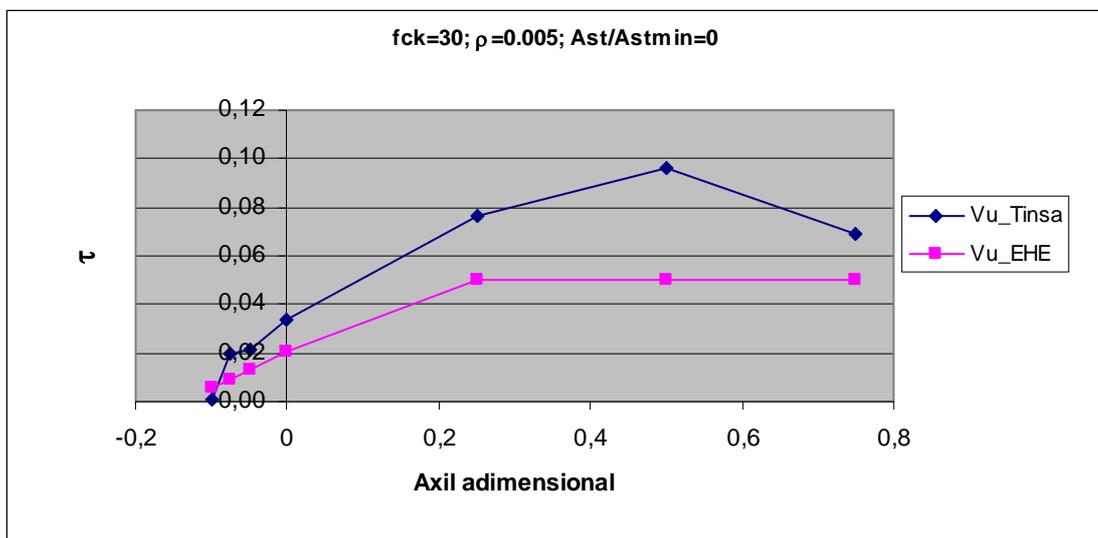


Fig. 4.19: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=30$; $\rho =0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=0$

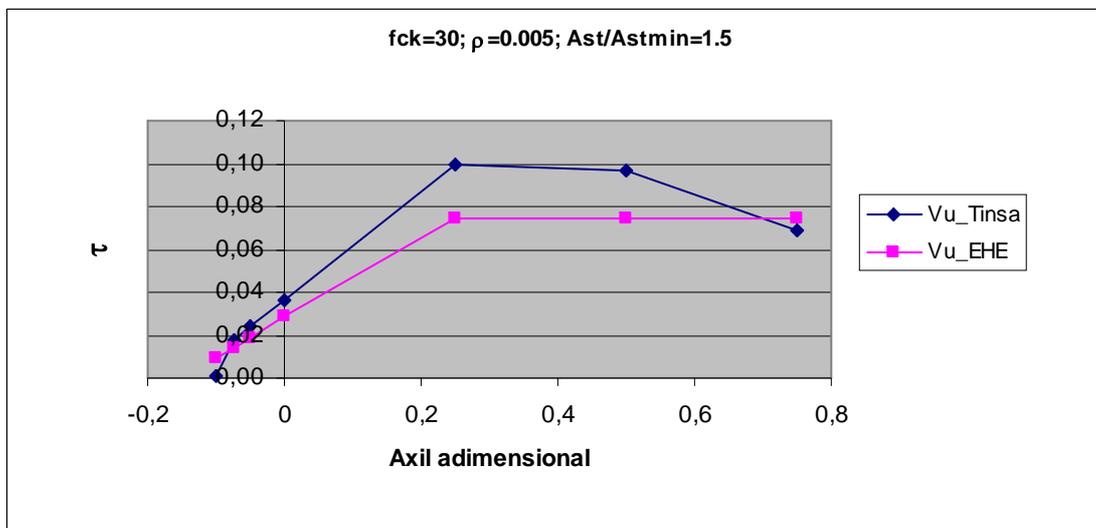


Fig. 4.20: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=30$; $\rho=0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$

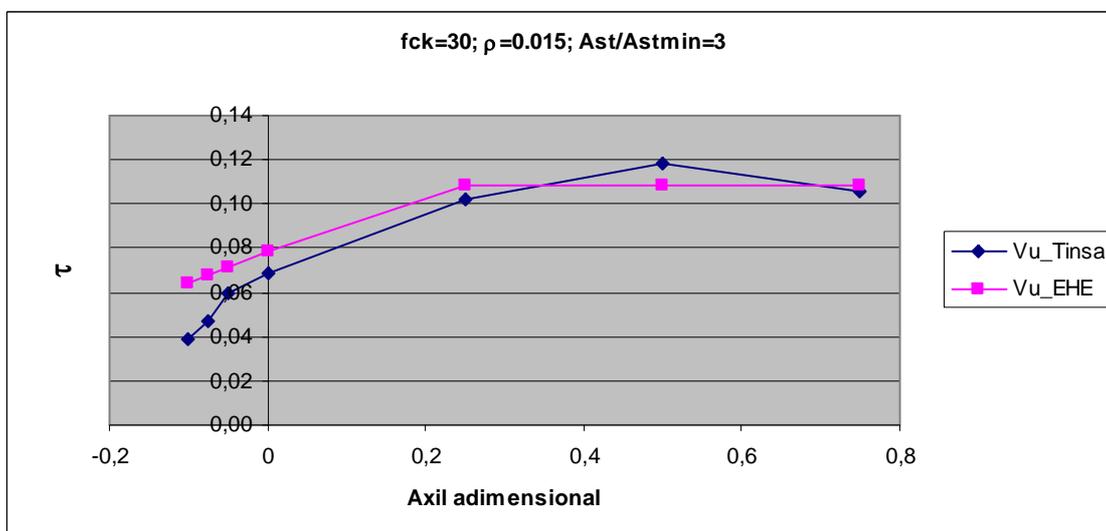


Fig. 4.21: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=30$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$

Las curvas según los resultados de TINSA se parecen bastante a las clásicas de los diagramas de interacción momento-axil, es decir, un axil a compresión ayuda a resistir hasta un determinado valor de éste, a partir del cual se produce el fallo por compresión en el alma. Se aprecia también que cuando no existe armadura transversal la formulación de la instrucción resulta bastante conservadora. Esto deja de ser así, sin embargo cuando se introduce armadura transversal en la sección, y especialmente cuando la cuantía es alta.

El término V_s que contempla la contribución en la resistencia a cortante de los cercos, es directamente proporcional al brazo mecánico z . La instrucción indica que a falta de cálculos más precisos puede tomarse el valor aproximado de $z=0.9 \cdot d$, hecho que no parece muy adecuado como se comentó anteriormente, principalmente cuando el axil de compresión es elevado. Los resultados obtenidos según dicha formulación han mejorado notablemente al introducir la limitación $\sigma'_{cd} < 0.2f_{cd}$ en el término que tiene en cuenta la contribución de un

campo de compresiones actuando en la sección. De no haberse introducido dicha limitación, la respuesta según la EHE-99 [10] sería una línea recta sin cambio de pendiente hasta valores del axil adimensional demasiado elevados (alrededor de 0.7), quedando por lo tanto del lado de la inseguridad.

Se muestran a continuación los tres diagramas homólogos para el hormigón de resistencia característica 60MPa.

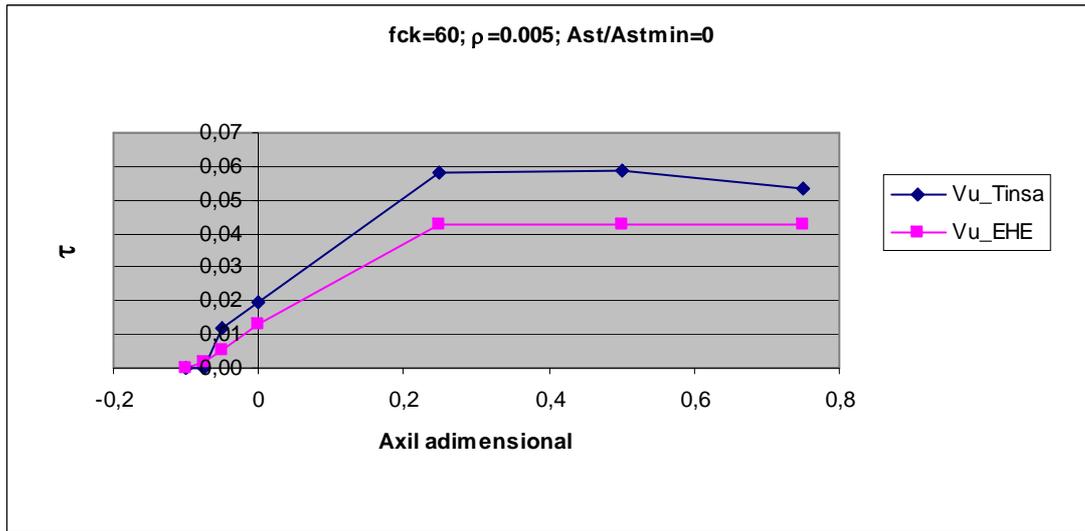


Fig. 4.22: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=60$; $\rho =0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=0$

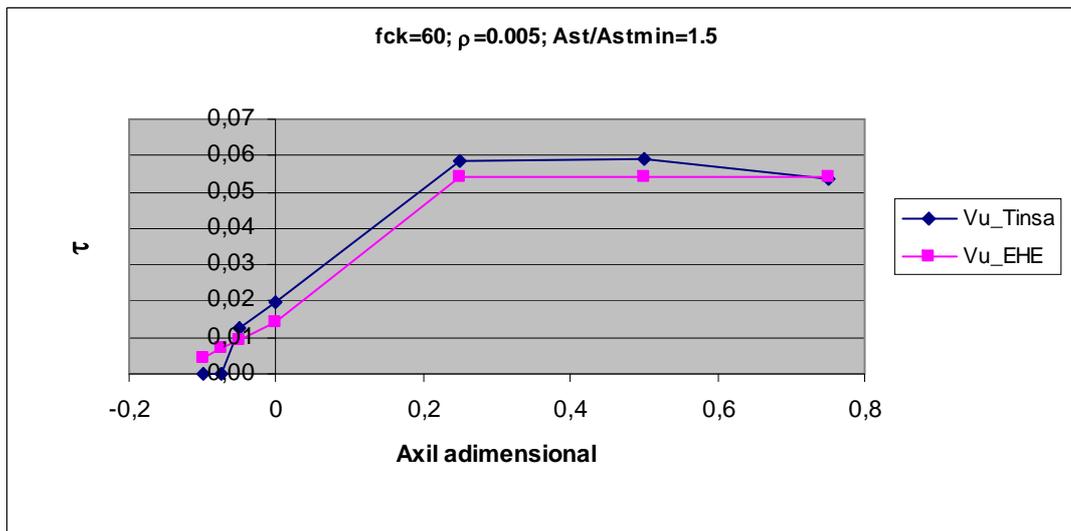


Fig. 4.23: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=60$; $\rho =0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$

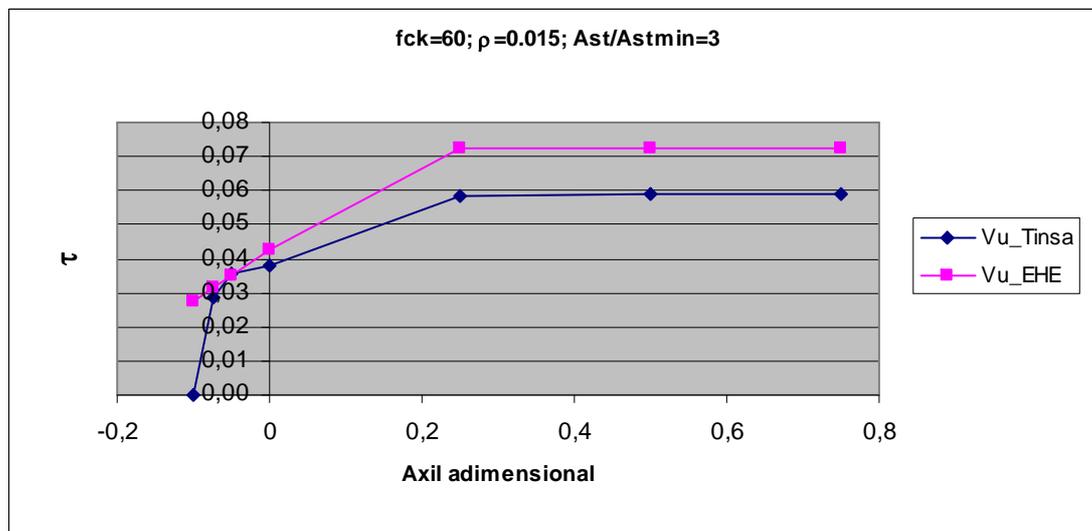


Fig. 4.24: Cortantes adimensionales respuesta según Tinsa y EHE para $f_{ck}=60$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$

En primer lugar, llama la atención la forma de las curvas que se obtienen con los resultados del modelo. A diferencia del hormigón de 30MPa, en este caso no se observa un máximo claro para un determinado axil de compresión, es más, cuando la cuantía de armadura transversal es relativamente elevada, el cortante máximo resistido es constante para un rango de compresiones entre prácticamente 0.2 y 0.75. Es decir, cuando aumenta la resistencia del hormigón el cortante resistido por la sección no disminuye cuando aumenta el axil.

Se aprecia además que dicho cortante máximo según el modelo teórico es el mismo en los tres casos, sin embargo, cuando la cuantía de armadura transversal es alta, el valor máximo del cortante se mantiene constante incluso para axiles elevados. De alguna manera esto concuerda con la idea de que en un hormigón de alta resistencia transmite poco cortante por fricción entre caras de fisura. Es decir, no hay un máximo claro en las gráficas porque aunque aumenten las tensiones de compresión el cortante transmitido por fricción es menor. De hecho, parece que la formulación relativa a cortante de la instrucción no es muy adecuada para el estudio de hormigones de alta resistencia.

La parte que contabiliza la contribución a la resistencia por esfuerzo axil está basada en un modelo friccional. En el término $0.15 \cdot \sigma'_{cd}$, el 0.15 representa una especie de coeficiente de rozamiento. La actual instrucción contempla el hecho de que el engranamiento entre caras de fisuras es menor para HAR. Para ponerlo en práctica limita los valores de f_{ck} y de f_{1cd} . En primer lugar debe notarse que esta limitación es insuficiente, puesto que para cuantías de armadura altas la instrucción sobreestima el comportamiento real del hormigón. En segundo lugar, parece sensato establecer una limitación sobre la parte de la expresión basada en el modelo friccional. Es decir, el coeficiente 0.15 debería ser variable, como mínimo en función de la resistencia característica del hormigón. Si disminuye la capacidad de transmitir cortante entre caras de fisuras debe disminuir el coeficiente de rozamiento del modelo.

Se muestran a continuación los tres diagramas homólogos para el hormigón de resistencia característica 90MPa.

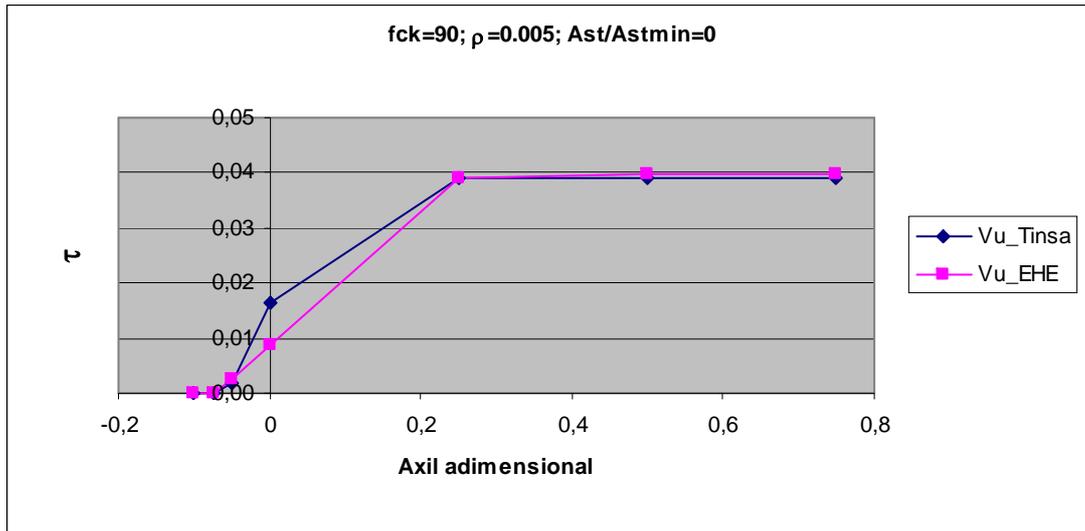


Fig. 4.25: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=90$; $\rho=0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=0$

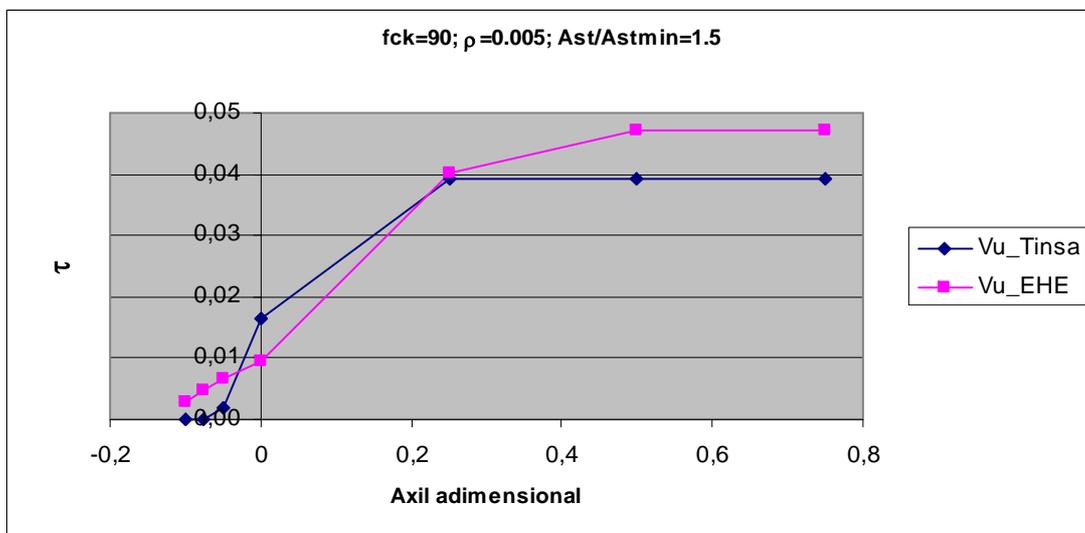


Fig. 4.26: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y EHE para $f_{ck}=90$; $\rho=0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$

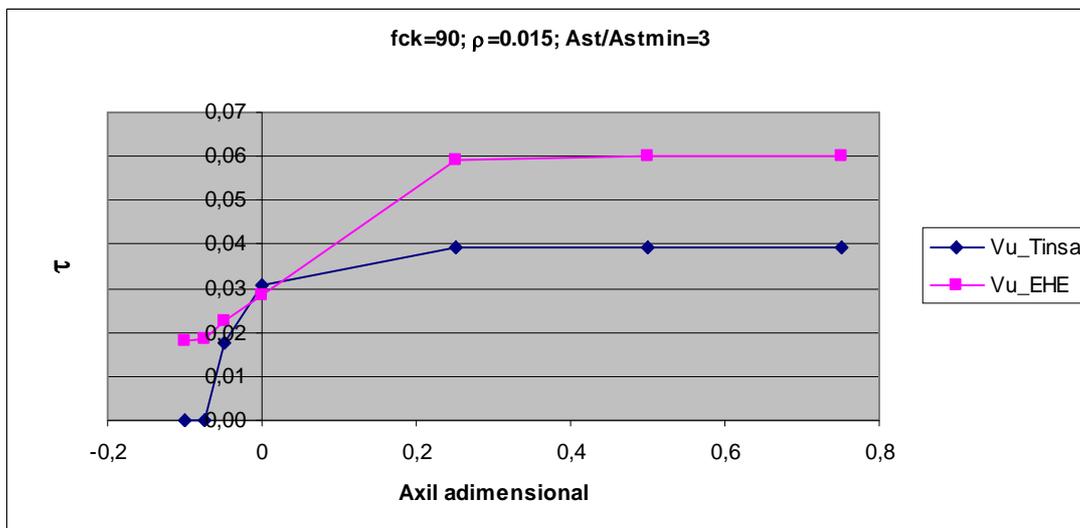


Fig. 4.27: Cortantes adimensionales respuesta según Tinsa y EHE para $f_{ck}=90$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$

Las curvas de los resultados del programa son bastante similares en su forma a las del hormigón de 60MPa. En lugar de un máximo para un determinado axil aparece una recta de puntos para compresiones moderadas y altas, es decir, un aumento de las tensiones normales no se traduce en un incremento de la resistencia a cortante.

Esto confirma de alguna manera la idea anteriormente expuesta. Como en un hormigón de alta resistencia no se transmite prácticamente cortante por fricción entre fisuras, y las cuantías de armadura son respectivamente las mismas entre los hormigones de 60 y 90MPa, no aumenta la capacidad resistente bajo tensiones de compresión. Sin embargo, sí aumenta el cortante respuesta cuando no actúa axil en la sección. Es decir, cuando no hay axil aplicado sobre la sección, y en hormigones de alta resistencia, al aumentar f_{ck} sí aumenta la contribución del hormigón en la resistencia a cortante, lo que sucede es que no se aprovecha el efecto de un campo de compresiones actuando en la sección.

A la vista de estos resultados parece que se debería modificar el término que tiene en cuenta la contribución por esfuerzo axil además del correspondiente a f_{ck} . Por otro lado, el introducir una limitación en términos absolutos sobre la resistencia característica ($f_{ck} < 60\text{MPa}$ según EHE) queda a grandes rasgos del lado seguro cuando no hay axil aplicado sobre la sección. Sin embargo, sucede todo lo contrario para axiles de compresión.

4.6.2. Comparación con una formulación con brazo mecánico variable

4.6.2.1 Variación lineal

A la vista de los resultados anteriores, y como la lógica indica el brazo mecánico z debe depender de las tensiones normales en la sección. Se propone en este apartado un valor distinto de z , que tenga de alguna manera en cuenta su variación con las tensiones normales.

Con tal fin se le resta al canto útil la mitad de la profundidad del bloque de compresiones. Es decir, $z=d-y/2$. Para calcular y se plantea el equilibrio de axiles suponiendo las dos armaduras en plastificación en la sección de la figura 4.18. Se deduce la expresión:

$$0 \leq z = d - \frac{N + A_s f_{yk} - A'_s f_{yk}}{1,7 f_{ck} b} \leq 0,9 \cdot d \quad (4.16)$$

Salvo esta modificación en z , la formulación es análoga a la del apartado 4.6.1. Obviamente las curvas que representan los valores obtenidos con TINSA son las mismas que en 4.6.1, por lo que solamente se comparan con las de la nueva formulación propuesta.

Se muestran a continuación los dos diagramas con relaciones $A_{st}/A_{stmin}=1,5$ y 3 para un hormigón de resistencia característica 30 MPa, puesto que cuando la cuantía de armadura transversal es cero los resultados son los mismos que en 4.6.1.

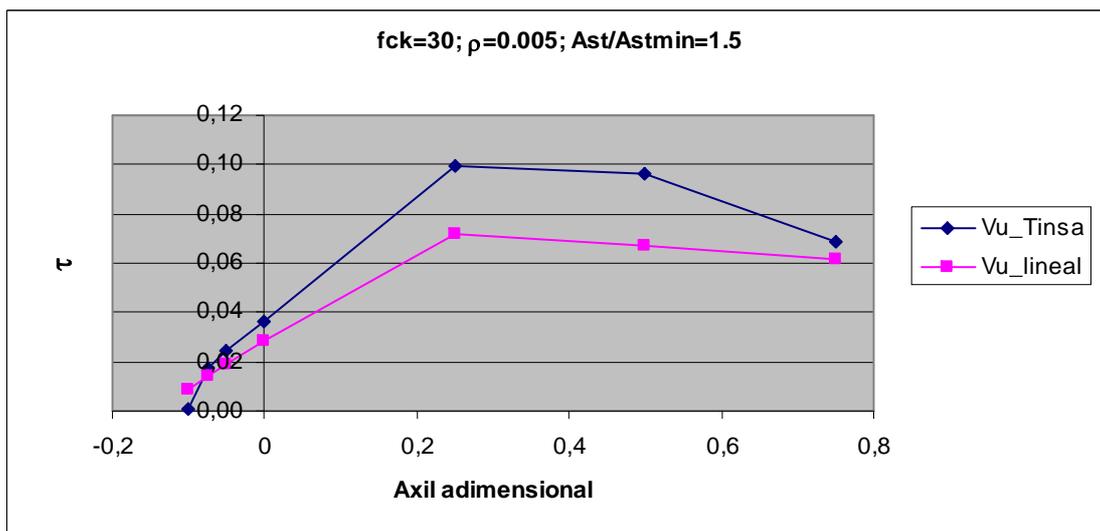


Fig. 4.28: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y formulación con z lineal para $f_{ck}=30$; $\rho =0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$

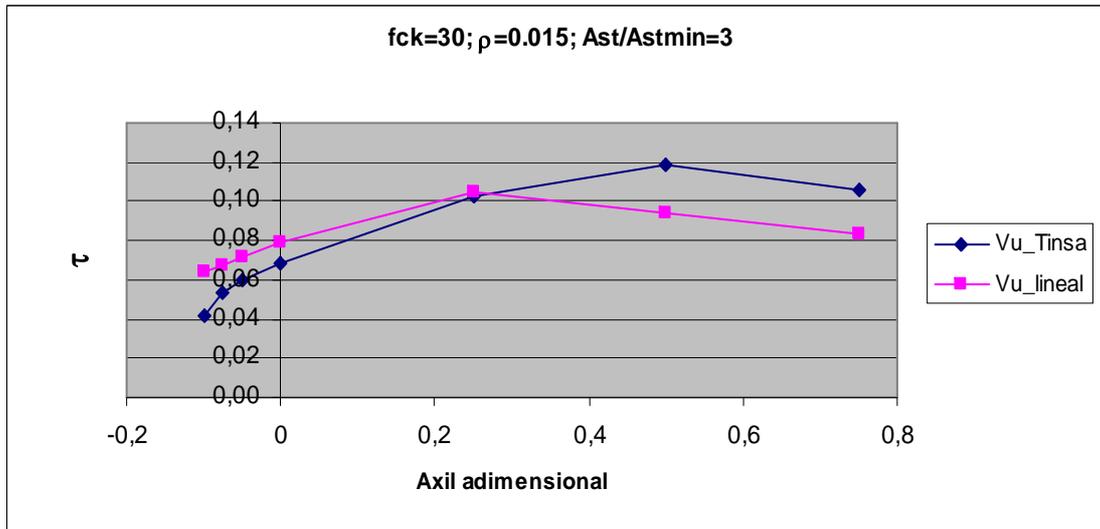


Fig. 4.29: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y formulación con z lineal para $f_{ck}=30$; $\rho =0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$

La forma de las curvas con la nueva formulación propuesta se asemeja bastante a la de las obtenidas con los resultados del modelo. A pesar de que para la cuantía de armadura transversal igual a 1,5 veces la mínima proporciona valores excesivamente conservadores, las curvas presentan una rama de caída, en la que el cortante respuesta disminuye para axiles elevados. Cabía esperar que los valores resultaran conservadores para cuantías de armadura transversal medias y bajas, puesto que las curvas obtenidas con la formulación expuesta en 4.6.1 quedaban ya del lado de la seguridad, y la única diferencia entre ambas formulaciones es la variación en z con las tensiones normales, por lo que el cortante respuesta en esta formulación será siempre menor o igual que el obtenido en 4.6.1.

Por otro lado, es práctica habitual que las instrucciones y códigos de diseño proporcionen valores conservadores, principalmente cuando el problema en cuestión es complejo, lo que obliga a realizar hipótesis que permitan proyectar con comodidad. En este caso, por ejemplo se ha supuesto que el ángulo ϑ entre las bielas de compresión de hormigón y el eje de la pieza es de 45° .

Se muestran a continuación los dos gráficos para el hormigón de resistencia característica de 60MPa.

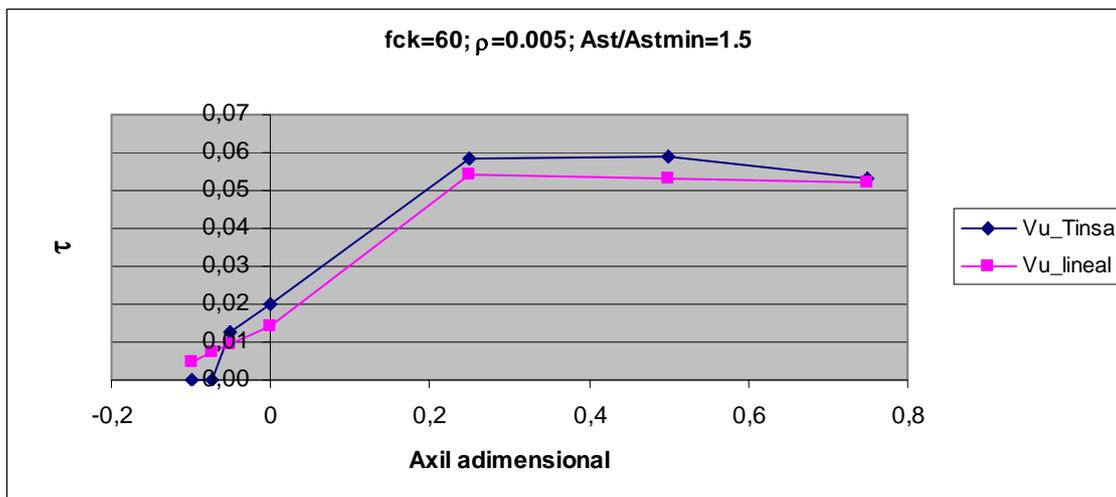


Fig. 4.30: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y formulación con z lineal para $f_{ck}=60$; $\rho=0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$

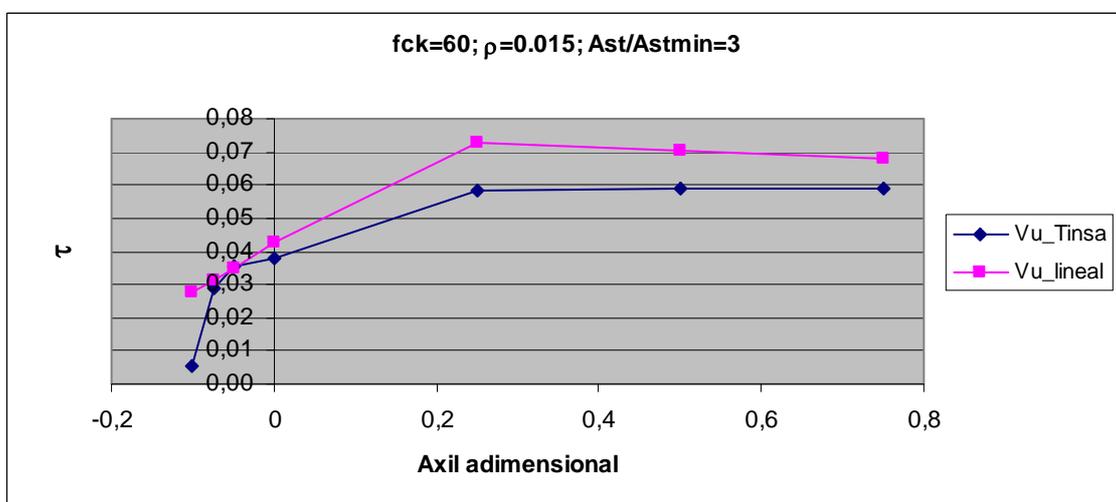


Fig. 4.31: Cortantes adimensionales respuesta según TINSA y formulación con z lineal para $f_{ck}=60$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$

De nuevo, las curvas de la formulación reproducen de una manera bastante fiel las obtenidas con TINSA. Las pendientes de las dos ramas que se observan para compresiones elevadas son prácticamente idénticas a las de la formulación teórica.

En cuanto a valores absolutos, los resultados son bastante parecidos a los expuestos en 4.6.1. El que z sea variable afecta en menor medida al valor de la respuesta cuanto mayor es la resistencia característica del hormigón. Esto es debido a que el término V_{cu} es proporcional a la resistencia característica del hormigón, por lo que representa un porcentaje más elevado del término V_{u2} a medida que aumenta f_{ck} , y variaciones en el término V_{su} afectan en menor medida al resultado de la sección.

Se muestran a continuación los dos gráficos para el hormigón de resistencia característica 90MPa.

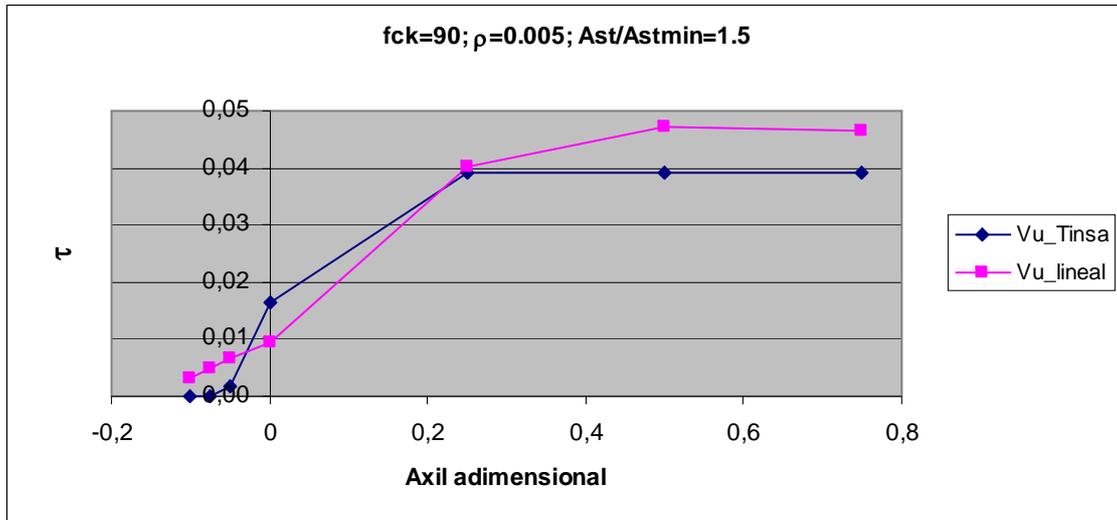


Fig. 4.32: Cortantes adimensionales respuesta según Tinsa y formulación con z lineal para $f_{ck}=90$; $\rho=0.005$; $A_{st}/A_{stmin}=1.5$

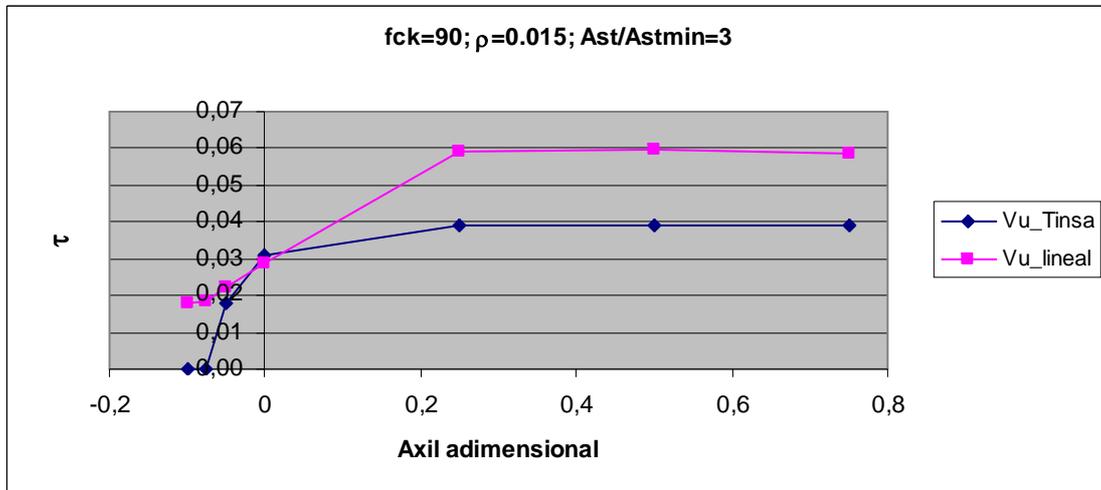


Fig. 4.33: Cortantes adimensionales respuesta según Tinsa y formulación con z lineal para $f_{ck}=90$; $\rho=0.015$; $A_{st}/A_{stmin}=3$

En esta ocasión, la tendencia de las curvas no parece ser la más apropiada, principalmente para cuantías de armadura transversal medias y bajas. A pesar de la limitación en z , debe recordarse que la instrucción EHE-99 [10] no está pensada para hormigones de alta resistencia, por lo que para valores elevados de f_{ck} resulta difícil reproducir la rama horizontal predice el modelo para hormigones de alta resistencia

4.7. Análisis de los resultados

- i) Se debe introducir una limitación en el valor de σ'_{cd} en la expresión de V_{cu} según la instrucción EHE-99 [10]. El hormigón no resiste infinitamente a compresión, y la limitación de la instrucción de agotamiento por compresión oblicua en el alma no es suficiente. La limitación $\sigma'_{cd} \leq 0.2f_{cd}$ que indica EC-2 [14] muestra resultados bastante satisfactorios.
- ii) El valor del brazo mecánico no puede ser constante. Debe depender del campo de tensiones normales que actúe sobre la sección. Debe disminuir a medida que aumenta el axil.
- iii) La variación lineal de z con los esfuerzos de compresión propuesta en 4.6.2 presenta un ajuste satisfactorio, dentro de la dificultad de reproducir todos los puntos.
- iv) Para hormigones de resistencia normal se aprecia en la mayoría de los casos un máximo claro del cortante, el axil para el que tiene lugar depende de las cuantías de armadura longitudinal y transversal. Sin embargo, para HAR la rama correspondiente a los axiles de compresión es prácticamente horizontal, el cortante resistido por la sección no disminuye al aumentar el axil, y el valor máximo se alcanza para axiles adimensionales menores que para hormigones de resistencia normal.
- v) El coeficiente 0.15 que multiplica al término σ'_{cd} en la expresión de V_{cu} debe ser variable en función de la resistencia característica del hormigón. Para HAR debe disminuir notablemente.
- vi) No se puede introducir una limitación absoluta sobre f_{ck} en la expresión de V_{cu} , puesto que en los casos en que no hay axil el cortante resistido aumenta con la resistencia característica para unas cuantías de armadura constantes.

CAPÍTULO 5. ESTUDIO PARAMÉTRICO DE SECCIONES TUBULARES SOMETIDAS A ESFUERZOS COMBINADOS DE CORTANTE, FLEXIÓN Y AXIL.

5.1. Introducción

En este capítulo se realiza un estudio paramétrico del comportamiento a cortante de una sección tubular sometida simultáneamente a un momento flector, esfuerzo axil y esfuerzo cortante. A tal fin se ha estudiado un total de 75 casos con el programa de análisis no lineal TINSA. Los objetivos de este capítulo son distintos que los del anterior, ya que los estados del arte del estudio de ambas secciones se encuentran en etapas muy distintas. Para sección rectangular todos los textos normativos especifican un valor de la resistencia a cortante (aunque como se ha visto en el capítulo anterior existan aspectos a mejorar), mientras que para secciones tubulares la mayoría de códigos de diseño no prescriben un valor explícito de la resistencia a cortante. El diámetro de la sección es constante e igual a 2000mm, y las variables que se han combinado para conseguir los 75 casos son el espesor, el brazo y el axil adimensional.

Espesor (e): los valores ensayados son de 150, 300 y 400mm. De esta manera se estudia un caso que sería asimilable al de una sección de paredes delgadas, un caso de paredes gruesas y un caso intermedio. En un principio se pensó en estudiar también un espesor de 600mm, pero se vio posteriormente que la sección era demasiado masiva, los efectos de flexión de las paredes de la sección quedaban demasiado enmascarados.

Las cuantías de armaduras longitudinal y transversal que son función únicamente del espesor, se resumen en la siguiente tabla:

espesor (mm)	Armadura longitudinal	Armadura transversal
150	20 barras de $\Phi = 20\text{mm}$	Barras de $\Phi = 10\text{mm}$ cada 150mm
300	26 barras de $\Phi = 20\text{mm}$	Barras de $\Phi = 10\text{mm}$ cada 150mm
400	30 barras de $\Phi = 20\text{mm}$	Barras de $\Phi = 10\text{mm}$ cada 150mm

Cabe destacar que la armadura longitudinal está siempre equiespaciada y en un solo círculo.

Brazo (MV): Se define como la relación entre el momento y el cortante. Representa la importancia de los esfuerzos de flexión respecto a los de corte. Si se toma el sencillo ejemplo de una viga empotrada en voladizo, el brazo sería la distancia entre la base de la viga y el punto de aplicación de la fuerza.

Los brazos estudiados son: una, dos, tres, cuatro y diez veces el diámetro de la sección (2000mm), es decir: 2000, 4000, 6000, 8000 y 20000mm.

Axil adimensional (v):

$$v = \frac{N}{A_c \cdot f_{ck}} \quad (5.1)$$

Siendo N el axil de cálculo (compresiones positivas) y A_c el área de la sección de hormigón. Los cinco valores estudiados son: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 y 0,5.

Cortante adimensional (τ):

$$\tau = \frac{V}{f_{ck} \cdot e \cdot d} \quad (5.2)$$

Siendo V el esfuerzo cortante y d la distancia entre la fibra más comprimida y el centro de gravedad de la armadura más alejada de ésta.

Momento adimensional (μ):

$$\mu = \frac{M}{f_{ck} \cdot e \cdot d^2} \quad (5.3)$$

Siendo M el momento flector.

Las características de los materiales son las siguientes:

- f_{ck} : resistencia característica del hormigón, $f_{ck}=35\text{MPa}$.
- f_{yk} : límite elástico de las armaduras pasivas, $f_{yk}=500\text{MPa}$.

5.2. Curvas esfuerzo-deformación

Para conocer los efectos de la interacción de esfuerzos en todos los casos antes planteados, se ha procedido a analizar las secciones bajo un proceso incremental de las cargas.

Se ha obtenido en primer lugar las relaciones entre esfuerzo y deformación directamente asociadas (Cortante – deformación por cortante y Momento – Curvatura) sin interacción entre ambos, para los distintos niveles de esfuerzo axil citados en la página anterior.

En un primer grupo se muestran parejas de resultados para un espesor de 150mm y un brazo $MV=4$

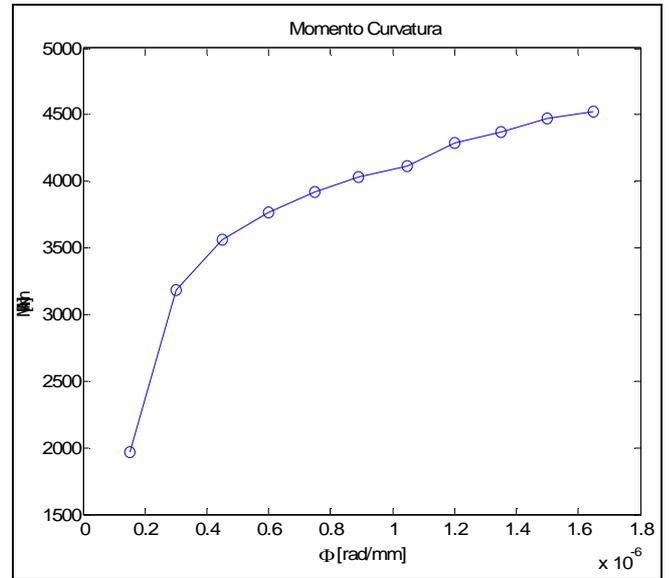
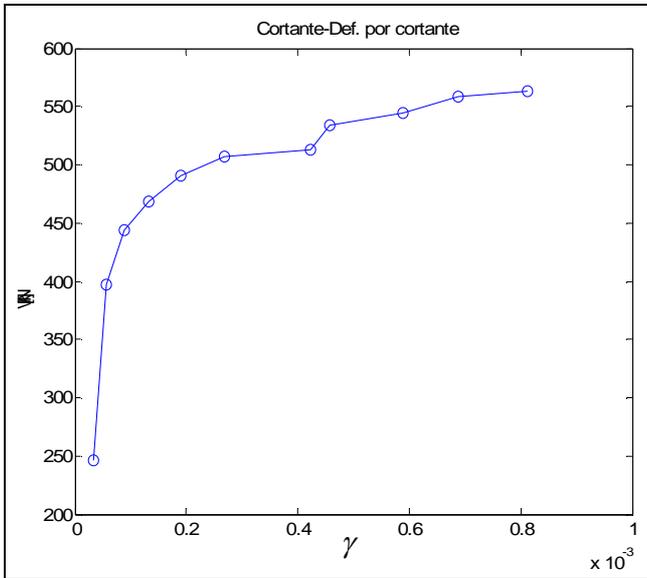


Fig. 5.1: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para e=150mm; MV=4; V =0.1.

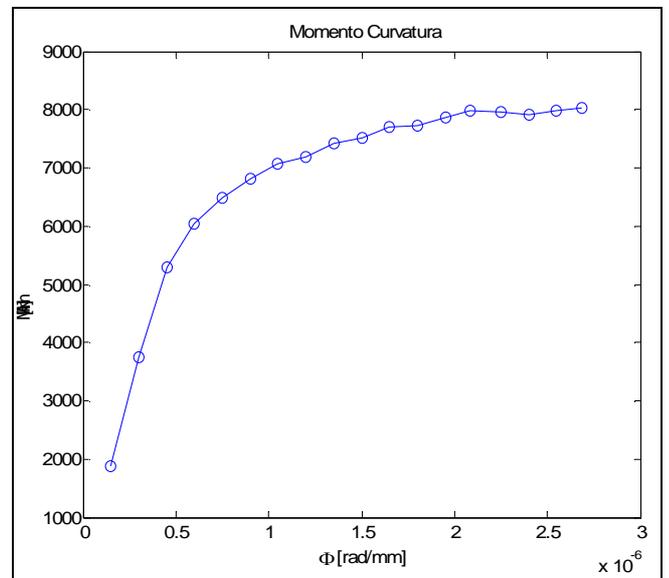
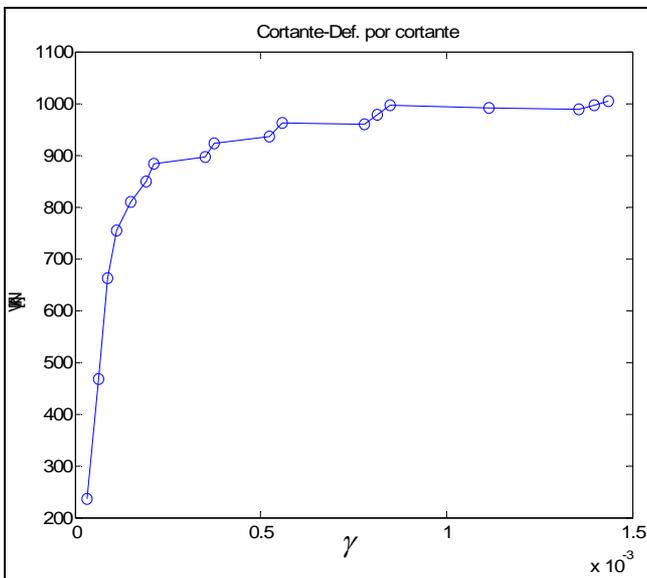


Fig. 5.2: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para e=150mm; MV=4; V =0.3.

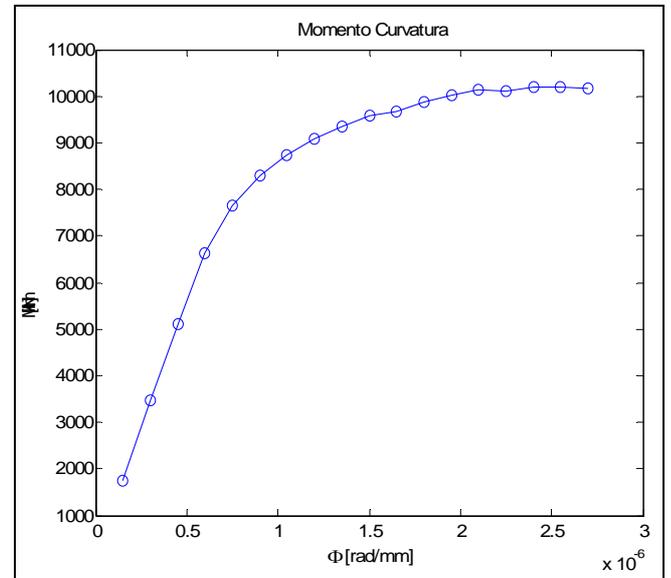
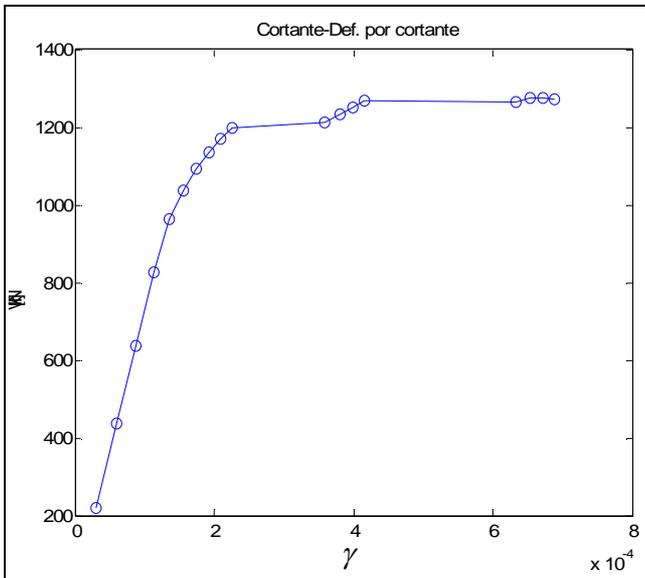


Fig. 5.3: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $e=150\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.5$.

En este segundo grupo se muestran los resultados para un espesor de 400mm y un brazo $MV=4$.

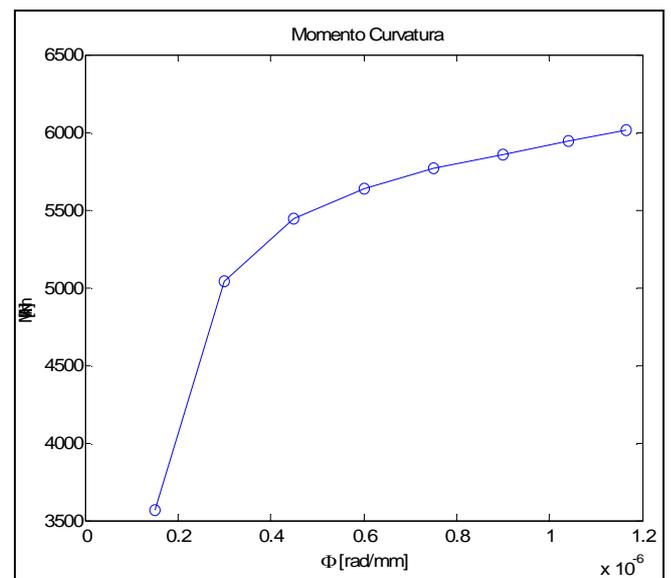
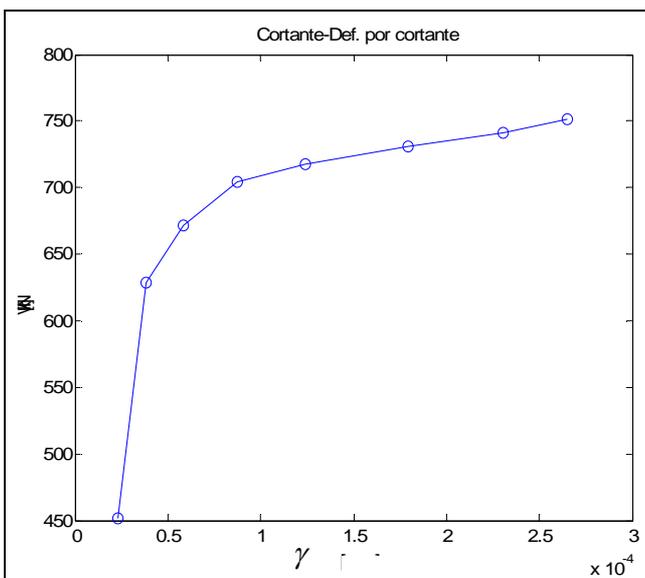


Fig. 5.4: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.1$.

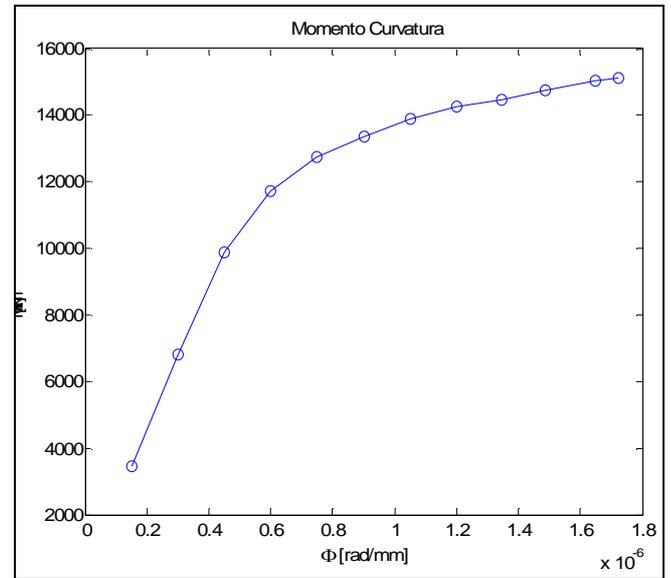
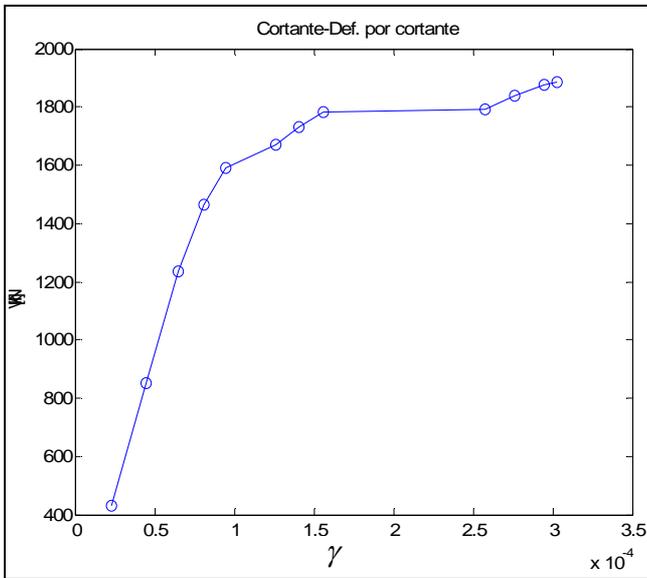


Fig. 5.5: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.3$.

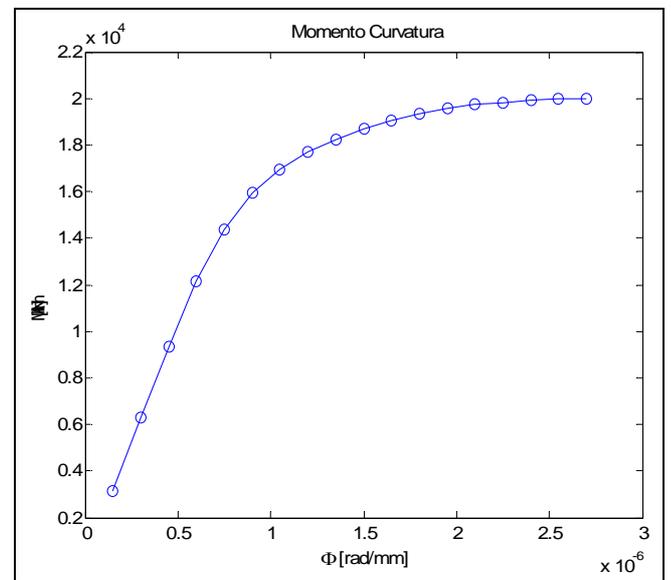
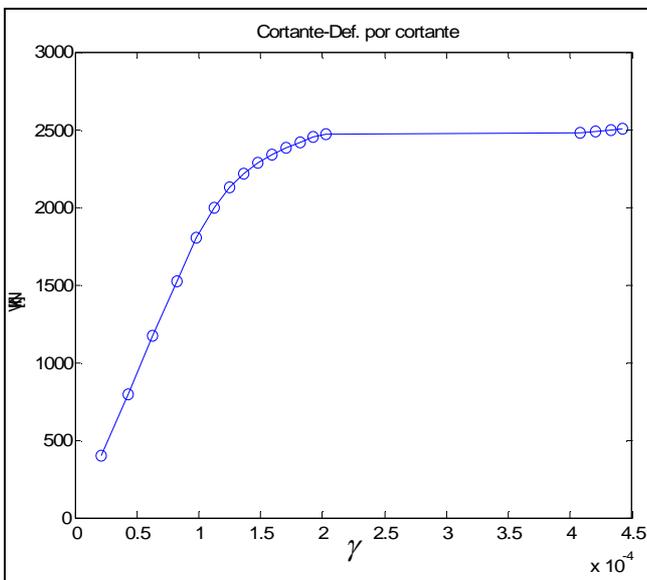


Fig. 5.6: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.5$.

En el tercer grupo se muestran los resultados para un espesor de 150mm y un brazo $MV=10$

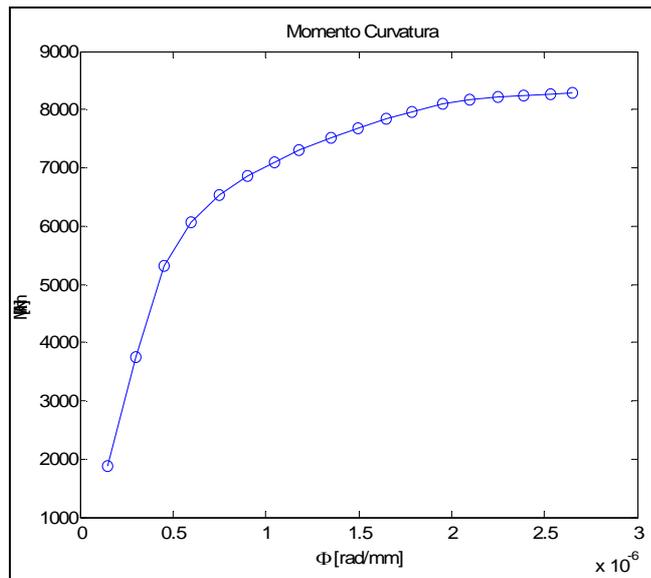
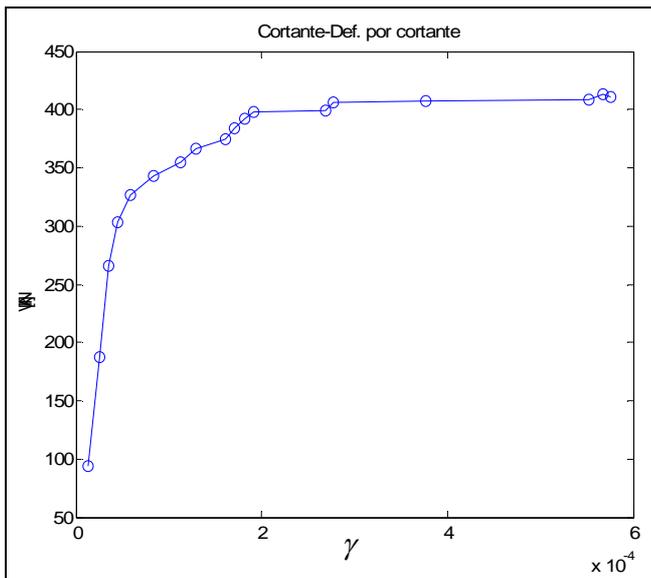


Fig. 5.7: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $e=150\text{mm}$; $MV=10$; $V=0.3$.

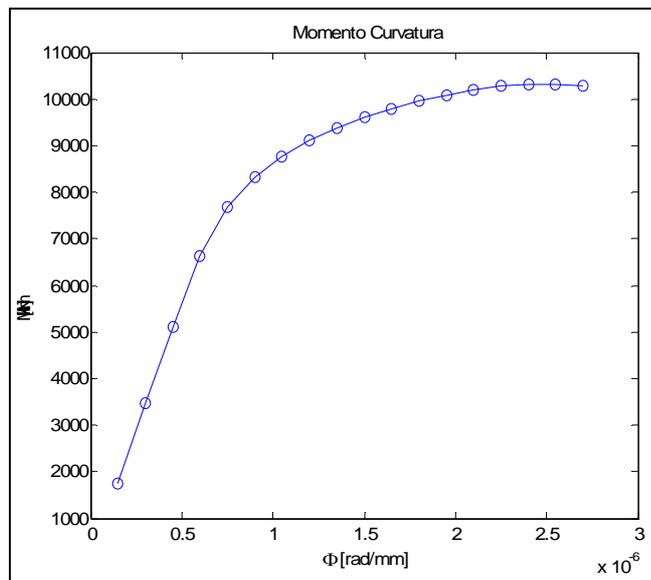
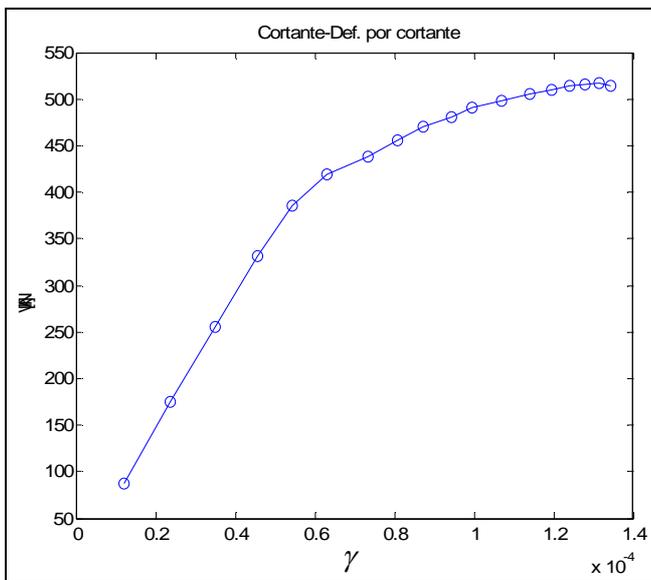


Fig. 5.8: Diagramas cortante-Def. por cortante y momento curvatura para $e=150\text{mm}$; $MV=10$; $V=0.5$.

En todos los diagramas se observa una primera rama lineal, que corresponde a la fase elástica, cuando en ninguna fibra de la sección se ha alcanzado todavía la resistencia a tracción del hormigón, por lo que éste no ha todavía fisurado. Obviamente, el valor del cortante o momento elástico aumenta a medida que aumenta el axil en la sección, puesto que en los primeros pasos de carga todas las fibras están comprimidas. En la gran mayoría de las curvas se aprecia el punto de plastificación de las armaduras, e incluso en algunas el tramo de

caída. Otras, sin embargo, presentan mayor pendiente en los últimos puntos, debido a las dos razones expuestas en el apartado 4.2 del capítulo 4.

Para el espesor de 400mm las respuestas últimas son mayores, como cabía esperar, aunque la forma de las curvas es parecida a grandes rasgos.

Si se comparan las curvas obtenidas con los brazos $MV=4$ y $MV=10$ se observa que el momento último resistido es similar, mientras que la relación entre los cortantes máximos es la misma que la relación entre los dos brazos. Este tema se comenta posteriormente en el apartado de diagramas de interacción.

Ambos esfuerzos últimos son mayores para el axil adimensional de 0.5 que para el de 0.3. Esto indica que las tensiones normales tienen una magnitud tal que ayudan a resistir. Es decir, todavía no se ha alcanzado el máximo en un diagrama clásico de interacción, por lo menos hasta un valor de $\nu=0.5$ las compresiones son favorables.

5.3. Diagramas de tensiones normales

Se muestra a continuación la distribución de tensiones normales en la sección transversal para los mismos casos que los mostrados en las curvas esfuerzo-deformación. En la primera fila de un grupo de gráficos (agrupados según espesor y brazo) el de la izquierda corresponde al axil adimensional de 0.1 y el de la derecha al de 0.3, mientras que el de la segunda fila corresponde siempre al axil adimensional de 0.5.

En un primer grupo se muestran parejas de resultados para un espesor de 150mm y un brazo $MV=4$

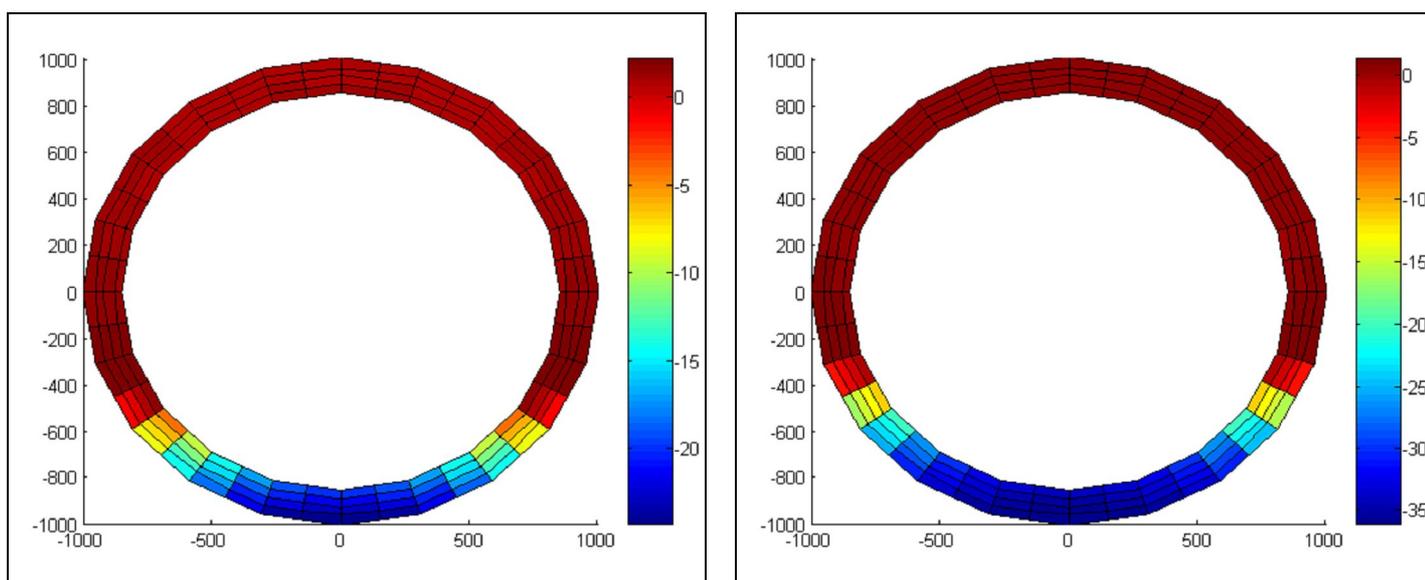


Fig. 5.9: Diagramas de tensiones normales (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.1$ (izda.), 0.3 (dcha.).

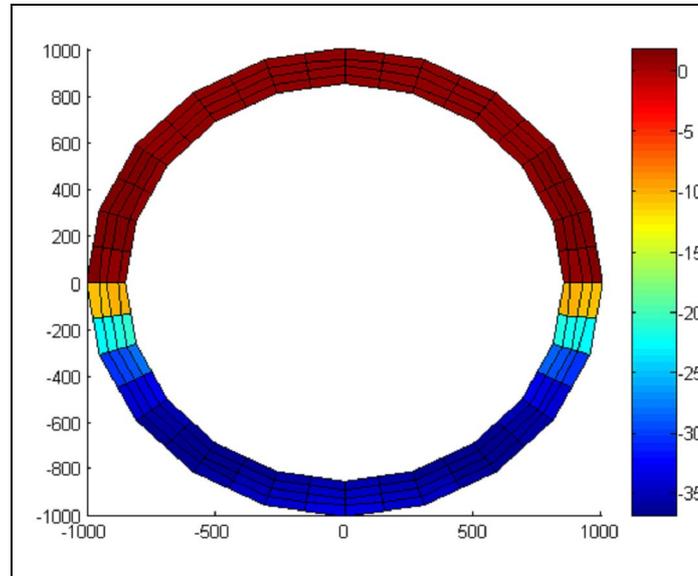


Fig. 5.10: Diagrama de tensiones normales (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.5$.

En este segundo grupo se muestran los resultados para un espesor de 400mm y un brazo $MV=4$.

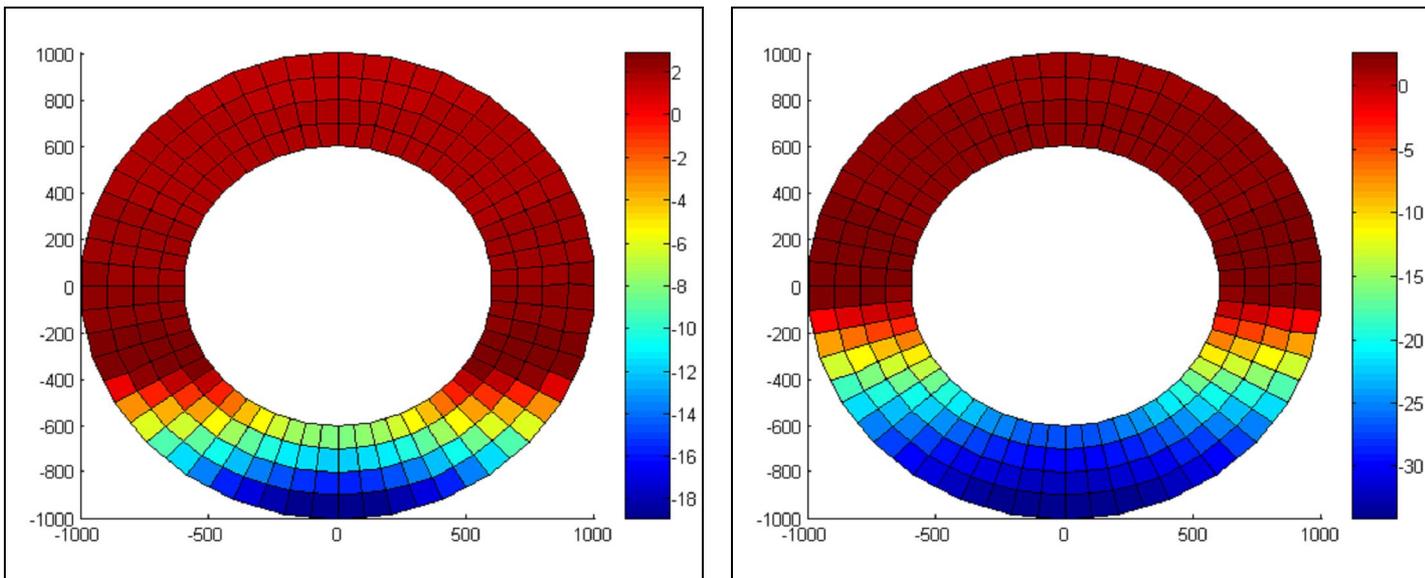


Fig. 5.11: Diagramas de tensiones normales (MPa) $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.1$ (izda.), 0.3 (dcha.).

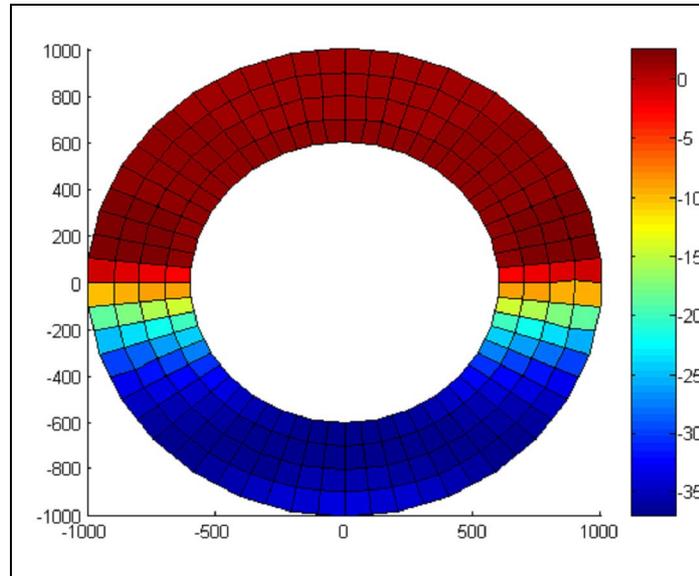


Fig. 5.12: Diagrama de tensiones normales (MPa) $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.5$

En el tercer grupo se muestran los resultados para un espesor de 150mm y un brazo $MV=10$

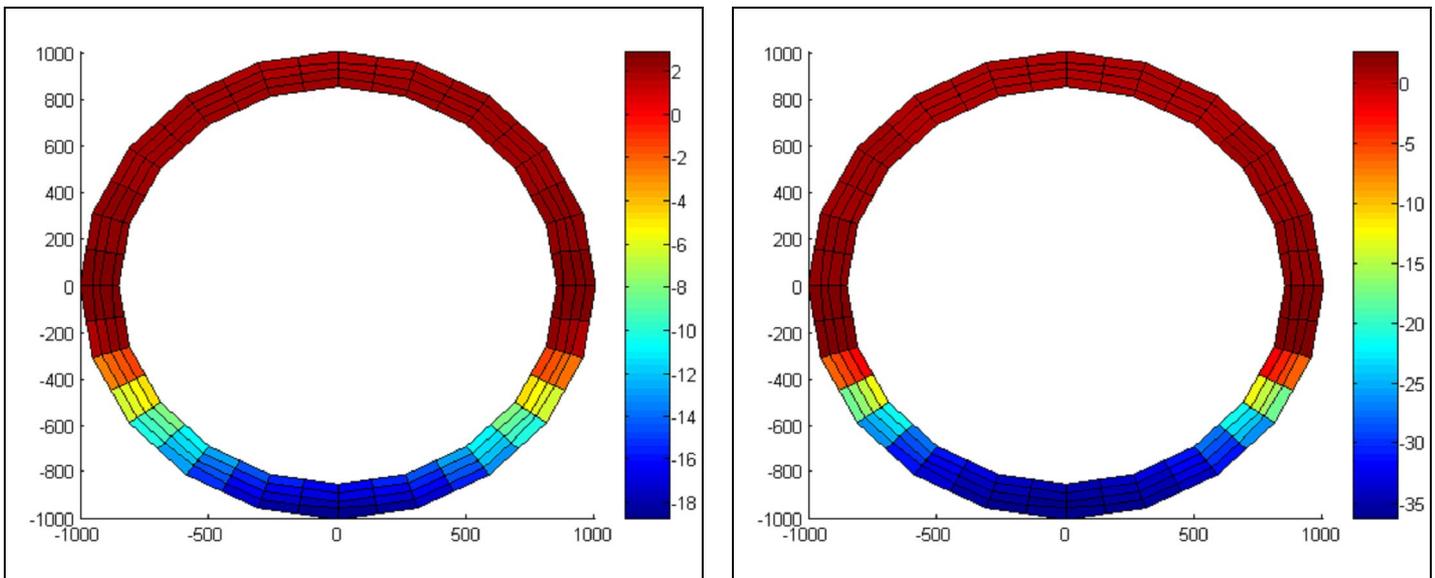


Fig. 5.13: Diagramas de tensiones normales (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=10$; $V=0.1$ (izda.), 0.3 (dcha.).

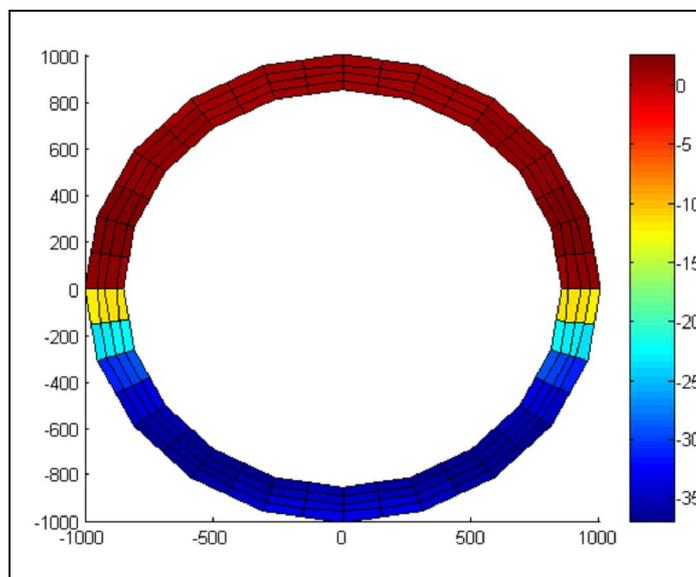


Fig. 5.14: Diagrama de tensiones normales (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=10$; $V=0.5$.

Estos diagramas corresponden con el último punto en los diagramas esfuerzo-deformación, es decir, con el último paso en el proceso incremental de cargas que se ha seguido para obtener los resultados.

Cuando el esfuerzo axial es pequeño, el diagrama de tensiones es muy similar al que tendría lugar para flexión simple. Si se tratara de un material elástico y lineal el eje neutro debería coincidir con el centro de gravedad de la sección, y así es hasta llegar al momento elástico, entonces fisura el hormigón y desciende el eje neutro, como se observa en las figuras. No se llega a alcanzar la resistencia a compresión del hormigón, ya que la sección agota antes por plastificación de las armaduras traccionadas.

A medida que aumentan las tensiones normales se observa que asciende la posición de la fibra neutra, puesto que hay un bloque de compresiones actuando sobre toda la sección.

En los primeros pasos de carga todas las fibras están comprimidas. A medida que aumenta el flector se van traccionando las fibras superiores y se van comprimiendo más las inferiores, mientras el eje neutro desciende respecto a los primeros pasos de carga. Quanto mayor es el axil más alto está el eje neutro, porque antes agota el hormigón comprimido.

Se observa que para el axil adimensional igual a 0.5 la fibra neutra prácticamente coincide con el baricentro de la sección.

En la sección de 400mm de espesor se observa la variación de las tensiones a lo largo de la pared. Para los axiles pequeños (sobre todo para $\nu=0.1$) las tensiones de compresión son considerablemente menores en la parte interior que en la exterior.

Esto confirma lo que se comentaba anteriormente, al no estar todavía el hormigón comprimido en rotura el diagrama de tensiones se parece más a uno lineal que a un parábola-rectángulo. Este efecto desaparece a medida que aumenta el axil y la distribución de tensiones se parece más a la de parábola-rectángulo.

5.4. Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} en el hormigón

Se muestran a continuación algunos diagramas representativos de tensiones tangenciales τ_{xz} en el hormigón. A diferencia del capítulo 4, en esta ocasión no se muestran los valores para las ordenadas de la sección, puesto que se perdería la información de la variación de las tensiones a lo largo del espesor. El formato es por tanto el mismo que para los gráficos de tensiones normales.

En un primer grupo se muestran parejas de resultados para un espesor de 150mm y un brazo $MV=4$

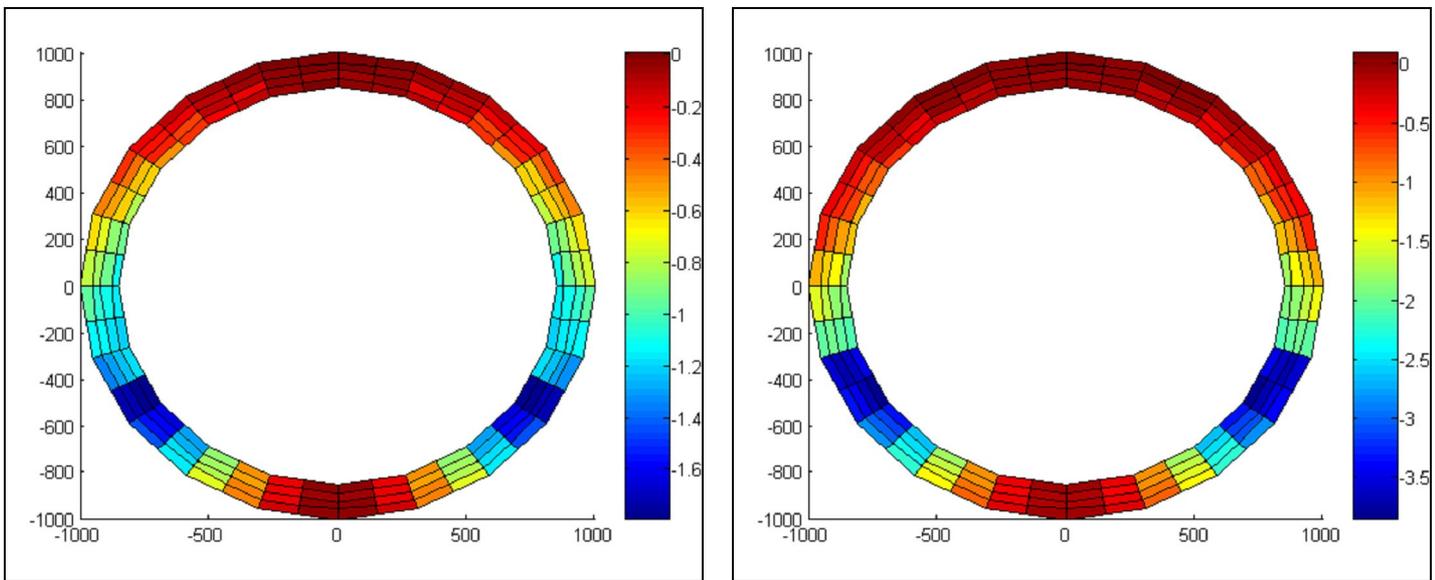


Fig. 5.15: Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.1$ (izda.), 0.3 (dcha.).

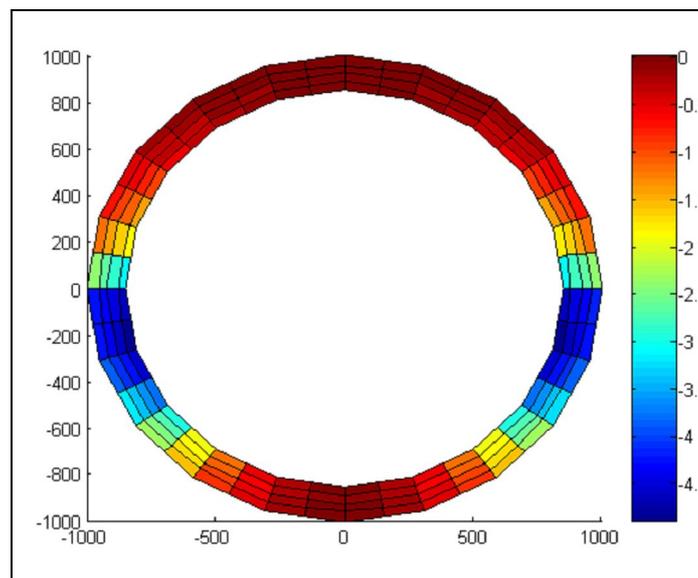


Fig. 5.16: Diagrama de tensiones tangenciales τ_{xz} (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=4$; $V=0.5$.

En este segundo grupo se muestran los resultados para un espesor de 400mm y un brazo $MV=4$.

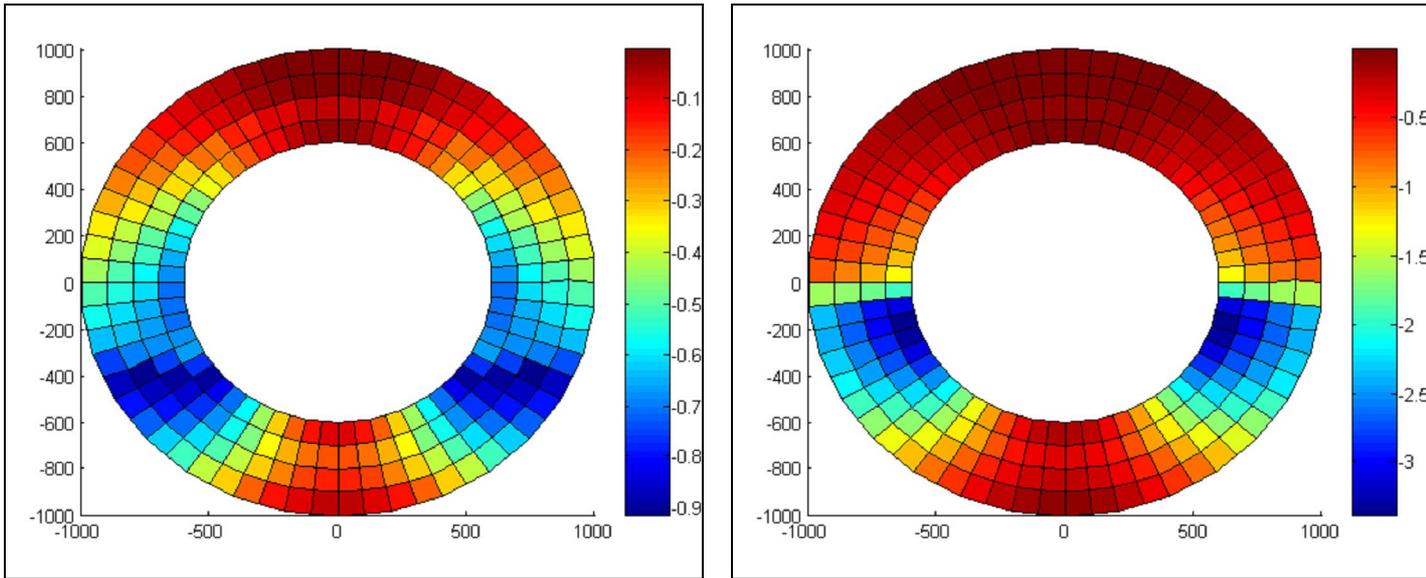


Fig. 5.17: Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} (MPa) $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V =0.1$ (izda.), 0.3 (dcha.).

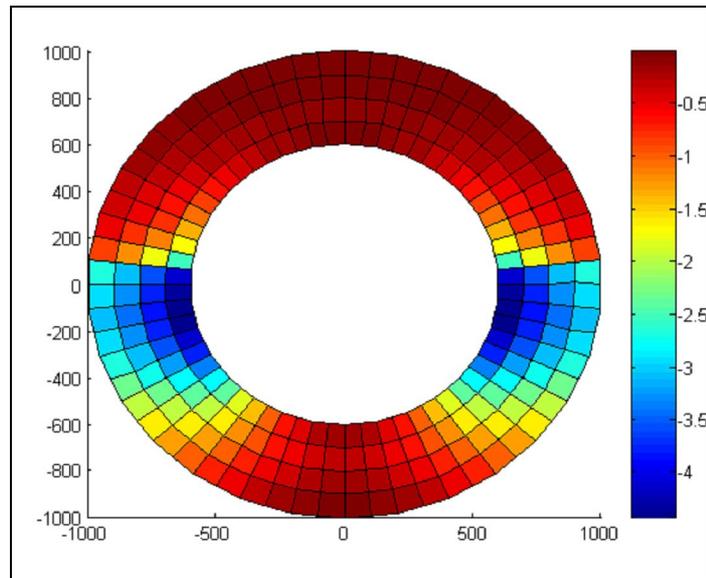


Fig. 5.18: Diagrama de tensiones tangenciales τ_{xz} (MPa) $e=400\text{mm}$; $MV=4$; $V =0.5$.

En el tercer grupo se muestran los resultados para un espesor de 150mm y un brazo $MV=10$

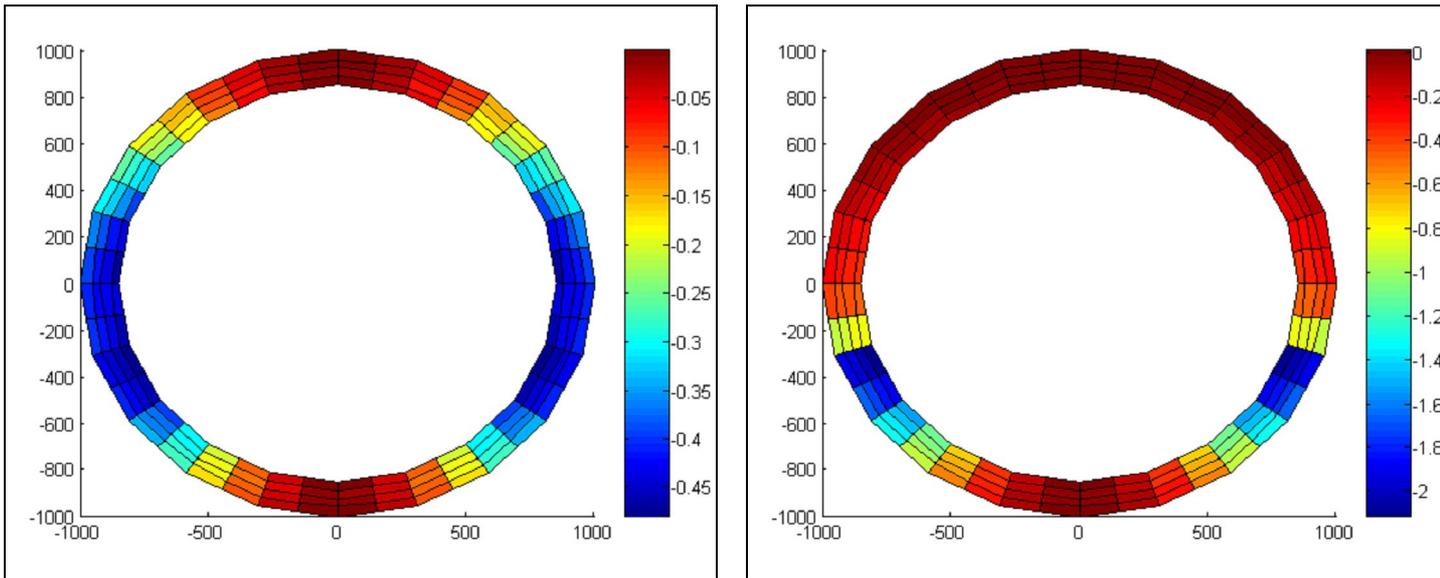


Fig. 5.19: Diagramas de tensiones tangenciales τ_{xz} (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=10$; $V=0.1$ (izda.), 0.3 (dcha.).

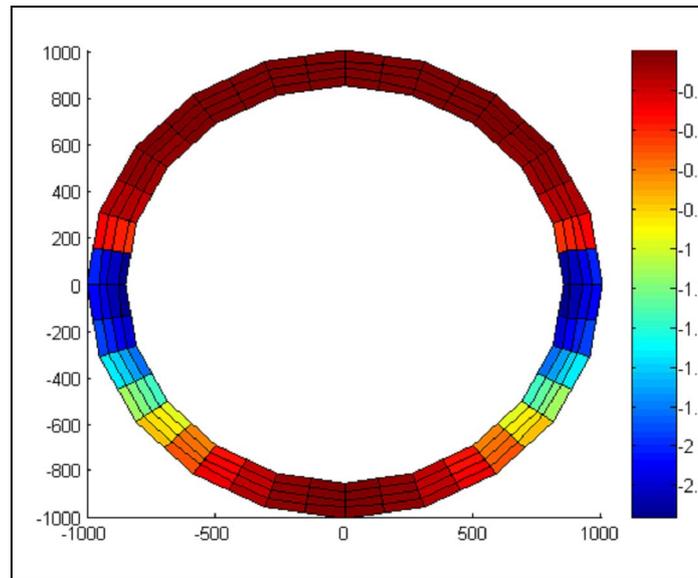


Fig. 5.20: Diagrama de tensiones tangenciales τ_{xz} (MPa) $e=150\text{mm}$; $MV=10$; $V=0.5$.

Según la teoría de resistencia de los materiales el módulo de la tensión cortante en cada sección para un material elástico y lineal vale:

$$\tau = \frac{V \cdot \sin \vartheta}{\pi \cdot e \cdot R} \quad (5.4)$$

Donde el origen de ϑ es un eje vertical ascendente, de manera que vale 90° y 270° en los puntos correspondientes con el eje horizontal. De forma que en los puntos de intersección del cortante aplicado con la sección las tensiones son nulas, mientras que en los puntos de intersección con un eje horizontal el

módulo de la tensión cortante es máximo, y coincide con el valor de la tensión tangencial τ_{xz} .

Efectivamente, los gráficos corroboran que la distribución de tensiones tangenciales verticales es de este tipo.

Cuando el axil es pequeño el punto de máximas tensiones se encuentra aproximadamente en el punto medio entre el centro de gravedad y la fibra inferior, posición que aproximadamente coincide con el eje neutro.

Como el hormigón fisurado no resiste el valor máximo de las tensiones desciende, al igual que la posición del eje neutro, acercándose al bloque de compresiones.

A medida que aumenta el axil asciende el punto de máximas tensiones, ya que aumenta la profundidad del bloque de compresiones. Nótese que para el caso de $\nu = 0.5$ se sitúa prácticamente en el baricentro de la sección.

Si se comparan dos gráficos análogos pero con brazos distintos se observa que la forma es en esencia la misma, pero los valores son menores. De hecho, la relación entre ambos valores es aproximadamente igual a la relación entre los dos brazos, porque las tensiones tangenciales son directamente proporcionales al cortante.

En la sección de 400mm de espesor se puede apreciar de nuevo la variación de las tensiones a lo largo de la pared. Las tensiones tangenciales son mayores en la zona interior, debido probablemente al confinamiento lateral.

5.5. Diagramas de interacción

A continuación se muestran los dos grupos de diagramas de interacción flector adimensional-cortante adimensional-axil adimensional para cada espesor.

5.5.1. Diagramas adimensionales de interacción Flexión-Cortante

En el eje de abscisas se representa el momento flector adimensional (μ), y en el de ordenadas el esfuerzo cortante adimensional (τ). En cada gráfico aparecen cinco curvas: una para cada axil adimensional.

Cabe destacar que las diversas normativas no especifican una formulación explícita para sección tubular, por lo que no se comparan estos gráficos con los que derivan de las diversas instrucciones (como en el capítulo 4).

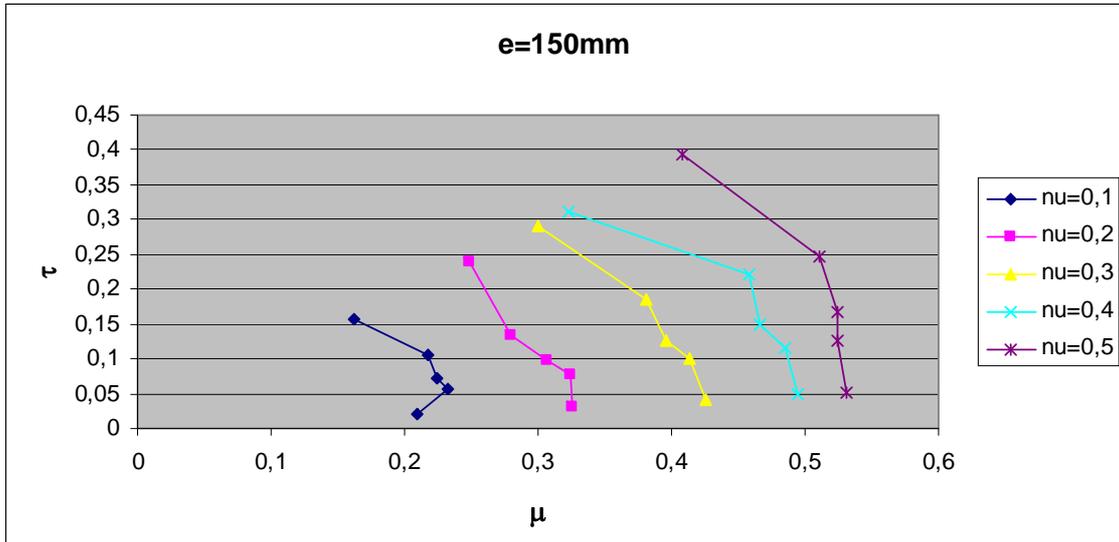


Fig. 5.21: Diagrama Momento adimensional-Cortante adimensional; e=150mm

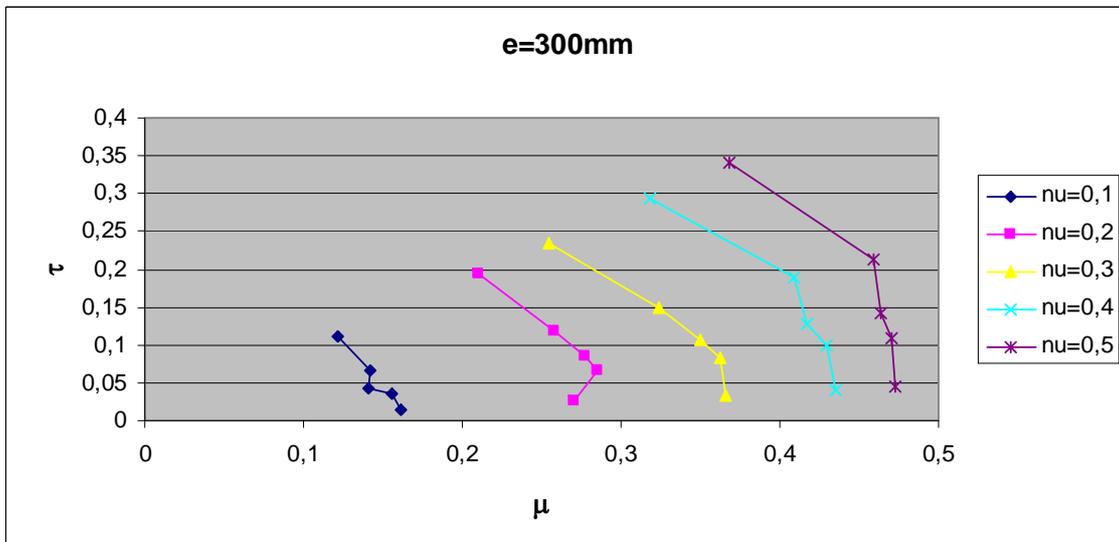


Fig. 5.22: Diagrama Momento adimensional-Cortante adimensional; e=300mm

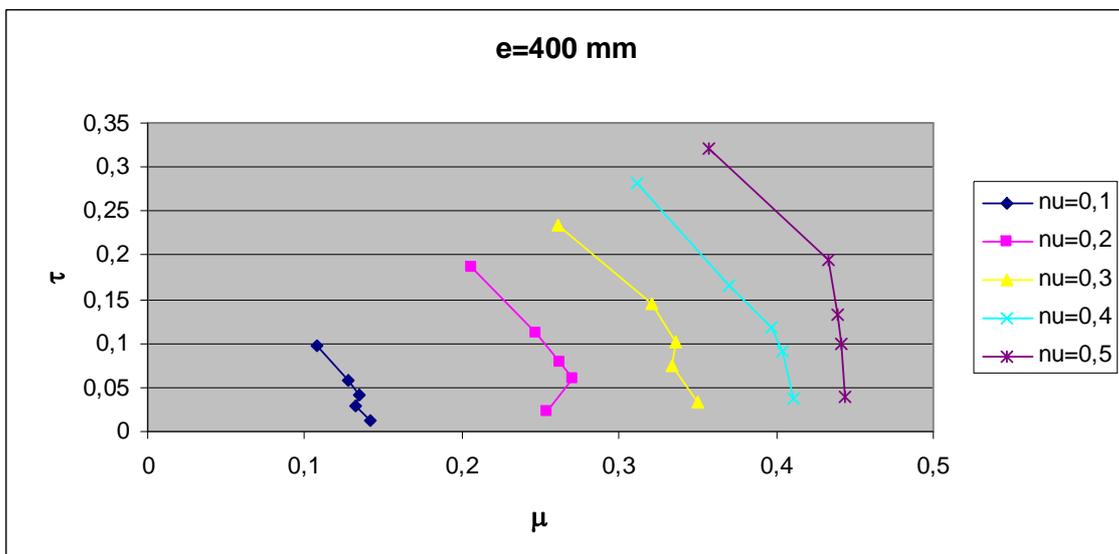


Fig. 5.23: Diagrama Momento adimensional-Cortante adimensional; e=400mm

Los cinco puntos que forman cada curva corresponden a los cinco brazos mecánicos. Para todos los axiles estudiados los brazos son los mismos; esto se traduce en que los puntos con distinto axil pero con el mismo brazo forman rectas en estos diagramas de pendiente igual al inverso del brazo mecánico. En todas las curvas, y para cada valor de ν , los puntos con mayor cortante corresponden al brazo de una vez el diámetro (2000mm), y los puntos con menor cortante corresponden al brazo de diez veces el diámetro (20000mm).

Para los espesores de 300 y 400mm se observan unas tendencias similares:

i) La curva correspondiente a $\nu=0,1$ es algo diversa al resto, se observa un mínimo de flector adimensional para los brazos de 3·D y 4·D en los espesores de 300 y 400mm respectivamente. Es decir, el flector aumenta a medida que aumenta el brazo hasta que cae en el punto que se acaba de comentar, y a continuación sigue aumentando hasta el brazo de 10·D. En principio ese pico es algo extraño, pero hay que tener en cuenta que en esa curva el estado de compresiones que se introduce en la sección es pequeño, por lo que es más difícil que TINSA converja hasta los esfuerzos de agotamiento de la sección.

ii) La curva correspondiente a $\nu=0,2$ es prácticamente idéntica para los dos espesores, éste es el único caso en el que se observa un máximo claro del flector adimensional, que tiene lugar para un brazo igual a 4·D. Hasta este punto el flector va aumentando a medida que aumenta también el brazo, se llega al máximo y a partir de allí cae su valor hasta el punto correspondiente con $MV=10\cdot D$.

iii) En las sucesivas curvas correspondientes a $\nu=0,3$; $\nu=0,4$; $\nu=0,5$; aparece un primer tramo, en el que el flector aumenta al aumentar el brazo, como sucedía con las otras. Se observa a continuación un cambio de tendencia, una segunda rama en la que el flector permanece prácticamente constante hasta llegar al punto de mayor brazo, es decir, la curva es vertical en aquel tramo. Parece intuirse que el punto en el que aparece el cambio de tendencia corresponde a un brazo menor según va aumentando el axil. Lo que se traduce en que la primera rama en la que aumenta el flector es cada vez más corta a medida que aumenta el axil adimensional.

En ninguno de estos tres últimos casos se observa un pico claro de máximo de flector, como sucedía para la curva de $\nu=0,2$.

Esto se puede interpretar de la siguiente manera: el hecho de que en la curva de $\nu=0,3$ no tenga lugar una caída del flector en el brazo mayor y en la de $\nu=0,2$ sí puede ser debido a que en la segunda la sección agota por excesiva tracción en las armaduras, mientras que en la primera se produce el fallo por compresiones en el hormigón.

El hecho de que el punto de cambio de tendencia se dé para brazos más bajos a medida que aumenta el axil puede ser debido a que el agotamiento de la sección se produce al alcanzarse la resistencia última del hormigón en la fibra más comprimida debido a que predominan los efectos de axil sobre los de

flexión, por esto, aunque aumente el brazo, prácticamente no aumenta el momento.

En el caso del espesor de 150mm parece que la tendencia de las curvas no sea tan clara como en los otros dos casos. Para la curva correspondiente a $\nu=0,1$ se observa un máximo cuando el brazo es igual a $4 \cdot D$, es decir, se observa que aproximadamente hasta ese punto el flector aumenta con el brazo, y a partir de allí disminuye a medida que éste aumenta. Éste es el único máximo claro que aparece.

Las curvas correspondientes a $\nu=0,2$; $\nu=0,3$; $\nu=0,4$ y $\nu=0,5$ tienen un comportamiento más o menos similar al que tenían las de $\nu=0,3$; $\nu=0,4$ y $\nu=0,5$ para los espesores de 300 y 400mm.

En los gráficos se aprecia también que la distancia entre curvas va disminuyendo a medida que aumenta el axil, a pesar de que éste varíe linealmente.

Esto coincide con la disminución de pendiente que tiene lugar para valores elevados de ν en los gráficos axil adimensional-cortante adimensional que se muestran a continuación.

5.5.2. Diagramas de interacción Axil adimensional-Cortante adimensional

En el eje de abscisas se representa el axil adimensional (ν), y en el de ordenadas el cortante adimensional (τ). De la misma manera que en el capítulo 4, se consideran positivas las compresiones. En cada gráfico aparecen cinco curvas: una para cada brazo MV .

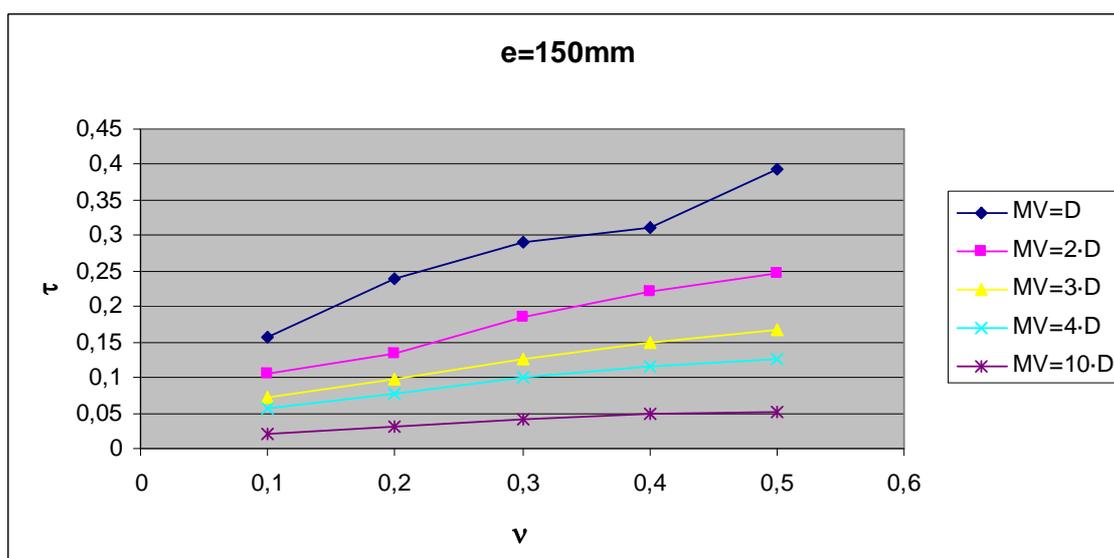


Fig. 5.24: axil adimensional-cortante adimensional; $e=150\text{mm}$

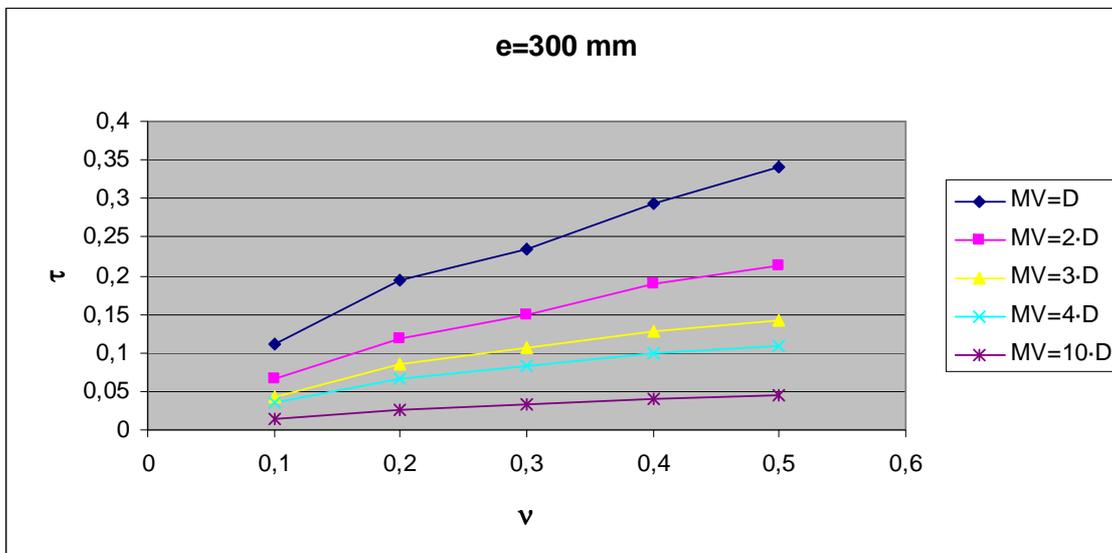


Fig. 5.25: axil adimensional-cortante adimensional; e=300mm

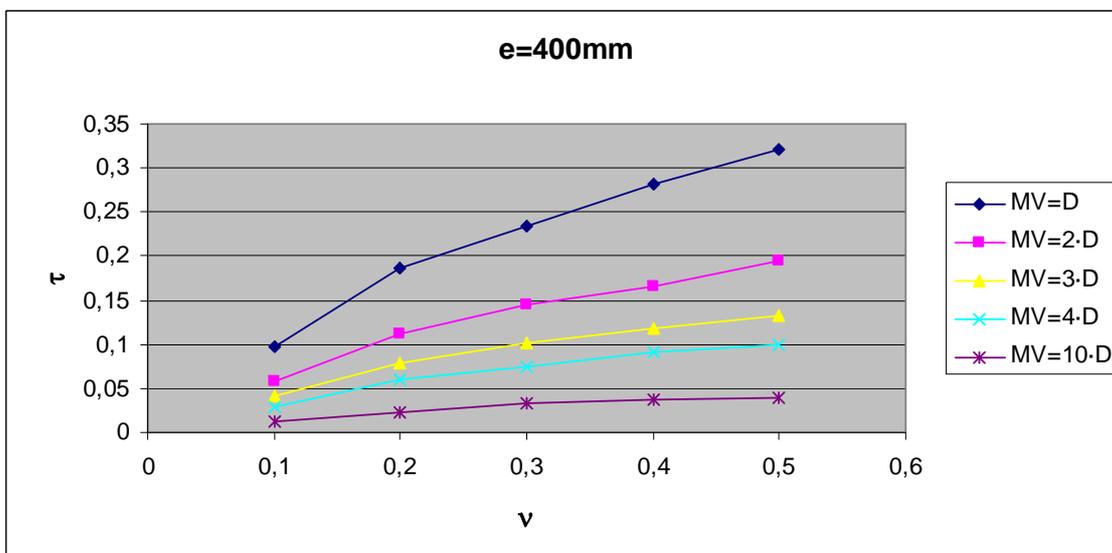


Fig. 5.26: axil adimensional-cortante adimensional; e=400mm

Esto indica que el valor $v=0.5$ no está lejos de ser el que maximiza la respuesta de la sección, es decir el valor del axil adimensional para el que para valores inferiores las compresiones son favorables (ayudan a resistir), mientras que para valores superiores sucede lo contrario.

En los gráficos mostrados en el apartado 4.5.1 se observa que la distancia entre curvas disminuye más para los puntos inferiores (mayor brazo) que para los superiores (brazo menor). Esto coincide con lo que se aprecia en los diagramas axil adimensional-cortante adimensional: para los brazos mayores, es decir, cuando la flexión es más importante la pendiente de las curvas es menor.

El esfuerzo axil contribuye en mayor medida a aumentar la respuesta de la sección cuanto menos peso tiene el esfuerzo de flexión respecto al cortante.

5.6. Análisis de los resultados

- i) La distribución de tensiones tangenciales τ_{xz} depende notablemente de la distribución de tensiones normales en la sección. Es decir, las zonas comprimidas pueden interpretarse como zonas de mayor rigidez de cara a las tensiones tangenciales. Por lo tanto, en las zonas más comprimidas se produce una mayor concentración de tensiones tangenciales. Esto es aplicable tanto a la distribución a lo largo de la altura de la sección como a lo largo del espesor (para una misma cota vertical).
- ii) Con los casos estudiados no se llega todavía a alcanzar el axil que maximiza la respuesta de la sección, todos los campos de compresiones introducidos son favorables.
- iii) En los diagramas adimensionales flexión-cortante mostrados en 5.5.1 se observa como la distancia entre curvas aumenta en menor medida que el axil adimensional, que lo hace linealmente. Esto coincide con un decremento de la pendiente a medida que aumenta el axil en los gráficos axil adimensional-cortante mostrados en 5.5.2.
- iv) Dicha disminución de pendiente es más notoria cuanto más predominantes son los esfuerzos de flexión. Para brazos grandes un incremento del axil contribuye en menor medida a aumentar la respuesta a cortante de la sección.
- v) Para cada axil hay un valor del brazo MV a partir del cual el flector se mantiene prácticamente constante. Este valor corresponde a brazos más pequeños a medida que aumenta el axil.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

6.1. Conclusiones

Las principales conclusiones de esta tesina se pueden resumir en:

1. TINSA, Bairán [2] y [3] es un modelo seccional acoplado y no lineal que mantiene la estructura habitual de los grados de libertad tradicionales (deformaciones generalizadas de las secciones) y los relaciona con los esfuerzos generalizados tradicionales con una matriz de rigidez de la sección. Los resultados obtenidos se ajustan en buena medida a lo predecible por la teoría y a lo que confirma la experimentación mediante ensayos de laboratorio, tal y como se ha mostrado en [2] y [3].

2. Los textos normativos actuales deberían reflejar mejor la realidad de la respuesta a cortante de secciones sometidas a sollicitaciones combinadas de esfuerzos. Por un lado, para sección rectangular las formulaciones existentes quedan del lado de la inseguridad cuando actúan axiles de compresión fuertes y las cuantías de armadura transversal son altas. Por otro lado, la resistencia a esfuerzo cortante de una sección tubular no está contemplada de forma explícita en la actual normativa. Actualmente su dimensionamiento debe realizarse a partir del criterio del ancho mínimo del tercio central de la sección.

3. Un criterio de la vigente EHE-99 [10] es que el brazo mecánico (z) puede tomarse como $0.9d$. A partir del estudio aquí realizado, se ha podido observar que dicho criterio queda del lado de la inseguridad cuando existen axiles fuertes que reducen la zona traccionada de la sección. En esta tesina se ha estudiado una formulación simplificada, en la que el brazo mecánico es una función lineal del esfuerzo axil, para tener en cuenta la reducción de dicho brazo en estos casos. Los resultados obtenidos con TINSA muestran que la formulación propuesta proporciona un ajuste satisfactorio.

4. La limitación de agotamiento por compresión oblicua en el alma que en la actual EHE [10] aparece en el término K que modifica el valor de V_{u1} no es suficiente para axiles de compresión medios-altos, puesto que proporciona resultados demasiado favorables. Parece que la limitación que introduce EC-2 [14] ($\sigma'_{cd} < 0.2f_{cd}$) proporciona resultados más realistas.

5. En secciones rectangulares sometidas a compresión, la resistencia a cortante máxima se obtiene para un axil adimensional del orden de 0.25 a 0.3. Para axiles mayores se observa una reducción del cortante último que es más acusada en hormigones de resistencia normal que en los de alta resistencia. El esfuerzo cortante máximo no aumenta de forma proporcional con la resistencia

a compresión. Consecuentemente, en el modelo de fricción que se emplea en la actual instrucción española, para tener en cuenta la contribución del axil en la resistencia a cortante, se debería reflejar la calidad del hormigón. Una forma de conseguir esto puede ser haciendo depender el coeficiente de fricción (el 0.15 en $0.15\sigma'_{cd}$) de la resistencia a compresión.

6. Para el caso de sección tubular se deberían haber estudiado otros casos con axiles adimensionales de valor superior a 0.5, para apreciar la curva de caída de respuesta a cortante en la que las compresiones son desfavorables. Se aprecia, por lo tanto, el mecanismo diferente al de secciones rectangulares ya que la contribución de la armadura longitudinal a absorber axiles es mayor en el caso de la sección tubular, debido a su distribución. Por otro lado, la armadura longitudinal es menos eficaz en la resistencia a flexión, por tener menos brazo mecánico.

7. La contribución del esfuerzo axil en el incremento de la respuesta a cortante de la sección no es lineal. Es decir, la misma variación de tensiones de compresión produce un mayor incremento del esfuerzo cortante en un campo de compresiones bajas que en uno de compresiones medias o altas. Este efecto es más notorio cuanto más importantes son los efectos de flexión, es decir, cuanto mayor es el valor del brazo M/V. Esto se observa directamente en los gráficos Axil adimensional-Cortante e indirectamente en los gráficos Flexión-Cortante.

8. La distribución de tensiones de cortante en secciones tubulares no es uniforme para una misma cota vertical, obteniéndose mayores tensiones en el radio interno, probablemente debido al confinamiento lateral.

6.2 Recomendaciones para futuros trabajos

Las posibles recomendaciones para futuros estudios y trabajos relacionados con lo que se ha tratado en esta tesina son los siguientes:

- Estudiar, de forma más amplia, el comportamiento resistente a cortante ante esfuerzos de tracción.
- Ampliar el estudio de las secciones tubulares hasta sobrepasar el axil que maximiza el cortante resistido.
- Estudiar, numéricamente, el comportamiento estructural global de las piezas, tomando el modelo TINSA como respuesta de las secciones de una viga, para considerar, entre otras cosas, el efecto de la fisuración a cortante en la deformabilidad del elemento.
- Traducir el modelo a un lenguaje más eficiente como Fortran.
- Ampliar el estudio realizado teniendo en cuenta el momento torsor, tipo de esfuerzo que actualmente TINSA es capaz de considerar
- Realizar un estudio específico de los efectos de esfuerzos y deformaciones axiales de tracción en la resistencia a cortante de secciones de hormigón armado.
- Contrastar los resultados obtenidos para secciones tubulares con ensayos experimentales realizados en vigas de la misma sección.
- Efectuar estudios de otras secciones transversales, tales como secciones en T.
- Estudiar la resistencia a cortante de elementos pretensados.

REFERENCIAS

- [1] **American Concrete Institute (ACI), comité 318.** *ACI Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-05)*. 2005
- [2] **Bairán, J.M.** *A nonlinear totally-coupled model for Rc sections under 3D bending, shear, torsion and axial loading*. Tesis doctoral de la ETSECCPB-UPC. Dirección de la tesis: Marí, A.
- [3] **Bairán, J.M., Marí, A.** *Non-linear interaction of normal and tangential internal forces on 3D RC beam-column structural systems*. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, Ponencia núm. 840, agosto de 2004.
- [4] **Bardet, J.P.** *Lode Dependences Pressure-Sensitive Material for Isotropic Elastoplastic*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, pág 498-506, septiembre de 1990.
- [5] **Beeby, A. W., Narayanan, R.S.** *Designer's Handbook to Eurocode 2 Part 1.1: Design of concrete structures*. Thomas Telford Services Ltd, Londres, 1995.
- [6] **CEB-FIP Comité euro-international du béton.** *Model Code 1990: design code*. Thomas Telford, Londres, 1993.
- [7] **Cervenka, V.** *Constitutive model for cracked reinforced concrete*. *ACI Structural Journal*, Vol 82, núm 6, pág 877-892, 1985.
- [8] **Chen, W.F.** *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill Book Co., Nueva York (EEUU), 1982.
- [9] **Cladera, A.** *Shear design of reinforced high-strength concrete concrete beams*. Tesis Doctoral de la ETSECCPB-UPC, 2003. Dirección de la tesis: Marí, A.
- [10] **Comisión Permanente del Hormigón (1998)** *Instrucción de Hormigón Estructural (EHE)*. Ministerio de Fomento, Centro de Publicaciones, Madrid, 2002.
- [11] **Comisión Permanente del Hormigón (2003)** *Instrucción para el proyecto y la ejecución de fijos unidireccionales de hormigón estructural realizados con elementos prefabricados (EFHE)*. Ministerio de Fomento, Centro de Publicaciones, Madrid, 2003.

- [12] **Comisión Permanente del Hormigón (2007)** *Documento 0 Instrucción de Hormigón Estructural (EHE)*. Ministerio de Fomento, Centro de Publicaciones, Madrid.
- [13] **Computers and Structures, CA.** *SAP2000 Nonlinear Version. Integrated Software for Structural Analysis & Design*. Inc. CSI, Berkeley, U.S.A. 1999.
- [14] **European Comitee for Standarization.** *Eurocódigo EC-2: Proyecto de Estructuras de Hormigón, Parte 1-1: Prescripciones generales y prescripciones para edificación*. CEDEX, Madrid, 1991.
- [15] **Gastbled, O.J., May, I.M.** Fracture Mechanics Model Applied to Shear Failure of Reinforced Concrete Beams without Stirrups. *ACI Structural Journal*, V. 98, Núm 2, pág. 184-190, marzo-abril de 2001.
- [16] **Integrated Structural Software, Inc.** *ROBOT Millenium. User's Manual*. Palo Alto, C.A., 2000.
- [17] **Leonhardt, F.** *Estructuras de Hormigón Armado* Librería el Ateneo Editorial, 1990. Tomos I y III.
- [18] **Marí, A., Cladera, A.** ELU de Cortante en vigas: Aproximación Histórica y Tratamiento Experimental de la EHE. *Revista nº 221 Hormigón y Acero*, 2001.
- [19] **Oliver, X., Agelet, C.** *Mecánica de Medios Continuos para ingenieros*. Edicions UPC, 2000.
- [20] **Park, R., Paulay, T.** *Estructuras de Concreto Reforzado*. Editorial Limusa, México D.F., 1979.
- [21] **Pozo, F., Surrido, A. et al.** *La EHE explicada por sus autores*. Leynfor Siglo XXI, Madrid, agosto de 2000.
- [22] **Rahal, K.N., Collins, M.P.** Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete Beams. *ACI Structural Journal*, V. 100, Núm 2, pág. 157-165, marzo-abril de 2003.
- [23] **Vecchio, F.J., Collins, M.P.** Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using the Modified Compression Field Theory, *ACI Structural Journal*, Vol. 85, núm. 4, pág. 258-268, 1988.
- [24] **Vecchio, F.J., Collins, M.P.** *The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*. Journal of the American Concrete Institute, V. 83, núm. 2, pág. 219-231, 1986.

- [25] **Vecchio, F. J., Selby, R.G.** *Toward Compression-Field Analysis of Reinforced Concrete Solids*. Journal of Structural Engineering, ASCE, V. 117, Núm. 6, pág. 1740-1758, junio de 1991.